

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

*Том 11, стр. 220–228 (2014)*УДК 517.958, 519.6, 539.3
MSC 65N30, 65N38, 65N50, 65N55РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ H-АДАПТИВНОГО МЕТОДА
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Ю.А. ЯЩУК, И.И. ПРОКОПЫШИН

АБСТРАКТ. We present an effective methodology of solving contact mechanics problems. The main feature is combining iterative domain decomposition method with h-adaptive finite element method, which were developed earlier by the authors. We demonstrate the usability of a new algorithm applying it to a test problem. The resulting mesh reveals a singularity near the contact zone.

Keywords: finite element method, boundary element method, mesh refinement, contact mechanics, domain decomposition.

1. ВВЕДЕНИЕ

Моделирование контактного взаимодействия деформируемых тел является актуальной задачей, возникающей в различных сферах инженерной практики. Численные методы решения контактных задач базируются на теории вариационных неравенств. Последние достижения в этом направлении отображены в работах [17, 18].

Развитие методов декомпозиции области (МДО) дало новый толчок к исследованию контактных задач для нескольких тел. Среди таких методов следует выделить методы, построенные на континуальном уровне [5, 12, 15, 16], и методы, построенные на дискретном уровне [7, 10].

С участием одного из соавторов данной статьи, в работах [4, 5, 11, 12] предложен класс континуальных параллельных итерационных методов декомпозиции области типа Робина для задач контакта нескольких упругих тел. Эти

YASHCHUK, YU.O., PROKOPYSHYN, I.I., SOLVING OF CONTACT MECHANICS PROBLEM USING H-ADAPTIVE FINITE ELEMENT METHOD.

© 2014 Ящук Ю.А., Прокопышин И.И.

Поступила 18 октября 2013 г., опубликована 15 марта 2014 г.

методы основаны на методе штрафа для вариационных неравенств и итерационных методах решения нелинейных вариационных уравнений. На каждом шаге итерационного процесса необходимо параллельно решать задачи теории упругости для отдельных тел с условиями Робина на зонах возможного контакта. Для численного решения задач в отдельных областях использовался метод конечных элементов (МКЭ).

Адаптивные модификации МКЭ, в частности h -адаптивные схемы [8], которые в процессе решения сгущают сетку в областях с большей погрешностью решения, позволяют минимизировать вычислительные затраты. В работе [6] разработан h -адаптивный алгоритм для линейных задач теории упругости, который базируется на априорной разности погрешностей МКЭ и метода граничных элементов (МГЭ) при вычислении напряжений.

В настоящей работе предложен алгоритм решения задач контакта упругих тел, объединяющий процессы декомпозиции области и h -адаптации, разработанные нами ранее. Продемонстрировано использование алгоритма на тестовой задаче о контакте без трения двух упругих тел конечных размеров.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим плоскую задачу контакта без трения двух упругих тел, заданных областями Ω_1 и Ω_2 (Рис. 1) с липшицевыми границами Γ_1 и Γ_2 . Введем декартову систему координат с базисными векторами \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Обозначим через $\mathbf{u}_\alpha = u_{\alpha i} \mathbf{e}_i$, $\hat{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_{\alpha ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ и $\hat{\sigma}_\alpha = \sigma_{\alpha ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ соответственно вектор перемещений, тензор деформаций и тензор напряжений в области Ω_α , $\alpha = 1, 2$. На границе Γ_α каждого из тел введем локальный ортонормированный базис \mathbf{n}_α , $\boldsymbol{\tau}_\alpha$, где \mathbf{n}_α – единичная внешняя нормаль, а $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ – единичная касательная. Векторы перемещений и напряжений на Γ_α в этом базисе запишем так:

$$\mathbf{u}_\alpha = u_{\alpha\tau} \boldsymbol{\tau}_\alpha + u_{\alpha n} \mathbf{n}_\alpha, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = \sigma_{\alpha\tau} \boldsymbol{\tau}_\alpha + \sigma_{\alpha n} \mathbf{n}_\alpha.$$

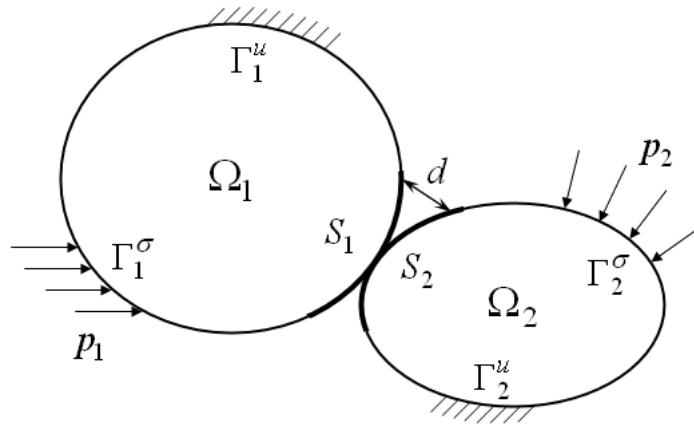


Рис. 1. Контакт двух упругих тел.

Согласно линейной теории упругости [2], компоненты тензоров деформаций и напряжений определены следующим образом:

$$(1) \quad \varepsilon_{\alpha ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_i} \right), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad i, j = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$(2) \quad \sigma_{\alpha ij} = 2\mu_\alpha \varepsilon_{\alpha ij} + \lambda_\alpha \delta_{ij} (\varepsilon_{\alpha 11} + \varepsilon_{\alpha 22}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad i, j = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, а $\lambda_\alpha, \mu_\alpha$ – константы Ламе для каждого из тел.

Для упрощения предположим отсутствие массовых сил. Тогда состояние равновесия тел будет описываться следующей системой:

$$(3) \quad (\lambda_\alpha + \mu_\alpha) \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_{\alpha k}}{\partial x_k \partial x_i} + \mu_\alpha \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_{\alpha i}}{\partial x_k^2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad i = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2.$$

Пусть $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^u \cup \Gamma_\alpha^\sigma \cup S_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, где Γ_α^u – часть границы, на которой заданы перемещения, которые, для упрощения, будем считать нулевыми:

$$(4) \quad \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u,$$

Γ_α^σ – часть границы, на которой заданы усилия:

$$(5) \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^\sigma,$$

а S_α – зона возможного контакта тела Ω_α с другим телом.

Кинематические условия контакта запишем в линейном приближении [3]. Для этого предположим, что кривые S_1 и S_2 достаточно близки, так что их внешние нормали отличаются только знаком: $\mathbf{n}_1(\mathbf{x}) \approx -\mathbf{n}_2(\mathbf{x}')$, где $\mathbf{x}' \in S_2$ – ортогональная проекция точки $\mathbf{x} \in S_1$ на кривую S_2 . Расстояние между телами до деформации обозначим через $d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$.

В зонах возможного контакта выполняются такие условия:

- нерастяжения

$$(6) \quad \sigma_{1n}(\mathbf{x}) = \sigma_{2n}(\mathbf{x}') \leq 0,$$

- отсутствия трения

$$(7) \quad \sigma_{1\tau}(\mathbf{x}) = \sigma_{2\tau}(\mathbf{x}') = 0,$$

- взаимного непроникновения

$$(8) \quad u_{1n}(\mathbf{x}) + u_{2n}(\mathbf{x}') \leq d(\mathbf{x}),$$

- контактной альтернативы

$$(9) \quad (u_{1n}(\mathbf{x}) + u_{2n}(\mathbf{x}') - d(\mathbf{x})) \sigma_{1n}(\mathbf{x}) = 0,$$

где $\mathbf{x} \in S_1$, $\mathbf{x}' \in S_2$.

Уравнения (1)–(3) с граничными условиями (4)–(9) описывают контакт двух упругих тел без трения.

Сформулируем вариационную постановку этой задачи. Обозначим через $V_\alpha = [H^1(\Omega_\alpha)]^2$ пространства Соболева для каждого из тел. Введем подпространства $V_\alpha^0 = \{\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha : \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u\}$ со скалярным произведением $(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0} = (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha}$ и нормой $\|\mathbf{u}_\alpha\|_{V_\alpha^0} = \|\mathbf{u}_\alpha\|_{V_\alpha}$. Значения элементов пространств V_α и V_α^0 на частях границы Γ_α будем понимать в смысле следов.

Введем пространство $V_0 = V_1^0 \times V_2^0$ со скалярным произведением $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_0} = \sum_{\alpha=1}^2 (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0}$ и нормой $\|\mathbf{u}\|_{V_0} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_0}}$. Исходя из условия (8), определим в пространстве V_0 множество кинематически допустимых перемещений:

$$K = \{\mathbf{u} \in V_0 : u_{1n}(\mathbf{x}) + u_{2n}(\mathbf{x}') \leq d(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S_1\}.$$

Для тела Ω_α определим билинейную форму, соответствующую энергии упругой деформации

$$a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) d\Omega, \quad \mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0,$$

и линейную форму, равную работе внешних сил

$$l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Gamma_\alpha^\sigma} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha dS, \quad \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0.$$

Исходная задача (1)–(9) эквивалентна в слабом понимании следующей задаче минимизации на множестве K [3]:

$$(10) \quad F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in K},$$

где

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^2 a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha), \quad L(\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^2 l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0.$$

Задачу (10) с помощью метода штрафа [14] можно свести к задаче минимизации в пространстве V_0

$$(11) \quad F_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in V_0},$$

где штрафное слагаемое $J_\theta(\mathbf{u})$ имеет вид:

$$J_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\theta} \int_{S_1} \left[(d - u_{1n} - u_{2n})^- \right]^2 dS, \quad \mathbf{u} \in V_0.$$

Здесь $\theta > 0$ – параметр штрафа, $z^- = \min\{0, z\}$. Задача (11) эквивалентна следующей задаче [4, 12]:

$$(12) \quad \text{Найти } \mathbf{u} \in V_0 \text{ такое, что:} \\ A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0,$$

где

$$J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{\theta} \int_{S_1} (d - u_{1n} - u_{2n})^- (v_{1n} + v_{2n}) dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0.$$

В работе [12] доказано, что решение задачи (12) сходится сильно в пространстве V_0 к решению исходной задачи минимизации (10) при $\theta \rightarrow 0$.

Для решения вариационного уравнения (12) используем следующий итерационный метод [11]:

$$(13) \quad A(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma [A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})], \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\gamma > 0$ – итерационный параметр, а $\mathbf{u}^k \in V_0$ – k -ое приближение к точному решению уравнения (12). После некоторых преобразований и замены $\hat{\mathbf{u}}^{k+1} =$

$(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k) / \gamma - \mathbf{u}^k$, метод (13) можно записать в следующей эквивалентной форме [11]:

$$(14) \quad A(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_0,$$

$$(15) \quad \mathbf{u}^{k+1} = \gamma \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1 - \gamma) \mathbf{u}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Поскольку величины, общие для обоих тел, известны с предыдущей итерации, то вариационное уравнение (14) распадается на два независимых уравнения в отдельных телах, и метод (14)–(15) эквивалентен следующему итерационному процессу [4, 11]:

$$(16) \quad a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) = l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta} \int_{S_\alpha} (d - u_{1n}^k - u_{2n}^k)^- v_{\alpha n} dS, \quad \forall \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0,$$

$$(17) \quad \mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1 - \gamma) \mathbf{u}_\alpha^k, \quad \alpha = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Метод (16)–(17) заключается в параллельном решении на каждой итерации независимых (для каждого из тел) вариационных задач (16), которые отвечают задачам теории упругости с условиями Неймана $\sigma_{1n}^k = \sigma_{2n}^k = (d - u_{1n}^k - u_{2n}^k)^- / \theta$ на зонах возможного контакта. Следовательно, этот метод относится к параллельным МДО типа Неймана [4, 5, 11]. Теорема о сходимости итерационного метода декомпозиции области (16)–(17) доказана в работе [11].

Таким образом, исходная задача сводится к последовательности классических задач теории упругости, которые подлежат решению для каждого из тел отдельно. Такая независимость позволяет использовать большинство известных численных методов и модификаций для улучшения эффективности получения решения.

3. ИМПЛЕМЕНТАЦИЯ Н-АДАПТИВНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работах [4, 5, 12, 13] для численного решения задач (16) в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 используется метод конечных элементов. Заметим, что весь процесс решения является итерационным, и на каждом шаге приходится решать две полноценные задачи теории упругости. Поэтому оптимальность сетки МКЭ имеет большое значение. Целью настоящей работы является комбинирование описанной выше схемы декомпозиции области и разработанного ранее в [6] алгоритма h -адаптации сетки МКЭ. Опишем этот алгоритм, ограничившись для простоты адаптацией лишь в области Ω_2 .

Пусть на k -ой итерации схемы декомпозиции (16)–(17) в области Ω_2 имеем сетку конечных элементов T_F^k с заданными на ней конечноэлементными базисными функциями $N_{F_i}^k$, $i = 1, \dots, m_F$. Спроектировав T_F^k на Γ_2 , получаем множество отрезков, на основании которого построим сетку граничных элементов T_B^k . Базисные функции МГЭ также зададим в зависимости от конечноэлементных:

$$N_{B_j}^k := \mathfrak{R}(N_{F_i}^k),$$

где $\mathfrak{R}(\cdot)$ – оператор сужения на Γ_2 функций, определенных на Ω_2 . Таким образом, полученная сетка МГЭ является полностью зависящей от сетки МКЭ. В этом случае можно использовать высшую (по сравнению с МКЭ) априорную точность напряжений, полученных МГЭ, для оценки погрешности напряжений, полученных МКЭ (подробную аргументацию см. в [6]).

Решим на k -ой итерации задачу (16) в области Ω_2 с помощью МКЭ и МГЭ. Пусть в некоторой точке $\mathbf{x} \in \Omega_2$ имеем тензоры напряжений $\hat{\sigma}_{2F}(\mathbf{x})$ и $\hat{\sigma}_{2B}(\mathbf{x})$, полученные соответственно МКЭ и МГЭ. Введем норму тензора в области Ω_2 следующим образом:

$$\|\hat{\sigma}_2\|_{\Omega_2} = \sqrt{\int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{2ij}^2 d\Omega}.$$

Теперь для каждого конечного элемента $\Omega_{2e} \in \Omega_2$ определим критерий адаптации [6]:

$$\eta_{FB}(\Omega_{2e}) = \frac{\|\hat{\sigma}_B - \hat{\sigma}_F\|_{\Omega_{2e}} / |\Omega_{2e}|}{\|\hat{\sigma}_B\|_{\Omega_2} / |\Omega_2|},$$

где $|\Omega_{2e}|$ и $|\Omega_2|$ – соответственно площади Ω_{2e} и Ω_2 . Разбиение элемента Ω_{2e} осуществляется при выполнении условия $\eta_{FB}(\Omega_{2e}) > \delta$, где $\delta > 0$ – некоторое наперед заданное значение. Полученная сетка конечных элементов является начальной сеткой для $k + 1$ итерации методу декомпозиции области.

Следует заметить, что после деления элементов сетка может стать несовместимой. В этом случае мы используем модификацию МКЭ, известную как мортарный МКЭ, или МКЭ с использованием мортарных функций [9].

Таким образом, мы получаем комбинированный алгоритм, на каждой итерации которого совершается как пересчет схемы декомпозиции, так и поэлементная оценка погрешности с последующей адаптацией сетки. Задав в начале регулярную сетку из минимального количества конечных элементов, в результате использования разработанного алгоритма получаем решение с необходимой точностью δ на каждом элементе локально сгущенной сетки.

4. АПРОБАЦИЯ КОМБИНИРОВАННОГО АЛГОРИТМА

Предложенный алгоритм был апробирован для решения тестовой задачи о контактном взаимодействии двух упругих изотропных тел. Схема контакта и граничные условия изображены на Рис. 2. Длина и высота каждого из тел соответственно равны $l = 4$ см и $h = 1$ см. Расстояние между телами до деформации равно $d(\mathbf{x}) = r_0 x_1^2$, $r_0 = 0,001$ см, обжатие тел равно $\Delta = 1,366 r_0$. Модуль Юнга обеих тел равен $2,1 \cdot 10^5$ МПа, а коэффициент Пуассона 0,3. Задача была решена методом декомпозиции области (16)–(17) с использованием МКЭ с четырехугольными линейными конечными элементами. Как уже упоминалось ранее, для простоты мы ограничились адаптацией только в области Ω_2 .

Начальные приближения для перемещений $u_{\alpha n}^0$ были заданы по модели упругого слоя [4]. Параметр штрафа задавался в виде $\theta = ch/E$, где E – модуль Юнга тел, h – высота тел, а c – безразмерный коэффициент. Для завершения итерационного процесса использован следующий критерий

$$\|u_{\alpha n}^k - u_{\alpha n}^{k-1}\|_2 / \|u_{\alpha n}^k\|_2 \leq \varepsilon, \quad \alpha = 1, 2,$$

где $\|u_{\alpha n}\|_2 = \sqrt{\sum_j (u_{\alpha n}(\mathbf{x}^j))^2}$ – дискретная норма, $\mathbf{x}^j \in S_1$ – узлы сетки МКЭ на зоне возможного контакта, а $\varepsilon > 0$ – относительная точность для перемещений.

Параметры итерационного процесса выбраны следующим образом: $c = 0,05$; $\gamma = 0,02$; $\varepsilon = 0,0015$; $\delta = 0,1$. Требуемая точность достигнута за 6 итераций. На

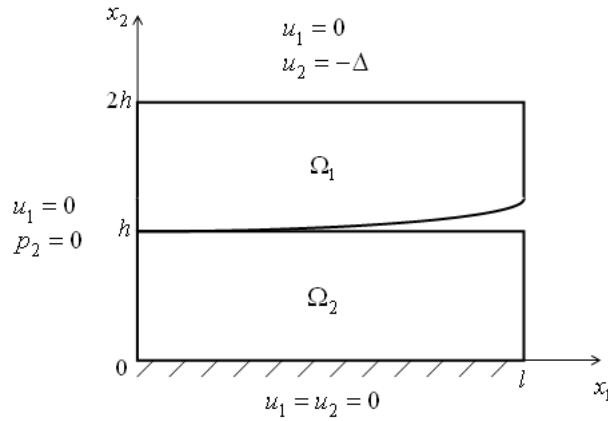


Рис. 2. Схема контакта и граничные условия для тестовой задачи

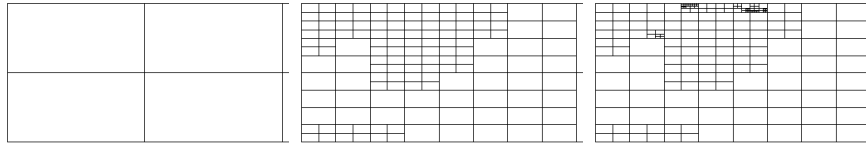
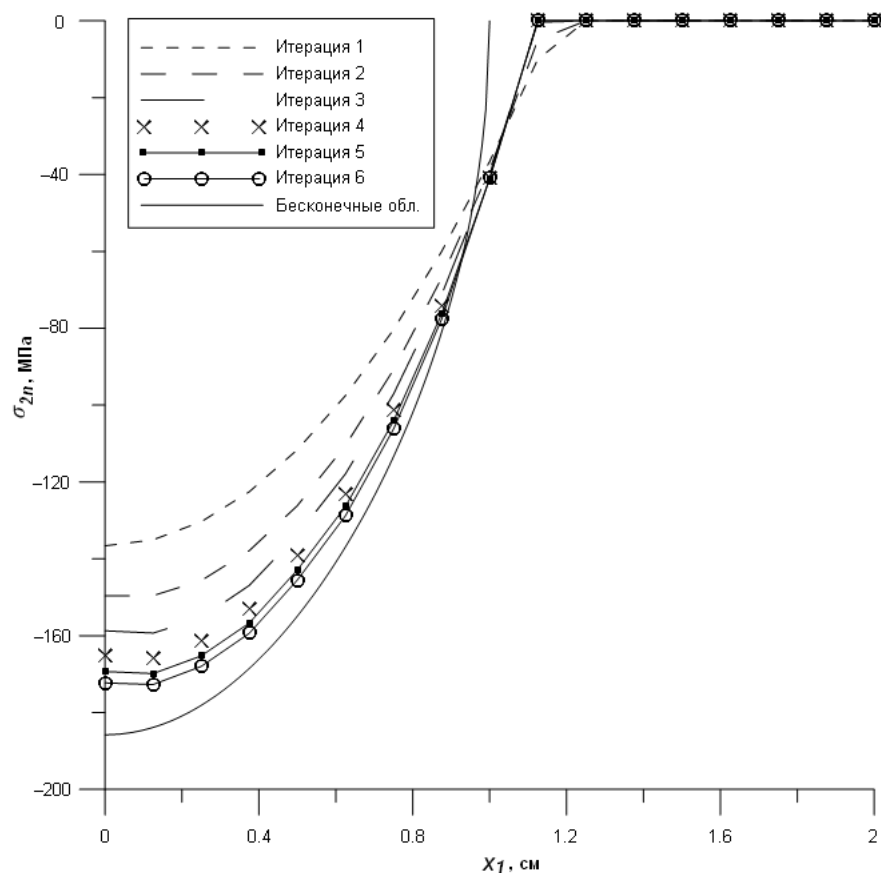
Рис. 3. Сетки в левой половине Ω_2 . Слева направо: начальная сетка, сетка на 3-ей итерации, конечная сетка.

Рис. 3 приведены сетки левой половины Ω_2 на некоторых итерациях. В правой половине адаптации не происходило – критерий уже на начальной сетке удовлетворял условия точности. Такое поведение согласовывается с тем фактом, что для данной задачи в этой части области контакта априори не происходит [1]. На Рис. 4 представлены графики, которые демонстрируют процесс сходимости контактных напряжений $\sigma_{1n} = \sigma_{2n}$. Как видим, сетка гуще на краю зоны контакта, в области больших градиентов этих напряжений. Присутствующие сгущения внутри области объясняются большими градиентами напряжений, а также в некоторых местах – погрешностью метода мортарных функций, который был использован для решения задачи на несовместимой сетке.

Для случая, когда области Ω_1 и Ω_2 являются бесконечными слоями, в работе [1] получена высокоточная формула для контактных напряжений, с которой было проведено сравнение численных результатов (см. Рис. 4). Видно удовлетворительное совпадение полученных решений, что подтверждает корректность предложенного алгоритма.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана итерационная схема решения задачи о контакте двух упругих тел с использованием метода декомпозиции области и h -адаптивного МКЭ. В

Рис. 4. Сходимость контактных напряжений σ_{2n} .

процессе построения адаптивной сетки конечных элементов предложенный алгоритм эффективно учитывает особенность решения в окрестности зоны контакта. Тестовый пример демонстрирует перспективность применения предложенной методологии для данного типа задач. Сравнение с известным высокоточным решением подтверждает правильность результатов. Использование предложенного подхода позволяет уменьшить требуемые вычислительные затраты и перспективно для параллельных вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко, *Неклассические смешанные задачи теории упругости*, Москва, Наука, 1974. MR0478924
- [2] В. Г. Зубчанинов, *Основы теории упругости и пластичности*, Москва, Высшая школа, 1990.
- [3] А. С. Кравчук, *Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования*, Прикладная математика и механика, **42:3** (1978), 467–473. MR0622483
- [4] І. І. Прокопишин, *Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя*, Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика, **14** (2008), 123–133.

- [5] I. I. Prokopyshyn, *Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл*, автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02, Львів, 2010.
- [6] Ю. О. Ящук, *Адаптивний алгоритм чисельного дослідження задачі теорії пружності*, Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика, **16** (2010), 96–105.
- [7] P. Avery, C. Farhat, *The FETI family of domain decomposition methods for inequality-constrained quadratic programming: Application to contact problems with conforming and nonconforming interfaces*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **198** (2009), 1673–1683. MR2517939
- [8] W. Bangerth, R. Rannacher, *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*, Birkhauser Verlag, Basel, 2003. MR1960405
- [9] C. Bernardi, Y. Maday, A. Patera, *A new non conforming approach to domain decomposition: The mortar element method*, Nonlinear partial differential equations and their applications, Paris, 1994, 13–51. MR1268898
- [10] Z. Dostál, T. Kozubek, V. Vondrák, T. Brzobohatý, A. Markopoulos, *Scalable TFETI algorithm for the solution of multibody contact problems of elasticity*, Int. J. Numer. Methods Engrg., **82**:11 (2010), 1384–1405.
- [11] I. I. Dyyak, I. I. Prokopyshyn, *Convergence of the Neumann parallel scheme of the domain decomposition method for problems of frictionless contact between several elastic bodies*, Journal of Mathematical Sciences, **171**:4 (2010), 516–533. MR2676364
- [12] I. I. Dyyak, I. I. Prokopyshyn, I. A. Prokopyshyn, *Penalty Robin–Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results*, arxiv.org, <http://arxiv.org/pdf/1208.6478.pdf> (2012), 1–32.
- [13] A. Ya. Grigorenko, I. I. Dyyak, S. I. Matysyak, I. I. Prokopyshyn, *Domain decomposition methods applied to solve frictionless-contact problems for multilayer elastic bodies*, International Applied Mechanics, **46**:4 (2010), 388–399. MR2923087
- [14] N. Kikuchi, J. T. Oden, *Contact Problems in Elasticity: A study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988. MR0961258
- [15] J. Koko, *Uzawa block relaxation domain decomposition method for a two-body frictionless contact problem*, Applied Mathematics Letters, **22** (2009), 1534–1538. MR2561731
- [16] T. Sassi, M. Irope, F.-X. Roux, *Generalization of Lion's nonoverlapping domain decomposition method for contact problems*, Lect. Notes Comput. Sci. Engrg., **60** (2008), 623–630. MR2436133
- [17] B. Wohlmuth, *Variationally consistent discretization schemes and numerical algorithms for contact problems*, Acta Numerica, (2011), 569–734. MR2805157
- [18] P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics. Second Edition*, Springer, 2006. Zbl 1104.74002

Юрий Александрович Ящук
Львовский национальный университет им. Ивана Франко,
ул. Университетская, 1,
79000, Львов, Украина
E-mail address: yuriy.yashchuk@gmail.com

Игорь Иванович Прокопышин
Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача
НАН Украины,
ул. Научная, 3-б,
79060, Львов, Украина
E-mail address: ihor84@gmail.com