S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 321–326 (2014) УДК 512.54
MSC 20K01

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ, НАСЫЩЕННЫХ КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ГРУПП

И.В. САБОДАХ

Abstract. Let G be a periodic group saturated with a finite set of groups of the form $L \times E$, where E is a finite elementary abelian 2-group and L is a finite simple non-abelian group, which is not isomorphic to $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $U_n(q)$ or $L_n(q)$ for odd q and $n \geq 4$. We prove that G is finite.

Keywords: Direct product of groups, periodic group, saturation.

1. Введение

В теории бесконечных групп значительное место занимают исследования бесконечных групп с различными условиями конечности, то есть групп, которые по своему определению наделяются теми или иными свойствами конечных групп. Результаты исследований, представленных в данной статье, связаны с условием насыщенности группы заданным множеством групп.

Понятие насыщенности группы заданным множеством групп появилось в 1993 году в работах А.К. Шлёпкина [1].

Группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$.

Примеры периодических не (локально) конечных групп, насыщенных конечным множеством конечных групп (даже одной группой простого порядка $p \geq 665$) хорошо известны - это $B(m,p)$ при $m \geqslant 2$. Однако, для случая, когда $\mathfrak{R}$ состоит из конечного множества конечных простых неабелевых групп, аналогичные примеры не локально конечных групп неизвестны. Поэтому естественно рассмотреть эту ситуацию для конечных простых неабелевых групп.

Sabodakh, I.V., On periodic groups saturated with a finite set of groups.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект Б 112/14).

Поступила 1 апреля 2014 г., опубликована 29 апреля 2014 г.

В [2] поставлена следующая проблема: Пусть группа G насыщена группами из конечного множества конечных простых неабелевых групп $\mathfrak{M}$. Какова ее структура? В частности, если G — периодическая группа, то будет ли G изоморфна одной из групп указанного множества?

Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество всех конечных простых неабелевых групп в которых централизатор силовской 2-подгруппы содержит элемент нечетного порядка. Как показали А.С. Кондратьев и В.Д. Мазуров [5], множество $\mathfrak{F}$ состоит в точности из следующих групп: $E_6^\delta(q)$, где q нечетно и $\frac{(q-\delta 1)_{2'}}{(3,q-\delta 1)} > 1$, и групп $L_n^\delta(q)$, где q нечетно и либо $t(n) = 2$, где $t(n)$ – число слагаемых в двоичном разложении числа n, $(q-\delta 1)_{2'} > 1$ либо $n > 2$, $t(n) \neq 2$, $\frac{(q-\delta 1)_{2'}}{(3,q-\delta 1)} > \delta = +$ или $-$, $L_n^+ = L_n$, $L_n^- = U_n$, $E_6^+ = E_6$, $E_6^- =^2 E_6$.

В [3, 4] доказан следующий результат: Пусть периодическая группа G насыщена конечными простыми неабелевыми группами из конечного множества $\mathfrak{R}$, имеющего пустое пересечение с $\mathfrak{F}$. Тогда G конечна и изоморфна некоторой группе множества $\mathfrak{R}$.

Это утверждение показывает, что если периодическая группа G насыщена конечным множеством $\mathfrak{M}$, состоящим из конечных простых неабелевых групп, то в большинстве случаев G конечна и изоморфна одной из групп насыщающего множества $\mathfrak{M}$.

В работе [3] описаны периодические группы, насыщенные конечным подмножеством множества $\mathfrak{S}$ всех конечных простых групп S, обладающих тем свойством, что нечетные порядки элементов централизатора силовской 2 – подгруппы из S не превосходит числа 3.

В [5] показано, что множеству $\mathfrak{S}$ принадлежит любая конечная простая группа за исключением групп типа L_n, U_n, E_6, ${}^2E_6$ над некоторыми полями нечетных порядков.

В частности, множеству $\mathfrak{S}$ не принадлежит бесконечное множество групп типов L_3 и U_3 над полями нечетных характеристик, и в [6] дана классификация периодических групп, насыщенных конечным множеством групп вида $L_3(q)$ и $U_3(q)$, где q нечетно.

Цель настоящей работы — объединить и обобщить результаты работ [3, 4, 6].

Пусть $\mathfrak{L}_3 = \{L_3(q), U_3(q), q \text{ нечетно}\}$.

Пусть $\mathfrak{E}$ – множество конечных элементарных абелевых 2-групп и $\mathfrak{M} = \{L \times E | L \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{L}_3, E \in \mathfrak{E}\}$.

Теорема 1 *Если G – периодическая группа, насыщенная конечным множеством групп из $\mathfrak{M}$, то $G \in \mathfrak{M}$.*

Следствие 1 *Пусть $\mathfrak{N} = \{L \times E | E \in \mathfrak{E}\}$, где L – простая группа лиева типа ранга 1. Если G – периодическая группа, насыщенная конечным множеством групп из $\mathfrak{N}$, то $G \in \mathfrak{N}$.*

2. Предварительные результаты

Лемма 1 *(Теорема Шункова [9]) Периодическая группа, содержащая инволюцию с конечным централизатором, локально конечна.*

Лемма 2 *В бесконечной 2-группе T любая конечная подгруппа отлична от своего нормализатора. В частности, T содержит бесконечную локально конечную подгруппу* [6].

Лемма 3 *Если в периодической группе T некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы из T конечны и сопряжены* [6].

Автоморфизм a порядка n группы X называется расщепляющим, если выполняется $xx^a \dots x^{a^{n-1}} = 1$ для любого $x \in X$.

Лемма 4 *Пусть a – расщепляющий автоморфизм порядка 3 группы X. Тогда группа X нильпотентна* [7].

Лемма 5 *Группа периода 3 нильпотентна* [12, *Sätze* $III, 6.5, 6.6$].

Лемма 6 *Пусть T – конечная силовская 2-подгруппа периодической группы G и X, Y – T - инвариантные подмножества из T, сопряженные в G. Тогда X и Y сопряжены в $N_G(T)$. В частности, если x, y – элементы из $Z(T)$, сопряженные в G, то x, y сопряжены в $N_G(T)$.*

Доказательство. По условию леммы $X \trianglelefteq T$ и $X^g \trianglelefteq T$. Следовательно, $X \triangleleft T^{g^{-1}}$ и $X \trianglelefteq \langle T, T^{g^{-1}} \rangle \leq N_G(X)$. По лемме 3 $T = T^{g^{-1}h}$ для некоторого $h \in N_G(X)$. Отсюда вытекает, что $g^{-1}h = t \in N_G(T)$. Посчитаем: $x^{t^{-1}} = x^{h^{-1}g} = x^g$. Лемма доказана.

А.С. Кондратьев обратил внимание автора на следующий факт, вытекающий из классификации конечных простых групп.

Лемма 7 *Пусть T – неабелева силовская 2-подгруппа конечной простой группы. Тогда либо $Z(T)$ – циклическая группа, либо $Z(T) \leq [T, T]$.*

Доказательство. См. [8].

Лемма 8 *Пусть L – одна из групп $U_3(q)$ или $L_3(q)$, где q нечетно, T – ее силовская 2-подгруппа. Тогда* (1) *T содержит элемент порядка 8, центр T – циклическая группа и все инволюции из T сопряжены в L.* (2) *T содержит элементарную абелеву подгруппу A порядка 4, любая нециклическая подгруппа порядка 4 из L сопряжена с A и $N_L(A) = C_L(A) \cdot V$, где V изоморфна симметрической группе степени 3.* (3) *Если v - элемент порядка 3 в V, то $(cv)^3 = 1$ для любого элемента c из $C_L(A)$.* (4) *$N_L(T) = TC_L(T)$.*

Доказательство. См. [6].

Лемма 9 [10] *Пусть G – конечная простая группа, силовская 2-подгруппа S, которой не содержит элементарных абелевых секций порядка 8. Тогда G изоморфна одной из следующих групп: $L_2(q)$, $L_3(q)$, $U_3(q)$, q нечетно, A_7, M_{11}. Если при этом A – элементарная абелева подгруппа порядка 4 из S и $C_G(A) \neq A$, то $G \simeq L_3(q)$ или $U_3(q)$, q нечетно.*

Лемма 10 [11] *Пусть S – силовская 2-подгруппа конечной группы G и t — инволюция из S, обладающая следующим свойством: если $t^x \in S$ для некоторого $x \in G$, то $t^x = t$. Тогда $tO(G)$ содержится в центре фактор-группы $G/O(G)$. Здесь $O(G)$ – наибольшая нормальная подгруппа нечетного порядка группы G.*

Лемма 11 *Пусть G – бесконечная группа, насыщенная конечным множеством $\mathfrak{M}$ конечных групп. Тогда* (1) *Любая локально конечная подгруппа из G конечна.* (2) *Все силовские 2-подгруппы из G конечны и сопряжены.* (3) *Если V – 2-подгруппа из G, то $C_G(V)$ – бесконечная группа.*

Доказательство.

(1) Предположим противное. Пусть H – бесконечная локально конечная подгруппа из G. Пусть m – максимум порядков групп, принадлежащих $\mathfrak{M}$, и

$x_1, ..., x_{m+1}$ – попарно различные элементы из H. Тогда $K = \langle x_1, ..., x_{m+1} \rangle$ – конечная подгруппа из G, порядок которой больше m. Так как по условию K содержится в некоторой подгруппе L, изоморфной элементу $\mathfrak{M}$, то $|K| \leq |L| \leq m$, противоречие.

(2) Пусть S – силовская 2-подгруппа из G. Если S бесконечна, то по лемме 2 она содержит бесконечную локально конечную подгруппу, что невозможно по пункту (1). По лемме 3 все силовские подгруппы из G сопряжены.

(3) По пункту (2) V конечна. Используем индукцию по $|V|$. Если $V = 1$, то $C_G(V) = G$ – бесконечная группа по условию. Если $V \neq 1$, то пусть V_0 – подгруппа V индекса 2. По предположению индукции $C_G(V_0)$ – бесконечная группа, и $V_0 \trianglelefteq C_G(V_0)V$. Так как $|V : V_0| = 2$, то $V = V_0\langle t \rangle$ для некоторого элемента $t \in V$ и $\bar{t} = V\langle t \rangle$ – инволюция в $\overline{C} = C_G(V_0)V/V_0$. Если $C_{\overline{C}}(\bar{t})$ – конечная подгруппа, то по лемме 1 $\overline{C}$ – локально конечная подгруппа и по теореме Шмидта $C_G(V_0)$ – локально конечная подгруппа. Но тогда по пункту (1) $C_G(V_0)$ — конечная группа, вопреки индукционному предположению. Поэтому $C_{\overline{C}}(\bar{t})$ – бесконечная группа. Теперь пусть C – полный прообраз группы $C_{\overline{C}}(\bar{t})$ в G. Ясно, что C – бесконечная группа, $V_0 t^c = V_0 t$ для любого $c \in C$ и поэтому $C_c(t)$ — подгруппа конечного индекса в C. Отсюда $C_G(V) = C_G(\langle V_0, t \rangle) = C_c(t)$ — бесконечная группа как подгруппа конечного индекса в бесконечной группе. Лемма доказана.

Лемма 12 *Пусть L – простая группа, изоморфная $L_2(q)$, q нечетно, A_7 или M_{11}, и A – нециклическая подгруппа порядка 4 из L. Тогда $N_L(A)/C_L(A)$ содержит элемент b порядка 3 и порядок любого элемента из смежного класса $C_L(A)b$ равен 3.*

Доказательство. Если $L \simeq L_2(q)$, то $N_L(A)$ изоморфен A_4 или S_4 (см. [12, Satz II, 8.27]). Если $G \simeq A_7$ или M_{11}, то заключение легко проверяется с помощью списка максимальных подгрупп этих групп (см., например, [13]).

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G удовлетворяет условиям теоремы 1, T – одна из ее силовских 2-подгрупп. По лемме 11 T конечна и любая силовская 2-подгруппа из G сопряжена с T. Если $C_G(T)T/T$ – группа периода 3, то по лемме 5 она нильпотентна и поэтому $C_G(T)$ – локально конечная группа. По лемме 11 G конечна и следовательно содержится в $\mathfrak{M}$.

Поэтому в дальнейшем считаем, что в $C_G(T)$ найдется элемент x нечетного порядка, большего, чем 3. Так как $\langle T, x \rangle$ – конечная подгруппа, то существует конечная подгруппа $K \leq G$, для которой $\langle T, x \rangle \leq K$ и $K \simeq L \times E$, где $L \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{L}_3$ и E – элементарная абелева 2-группа. Очевидно, T – силовская 2-подгруппа в K, $C_K(T)T/T$ не является группой периода 3, поэтому $L \notin \mathfrak{S}$ и, следовательно, $L \in \mathfrak{L}_3$.

Лемма 13 *Если $E = 1$, то $G \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда G бесконечна. Пусть A – нециклическая подгруппа порядка 4 из T и $C = C_G(A)$. По лемме 8 $N_L(A)/C_L(A)$ содержит элемент v порядка 3 такой, что $(cv)^3 = 1$ для любого $c \in C_L(A)$. Покажем, что $(xv)^3 = 1$ для любого $x \in C_G(A)$. Очевидно, подгруппа $\langle A, xv \rangle$ конечна и по условию содержится в подгруппе $K = M \times N$, где M – неабелева простая группа, а N – элементарная абелева 2-группа.

По лемме 3 силовская 2-подгруппа K_2 из K изоморфна подгруппе группы T и поэтому любая ее секция порождается двумя элементами. По лемме 9 $N = 1$ и M изоморфна одной из групп $L_2(q)$, $L_3(q)$, $U_3(q)$, q нечетно, A_7 или M_{11}.

По леммам 8 и 12 $(xv)^3 = 1$. Это означает, что v индуцирует в $C_G(A)$ расщепляющий автоморфизм порядка 3. По лемме 4 $C_G(A)$ нильпотентна и, следовательно, локально конечна. По лемме 11 (1) $C_G(A)$ – конечная подгруппа, а по пункту (3) этой леммы она бесконечна. Полученное противоречие показывает, что G конечна и, следовательно, $G \in \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Лемма 14 *Если v – инволюция из E, $g \in G$ и $v^g \in T$, то $v^g = v$.*

Доказательство. Предположим противное и покажем, что g можно выбрать из $N(T)$. Если $v^g \in E$, то это следует из леммы 6. Если $v^g = ew$, где $w \in E$, $e \in L$, то существует $y \in L$, $e^y = z \in Z(T) \cap L$. Поэтому $v^{xy} = zw \in Z(T)$. По лемме 6 zw и v сопряжены в $N(T)$. Понятно, что $zw \neq v$.

Поэтому существует нетривиальный элемент n нечетного порядка в $N(T)$, что $(zw)^n = v$. Пусть $U = [\langle v^{\langle n \rangle} \rangle, \langle n \rangle]$. Тогда $U = [U, n]$ — нециклическая подгруппа из $Z(T)$. Очевидно, $\langle T, n \rangle$ – конечная подгруппа.

Пусть она лежит в $K_1 \times E_1$, где K_1 – простая группа, E_1 – элементарная абелева и $T = (K_1 \cap T) \times E_1$.

Поскольку $U = [U, n]$, то U содержится в $K_1 \cap T$ и лежит в центре $K_1 \cap T$. Поэтому центр $K_1 \cap T$ нециклический. По лемме 7 $Z(T \cap K_1) = [T \cap K_1, T \cap K_1] \leq [T, T]$. По лемме 8 $[T, T]$ – циклическая группа. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 15 *E содержится в центре G.*

Доказательство. Пусть v – произвольный элемент из E. Предположим, что $v \notin Z(G)$. Тогда v – инволюция и существует $x \in G$, для которого $v^x \neq v$. Если при этом vv^x – элемент четного порядка, то x можно выбрать так, чтобы элемент vv^x был инволюцией, т. е. $\langle v, v^x \rangle$ – группа порядка 4. По лемме 3 $\langle v, v^x \rangle^y \leq T$ для некоторого $y \in G$, т. е. $v^y, v^{xy} \in T$. По лемме 14 $v^y = v = v^{xy}$ и $v = v^x$ вопреки выбору x. Полученное противоречие показывает, что vv^x – элемент нечетного порядка для любого $x \in G$.

Так как $\langle v, v^x \rangle$ – конечная подгруппа, то $\langle v, v^x \rangle \leq H \leq G$, где $H = L_1 \times E_1$, L_1 – простая группа, E_1 – элементарная группа. Поскольку $O(H) = 1$, то по лемме 10 v содержится в $Z(H)$, откуда $v = v^x$. Это противоречие доказывает лемму.

Лемма 16 $G \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. По лемме 15 $E \trianglelefteq G$. Пусть K/E – конечная подгруппа в G/E. Тогда K конечна и по условию $K \leq H \leq G$, где $H = L_1 \times E_1$, L_1 — простая группа, E_1 – элементарная абелева 2-группа. Очевидно, $E \leq E_1$. Пусть T_1 – силовская 2-подгруппа из H. По лемме 3 она изоморфна подгруппе T. Поскольку T/E не содержит секций, изоморфных элементарной абелевой группе порядка 8, то T_1/E_1 их также не содержит. Поэтому G/E насыщена простыми группами из $\mathfrak{M}$. По лемме 13 $G/E \in \mathfrak{M}$, в частности, G конечна. Но тогда $G \in \mathfrak{M}$. Лемма и теорема 1 доказаны.

Доказательство следствия 1. Конечные простые группы лиева типа лиева ранга 1 исчерпываются группами типов L_2, U_3, Re, Sz над подходящими полями. Все они являются элементами $\mathfrak{M}$. Следствие доказано.

Список литературы

[1] А.К. Шлепкин, *Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы*, Сб. тез. 3-й междунар. конф. по алгебре: Красноярск, (1993), 369.

[2] А.А. Кузнецов, К.А. Филиппов, *Группы, насыщенные заданным множеством групп*, Сибирские электронные математические известия, **8** (2011), 230–246. MR2876557

[3] А.К. Шлепкин, А.Г. Рубашкин, *О группах, насыщенных конечным множеством групп*, Сибирский математический журнал, **45**:6 (2004), 1397–1400. MR2123302

[4] А.К. Шлепкин, А.Г. Рубашкин, *О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами*, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **2** (2004), 96–100.

[5] А.С. Кондратьев, В.Д. Мазуров, *2–сигнализаторы конечных простых групп*, Алгебра и логика, **42**:5 (2003), 594–623. MR2025717

[6] Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов, *О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп*, Сибирский математический журнал, **49**:2 (2008), 394–399. MR2419663

[7] А.Х. Журтов, *О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса*, Сибирский математический журнал, **41**:2 (2000), 329–338. MR1762185

[8] В.В. Кабанов, А.С. Кондратьев, *Силовские 2-подгруппы конечных групп (обзор)*, Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1979. Zbl 0454.20015

[9] В.П. Шунков, *О периодических группах с почти регулярной инволюцией*, Алгебра и логика, **11**:4 (1972), 470–493.

[10] L. Alperin, R. Brauer, D. Gorenstein, *Finite simple groups of 2-rank two*, Scripta Math., **29**:3–4 (1973), 191–214. MR0401902

[11] G. Glauberman, *Central elements in core-free groups*, J. Algebra, **4**:3 (1966), 403–420. MR0202822

[12] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer Verlag, (1979). Zbl 0412.20002

[13] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, (1985). MR0827219

Ирина Валерьевна Сабодах
Институт информатики и телекоммуникаций СибГАУ,
пр. имени газеты Красноярский рабочий 31,
660037, Красноярск, Россия
E-mail address: sabodax@mail.ru