S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 327–333 (2014) УДК 514.132

MSC 52B15, 51M20, 51M25, 51M09

НОСИТЕЛЬ ДИФФУЗИИ В КЛАСТЕРНОМ ПУАССОНОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О.В. ПУГАЧЕВ

Abstract. We prove that in a space of cluster Poisson configurations on $\mathbb{R}^d$, under certain conditions, the set of configurations with multiple points has zero $C_{1,2}$ Sobolev capacity. Hence stationary diffusions on this space are supported by the subset of configurations without multiple points.

Keywords: cluster Poisson configurations, capacity, diffusion.

1. Пространство конфигураций

В последние годы в связи с различными задачами теории вероятностей и математической физики стал активно развиваться анализ на пространствах конфигураций (см. [2], [4], [7], [8]). Кроме пуассоновских мер, на этих пространствах рассматриваются и другие меры, например, гиббсовские [5] и кластерные пуассоновские [6].

В настоящей работе доказывается, что в пространстве кластерных пуассоновских конфигураций на $\mathbb{R}^d$ при некоторых условиях множество конфигураций с кратными точками имеет нулевую соболевскую емкость $C_{1,2}$. Таким образом, стационарный диффузионный процесс на этом пространстве можно считать диффузионным процессом на пространстве конфигураций без кратных точек.

Определение 1. *Пространство* $\ddot{\Gamma}$ *конфигураций* (*с кратными точками*) на $\mathbb{R}^d$ есть пространство натуральнозначных σ-конечных мер γ на $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющих условию:

$$\gamma(A) < \infty \quad \text{для всякого ограниченного множества} \quad A \subset \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Pugachev, O.V., Support of diffusion on a cluster Poisson space.

Поступила 28 января 2014 г., опубликована 14 мая 2014 г.

Другими словами, γ имеет вид

$$\gamma=\sum_{i=1}^{N}k_i\delta_{x_i},\qquad N\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\},\quad x_i\in\mathbb{R}^d,\quad k_i\in\mathbb{N},$$

где δ_{x_i} – мера Дирака в точке x_i, а k_i – кратность точки x_i, и последовательность $\{x_i\}$ не имеет предельных точек.

Можно рассматривать конфигурацию как локально конечное множество точек, но при этом некоторые точки могут быть кратными.

Определение 2. *Слабая топология* w на $\ddot{\Gamma}$ порождена функциями вида

$$\gamma\mapsto\int\varphi(x)\gamma(dx),\qquad \text{где}\quad \varphi\in C_0(\mathbb{R}^d).$$

Пространство Γ конфигураций без кратных точек на $\mathbb{R}^d$ есть следующее подмножество $\ddot{\Gamma}$:

$$\Gamma=\bigl\{\gamma\in\ddot{\Gamma}:\quad \forall x\in\mathbb{R}^d\quad \gamma(\{x\})\le 1\bigr\}.$$

Как пространство $\ddot{\Gamma}$, так и пространство Γ со слабой топологией является польским (см. [3]).

Функция f на Γ называется гладкой цилиндрической, если она имеет вид

$$f(\gamma)=u\left(\int\varphi_1\,d\gamma,\dots,\int\varphi_n\,d\gamma\right),\quad \varphi_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ u\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n),\ n\in\mathbb{N}.$$

Определение 3. Пусть σ – локально конечная мера на $\mathbb{R}^d$, не имеющая атомов, т.е.

$$\sigma(\{x\})=0\qquad\forall\ x\in\mathbb{R}^d.$$

Вероятностная мера $\pi=\pi_\sigma$ на пространстве конфигураций $\ddot{\Gamma}$ называется *пуассоновской мерой,* соответствующей мере интенсивности σ на $\mathbb{R}^d$, если для любых непересекающихся множеств $A_1,A_2,\ldots\subset\mathbb{R}^d$ конечной меры σ мы имеем:

а) $\pi\{\gamma:\ \gamma(A_i)=k\}=\exp\bigl(-\sigma(A_i)\bigr)\bigl(\sigma(A_i)\bigr)^k/k!$

б) случайные величины $\gamma(A_i)$ независимы.

Вероятность попадания не менее m точек пуассоновской конфигурации во множество $A\subset\mathbb{R}^d$ оценивается так:

$$\pi\{\gamma(A)\ge m\}=e^{-\sigma(A)}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(\sigma(A))^k}{k!}\le\frac{(\sigma(A))^m}{m!}.\tag{2}$$

2. Кластерные пуассоновские конфигурации

Пусть σ_c и σ_0 — безатомные локально конечные борелевские меры на $\mathbb{R}^d$. Кластерная пуассоновская конфигурация γ в $\mathbb{R}^d$ строится так. Сначала строим вспомогательную пуассоновскую конфигурацию без кратных точек γ_c с мерой интенсивности σ_c. Затем каждая точка x („центр”) из γ_c независимо порождает пуассоновскую конфигурацию („кластер”) γ_x с мерой интенсивности σ_0, сдвинутой на вектор x; наконец,

$$\gamma=\sum_{x\in\gamma_c}\gamma_x.\tag{3}$$

Обозначим через π вероятностную меру на $\ddot{\Gamma}$, задающую распределение конфигураций, построенных вышеописанным способом.

Предположим, что что носитель меры σ_0 ограничен (тогда мера σ_0 конечна). Тогда (см. [6]) кластерная пуассоновская конфигурация почти всегда локально конечна, т.е. удовлетворяет условию (1). Если меры σ_c и σ_0 имеют плотности ρ_c и ρ_0 относительно меры Лебега, то $\pi(\ddot{\Gamma}\backslash\Gamma) = 0$, т.е. почти всегда $\gamma \in \Gamma$.

В [6] был построен диффузионный процесс $\{\gamma_t\}$ на $\ddot{\Gamma}$ со стационарной мерой π. Хотя мера множества $\ddot{\Gamma}\backslash\Gamma$ равна нулю, из этого не следует, что почти все траектории диффузионного процесса будут лежать в Γ. Чтобы доказать это утверждение, требуется (см. [8]) оценка емкости, порожденной соболевским классом $W^{1,2}$:

$$C_{1,2}(\ddot{\Gamma}\backslash\Gamma) = 0.$$

Приведем необходимые определения.

Определение 4. *Касательное пространство* в „точке" $\gamma \in \ddot{\Gamma}$ есть пространство дискретных векторных полей

$$T_\gamma = L^2(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \gamma).$$

Определение 5. Будем говорить, что функция $f \in L^p(\pi)$ принадлежит *соболевскому классу* $W^{1,p}$, если существует последовательность гладких цилиндрических функций f_m, сходящаяся к f по норме $L^p(\pi)$ и в то же время фундаментальная по норме

$$\|f\|_{1,p} = \left(\int |f(\gamma)|^p + \|\nabla f(\gamma)\|^p_{T_\gamma} \, \pi(d\gamma) \right)^{1/p}.$$

Определение 6. *Соболевская емкость* $C_{1,p}$ определена следующим образом:

$$C_{1,p}(U) = \inf\big\{\|f\|_{1,p} : \quad f \in W^{1,p},\ f \geq 0;\ f \geq 1 \text{ на } U\ \pi\text{-почти всюду}\big\},$$

если $U \subset \ddot{\Gamma}$ – открытое множество;

$$C_{1,p}(B) = \inf\big\{C_{1,p}(U) : \ B \subset U,\ U \text{ открытое}\big\}$$

для произвольного $B \subset \ddot{\Gamma}$.

В [8] была доказана следующая теорема для пространства пуассоновских конфигураций:

Теорема 1. *При любых p, таких, что $1 \leq p < d$, мы имеем*

$$C_{1,p}(\ddot{\Gamma} \setminus \Gamma) = 0.$$

Цель данной работы — обобщить теорему 1 для кластерных пуассоновских пространств. Удалось получить следующий результат:

Теорема 2. *Пусть $\ddot{\Gamma}$ – пространство конфигураций на $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, с кратными точками; π – мера, задающая кластерные пуассоновские конфигурации с локально конечными мерами интенсивности σ_c и σ_0 (см. (3)), имеющими плотности ρ_c и ρ_0, причем хотя бы одна из двух плотностей непрерывна. Если носитель меры σ_0 ограничен, и выполнено дополнительное условие $\rho_0 \in L^2(dx)$, то*

$$C_{1,2}(\ddot{\Gamma}\backslash\Gamma) = 0.$$

Таким образом, если выполнены условия теоремы 2, то можно считать $\{\gamma_t\}$ диффузионным процессом на Γ.

3. Доказательство теоремы 2

Нам понадобится лемма об оценке вероятности попадания двух и более точек в ограниченное множество.

Лемма 1. *Пусть $\ddot{\Gamma}$ с мерой π — пространство кластерных пуассоновских конфигураций на $\mathbb{R}^d$. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^d$ ограничено. Если меры σ_c и σ_0 имеют плотности ρ_c и ρ_0 относительно меры Лебега и выполнены условия*

(I) *носитель меры σ_0 ограничен,*

(II) $\rho_0 \in L^1 \cap L^2$,

то существует такая локально конечная мера ν на $\mathbb{R}^d$, что

$$\pi\{\gamma(A) > 1\} \le \big(\nu(A)\big)^2.$$

Доказательство. Событие $\mathbf{B} = \{\gamma(A) > 1\}$ имеет вид $\mathbf{B} = \mathbf{E} \cup \mathbf{D}$, где $\mathbf{E}$ состоит в том, что в A попали хотя бы две точки из одного кластера, а событие $\mathbf{D}$ — в том, что в A попали хотя бы по одной точке из двух разных кластеров. Оценим их вероятности, применяя формулу (2).

$$\pi(\mathbf{D}) \le \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \pi \left\{ \begin{array}{c} \gamma_x(A - x) \ge 1 \\ \gamma_y(A - y) \ge 1 \end{array} \right\} \rho_c(x) dx \rho_c(y) dy \le$$

$$\le \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sigma_0(A - x) \sigma_0(A - y) \rho_c(x) dx \rho_c(y) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sigma_0(A - x) \rho_c(x) dx \Bigg)^2 = \frac{1}{2} \big(\sigma_0 * \sigma_c(A)\big)^2,$$

где $\sigma_0 * \sigma_c$ — свертка мер на $\mathbb{R}^d$. Поскольку выполнено условие (I), мера $\sigma_0 * \sigma_c$ локально конечна.

Пусть λ – мера Лебега (объем) в $\mathbb{R}^d$, а мера σ_2 имеет плотность ρ_0^2 относительно λ. По неравенству Гёльдера для всякого ограниченного $B \subset \mathbb{R}^d$ выполнено $\sigma_0^2(B) \le \lambda(B) \sigma_2(B)$. Получаем

$$\pi(\mathbf{E}) \le \int\limits_{\mathbb{R}^d} \pi\big\{\gamma_x(A - x) \ge 2\big\} \rho_c(x) dx \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{(\sigma_0(A - x))^2}{2} \rho_c(x) dx \le \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \lambda(A - x) \sigma_2(A - x) \rho_c(x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \lambda(A) (\sigma_2 * \sigma_c)(A) \le \frac{1}{4} \big(\lambda(A) + (\sigma_2 * \sigma_c)(A)\big)^2.$$

Таким образом, в качестве искомой меры ν можно взять

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\lambda + (\sigma_0 + \sigma_2) * \sigma_c\big).$$

Заметим, что если хотя бы одна из плотностей ρ_0 и ρ_c непрерывна, то мера ν также имеет непрерывную плотность. $\square$

Доказательство теоремы 2. Обозначим через $Q_{\mathbf{n}}$, где $\mathbf{n} = (n_1, ..., n_d)$, куб $[n_1, n_1+1] \times \cdots \times [n_d, n_d+1]$ в $\mathbb{R}^d$. Тогда

$$\ddot{\Gamma} \backslash \Gamma = \bigcup_{n_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \bigcup_{n_d \in \mathbb{Z}} \mathbf{D}_{\mathbf{n}},$$

где

$$\mathbf{D}_{\mathbf{n}} = \Big\{ \gamma \in \ddot{\Gamma} : \ \exists x \in Q_{\mathbf{n}} : \quad \gamma(\{x\}) \geq 2 \Big\}.$$

Докажем, что $C_{1,2}(\mathbf{D}_{\mathbf{n}}) = 0$ для всех $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$. Тогда в силу счетной субаддитивности емкости (см. [1]) получим $C_{1,2}(\ddot{\Gamma} \backslash \Gamma) = 0$.

Обозначим через $\mathbf{1}_A$ индикаторную функцию множества A. Возьмем натуральное $N \geq 5$. Пусть функция $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такова, что

$$\mathbf{1}_{[0;1]} \leq \psi \leq \mathbf{1}_{[-1/2;3/2]}.$$

Зафиксируем $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ и построим на $\mathbb{R}^d$ следующие N^d функций из класса C_0^∞:

$$\psi_{k_1,\ldots,k_d}(x) = \prod_{i=1}^{d} \psi\Big(\frac{x_i - n_i - k_1/N}{1/N} \Big), \quad k_1, \ldots, k_d \in \{0, \ldots, N-1\}. \tag{4}$$

Тогда

$$\sup_{\mathbb{R}^d} \|\nabla \psi_{k_1,\ldots,k_d}\| \leq C(d) N$$

и

$$\mathbf{1}_{\prod\limits_{i=1}^{d} [n_i + k_i/N;\, n_i + (k_i+1)/N]} \leq \psi_{k_1,\ldots,k_d} \leq \mathbf{1}_{\prod\limits_{i=1}^{d} [n_i + (k_i - \frac{1}{2})/N;\, n_i + (k_i + \frac{3}{2})/N]}.$$

Из последней оценки следуют такие свойства функций (4):

(а) для всякой точки $x \in Q_{\mathbf{n}}$ найдется функция вида (4), такая, что $\psi_{k_1,\ldots,k_d}(x) = 1$;

(б) объединение носителей функций $\psi_{k_1,\ldots,k_d}$ содержится в кубе
$$\hat{Q}_{\mathbf{n}} = [n_1 - 0{,}1;\ n_1 + 1{,}1] \times \cdots \times [n_d - 0{,}1;\ n_d + 1{,}1];$$

(в) для всякой точки $x \in \hat{Q}_{\mathbf{n}}$ найдутся не более, чем 2^d функций из семейства (4) с $\psi_{k_1,\ldots,k_d}(x) \neq 0$.

В силу (а), множество $\mathbf{D}_{\mathbf{n}}$ содержится в открытом множестве

$$\mathbf{G}_{\mathbf{n},N} = \bigcup_{k_1,\ldots,k_d=0}^{N-1} \Big\{ \gamma : \int \psi_{k_1,\ldots,k_d} d\gamma > \frac{3}{2} \Big\},$$

которое, в свою очередь, содержится во множестве

$$\mathbf{G}'_{\mathbf{n},N} = \bigcup_{k_1,\ldots,k_d=0}^{N-1} \big\{ \gamma : \ \gamma(\operatorname{supp} \psi_{k_1,\ldots,k_d}) > 1 \big\}.$$

Оценим меру множества $\mathbf{G}'_{\mathbf{n},N}$. В силу (б) и (в) имеем оценку

$$\sum_{k_1,\ldots,k_d=0}^{N-1} \nu(\operatorname{supp} \psi_{k_1,\ldots,k_d}) \leq 2^d \cdot \nu(\hat{Q}_{\mathbf{n}}).$$

По лемме 1 имеем оценку

$$\pi(\mathbf{G}'_{\mathbf{n},N}) \leq \sum_{k_1,\dots,k_d=0}^{N-1} \pi\bigl\{\gamma :\ \gamma(\operatorname{supp}\psi_{k_1,\dots,k_d}) > 1\bigr\} \leq$$

$$\leq \sum_{k_1,\dots,k_d=0}^{N-1} \bigl(\nu(\operatorname{supp}\psi_{k_1,\dots,k_d})\bigr)^2 = O(N^{-d}),$$

поскольку мера ν имеет непрерывную плотность. Построим гладкую цилиндрическую функцию

$$f_{\mathbf{n}}^N = 1 - \prod_{k_1,\dots,k_d=0}^{N-1} \xi\Bigl(\int \psi_{k_1,\dots,k_d}\, d\gamma\Bigr),$$

где функция $\xi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ такова, что

$$\mathbf{1}_{(-\infty;1]} \leq \xi \leq \mathbf{1}_{(-\infty;3/2]}.$$

Тогда $f_{\mathbf{n}}^N = 1$ на $\mathbf{G}_{\mathbf{n},N}$, и в то же время $f_{\mathbf{n}}^N$ со всеми своими градиентами обращается в нуль вне $\mathbf{G}'_{\mathbf{n},N}$. Оценим норму $\nabla f_{\mathbf{n}}^N$. В каждой $\gamma \in \Gamma$ (т.е. в π-почти каждой $\gamma \in \ddot{\Gamma}$) мы имеем

$$\Bigl|\nabla \int \psi_{k_1,\dots,k_d}\, d\gamma(x)\Bigr| \leq c(d) N \cdot \mathbf{1}_{\operatorname{supp}\psi_{k_1,\dots,k_d}}(x).$$

Такая же оценка с бóльшей константой $c_\xi(d)$ имеет место для

$$\nabla\biggl(\xi\Bigl(\int \psi_{k_1,\dots,k_d}\, d\gamma\Bigr)\biggr)(x).$$

Поскольку точка x не может лежать в более, чем 2^d носителях функций (4), и функции $\xi\Bigl(\int \psi_{k_1,\dots,k_d}\, d\gamma\Bigr)$ принимают значения в $[0;1]$, мы получаем

$$\left|\nabla\biggl(\prod_{k_1,\dots,k_d=0}^{N-1} \xi\Bigl(\int \psi_{k_1,\dots,k_d}\, d\gamma\Bigr)\biggr)(x)\right| \leq C_\xi(d) N \cdot \mathbf{1}_{\hat{Q}_{\mathbf{n}}}(x),$$

где $C_\xi(d)$ зависит от константы $c_\xi(d)$ и может быть вычислена по формуле дифференцирования произведения 2^d функций. Действительно, в произведении, стоящем в скобках в левой части, не более 2^d сомножителей имеют ненулевые x-компоненты градиента. Итак, мы имеем

$$\bigl|\nabla f_{\mathbf{n}}^N(\gamma)(x)\bigr| \leq C_\xi(d) N \cdot \mathbf{1}_{\hat{Q}_{\mathbf{n}}}(x).$$

Следовательно,

$$\int \bigl\|\nabla f_{\mathbf{n}}^N(\gamma)\bigr\|^2 \pi(d\gamma) \leq N^2 \int_{\mathbf{G}'_{\mathbf{n},N}} const^2(d) \cdot \gamma(\hat{Q}_{\mathbf{n}}) \pi(d\gamma) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Кроме того,

$$\|f_{\mathbf{n}}^N\|_{L^2(\pi)} \leq \Bigl(\pi(\mathbf{G}'_{\mathbf{n},N})\Bigr)^{1/2} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Следовательно, $\|f_{\mathbf{n}}^N\|_{1,2} \to 0$ при $N \to \infty$. Наконец, по определению емкости мы получаем

$$C_{1,2}(\mathbf{D}_n) \leq C_{1,2}(\mathbf{G}_{\mathbf{n},N}) \leq \|f_{\mathbf{n}}^N\|_{1,2} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

следовательно,

$$C_{1,2}(\mathbf{D}_n) = 0. \qquad \square$$

Список литературы

[1] Богачев В.И. Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика", Т. 1, 2. Москва–Ижевск, 2008.

[2] Богачев В.И., Пугачев О.В., Рекнер М., *Поверхностные меры и плотность соболевских емкостей на пространстве Пуассона*, ДАН, **386**:1 (2002), 295–299. MR2003276

[3] Пугачев О.В. *Пространство простых конфигураций является польским*, Математические заметки, **71**:4 (2002), 581–589. MR1913587

[4] Albeverio S., Kondratiev Yu.G., Röckner M. *Analysis and geometry on configuration spaces*, J. Funct. Anal., **154**:2 (1998), 444–500. MR1612725

[5] Albeverio S., Kondratiev Yu.G., Röckner M., *Analysis and geometry on configuration spaces: the Gibbsian case*, J. Funct. Anal., **157**:1 (1998), 242–291. MR1637949

[6] Bogachev L., Daletskii A. *Poisson cluster measures: Quasi-invariance, integration by parts and equilibrium stochastic dynamics*,J. Funct. Anal., **256**:1 (2009), 432–478. MR2476949

[7] Ma Zhi-Ming, Röckner M., *Construction of diffusions on configuration spaces*, Osaka J. Math., **37** (2000), 273–314. MR1772834

[8] Röckner M., Schmuland B. *A support property for infinite-dimensional interacting diffusion processes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **326** (1998), 359–364. MR1648485

Олег Всеволодович Пугачев
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
2-я Бауманская 5,
105005, Москва, Россия
E-mail address: opugachev@yandex.ru