S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 210–219 (2014)

УДК 510.64

MSC 03B20, 03B50

ОБОБЩЕННЫЕ ВК-ШКАЛЫ

Е.И. ЛАТКИН

Abstract. We define general **BK**-frames with two different approaches. We prove that our semantic of general **BK**-frames is as strong as the algebraic semantic of twist-structures. Then we formulate the p-morphism theorem.

Keywords: BK-frame, belnapian modal logic, twist-structure, modal algebra, general frame, p-morphism.

1. Введение

В данной работе рассматриваются нормальные расширения логики **BK**, белнаповского варианта наименьшей нормальной модальной логики **K**. В работе [1] с помощью твист-структур над модальными алгебрами была описана алгебраическая семантика для этой логики, а также семантика Крипке. Следует заметить, что в той же работе [1] описывается и семантика для логики **BS4**, белнаповского варианта модальной логики **S4**. Разница между семантиками логик **BK** и **BS4** заключается в том, что твист-структуры для **BS4** берутся над частным случаем модальных алгебр — топобулевыми алгебрами. Там же описывается связь между **BS4** и паранепротиворечивой логикой Нельсона **N4**, в частности устанавливается то, что **N4** точно вкладывается в **BS4**. В работе [2] было доказано, что алгебраическая семантика для логики **N4** описывается твист-структурами над алгебрами Гейтинга. Ранее автором были рассмотрены варианты семантик для логик Нельсона, в частности, был получен аналог семантики твист-структур в терминах шкал Крипке [3].

Latkin, E.I., General BK-frames.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00168-а).

Поступила 13 июня 2013 г., опубликована 12 марта 2014 г.

Что касается общего направления исследования, то автор ставит целью перенести технику канонических формул, описанную в [4] для нормальных расширений модальной логики **K4**, на случай логики белнаповского варианта модальной логики, и доказать, что каждое конечно аксиоматизируемое расширение логики **BK** можно аксиоматизировать с помощью канонических формул. Канонические формулы это — формулы специального вида, которые ассоциируются с конечными шкалами, являющимися контр-моделями для данных формул. Канонические формулы позволят аксиоматизировать все логики из $\varepsilon\mathbf{BK}$ — решетки логик-расширений **BK** с сохранением *modus ponens* и правил монотонности для модальностей. Кроме того, предполагается изучить связи между расширениями паранепротиворечивой логики Нельсона и белнаповскими модальными логиками, а также найти модальные напарники для расширений логики Нельсона в классе расширений логики **BK**, исследовать перенос свойств с модальных напарников на расширения логики Нельсона.

Данная работа будет посвящена обобщённым **BK**-шкалам и их свойствам. Ведь для того, чтобы перенести технику канонических формул из [4] на логику **BK** необходим аналог обобщенных модальных шкал для этой логики. Именно оперирование с обобщенными шкалами позволило Захарьящеву впервые построить канонические формулы для логики **S4**. Использование обобщённых шкал обуславливается тем, что реляционная семантика такого вида во многом не уступает алгебраической семантике.

Следуя Захарьящеву, определим аналог обобщенной модальной шкалы для логики **BK** как кортеж $\langle W, R, \mathbf{P}\rangle$, где $\langle W, R\rangle$ — обычная шкала, а $\mathbf{P}$ — это особое множество допустимых означиваний. Модель, построенная на такой шкале, имеет ограничение на множество означиваний. Обобщенная модальная шкала определяет целый класс моделей, в общем случае, отличный от всех возможных моделей Крипке шкалы $\langle W, R\rangle$. Основное отличие семантик Крипке логик **BK** и **K4** заключается в означиваниях. Для логики **BK** в модели учитывается верифицируемость и фальсифицируемость формулы, означивание состоит из двух компонент: позитивной и негативной [1]. Поэтому, для корректного обобщения на случай логики **BK**, множество допустимых значений для означиваний должно состоять из пар: $\mathbf{P} \subseteq 2^W \times 2^W$. С множеством допустимых пар означиваний сложнее работать.

Ранее автором был рассмотрен способ определения обобщенных шкал для логик Нельсона, в частности, был получен аналог семантики твист-структур в терминах шкал Крипке [3]. Кроме того, было показано, что возможны два равноценных между собой подхода к определению обобщённых шкал и доказаны теоремы о p-морфизме [5]. Более выразительным подходом оказался тот, что использовал факты из работы [2] об инвариантах у твист-структур над гейтинговыми алгебрами.

Работа [6] содержит все необходимые сведения об инвариантах твист-структур над модальными алгебрами, что позволяет немедленно приступить к описанию основного инструмента нашего исследования — обобщённых **BK**-шкал в форме $\langle W, R, P, F, I\rangle$, где $\langle W, R, P\rangle$ будет обычной обобщённой модальной шкалой из [4], $P \subseteq 2^W$, а F, I удовлетворяют специальным условиям. Этот результат в сумме с техникой канонических формул для расширений логик **K4** и **Int**, описанной в [4], планируется использовать для построения канонических формул логики **BK**.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Под логикой в модальном языке $\mathcal{L}^m = \{\vee, \wedge, \to, \bot, \sim, \Box, \Diamond\}$ будем понимать множество формул этого языка, замкнутое относительно применения правил подстановки и *modus ponens*. Если помимо этого логика замкнута относительно правил монотонности для модальностей, то такая логика называется *нормальной*. В схематической записи эти правила имеют вид:

$$\frac{\varphi(p_1,\ldots,p_n)}{\varphi(\psi_1,\ldots,\psi_n)}, \quad \frac{\varphi \quad \varphi\to\psi}{\psi}, \quad \frac{\varphi\to\psi}{\Box\varphi\to\Box\psi}, \quad \frac{\varphi\to\psi}{\Diamond\varphi\to\Diamond\psi},$$

где $\varphi,\psi,\psi_1,\ldots,\psi_n$ — произвольные формулы модального языка, а $p_1,\ldots,p_n$ — пропозициональные переменные.

Обозначим через $For(\mathcal{L}^m)$ множество всех формул языка $\mathcal{L}^m$.

Далее, если не оговорено противное, будут использованы сокращения записи: $\varphi \to \bot$ обозначим как $\neg\varphi$; $(\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi)$ — как $\varphi\leftrightarrow\psi$ и $(\varphi\leftrightarrow\psi)\wedge(\sim\varphi\leftrightarrow\sim\psi)$ — как $\varphi\leftrightarrows\psi$.

Определение 1. [1] *Логика* **BK** *— это наименьшая нормальная логика в языке $\mathcal{L}^m$, содержащая следующие аксиомы:*

(1) *аксиомы классической пропозициональной логики языка $\{\vee,\wedge,\to,\bot\}$;*
(2) $\sim\sim p\leftrightarrow p$, $\sim(p\wedge q)\leftrightarrow(\sim p\vee\sim q)$, $\sim(p\vee q)\leftrightarrow(\sim p\wedge\sim q)$, $\sim(p\to q)\leftrightarrow(p\wedge\sim q)$, $\sim\bot$;
(3) $(\Box p\wedge\Box q)\to\Box(p\wedge q)$, $\Box(p\to p)$;
(4) $\neg\Box p\leftrightarrow\Diamond\neg p$, $\neg\Diamond p\leftrightarrow\Box\neg p$, $\Box p\leftrightarrows\sim\Diamond\sim p$, $\Diamond p\leftrightarrows\sim\Box\sim p$.

Приведём основные сведения о семантике твист-структур для логики **BK**, следуя [1].

Определение 2. *Алгебра $\mathcal{A}=\langle A,\vee,\wedge,\to,\neg,\Box\rangle$ называется* модальной алгеброй, *если $\langle A,\vee,\wedge,\to\rangle$ является булевой алгеброй и операция $\Box$ удовлетворяет для всех $a,b\in A$ следующим тождествам: a) $\Box(a\wedge b)=\Box a\wedge\Box b$; b) $\Box 1=1$, где $1=a\vee\neg a$, это — наибольший элемент булевой алгебры.*

Замечание. Модальной алгебре можно дать эквивалентное определение в терминах модальности $\Diamond$, связанной с $\Box$ как $\neg\Diamond a=\Box\neg a$ для любого $a\in A$. Соответствующие условия определения следует заменить на: a) $\Diamond(a\vee b)=\Diamond a\vee\Diamond b$; b) $\Diamond 0=0$, где $0=a\wedge\neg a$ — наименьший элемент.

Определение 3. [6] *Пусть $\mathcal{A}=\langle A,\vee,\wedge,\to,\neg,\Box\rangle$ — модальная алгебра.*

- *Алгебра $\mathcal{A}^{\bowtie}=\langle A\times A,\vee,\wedge,\to,\bot,\sim,\Box,\Diamond\rangle$ с операциями*
  $(a,b)\vee(c,d)=(a\vee c,b\wedge d)$, $(a,b)\wedge(c,d)=(a\wedge c,b\vee d)$,
  $(a,b)\to(c,d)=(a\to c,a\wedge d)$, $\bot=(0,1)$, $\sim(a,b)=(b,a)$,
  $\Box(a,b)=(\Box a,\Diamond b)$, $\Diamond(a,b)=(\Diamond a,\Box b)$
  называется полной твист-структурой над $\mathcal{A}$.
- *Алгебра $\mathcal{B}$ называется* твист-структурой над $\mathcal{A}$, *если $\mathcal{B}$ является подалгеброй $\mathcal{A}^{\bowtie}$ и $\pi_1(\mathcal{B})=\mathcal{A}$, где π_1 — проекция прямого произведения на первую координату.*
- *Семейство всех твист-структур над $\mathcal{A}$ обозначается как $S^{\bowtie}(\mathcal{A})$.*

Пусть $\mathcal{B}$ — твист-структура над модальной алгеброй. Для множества формул Γ и формулы φ отношение $\Gamma\models_{\mathcal{B}}\varphi$ означает, что для любого $\mathcal{B}$-означивания v выполняется: если $\pi_1 v(\psi)=1$ для всех $\psi\in\Gamma$, то $\pi_1 v(\varphi)=1$. Пишем $\Gamma\models^{\bowtie}\varphi$, если $\Gamma\models_{\mathcal{B}}\varphi$ для всех твист-структур $\mathcal{B}$ над модальными алгебрами.

Запись $\Gamma \vdash^*_{\mathbf{BK}} \varphi$ означает, что φ может быть выведена из элементов Γ и **BK** путём применения *modus ponens* и правил монотонности для двух модальностей. Запись без звёздочки $\Gamma \vdash_{\mathbf{BK}} \varphi$ означает, что φ может быть выведена из элементов Γ и **BK** путём применения *modus ponens*.

Имеет место теорема полноты:

Теорема 1. [1] *Пусть Γ — множество формул нетривиальное относительно **BK**, а φ — формула. Верна эквивалентность:*

$$\Gamma \vdash^*_{\mathbf{BK}} \varphi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models^{\bowtie} \varphi.$$

Напомним необходимые сведения об инвариантах твист-структур [6]:

Определение 4. *Для модальной алгебры $\mathcal{A} = \langle A, \vee, \wedge, \neg, \Box\rangle$ непустое подмножество $F \subseteq |\mathcal{A}|$ называется $\Box$-фильтром на $\mathcal{A}$, если это — решеточный фильтр на $\langle A, \vee, \wedge\rangle$, и $\Box a \in F$ при $a \in F$.*

Непустое подмножество $I \subseteq |\mathcal{A}|$ называется $\Diamond$-идеалом на $\mathcal{A}$, если это — решеточный идеал на $\langle A, \vee, \wedge\rangle$, и $\neg\Box\neg a \in I$ при $a \in I$.

Пусть $\mathcal{A}$ — модальная алгебра и $\mathcal{B} \in S^{\bowtie}(\mathcal{A})$. Сопоставим твист-структуре $\mathcal{B}$ два подмножества:

$$\nabla(\mathcal{B}) := \{a \vee b \mid (a, b) \in \mathcal{B}\} \;\text{ и }\; \Delta(\mathcal{B}) := \{a \wedge b \mid (a, b) \in \mathcal{B}\}.$$

Существует эквивалентное определение $\nabla(\mathcal{B})$ и $\Delta(\mathcal{B})$.

Предложение 1. [6] *Для любой модальной алгебры $\mathcal{A}$ и твист-структуры $\mathcal{B} \in S^{\bowtie}(\mathcal{A})$, верно: $\nabla(\mathcal{B}) = \{a \mid (a, 0) \in \mathcal{B}\}$ и $\Delta(\mathcal{B}) = \{a \mid (1, a) \in \mathcal{B}\}$.*

Следствие 1. [6] *Для каждой модальной алгебры $\mathcal{A}$ и твист-структуры $\mathcal{B} \in S^{\bowtie}(\mathcal{A})$, множество $\nabla(\mathcal{B})$ является $\Box$-фильтром на $\mathcal{A}$ и $\Delta(\mathcal{B})$ является $\Diamond$-идеалом на $\mathcal{A}$.*

Любая твист-структура $\mathcal{B} \in S^{\bowtie}(\mathcal{A})$ полностью определяется образующей её модальной алгеброй $\mathcal{A}$ и двумя инвариантами $\nabla(\mathcal{B})$ и $\Delta(\mathcal{B})$, являющимися $\Box$-фильтром на $\mathcal{A}$ и $\Diamond$-идеалом на $\mathcal{A}$, соответственно. Более того, каждая пара из $\Box$-фильтра и $\Diamond$-идеала будет определять твист-структуру над $\mathcal{A}$.

Предложение 2. [6] *Пусть $\mathcal{A}$ — модальная алгебра, ∇ — $\Box$-фильтр над $\mathcal{A}$, и Δ — $\Diamond$-идеал над $\mathcal{A}$. Существует твист-структура $\mathcal{B} \in S^{\bowtie}(\mathcal{A})$ с образующим множеством $|\mathcal{B}| = \{(a, b) \in |\mathcal{A}|^2 \mid a \vee b \in \nabla,\ a \wedge b \in \Delta\}$. Более того, $\nabla(\mathcal{B}) = \nabla$ и $\Delta(\mathcal{B}) = \Delta$.*

3. РЕЛЯЦИОННАЯ СЕМАНТИКА ДЛЯ ЛОГИКИ BK

Шкалой Крипке называется пара $\langle W, R\rangle$, состоящая из W — непустого множества, так называемых *миров*, и отношения $R \subseteq W^2$, называемого *отношением достижимости.*

Определим **BK**-модель как кортеж $\mu = \langle W, R, v^+, v^-\rangle$, где $\langle W, R\rangle$ — шкала Крипке, и $v^+, v^- : Prop \to 2^W$ — два *означивания.*

Отношения *верифицируемости* и *фальсифицируемости* для формул нашего языка зададим так: пусть $p \in Prop$; $\varphi, \psi \in For(\mathcal{L}^m)$, $x \in W$, тогда

(1) $\mu \models^+_x p \Leftrightarrow x \in v^+(p)$; $\mu \models^-_x p \Leftrightarrow x \in v^-(p)$;

(2) $\mu \models^+_x \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \mu \models^+_x \varphi$ и $\mu \models^+_x \psi$;
$\mu \models^-_x \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \mu \models^-_x \varphi$ или $\mu \models^-_x \psi$;

(3) $\mu \models_x^+ \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mu \models_x^+ \varphi$ или $\mu \models_x^+ \psi$;
$\mu \models_x^- \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mu \models_x^- \varphi$ и $\mu \models_x^- \psi$;
(4) $\mu \models_x^+ \varphi \to \psi \Leftrightarrow (\mu \models_x^+ \varphi \Rightarrow \mu \models_x^+ \psi)$;
$\mu \models_x^- \varphi \to \psi \Leftrightarrow \mu \models_x^+ \varphi$ и $\mu \models_x^- \psi$;
(5) $\mu \models_x^+ \sim \varphi \Leftrightarrow \mu \models_x^- \varphi$; $\mu \models_x^- \sim \varphi \Leftrightarrow \mu \models_x^+ \varphi$;
(6) $\mu \not\models_x^+ \bot$; $\mu \models_x^- \bot$;
(7) $\mu \models_x^+ \Box\varphi \Leftrightarrow \forall y(xRy \Rightarrow \mu \models_y^+ \varphi)$;
$\mu \models_x^- \Box\varphi \Leftrightarrow \exists y(xRy$ и $\mu \models_y^- \varphi)$;
(8) $\mu \models_x^+ \Diamond\varphi \Leftrightarrow \exists y(xRy$ и $\mu \models_y^+ \varphi)$;
$\mu \models_x^- \Diamond\varphi \Leftrightarrow \forall y(xRy \Rightarrow \mu \models_y^- \varphi)$.

Далее будет удобно пользоваться обозначениями

$$\mu^+(\varphi) := \{x \in W \mid \mu \models_x^+ \varphi\}, \quad \mu^-(\varphi) := \{x \in W \mid \mu \models_x^- \varphi\}.$$

Истинность на данной модели определяется так: $\mu \models \varphi \Leftrightarrow \mu^+(\varphi) = W$.

Запись $\Gamma \models_{\mathbf{BK}} \varphi$ означает, что для каждой **BK**-модели μ и каждого мира x из этой модели μ, верно: если $\mu \models_x^+ \Diamond\psi$ для всех $\psi \in \Gamma$, то $\mu \models_x^+ \Diamond\varphi$.

Теорема 2. [1] *Пусть Γ — множество формул нетривиальное относительно* **BK***, а φ — формула. Верна эквивалентность:*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{BK}} \varphi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models_{\mathbf{BK}} \varphi.$$

Для дальнейшей работы, нам понадобятся определение и некоторые сведения касательно обобщённых модальных шкал. В соответствии с [4], тройка $\langle W, R, P\rangle$ называется *обобщенной модальной шкалой*, где $\langle W, R\rangle$ — шкала Крипке, $P \subseteq 2^W$ — это, так называемое, *множество допустимых означиваний*, $\emptyset \in P$, и P замкнуто относительно операций $\cup, \cap, \supset, \Box$, определённых соответственно как объединение и пересечение множеств, $X \supset Y := (W \setminus X) \cup Y$, $\Box X := \{x \in W \mid \forall y \in W\ (xRy \Rightarrow y \in X)\}$. В тексте будет встречаться ещё и операция $\Diamond X := \{x \in W \mid \exists y \in X\ (xRy)\}$, несложно показать, что эта операция может быть выражена через $\supset$ и $\Box$ следующим образом: $\Diamond X = \Box(X \supset \emptyset) \supset \emptyset$.

Алгебру $\langle P, \cup, \cap, \supset, \Box, \emptyset\rangle$ будем называть *дуальной алгеброй* [4] обобщённой модальной шкалы $\mathcal{F} = \langle W, R, P\rangle$ и обозначать как $\mathcal{F}^+$. Дуальная алгебра вида $\langle 2^W, \cup, \cap, \supset, \Box, \emptyset\rangle$ будет обозначаться как $\langle W, R\rangle^+$.

Предложение 3. [4] *Дуальная алгебра обобщённой модальной шкалы является модальной алгеброй.*

Для произвольной модальной алгебры $\mathcal{U} = \langle A, \vee, \wedge, \to, \bot, \Box\rangle$ определим:
$W_{\mathcal{U}}$ — это стоуновское пространство дистрибутивной решётки $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ (множество всех простых фильтров);
$f_{\mathcal{U}}$ — стоуновский изоморфизм (отображение из A в $2^{W_{\mathcal{U}}}$ такое, что $f_{\mathcal{U}} = \{\nabla \in W_{\mathcal{U}} \mid a \in \nabla\}$);
$R_{\mathcal{U}}$ — отношение на $W_{\mathcal{U}}$ такое, что для любых $\nabla_1, \nabla_2 \in W_{\mathcal{U}}$ верно $\nabla_1 R_{\mathcal{U}} \nabla_2$ тогда и только тогда, когда $\forall x \in A\ (\Box x \in \nabla_1 \Rightarrow \Box x \in \nabla_2)$.

Множество $P_{\mathcal{U}} := \{f_{\mathcal{U}}(a) \mid a \in A\}$ будет замкнуто относительно операций $\cup, \cap, \supset, \Box$, и поэтому тройка $\mathcal{U}_+ := \langle W_{\mathcal{U}}, R_{\mathcal{U}}, P_{\mathcal{U}}\rangle$ будет обобщенной модальной шкалой [4]. Это $\mathcal{U}_+$ называется *дуальной шкалой* $\mathcal{U}$.

Известно [4] следующее представление модальных алгебр:

Теорема 3. *(представление Йонссона-Тарского) Каждая модальная алгебра $\mathcal{U}$ изоморфна бидуальной алгебре $(\mathcal{U}_+)^+$.*

Следствие 2. *Каждая модальная алгебра $\mathcal{U}$ изоморфна подалгебре алгебры $\langle W_\mathcal{U}, R_\mathcal{U}\rangle^+$.*

Попытаемся ввести понятие обобщенной **BK**-шкалы аналогично определению обобщенных модальных шкал из [4], и обобщённых шкал Крипке (I) из [3]. Далее будет вставлена пометка (I) для возможности определить обобщенную **BK**-шкалу иным способом (см. далее, обобщенная **BK**-шкала (II)) и сравнить оба подхода, избегая путаницы.

Определение 5. Обобщенная **BK**-шкала (I) *это кортеж $\langle W, R, \mathbf{P}\rangle$, где $\langle W, R\rangle$ — шкала Крипке, $\mathbf{P} \subseteq 2^W \times 2^W$, $(\emptyset, W) \in \mathbf{P}$, и $\mathbf{P}$ замкнуто относительно операций $\wedge, \vee, \to, \sim, \Box, \Diamond$, определенных для произвольных $X = (X_1, X_2)$ и $Y = (Y_1, Y_2)$ из $\mathbf{P}$ следующим образом:*
$X \wedge Y := (X_1 \cap Y_1, X_2 \cup Y_2)$, $\quad X \vee Y := (X_1 \cup Y_1, X_2 \cap Y_2)$, $\quad \sim X := (X_2, X_1)$,
$\Box X = (\Box X_1, \Diamond X_2)$, $\quad X \to Y := (X_1 \supset Y_1, X_1 \cap Y_2)$, *где* $X \supset Y := (W \setminus X) \cup Y$,
$\Box X := \{x \in W \mid \forall y \in W\ (xRy \Rightarrow y \in X)\}$ *и* $\Diamond X := \{x \in W \mid \exists y \in X\ (xRy)\}$.

Моделью на обобщённой **BK**-*шкале (I)* $\langle W, R, \mathbf{P}\rangle$ назовём кортеж

$$\mu = \langle W, R, v^+, v^-\rangle \text{ такой, что } \forall p \in Prop \quad (v^+(p), v^-(p)) \in \mathbf{P}.$$

Соответственно введём отношение истинности на обобщённой **BK**-шкале (I): $\langle W, R, \mathbf{P}\rangle \models \varphi \Leftrightarrow \mu \models \varphi$ для любой модели μ.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — твист-структура над модальной алгеброй, тогда существует обобщённая* **BK**-*шкала (I) $\langle W, R, \mathbf{P}\rangle$ такая, что:*

$$\mathcal{A} \cong \langle \mathbf{P}, \vee, \wedge, \to, (\emptyset, W), \sim, \Box, \Diamond\rangle.$$

Доказательство. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_{\bowtie} := \langle \{\neg a \mid a \in |\mathcal{A}|\}, \vee, \wedge, \neg, \bot\rangle$. В соответствии с предложениями 3.2 и 3.3 из [6], $\mathcal{A}_{\bowtie}$ будет модальной алгеброй, в этом несложно убедиться и непосредственно. Согласно следствию 2, имеет место вложение $\quad i : \mathcal{A}_{\bowtie} \hookrightarrow \langle W_{\mathcal{A}_{\bowtie}}, R_{\mathcal{A}_{\bowtie}}\rangle^+$.

Обозначим $B = i(\mathcal{A}_{\bowtie}) \leq Alg(\langle W_{\mathcal{A}_{\bowtie}}, R_{\mathcal{A}_{\bowtie}}\rangle^+)$. Положим

$$\mathbf{P} = \{(X_1, X_2) \mid \ X_1, X_2 \in B, X_1 \cup X_2 \in i(\nabla(\mathcal{A})), X_1 \cap X_2 \in i(\Delta(\mathcal{A}))\}.$$

Убедимся, что $\langle W_{\mathcal{A}_{\bowtie}}, R_{\mathcal{A}_{\bowtie}}, \mathbf{P}\rangle$ — требуемая обобщённая **BK**-шкала (I). Благодаря предложению 3 B является модальной алгеброй. По следствию 1 $\nabla(\mathcal{A})$ и $\Delta(\mathcal{A})$ являются соответственно $\Box$-фильтром и $\Diamond$-идеалом на исходной модальной алгебре. Очевидно, что $i(\nabla(\mathcal{A}))$ и $i(\Delta(\mathcal{A}))$ унаследуют свойства быть соответственно $\Box$-фильтром и $\Diamond$-идеалом на B. Остаётся воспользоваться предложением 2, которое говорит, что $\mathbf{P}$ будет твсит-труктурой над модальной алгеброй B. Следовательно, $\langle W_{\mathcal{A}_{\bowtie}}, R_{\mathcal{A}_{\bowtie}}, \mathbf{P}\rangle$ — удовлетворяет определению обобщённой **BK**-шкалы (I). Требуемый изоморфизм устроен следующим образом: для произвольного $a \in |\mathcal{A}|$

$$a \longmapsto (i(\neg a), i(\neg \sim a)).$$

$\Box$

Покажем эквивалентность полученной семантики обобщённых **BK**-шкал алгебраической семантике твист-структур.

Следствие 3. *Пусть $\mathcal{A}$ — твист-структура над модальной алгеброй, тогда*

$$\models_\mathcal{A} \varphi \Leftrightarrow \langle W, R, \mathbf{P}\rangle \models \varphi.$$

Доказательство. Ввиду изоморфизма из леммы 1, достаточно установить биекцию между оценкой и парой означиваний на обобщённой **BK**-шкале (I): $\forall p \in Prop\ (v(p) \cong (v^+(p), v^-(p)))$, которую можно продолжить индукцией по построению формулы φ до биекции $v(\varphi) \cong (\mu^+(\varphi), \mu^-(\varphi))$. Остаётся заметить, что непосредственно из определений оператора i и свойств твист-структур $v(\varphi)$ принадлежит множеству выделенных элементов $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mu^+(\varphi) = W$. $\square$

Мы доказали эквивалентность полученной семантики обобщённых **BK**-шкал алгебраической семантике твист-структур, в том смысле, что их модели совпадают. Действительно, любая модель $\langle W, R, v^+, v^- \rangle$ на обобщённой **BK**-шкале будет моделью на соответствующей твист-структуре. Аналогично и любая модель на твист-структуре будет моделью на соответствующей шкале.

Определение 6. Обобщенная **BK**-шкала (II) *это — кортеж* $\langle W, R, P, F, I \rangle$, *где* $\langle W, R, P \rangle$ *— обобщенная модальная шкала, а* $F, I \subseteq P$ *и удовлетворяют следующим условиям:*
1f) $X, Y \in F \Rightarrow X \cap Y \in F$; *2f) если* $X \in F$, *то* $\forall Y \in P\ (X \subseteq Y \Rightarrow Y \in F)$;
3f) $\forall X \in P \quad (X \in F \Rightarrow \Box X \in F)$;
1i) $X, Y \in I \Rightarrow X \cup Y \in I$; *2i) если* $X \in I$, *то* $\forall Y \in P\ (Y \subseteq X \Rightarrow Y \in I)$;
3i) $\forall X \in P \quad (X \in I \Rightarrow \Diamond X \in I)$.

Моделью на обобщённой **BK***-шкале (II)* $\langle W, R, P, F, I \rangle$ назовём кортеж $\mu = \langle W, R, v^+, v^- \rangle$ такой, что $\forall p \in Prop \quad (v^+(p) \cap v^-(p) \in I, v^+(p) \cup v^-(p) \in F)$.

Отношение истинности на обобщённой **BK**-шкале (II) определяется так:

$$\langle W, R, P, F, I \rangle \models \varphi \Leftrightarrow \mu \models \varphi \text{ для любой модели } \mu.$$

Покажем эквивалентность подходов (I) и (II).

Определение 7. *Кортеж* $\langle W, R, \mathbf{P}(P, F, I) \rangle$ *назовём* обобщённой шкалой, соответствующей обобщенной **BK**-шкале (II) $\langle W, R, P, F, I \rangle$, *если*

$$\mathbf{P}(P, F, I) = \{(X_1, X_2) \mid X_1, X_2 \in P, X_1 \cup X_2 \in F, X_1 \cap X_2 \in I\}.$$

Определение 8. *Кортеж* $\langle W, R, P(\mathbf{P}), F(\mathbf{P}), I(\mathbf{P}) \rangle$ *назовём* обобщённой шкалой, соответствующей обобщенной **BK**-шкале (I) $\langle W, R, \mathbf{P} \rangle$, *если* $P(\mathbf{P}) = \pi_1(\mathbf{P})$; $F(\mathbf{P}) = \{X_1 \cup X_2 \mid (X_1, X_2) \in \mathbf{P}\}$; $\quad I(\mathbf{P}) = \{X_1 \cap X_2 \mid (X_1, X_2) \in \mathbf{P}\}$.

Предложение 4. *Обобщённая шкала* $\langle W, R, \mathbf{P}(P, F, I) \rangle$, *соответствующая обобщенной* **BK***-шкале (II)* $\langle W, R, P, F, I \rangle$, *будет обобщенной* **BK***-шкалой (I).*

Доказательство. Доказательство полностью следует из предложения 2. Действительно, конструкция из определения обобщённой шкалы, соответствующей обобщенной **BK**-шкале (II) полностью повторяет определяемое в предложении 2 образующее множество твист-структуры. Алгебра $\langle \mathbf{P}(P, F, I), \vee, \wedge, \to, (\emptyset, W), \sim, \Box, \Diamond \rangle$ будет с точностью до изоморфизма твист-структурой. Остаётся вспомнить лемму 1. $\square$

Предложение 5. *Обобщённая шкала* $\langle W, R, P(\mathbf{P}), F(\mathbf{P}), I(\mathbf{P}) \rangle$, *соответствующая обобщенной* **BK***-шкале(I)* $\langle W, R, \mathbf{P} \rangle$, *будет обобщенной шкалой (II).*

Доказательство. Прежде всего, $\emptyset, W \in P(\mathbf{P})$, так как $(\emptyset, W) \in \mathbf{P}$ и $\sim (\emptyset, W) = (W, \emptyset) \in \mathbf{P}$. Замкнутость $P(\mathbf{P})$ относительно операций $\cap, \cup, \supset, \Box$ следует из замкнутости $\mathbf{P}$ относительно $\wedge, \vee, \to, \Box$. Данные свойства $\mathbf{P}$ будут часто применяться в этом доказательстве.

Имеем $F(\mathbf{P}), I(\mathbf{P}) \subseteq P(\mathbf{P})$, так как для любого $(X_1, X_2) \in \mathbf{P}$ будет $\sim (X_1, X_2) = (X_2, X_1) \in \mathbf{P}$. Далее, $X_1, X_2 \in P(\mathbf{P})$ и $X_1 \cap X_2, X_1 \cup X_2 \in P(\mathbf{P})$.

Осталось проверить условия из определения.

1f) Пусть $X, Y \in F(\mathbf{P})$. По определению $F(\mathbf{P})$, найдутся $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in \mathbf{P}$ такие, что $X = X_1 \cup X_2, Y = Y_1 \cup Y_2$. Производим вычисления:

$$(X_1, X_2) \to (X_1, X_2) = (W, X_1 \cap X_2) \in \mathbf{P},\ (Y_1, Y_2) \to (Y_1, Y_2) = (W, Y_1 \cap Y_2) \in \mathbf{P},$$

$$\sim ((W, X_1 \cap X_2) \vee (W, Y_1 \cap Y_2)) = ((X_1 \cap X_2) \cap (Y_1 \cap Y_2), W) \in \mathbf{P},$$

$$(X_1, X_2) \vee \sim (X_1, X_2) = (X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2) \in \mathbf{P},$$

$(X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2) \to ((X_1 \cap X_2) \cap (Y_1 \cap Y_2), W) = ((X_1 \cup X_2) \supset ((X_1 \cap X_2) \cap (Y_1 \cap Y_2)), X_1 \cup X_2) \in \mathbf{P}$.

Учитывая, что $\forall A, B \subseteq 2^W\ (A \cap (A \supset B) = A \cap B)$, находим
$(X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2) \wedge ((X_1 \cup X_2) \supset ((X_1 \cap X_2) \cap (Y_1 \cap Y_2)), X_1 \cup X_2) = ((X_1 \cup X_2) \cap ((X_1 \cap X_2) \cap (Y_1 \cap Y_2)), (X_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cup X_2)) = ((X_1 \cap X_2) \cap (Y_1 \cap Y_2), X_1 \cup X_2) \in \mathbf{P}$.
Аналогичными выкладками получим $((X_1 \cap X_2) \cap (Y_1 \cap Y_2), Y_1 \cup Y_2) \in \mathbf{P}$,
и $((X_1 \cap X_2) \cap (Y_1 \cap Y_2), X_1 \cup X_2) \vee ((X_1 \cap X_2) \cap (Y_1 \cap Y_2), Y_1 \cup Y_2) = ((X_1 \cap X_2) \cap (Y_1 \cap Y_2), (X_1 \cup X_2) \cap (Y_1 \cup Y_2)) \in \mathbf{P}$.
Откуда $((X_1 \cap X_2) \cap (Y_1 \cap Y_2)) \cup ((X_1 \cup X_2) \cap (Y_1 \cup Y_2)) = (X_1 \cup X_2) \cap (Y_1 \cup Y_2) \in F(\mathbf{P})$.

Таким образом, $X \cap Y \in F(\mathbf{P})$.

2f) Дано $X \in F(\mathbf{P}),\ Y \in P(\mathbf{P}),\ X \subseteq Y$.
Пусть $X = X_1 \cup X_2,\ (X_1, X_2) \in \mathbf{P}$. Поскольку $P(\mathbf{P}) = \pi_1(\mathbf{P})$, то найдётся Z такое, что $(Y, Z) \in \mathbf{P}$. Остаётся заметить, что

$$(Y, Z) \vee (X_1, X_2) = (Y \cup X_1, Z \cap X_2) = (Y, Z \cap X_2) \in \mathbf{P}.$$

Поэтому $Y \cup (Z \cap X_2) = (Y \cup Z) \cap Y = Y \in F(\mathbf{P})$.

3f) Пусть $X \in F(\mathbf{P})$. Тогда $X = X_1 \cup X_2$, для некоторого $(X_1, X_2) \in \mathbf{P}$. Рассмотрим $D := (X_1, X_2) \to (\emptyset, W) = (X_1 \supset \emptyset, X_1)$. В силу замкнутости $\mathbf{P}$ относительно $\to$, D лежит в $\mathbf{P}$. Аналогично установим, что $(X_1 \supset \emptyset, X_1) \wedge (X_1, X_2) = (\emptyset, X_1 \cup X_2) \in \mathbf{P}$. Далее, $\Box \sim (\emptyset, X_1 \cup X_2) = (\Box(X_1 \cup X_2), \emptyset) \in \mathbf{P}$. Поэтому $\Box X \in F(\mathbf{P})$.

1i) Пусть $X, Y \in I(\mathbf{P})$. По определению $I(\mathbf{P})$, найдутся $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in \mathbf{P}$ такие, что $X = X_1 \cap X_2, Y = Y_1 \cap Y_2$. Вычисляем:

$$(X_1, X_2) \to (X_1, X_2) = (W, X) \in \mathbf{P}, \quad (Y_1, Y_2) \to (Y_1, Y_2) = (W, Y) \in \mathbf{P},$$

$$(W, X) \wedge (W, Y) = (W, X \cup Y) \in \mathbf{P}.$$

Значит, $W \cap (X \cup Y) = X \cup Y \in I(\mathbf{P})$.

2i) Пусть $X \in I,\ Y \in P,\ Y \subseteq X$. Найдётся Z такое, что $(Y, Z) \in \mathbf{P}$.

$$(W, X) \vee \sim (Y, Z) = (W, X \cap Y) \in \mathbf{P}.$$

Поэтому $W \cap X \cap Y = Y \in I(\mathbf{P})$.

3i) Пусть $X \in I(\mathbf{P})$. Тогда $X = X_1 \cap X_2$, для некоторого $(X_1, X_2) \in \mathbf{P}$. Рассмотрим $D := (X_1, X_2) \to (\emptyset, W) = (X_1 \supset \emptyset, X_1)$. В силу замкнутости $\mathbf{P}$ относительно $\to$, D лежит в $\mathbf{P}$. Аналогично установим, что $(X_1 \supset \emptyset, X_1) \vee (X_1, X_2) = (W, X_1 \cap X_2) \in \mathbf{P}$. Далее, $\Box(W, X_1 \cap X_2) = (W, \Diamond(X_1 \cap X_2)) \in \mathbf{P}$. Поэтому $\Diamond X \in F(\mathbf{P})$. □

Теорема 4. *Семантики обобщённых* **BK**-*шкал (I) и (II) эквивалентны в том смысле, что их модели совпадают.*

Доказательство. Покажем, что любая модель $\langle W, R, v^+, v^- \rangle$ на обобщённой **BK**-шкале (I) $\langle W, R, \mathbf{P} \rangle$ будет моделью на соответствующей шкале $\langle W, R, P(\mathbf{P}), F(\mathbf{P}), I(\mathbf{P}) \rangle$. Действительно, для любого $p \in Prop \quad v^+(p) \cap v^-(p) \in I$, так как $(v^+(p), v^-(p)) \in \mathbf{P}$; $\; v^+(p) \cup v^-(p) \in F(\mathbf{P})$, так как $(v^+(p), v^-(p)) \in \mathbf{P}$. Аналогично и любая модель $\langle W, R, v^+, v^- \rangle$ на обобщённой **BK**-шкале (II) $\langle W, R, P, F, I \rangle$ будет моделью на соответствующей шкале $\langle W, R, \mathbf{P}(P, F, I) \rangle$. □

Определение 9. *Для обобщённых* **BK**-*шкал (I) p-морфизмом из* $\langle W, R, \mathbf{P} \rangle$ *на* $\langle W', R', \mathbf{P}' \rangle$ *назовём такое отображение* $f : W \overset{на}{\Rightarrow} W'$, *что* $\forall\, a, b \in W$:

(1) $aRb \Rightarrow f(a)R'f(b)$,
(2) $f(a)R'f(b) \Rightarrow \exists c \in W \quad (f(b) = f(c)$ *и* $aRc)$,
(3) $\forall\, Y = (Y_1, Y_2) \in \mathbf{P}' \quad (f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2)) \in \mathbf{P}$.

По аналогии с описанным ранее определением дуальной алгебры для обобщёной модальной шкалы, назовём алгебру $\langle \mathbf{P}, \vee, \wedge, \to, (\emptyset, W), \sim, \Box, \Diamond \rangle$ *дуальной алгеброй обобщённой* **BK**-*шкалы (I)* $\langle W, R, \mathbf{P} \rangle$.

Справедлив аналог известной теоремы [7] о p-морфизме:

Теорема 5. *Если* f *— p-морфизм обобщённых* **BK**-*шкал (I) из* $\langle W, R, \mathbf{P} \rangle$ *на* $\langle W', R', \mathbf{P}' \rangle$, *то имеет место изоморфное вложение их дуальных алгебр, как твист-структур:*

$$(\mathbf{P}', \vee, \wedge, \to, (\emptyset, W'), \sim, \Box, \Diamond) \hookrightarrow (\mathbf{P}, \vee, \wedge, \to, (\emptyset, W), \sim, \Box, \Diamond).$$

Доказательство. Построим отображение из W' на W таким образом:

$$H : D \mapsto (f^{-1}(\pi_1(D)), f^{-1}(\pi_2(D))).$$

Покажем, что H искомое вложение:
1) $H(\emptyset, W') = (\emptyset, W)$ и $H(W', \emptyset) = (W, \emptyset)$, так как f — отображение "на". Согласно п.3 определения p-морфизма $\forall G \in \mathbf{P}' \quad H(G) \in \mathbf{P}$.
2) Отображение H сохраняет операции. Для произвольных $C = (C_1, C_2), D = (D_1, D_2)$ из $\mathbf{P}'$: $\quad H(C \to D) = (f^{-1}(C_1 \supset D_1), f^{-1}(C_1 \cap D_1))$,

$$H(C \cap D) = (f^{-1}(C_1 \cap D_1), f^{-1}(C_1 \cup D_1)),$$

$$H(C \cap D) = (f^{-1}(C_1 \cap D_1), f^{-1}(C_1 \cup D_1)),\; H(\sim C) = (f^{-1}(C_2), f^{-1}(C_1)).$$

Остаётся воспользоваться тем, что взятие прообраза (f^{-1}) сохраняет действие операций $\cap, \cup$ и $\supset$.
3) Покажем, что H инъективно:

$$H(C) = H(D) \Rightarrow f^{-1}(C_1) = f^{-1}(D_1) \text{ и } f^{-1}(C_2) = f^{-1}(D_2),$$

но $f(f^{-1}(C_i)) = C_i$, откуда получим $C_1 = D_1$ и $C_2 = D_2$.

Итак, $\forall C, D \in \mathbf{P}' \quad (H(C) = H(D) \Rightarrow C = D)$. □

Определение 10. *Для двух обобщенных* **BK**-*шкал (II)* $\langle W, R, P, F, I\rangle$ *и* $\langle W', R', P', F', I'\rangle$ *отображение* $f\ :\ W \overset{на}{\Rightarrow} W'$ *называется р-морфизмом, если* $\forall\, a, b \in W$*:*

(1) $aRb \Rightarrow f(a)R'f(b)$,
(2) $f(a)R'f(b) \Rightarrow \exists c \in W \quad (f(b) = f(c)$ *и* $aRc)$,
(3) $\forall\, X \in P'\ f^{-1}(X) \in P,\ \forall\, X \in F'\ f^{-1}(X) \in F,\ \forall\, X \in I'\ f^{-1}(X) \in I.$

Теорема 6. *Если* f *— р-морфизм* $\langle W, R, P, F, I\rangle$ *на* $\langle W', R', P', F', I'\rangle$*, то имеет место изоморфное вложение твист-структур*

$$(\mathbf{P}(P', F', I'), \vee, \wedge, \to, (\emptyset, W'), \sim, \Box, \Diamond) \hookrightarrow (\mathbf{P}(P, F, I), \vee, \wedge, \to, (\emptyset, W), \sim, \Box, \Diamond).$$

Доказательство. Установим, что f — будет р-морфизмом из $\langle W, R, \mathbf{P}(P, F, I)\rangle$ на $\langle W', R', \mathbf{P}(P', F', I')\rangle$. Действительно, первые два пункта определений р-морфизмов совпадают, проверим третий пункт. Возьмём произвольное (Y_1, Y_2) из $\mathbf{P}(P', F', I')$. Рассмотрим $(f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2))$: $f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2) \in P$ по третьему пункту определения р-морфизма шкал (II); $f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \in F$, так как, по тому же пункту: $f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2) \in F$; аналогично $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \in I$. В соответствии с определением 7 трансляции обобщённых шкал, получаем $(f^{-1}(Y_1),\ f^{-1}(Y_2)) \in \mathbf{P}(P, F, I)$.

Дальнейшее следует из доказанной ранее теоремы 5. □

Список литературы

[1] S.P. Odintsov, H. Wansing, *Modal logics with Belnapian truth values*, Journal of Applied Non-Classical Logics, **20**:3 (2010), 270–301. MR2827646

[2] S.P. Odintsov, *Constructive Negations And Paraconsistency*, Trends in Logic, **26**, Springer, 2008. MR2680932

[3] Е.И. Латкин, *Обобщённая семантика Крипке для логики Нельсона*, Алгебра и логика, **49**:5 (2010), 630—653. MR2796490

[4] A. Chagrov, M. Zakharyaschev, *Modal logic*, Clarendon Press, Oxford, 1997. MR1464942

[5] Е.И. Латкин, *Модели для логик Нельсона и дизъюнктивное свойство*, Труды международной конференции «Вычислимость и модели», 2010, 65–72.

[6] S.P. Odintsov, E.I. Latkin, *BK-lattices. Algebraic semantics for Belnapian modal logics*, Studia Logica, **100**:1–2 (2012), 319–338. MR2923542

[7] Л.Л. Максимова, *Предтабличные суперинтуиционистские логики*, Алгебра и логика, **11**:5 (1972), 558–570. MR0325358

Егор Иванович Латкин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: eilatkin@gmail.com