S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 334–344 (2014) УДК 517.984
MSC 81Q10

СПЕКТР И РЕЗОЛЬВЕНТА ОДНОЙ БЛОЧНО-ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

Т.Х. РАСУЛОВ, И.О. УМАРОВА

Abstract. In the paper the block operator matrix H associated with the system of at most three quantum particles on a d-dimensional lattice is considered. Spectrum of this operator is studied in detail. In particular, it is shown that the operator H has at most four simple eigenvalues lying outside of the essential spectrum. Moreover, the resolvent of H is founded.

Keywords: Block operator matrix, Fock space, annihilation and creation operators, generalized Friedrichs model, Fredholm's determinant, essential and discrete spectrum, resolvent.

1. Введение

Блочно-операторная матрица — это матрица элементы которой являются линейными операторами в банаховом или гильбертовом пространстве. Заметим, что гамильтонианы в фоковском пространстве являются одним из специальных классов блочно-операторных матриц. Исследование спектра и резольвенты гамильтонианов (блочно-операторных матриц) в пространстве Фока является наиболее интенсивно изучаемым объектом в теории операторов. Одним из важных вопросов в спектральном анализе таких операторов является изучение конечности или бесконечности числа собственных значений, лежащих вне существенного спектра.

В настоящей работе рассматривается блочно-операторная матрица H, ассоциированная с системой не более чем трех квантовых частиц на d-мерной решетке и обсуждается случай, когда в рассматриваемой системе число рождений и уничтожений частиц равно единице. Отметим, что такие системы обычно

Rasulov T.Kh., Umarova I.O., Spectrum and resolvent of a block operator matrix.

© 2014 Расулов Т.Х., Умарова И.О.

Работа частично поддержана проектом TOSCA II Erasmus Mundus.

Поступила 29 октября 2013 г., опубликована 16 мая 2014 г.

возникают в задачах физики твердого тела [1], квантовой теории поля [2], статистической физики [3], магнитогидродинамики [4] и квантовой механики [5].

Получены следующие результаты: описан существенный спектр оператора H через спектр соответствующей обобщенной модели Фридрихса и доказано, что он состоит из объединения не более чем трех отрезков. Найден явный вид дискретного спектра и резольвенты оператора H. Кроме того, показано, что оператор H может иметь четыре простых собственных значения, лежащих вне существенного спектра.

Отметим, что данная блочно-операторная матрица H представляет собой несимметричный вариант оператора H_{s}, рассмотренного в работах [6, 7, 8, 9]. Там показано, что оператор H_{s} может иметь бесконечное число собственных значений, лежащих вне существенного спектра. В работе [6] также исследовано асимптотика дискретного спектра оператора H_{s}. Тем самым спектральные свойства блочно-операторных матриц H и H_{s} сильно отличаются. Оператор H также можно представить как решетчатый аналог спин-бозонного гамильтониана [10] и модели светового излучения с неподвижным атомом и не более чем тремя фотонами [11].

Структура работы такова. В пункте 2 блочно-операторная матрица H вводится как ограниченный самосопряженный оператор в прямой сумме нульчастичного, одночастичного и двухчастичного подпространств фоковского пространства. В пункте 3, пользуясь свойствами обобщенной модели Фридрихса описан существенный спектр оператора H. В пункте 4 получена формула для дискретного спектра оператора H и доказано, что оператор H может иметь четыре простых собственных значения. В пункте 5 найден явный вид резольвенты оператора H.

2. Блочно-операторная матрица

Пусть $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$- d-мерный тор, т.е. куб $(-\pi,\pi]^{\mathrm{d}}$ - с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^{\mathrm{d}}$, где $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$- множества всех вещественных и целых чисел, соответственно.

Пусть $\mathbb{C}$ - одномерное комплексное пространство, а $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^n)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^n$, $n=1,2$.

Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0=\mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1=L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ и $\mathcal{H}_2=L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$, т.е. $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$. Пространства $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ называются нольчастичным, одночастичным и двухчастичным подпространствами фоковского пространства $\mathcal{F}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ над $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$, соответственно.

Известно, что всякий линейный ограниченный оператор H, действующий в $\mathcal{H}$ всегда представляется как 3×3 блочно-операторная матрица

$$H=\begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & H_{02} \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} \\ H_{20} & H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

с линейными ограниченными операторами $H_{ij}:\mathcal{H}_j\to\mathcal{H}_i, i,j=0,1,2.$

Операторы H_{01}, H_{02} и H_{12} называются операторами уничтожения, а операторы H_{10}, H_{20} и H_{21} называются операторами рождения [2].

В настоящей работе рассмотрим случай, когда число рождений и уничтожений частиц равно единице. Это означает, что $H_{ij} \equiv 0$ при $|i-j|>1$.

Всюду в работе будем рассматривать блочно-операторную матрицу H, определенную по формуле (1), со следующими матричными элементами

$$H_{00}f_0 = w_0 f_0, \quad H_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^{\rm d}} v_1(s) f_1(s) ds,$$

$$H_{10} \equiv H_{01}^*, \quad (H_{11}f_1)(p) = w_1(p) f_1(p), \quad (H_{12}f_2)(p) = \int_{\mathbb{T}^{\rm d}} v_2(s) f_2(p,s) ds,$$

$$H_{21} \equiv H_{12}^*, \quad (H_{22}f_2)(p,q) = w_2(p,q) f_2(p,q).$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i=0,1,2$, w_0 - фиксированное вещественное число, $w_1(\cdot)$, $v_i(\cdot)$, $i=1,2$ и $w_2(\cdot,\cdot)$ - вещественно-непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\rm d}$ и $(\mathbb{T}^{\rm d})^2$, соответственно, а H_{ij}^* $(i<j)$ - сопряженный оператор к H_{ij}.

Можно легко проверить, что при этих предположениях блочно-операторная матрица H, является ограниченным и самосопряженным оператором в $\mathcal{H}$.

Основной целью данной работы является подробное изучение спектральных свойств блочно-операторной матрицы H, точнее:
а) описание существенного спектра оператора H;
б) исследование дискретного спектра оператора H;
в) нахождение формулы для резольвенты оператора H.

В последующих пунктах мы обсудим вышеуказанные вопросы.

Хорошо известно, что в импульсном представление трехчастичный дискретный оператор Шредингера $\hat{H}$ действует в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^{\rm d})^3)$. После выделения полного квазиимпульса системы $K \in \mathbb{T}^{\rm d}$ оператор $\hat{H}$ разлагается в прямой операторной интеграл (см. например [12, 13])

$$\hat{H} = \int_{\mathbb{T}^{\rm d}} \oplus \hat{H}(K) dK,$$

где ограниченный самосопряженный оператор $\hat{H}(K)$, $K \in \mathbb{T}^{\rm d}$ действует в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma_K)$ ($\Gamma_K \subset (\mathbb{T}^{\rm d})^2$- некоторое многообразие).

Отметим, что блочно-операторная матрица H обладает основными спектральными свойствами трехчастичного дискретного оператора Шредингера $\hat{H}(0)$, где роль двухчастичного дискретного оператора Шредингера играет обобщенная модель Фридрихса [6, 7]. По этой причине блочно-операторная матрица H называется гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на решетке.

На протяжении всей работы под обозначениями $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\rm ess}(\cdot)$ и $\sigma_{\rm disc}(\cdot)$ понимаются спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора, соответственно.

3. Существенный спектр оператора H

В этом пункте с целью описания существенного спектра оператора H сначала изучаются некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса $h(p)$, $p \in \mathbb{T}^{\rm d}$, действующей в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ как 2×2 блочно-операторная матрица

$$h(p) = \begin{pmatrix} h_{00}(p) & h_{01} \\ h_{01}^* & h_{11}(p) \end{pmatrix},$$

где операторы $h_{ii}(p) : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $i = 0,1$ и $h_{01} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0$ определяются по формулам

$$h_{00}(p)f_0 = w_1(p)f_0, \quad h_{01}f_1 = \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_2(s)f_1(s)ds, \quad (h_{11}(p)f_1)(q) = w_2(p,q)f_1(q).$$

Очевидно, что оператор $h(p)$ ограничен и самосопряжён в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Пусть оператор $h_0(p)$ действует в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ как

$$h_0(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{11}(p) \end{pmatrix}.$$

Оператор возмущения $h(p) - h_0(p)$ оператора $h_0(p)$ является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $h(p)$ совпадает с существенным спектром оператора $h_0(p)$. Известно, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(h_0(p)) = [m(p); M(p)]$, где числа $m(p)$ и $M(p)$ определяются следующим образом:

$$m(p) = \min_{q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(p,q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(p,q).$$

Из последних фактов следует, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(h(p)) = [m(p); M(p)]$.

При каждом фиксированном $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(h(p))$ функцию (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $h(p)$)

$$\Delta(p\,; z) = w_1(p) - z - \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v_2^2(s)ds}{w_2(p,s) - z}.$$

Установим связь между собственными значениями оператора $h(p)$ и нулями функции $\Delta(p\,;\cdot)$ [6, 7].

Лемма 1. *При каждом фиксированном $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ оператор $h(p)$ имеет собственное значение $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(h(p))$ тогда и только тогда, когда $\Delta(p\,; z) = 0$.*

Из леммы 1 вытекает, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(h(p)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(h(p)) : \Delta(p\,; z) = 0\}.$$

Так как для любого $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ функция $\Delta(p\,;\cdot)$ является строго убывающей на полуосях $(-\infty; m(p))$ и $(M(p); +\infty)$, отсюда и из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что существуют пределы (конечные или бесконечные)

$$\Delta(p\,; m(p)) = \lim_{z \to m(p)-0} \Delta(p\,; z),$$
$$\Delta(p\,; M(p)) = \lim_{z \to M(p)+0} \Delta(p\,; z).$$

Лемма 2. *При каждом фиксированном $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ оператор $h(p)$ имеет единственное собственное значение, лежащее на $(-\infty; z_0(p))$, $z_0(p) \le m(p)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(p\,; z_0(p)) < 0$.*

Доказательство. Пусть $e(p) \in (-\infty; z_0(p))$, $z_0(p) \le m(p)$ - собственное значение оператора $h(p)$. Тогда по лемме 1 имеем, что $\Delta(p\,; e(p)) = 0$. Так как при каждом фиксированном $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ функция $\Delta(p\,;\cdot)$ монотонно убывает на $(-\infty; m(p))$, то $\Delta(p\,; z_0(p)) < \Delta(p\,; e(p)) = 0$.

Обратно, пусть для некоторого $z_0(p)$, $z_0(p) \leq m(p)$ выполняется условие $\Delta(p\,; z_0(p)) < 0$. Так как для любого $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ имеет место $\lim\limits_{z\to-\infty} \Delta(p\,; z) = +\infty$ и функция $\Delta(p\,; \cdot)$ монотонна убывает и непрерывна по z на полуоси $(-\infty; z_0(p))$, то существует единственное число $e(p) \in (-\infty; z_0(p))$ такое, что $\Delta(p\,; e(p)) = 0$. По лемме 1 число $e(p)$ является собственным значением оператора $h(p)$. Лемма 2 доказана.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 2.

Лемма 3. *При каждом фиксированном $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ оператор $h(p)$ имеет единственное собственное значение, лежащее на $(z_1(p); +\infty)$, $z_1(p) \geq M(p)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(p\,; z_1(p)) > 0$.*

Из лемм 2 и 3 вытекают следующие следствия.

Следствие 1. *Если при некотором $p_0 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ имеют место $\Delta(p_0\,; m(p_0)) < 0$ и $\Delta(p_0\,; M(p_0)) > 0$, то оператор $h(p_0)$ имеет два простых собственных значения e_1 и e_2 таких, что $e_1 < m(p_0)$ и $e_2 > M(p_0)$.*

Положим

$$m = \min_{p,q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(p,q), \quad M = \max_{p,q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(p,q).$$

Следствие 2. *Если для любого $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ верны $\Delta(p\,; m) < 0$ и $\Delta(p\,; M) > 0$, то при всех $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ оператор $h(p)$ имеет два простых собственных значения $e_1(p)$, $e_2(p)$, причем $e_1(p) < m$ и $e_2(p) > M$.*

Докажем еще одно утверждение.

Лемма 4. *Пусть функции $v_2(\cdot)$, $w_1(\cdot)$ и $w_2(\cdot,\cdot)$ определены следующим образом*

$$v_2(p) \equiv \sqrt{\mu}, \quad w_1(p) = \varepsilon(p) - 2\mathrm{d}, \quad w_2(p,q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q),$$

где $\mu > 0$, а функция $\varepsilon(\cdot)$ определяется по формуле

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{\mathrm{d}} (1 - \cos p_i),\ p = (p_1, \ldots, p_{\mathrm{d}}) \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}.$$

Если

$$\mu > \mu_0 = 6\mathrm{d} \left(\int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{ds}{4\mathrm{d} - \varepsilon(s)} \right)^{-1},$$

то для любого $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ верны $\Delta(p\,; 0) < 0$ и $\Delta(p\,; 4\mathrm{d}) > 0$. Здесь $m = 0$, $M = 4\mathrm{d}$.

Доказательство. Положим $\overrightarrow{0} = (0, \ldots, 0)$, $\overrightarrow{\pi} = (\pi, \ldots, \pi) \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Очевидно, что функция $w_2(\cdot,\cdot)$ имеет единственный невырожденный нулевой минимум (т.е. $m = 0$) в точке $(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{0}) \in (\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$ и единственный невырожденный максимум, равный $4\mathrm{d}$ (т.е. $M = 4\mathrm{d}$) в точке $(\overrightarrow{\pi}, \overrightarrow{\pi}) \in (\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$. Поэтому при любом $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ существуют конечные или бесконечные интегралы

$$\int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{ds}{\varepsilon(p) + \varepsilon(s)} > 0, \quad \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{ds}{\varepsilon(p) + \varepsilon(s) - 4\mathrm{d}} < 0.$$

В случае $\mathrm{d} \geq 3$ эти интегралы являются конечными при всех $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Действительно, пусть

$$U_\delta = \{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}} : |p| < \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Существуют числа $C_1, C_2 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$C_1|p|^2 \leq \varepsilon(p) \leq C_2|p|^2, \quad p \in U_\delta;$$

$$\varepsilon(p) \geq C_1, \quad p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}} \setminus U_\delta.$$

Тогда, используя последние неравенства при всех $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ имеем

$$0 < \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{ds}{\varepsilon(p)+\varepsilon(s)} \leq \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{ds}{\varepsilon(s)} \leq C_1 \int\limits_{U_\delta} \frac{ds}{|p|^2} + C_2 < \infty.$$

Аналогично показывается конечность второго интеграла.

Из определении функций $v_2(\cdot)$, $w_1(\cdot)$ и $w_2(\cdot,\cdot)$ следует, что при всех $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $\mu > 0$ имеет место соотношение

$$\Delta(p\,;0) = \varepsilon(p) - 2\mathrm{d} - \mu \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{ds}{\varepsilon(p)+\varepsilon(s)} < 0.$$

Пусть теперь $\mu > \mu_0$. Тогда, учитывая соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{ds}{4\mathrm{d}-\varepsilon(p)-\varepsilon(s)} - \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{ds}{4\mathrm{d}-\varepsilon(s)} = \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{\varepsilon(p)ds}{(4\mathrm{d}-\varepsilon(p)-\varepsilon(s))(4\mathrm{d}-\varepsilon(s))} \geq 0, \quad p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}},$$

и тот факт, что функция $w_1(\cdot)$ имеет нулевой минимум в точке $\overrightarrow{0} \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ имеем, что при всех $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ справедливо соотношение

$$\Delta(p\,;4\mathrm{d}) \geq \Delta(\overrightarrow{0}\,;4\mathrm{d}) = -6\mathrm{d} + \mu \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{ds}{4\mathrm{d}-\varepsilon(s)} > 0.$$

Лемма 4 доказана.

Следующая теорема описывает существенный спектр оператора H.

Теорема 1. 1) *Существенный спектр оператора H не зависит от параметра w_0 и функции $v_1(\cdot)$, и для него имеет место равенство*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \bigcup_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \sigma_{\mathrm{disc}}(h(p)) \cup [m; M]. \tag{2}$$

2) *Множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ представляет собой объединение не более чем трех отрезков. Более того, если для любого $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ верны $\Delta(p\,;m) < 0$ и $\Delta(p\,;M) > 0$, то $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ является объединением трех непересекающихся отрезков.*

Доказательство. 1) При доказательстве утверждения 1) теоремы 1 равенство (2) доказывается аналогично доказательству теоремы 1 из работы [9], а независимость множества $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ от параметра w_0 и функции $v_1(\cdot)$ вытекает из строения множества, стоящего в правой части равенства (2). Поэтому доказательство утверждения 1) теоремы 1 не приводим.

2) Сначала докажем, что множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ представляет собой объединение не более чем трех отрезков. В силу лемм 2 и 3 для любого $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ оператор $h(p)$ имеет не более двух простых собственных значений, лежащих вне отрезка $[m; M]$. Так как функции $v_2(\cdot)$, $w_1(\cdot)$ и $w_2(\cdot,\cdot)$ непрерывны на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$, соответственно, эти собственные значения являются непрерывными функциями (в своих областях определения) по переменной p. Поэтому множество $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \sigma_{\mathrm{disc}}(h(p))$ состоит из объединения не более чем двух отрезков. Следовательно, в силу равенства (2) $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ представляет собой объединение не более чем трех отрезков.

Отметим, что если для любого $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ верны $\Delta(p\,;m) < 0$ и $\Delta(p\,;M) > 0$, то в силу следствия 2 при всех $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ оператор $h(p)$ имеет два простых собственных значения $e_1(p) < m$ и $e_2(p) > M$. Тогда из непрерывности функции $e_i(\cdot)$ на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ следует, что область значений $\mathrm{Im} e_i$ этой функции есть отрезок, причем

$$\mathrm{Im} e_1 \cap (-\infty; m) = \mathrm{Im} e_1, \quad \mathrm{Im} e_2 \cap (M; \infty) = \mathrm{Im} e_2.$$

В этом случае равенство (2) записывается как

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \mathrm{Im} e_1 \cup [m; M] \cap \mathrm{Im} e_2.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Определение 1. *Множества* $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \sigma_{\mathrm{disc}}(h(p))$ *и* $[m; M]$ *называются двухчастичной и трехчастичной ветвями существенного спектра оператора* H *и обозначаются через* $\sigma_{\mathrm{two}}(H)$ *и* $\sigma_{\mathrm{three}}(H)$, *соответственно.*

4. Дискретный спектр оператора H

В области $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ определим регулярную функцию

$$\Omega(z) = w_0 - z - \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v_1^2(s)ds}{\Delta(s\,; z)}.$$

Сформулируем результат о дискретном спектре оператора H.

Теорема 2. 1) *Имеет место равенство*

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(H) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(H) : \Omega(z) = 0\}.$$

2) *Оператор* H *имеет не более четырех простых собственных значений.*

Доказательство. 1) Сначала заметим, что для доказательство утверждения 1) теоремы 2 достаточно показать, что число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда $\Omega(z) = 0$.

Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(H)-$ собственное значение оператора H и $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}-$ соответствующая вектор-функция. Тогда f_0, f_1 и f_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered} (w_0 - z) f_0 + \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_1(s) f_1(s) ds = 0; \\ v_1(p) f_0 + (w_1(p) - z) f_1(p) + \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_2(s) f_2(p, s) ds = 0; \\ v_2(q) f_1(p) + (w_2(p, q) - z) f_2(p, q) = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Так как $z \notin \sigma_{\mathrm{three}}(H)$, из третьего уравнения системы (3) для f_2 имеем

$$f_2(p, q) = -\frac{v_2(q) f_1(p)}{w_2(p, q) - z}. \tag{4}$$

Подставляя выражение (4) для f_2 во второе уравнение системы (3) получим, что система уравнений (3) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{gathered} (w_0 - z) f_0 + \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_1(s) f_1(s) ds = 0; \\ v_1(p) f_0 + \Delta(p\,; z) f_1(p) = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

имеет нетривиальное решение. Из условия $z \notin \sigma_{\rm two}(H)$ следует, что $\Delta(p\,;z) \neq 0$ при всех $p \in \mathbb{T}^{\rm d}$. Поэтому из второго уравнения системы (5) для f_1 имеем

$$f_1(p) = -\frac{v_1(p)f_0}{\Delta(p\,;z)}.$$

Полученное выражение для f_1 подставим в первое уравнение системы (5) и получим, что эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\Omega(z) = 0$. Утверждение 1) теоремы 2 доказано.

2) Так как оператор H является самосопряженным, его дискретный спектр вещественен. Поэтому исследуем вещественные нули функции $\Omega(\cdot)$. Из определения функции $\Omega(\cdot)$ вытекает, что она регулярна в $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\rm ess}(H)$. Простые вычисления показывают, что

$$\frac{d}{dz}\Omega(z) = -1 - \int\limits_{\mathbb{T}^{\rm d}} \frac{v_1^2(s)}{\Delta^2(s\,;z)}\left(1 + \int\limits_{\mathbb{T}^{\rm d}} \frac{v_2^2(t)dt}{(w_2(s,t)-z)^2}\right)ds, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\rm ess}(H).$$

Очевидно, что $\frac{d}{dz}\Omega(z) < 0$ при всех $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\rm ess}(H)$. Это и означает, что функция $\Omega(\cdot)$ монотонно убывает в $\mathbb{R} \setminus \sigma_{\rm ess}(H)$. В силу теоремы 1 множество $\sigma_{\rm ess}(H)$ состоит из объединения не более чем трех отрезков, поэтому из монотонности функции $\Omega(\cdot)$ вытекает, что эта функция может иметь четыре простых нулей в $\mathbb{R} \setminus \sigma_{\rm ess}(H)$. Теперь утверждение 1) теоремы 2 завершает доказательство утверждения 2) этой теоремы.

5. Резольвента оператора H

В этом пункте описано строение резольвенты оператора H. Сначала отметим, что в силу теорем 1 и 2 для спектра оператора H имеет место равенство

$$\sigma(H) = \bigcup_{p \in \mathbb{T}^{\rm d}} \sigma_{\rm disc}(h(p)) \cup [m; M] \cup \{z : \Omega(z) = 0\}.$$

При каждом фиксированном $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$ введем блочно-операторную матрицу $R(z)$, действующую в $\mathcal{H}$ как

$$R(z) = \begin{pmatrix} R_{00}(z) & R_{01}(z) & R_{02}(z) \\ R_{10}(z) & R_{11}(z) & R_{12}(z) \\ R_{20}(z) & R_{21}(z) & R_{22}(z) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где матричные элементы $R_{ij}(z) : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i,j = 0,1,2$ определяются равенствами:

$$R_{00}(z)g_0 = \frac{g_0}{\Omega(z)}, \quad R_{01}(z)g_1 = -\frac{1}{\Omega(z)}\int\limits_{\mathbb{T}^{\rm d}} \frac{v_1(s)g_1(s)}{\Delta(s\,;z)}ds,$$

$$R_{02}(z)g_2 = \frac{1}{\Omega(z)}\int\limits_{\mathbb{T}^{\rm d}}\int\limits_{\mathbb{T}^{\rm d}} \frac{v_1(s)v_2(t)g_2(s,t)dsdt}{\Delta(s\,;z)(w_2(s,t)-z)}, \quad (R_{10}(z)g_0)(p) = -\frac{v_1(p)g_0}{\Omega(z)\Delta(p\,;z)},$$

$$(R_{11}(z)g_1)(p) = \frac{g_1(p)}{\Delta(p\,;z)} + \frac{v_1(p)}{\Omega(z)\Delta(p\,;z)}\int\limits_{\mathbb{T}^{\rm d}} \frac{v_1(s)g_1(s)}{\Delta(s\,;z)}ds,$$

$$(R_{20}(z)g_0)(p) = \frac{v_1(p)v_2(q)g_0}{\Omega(z)\Delta(p\,;z)(w_2(p,q)-z)},$$

$$(R_{12}(z)g_2)(p) = -\frac{1}{\Delta(p\,;z)} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{v_2(s)g_2(p,s)}{w_2(p,s)-z} ds$$
$$- \frac{v_1(p)}{\Omega(z)\Delta(p\,;z)} \int\limits_{\mathbb{T}^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{v_1(s)v_2(t)g_2(s,t)dsdt}{\Delta(s\,;z)(w_2(s,t)-z)},$$

$$(R_{21}(z)g_1)(p,q) = -\frac{v_2(q)g_1(p)}{\Delta(p\,;z)(w_2(p,q)-z)} - \frac{\Omega^{-1}(z)v_1(p)v_2(q)}{\Delta(p\,;z)(w_2(p,q)-z)} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{v_1(s)g_1(s)}{\Delta(s\,;z)} ds,$$

$$(R_{22}(z)g_2)(p,q) = \frac{g_2(p,q)}{w_2(p,q)-z} + \frac{v_2(q)}{\Delta(p\,;z)(w_2(p,q)-z)} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{v_2(s)g_2(p,s)}{w_2(p,s)-z} ds$$
$$+ \frac{v_1(p)v_2(q)}{\Omega(z)\Delta(p\,;z)(w_2(p,q)-z)} \int\limits_{\mathbb{T}^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{v_1(s)v_2(t)g_2(s,t)dsdt}{\Delta(s\,;z)(w_2(s,t)-z)}.$$

Теорема 3. *При каждом фиксированном* $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$ *оператор* $R(z)$, *определенный по формуле* (6), *является резольвентой оператора* H.

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$. Для построения резольвенты $R(z)$ нам понадобится рассмотреть уравнение $Hf - zf = g$ для любых $f = (f_0, f_1, f_2)$, $g = (g_0, g_1, g_2) \in \mathcal{H}$. Для удобства, это уравнение напишем в виде следующей системы уравнений

$$(w_0 - z)f_0 + \int\limits_{\mathbb{T}^d} v_1(s)f_1(s)ds = g_0;$$
$$v_1(p)f_0 + (w_1(p)-z)f_1(p) + \int\limits_{\mathbb{T}^d} v_2(s)f_2(p,s)ds = g_1(p); \tag{7}$$
$$v_2(q)f_1(p) + (w_2(p,q)-z)f_2(p,q) = g_2(p,q).$$

Так как $z \notin \sigma_{\mathrm{three}}(H)$, то для любых $p, q \in \mathbb{T}^d$ верно $w_2(p,q) - z \neq 0$. Тогда из третьего уравнения системы (7) для f_2 находим

$$f_2(p,q) = \frac{g_2(p,q)}{w_2(p,q)-z} - \frac{v_2(q)f_1(p)}{w_2(p,q)-z}. \tag{8}$$

Подставляя полученное выражение (8) для f_2 во второе уравнение системы (7), имеем

$$v_1(p)f_0 + \Delta(p\,;z)f_1(p) + \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{v_2(s)g_2(p,s)ds}{w_2(p,s)-z} = g_1(p).$$

Учитывая соотношение $z \notin \sigma_{\mathrm{two}}(H)$, из последнего равенства для f_1 имеем

$$f_1(p) = \frac{g_1(p)}{\Delta(p\,;z)} - \frac{1}{\Delta(p\,;z)} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{v_2(s)g_2(p,s)ds}{w_2(p,s)-z} - \frac{v_1(p)f_0}{\Delta(p\,;z)}. \tag{9}$$

Далее, подставляя найденное выражение (9) для f_1 в первое уравнение системы (7), получим уравнение

$$\Omega(z)f_0 = g_0 - \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{v_1(s)g_1(s)ds}{\Delta(s\,;z)} + \int\limits_{\mathbb{T}^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{v_1(s)v_2(t)g_2(s,t)dsdt}{\Delta(s\,;z)(w_2(s,t)-z)}$$

которое эквивалентно равенству

$$f_0 = R_{00}(z)g_0 + R_{01}(z)g_1 + R_{02}(z)g_2. \tag{10}$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\Omega(z) \neq 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$.

Продолжая процесс, т.е. подставляя выражение (10) для f_0 в равенство (9) имеем

$$f_1(p) = (R_{10}(z)g_0)(p) + (R_{11}(z)g_1)(p) + (R_{12}(z)g_2)(p).$$

Аналогично получим, что

$$f_2(p,q) = (R_{20}(z)g_0)(p,q) + (R_{21}(z)g_1)(p,q) + (R_{22}(z)g_2)(p,q).$$

Сопоставляя полученные выражения для f_0, f_1 и f_2 через g_0, g_1 и g_2 приходим к равенству $f = R(z)g$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$, $f, g \in \mathcal{H}$. Теорема 3 доказана.

Первый автор выражает свою признательность университету Аквила за гостеприимство. Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ценные и полезные замечания.

Список литературы

[1] A.I. Mogilner, *Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results*, Advances in Soviet Mathematics, **5** (1991), 139–194. MR1130187

[2] К.О. Фридрихс, *Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве*, Москва: Мир, 1972.

[3] V.A. Malyshev, R.A. Minlos, *Linear infinite-particle operators*, Translations of Mathematical Monographs. 143, AMS, Providence, Rhode Island, U.S.A., 1995. MR1317349

[4] A.E. Lifschitz, *Magnetohydrodynamic and spectral theory*, Vol. 4 of Developments in Electromagnetic Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989. MR0990647

[5] B. Thaller, *The Dirac equation*, Texts and Monographs in Physics. Springer, Berlin, 1992. MR1219537

[6] S. Albeverio, S.N. Lakaev, T.H. Rasulov, *On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. Discrete Spectrum Asymptotics*, Journal of Statistical Physics, **127**:2 (2007), 191–220. MR2314345

[7] S. Albeverio, S.N. Lakaev, T.H. Rasulov, *The Efimov Effect for a Model Operator Associated with the Hamiltonian of non Conserved Number of Particles*, Methods of Functional Analysis and Topology, **13**:1 (2007), 1–16. MR2308575

[8] С.Н. Лакаев, Т.Х. Расулов, *Об эффекте Ефимова в модели теории возмущений существенного спектра*, Функциональный анализ и его приложения, **37**:1 (2003), 81–84. MR1988012

[9] С.Н. Лакаев, Т.Х. Расулов, *Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов*, Математические заметки, **73**:4 (2003), 556–564. MR1991901

[10] R.A. Minlos, H. Spohn, *The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons*, Topics in Statistical and Theoretical Physics, American Mathematical Society Translations–Series 2, **177** (1996), 159–193. MR1409174

[11] Ю.В. Жуков, Р.А. Минлос, *Спектр и рассеяние в модели "спин-бозон" с не более чем тремя фотонами*, Теоретическая и математическая физика, **103**:1 (1995), 63–81. MR1470938

[12] С.Н. Лакаев, М.Э. Муминов, *Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке*, Теоретическая и математическая физика, **135**:3, (2003), 478–503. MR1984451

[13] S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov, *Schrödinger Operators on Lattices. The Efimov Effect and Discrete Spectrum Asymptotics*, Annales Henri Poincaré, **5** (2004), 743–772. MR2090450

Тулкин Хусенович Расулов
Бухарский государственный университет,
ул. М. Иквол 11,
200100, Бухара, Узбекистан
E-mail address: rth@mail.ru

Ирода Олимовна Умарова
Самаркандский Профессиональный Колледж Железнодорожного Транспорта,
ул. Ибн-Холдун 79,
140102, Самарканд, Узбекистан
E-mail address: i.umarova@rambler.ru