S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 354–361 (2014) УДК 517.53
MSC 30J05,30J10

КРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ВЕСОВЫХ КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Ф.А. ШАМОЯН, В.А.БЕДНАЖ

Abstract. The paper investigates the problem of interpolation in the classes N_α, where the interpolation nodes are within the corners Stolz order α.

Keywords: multiple interpolation, Blaschke product, Stolz angle.

1. Введение

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ - множество всех голоморфных в D функций.

$$N_\alpha = \left\{ f \in H(D) : sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^r (r-t)^{\alpha-1} ln|f(te^{i\varphi})|dt \right)^+ d\varphi < +\infty \right\},$$

где $\alpha > -1,\ \ln^+ a = \max(\ln a, 0),\ a \in R_+ = [0, +\infty)$.

Классы N_α были введены М.М. Джрбашяном в работе [1], они являются естественным обобщением класса Р. Неванлинны функций ограниченного вида, при этом, если $\alpha = 0$, то классы N_α совпадают с классом функций ограниченного вида в круге. Рассматриваемые классы возникают во многих задачах комплексного и функционального анализа. Решение задачи интерполяции в различных классах аналитических функций играют существенную роль не только при решении внутренних задач комплексного анализа, но и в других разделах анализа (см.[2],[3]).

В статье исследуется задача интерполяции в классах N_α, когда узлы интерполяции находятся в нескольких углах Штольца. При $\alpha = 0$, то есть в

Shamoyan F.A., Bednazh V.A., Multiple interpolation in weighted classes of analytic functions in a disk.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-97508).

Поступила 4 декабря 2013 г., опубликована 21 мая 2014 г.

классах функций ограниченного вида, такая же задача без кратностей, то есть задача без интерполирования значений производной, решена работах [4],[5], но методы, применяемые в этой работе не проходят при $\alpha > 0$.

Для изложения основных результатов введем ещё следующие обозначения: пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $|\alpha_k| < 1$ и $\{\gamma_k\}_1^\infty$ - произвольные последовательности комплексных чисел и $s_j \geq 1$, $j \geq 1$- кратность появления числа α_j на отрезке $\{\alpha_k\}_1^j$. Требуется выявить критерии для $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и $\{\gamma_k\}_1^\infty$, обеспечивающие существование функции $f \in N_\alpha$, удовлетворяющей интерполяционным условиям

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k, k = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

и построить аппарат для явного представления решений указанной задачи.

Кроме введенного параметра s_j, $j \geq 1$ обозначим через p_j кратность появления числа α_j во всей последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$. Очевидно, что $1 \leq s_j \leq p_j \leq +\infty$. Также отметим, что если последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ подчинена условию Бляшке $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|) < +\infty$, то число p_j конечно при любом целом $j \geq 1$.

Введем в рассмотрение функции

$$B_k(z) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{+\infty} \frac{\alpha_j - z}{1-\overline{\alpha_j}z} \cdot \frac{\overline{\alpha_j}}{|\alpha_j|}, k \geq 1. \tag{2}$$

Заметим, что из определения (2) функции $B_k(z)$ вытекает, что произведение $B_k(z) \cdot \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^{p_k+1}$ аналитично в D и не обращается в нуль в некоторой окрестности точки $z = \alpha_k$. Поэтому для любого целого $k \geq 1$, положив

$$\tau_k(z) = \left\{ B_k(z) \cdot \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^{p_k+1} \cdot g(z) \right\}^{-1}, \tag{3}$$

где $g(z) = exp\frac{l}{(1-z)^{\alpha+1}}$, l - достаточно большое положительное число, можем утверждать, что в достаточно малой окрестности точки $z = \alpha_k$ эта функция разлагается в степенной ряд

$$\tau_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu, |z-\alpha_k| < \eta. \tag{4}$$

Введём в рассмотрение ещё полиномы

$$q_k(z) = \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu, k = 1, 2, \dots \tag{5}$$

Скажем, что последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию $\widetilde{\triangle}_p$, если

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|) < +\infty,$$

$$\prod_{k\neq j}\left|\frac{\alpha_k - \alpha_j}{1-\overline{\alpha_k}\alpha_i}\right| \geq \exp - \frac{\delta}{(1-|\alpha_k|^{\alpha+1})}, \delta > 0,$$

$$sup_{k\geq 1}\{p_k\} = p.$$

И наконец отметим, что если $f \in N_\alpha$, то существует положительное число $c = c(n, f)$, такое что

$$|f^{(k)}(z)| \le \exp \frac{c(n, f)}{(1-|z|)^{\alpha+1}}, k = 1, 2, \dots, n \tag{6}$$

Отсюда естественно возникает вопрос: при каких условиях на последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ любую последовательность $\{\gamma_k\}_1^\infty$ с условием

$$|\gamma_k| \le exp\frac{c(n)}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}, k = 1, 2, \dots$$

можно интерполировать в смысле (1).

Углом Штольца $\Gamma_\alpha(\theta)$ порядка α назовём угол раствора меньше $\frac{\pi}{2(\alpha+1)}$, биссектриса которого совпадает с отрезком $z = re^{i\theta}, 0 \le r < 1$.

Основным результатом статьи является:

Теорема 1. *Пусть последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \widetilde{\triangle_p}$, точки $\{\alpha_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ находятся в конечном числе углов Штольца порядка α ; тогда для любой последовательности $\{\gamma_k\}_1^\infty$, такой что*

$$|\gamma_k| \le exp\frac{c}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}, k = 1, 2, \dots, \tag{7}$$

можно построить,в явном виде, функцию f, $f \in N_\alpha$, являющуюся решением интерполяционной задачи $f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k, k = 1, 2, \dots$

Замечание. Доказательство основной теоремы приводится в случае расположения узлов интерполяции в одном угле Штольца порядка α с вершиной в точке $z = 1$, поскольку при конечном числе точек основные идеи сохраняются, появляются только технические тонкости.

2. Формулировка и доказательство вспомогательных утверждений

Следующие две леммы устанавливаются стандартным образом, их можно вывести из результатов работы первого автора (см.[7], с.81).

Лемма 1. *Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ находятся в конечном числе углов Штольца $\Gamma_\alpha(\theta)$ порядка α, тогда справедлива оценка*

$$|g(\alpha_k)| \ge c_0 \cdot \exp \frac{c}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}, k = 1, 2, \dots$$

Для любой точки $z \in D$ рассмотрим круг

$$K_\rho(z) = \left\{\varsigma : |\varsigma - z| \le \rho = \frac{1}{2} \cdot \exp - \frac{\delta}{(1-|\alpha_k|)}\right), \ \delta > 0.$$

Лемма 2. *Пусть точки $\alpha_k, k = 1, 2, \dots$ находятся в конечном числе углов Штольца $\Gamma_\alpha(\theta)$ порядка α, тогда*

$$max_{t\in K_\rho(\alpha_k)}|g^{-1}(t)| \le \widetilde{c} \cdot |g^{-1}(\alpha_k)|, k = 1, 2, \dots$$

Лемма 3. *Пусть последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $z_k \in D$, $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяет условию $\widetilde{\triangle_p}$, тогда*

$$\max_{t\in K_\rho(\alpha_k)} |B_k^{-1}(t)| \le c \cdot |B_k^{-1}(\alpha_k)|, k = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Положим $u(t)=\ln\left|\frac{1-\overline{\alpha_j}t}{\alpha_j-t}\right|$, очевидно, что u - гармоническая функция в $K_{\frac{\rho}{2}}(\alpha_k)$, при этом $u(t)\geq 0$ при $t\in K_{\frac{\rho}{2}}(\alpha_k)$. Положим $z=\frac{2(t-\alpha_k)}{\rho}$, тогда функция $\widetilde{u}(z)=u(\frac{\rho z}{2}+\alpha_k)$ - неотрицательная гармоническая.

По формуле Пуассона

$$\widetilde{u}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-\varphi)\cdot\widetilde{u}(e^{i\theta})d\theta.$$

Но поскольку $\widetilde{u}\geq 0$, $P_r(\theta-\varphi)\leq\frac{1+r}{1-r}$, то

$$\widetilde{u}(z)\leq\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1+r}{1-r}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{u}(e^{i\theta})d\theta.$$

По теореме о среднем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{u}(e^{i\theta})d\theta=\widetilde{u}(0)=u(\alpha_k).$$

Поэтому $\widetilde{u}(z)\leq\frac{1+r}{1-r}\widetilde{u}(0)=\frac{1+r}{1-r}u(\alpha_k)$ или $u(\frac{\rho z}{2}+\alpha_k)\leq\frac{1+r}{1-r}u(\alpha_k)$. Положим $z=re^{i\varphi}$,$r=1$, тогда имеем

$$u(\frac{\rho e^{i\varphi}}{2}+\alpha_k)\leq 3u(\alpha_k),$$

то есть если $t=\frac{\rho e^{i\varphi}}{2}+\alpha_k$ или $|t-\alpha_k|\leq\frac{\rho}{2}$ получим

$$u(t)\leq 3u(\alpha_k),$$

при этом $K_{\frac{\rho}{2}}(\alpha_k)\cap K_{\frac{\rho}{2}}(\alpha_j), k\neq j$.

Имеем

$$\max_{t\in K_{\frac{\rho}{2}}(\alpha_k)}\ln\left|\frac{1-\overline{\alpha_j}t}{\alpha_j-t}\right|\leq 3\cdot\ln\left|\frac{1-\overline{\alpha_j}\alpha_k}{\alpha_j-\alpha_k}\right|.$$

Таким образом,

$$\max_{t\in K_\rho(\alpha_k)}\sum_{k\neq j}^{+\infty}\ln\left|\frac{1-\overline{\alpha_j}t}{\alpha_j-t}\right|\leq 3\cdot\sum_{k\neq j}^{+\infty}\ln\left|\frac{1-\overline{\alpha_j}\alpha_k}{\alpha_j-\alpha_k}\right|$$

или

$$\max_{t\in K_\rho(\alpha_k)}\prod_{k\neq j}^{+\infty}\ln\left|\frac{1-\overline{\alpha_j}t}{\alpha_j-t}\right|\leq e^3\cdot\prod_{k\neq j}^{+\infty}\ln\left|\frac{1-\overline{\alpha_j}\alpha_k}{\alpha_j-\alpha_k}\right|.$$

Следовательно,

$$\max_{t\in K_\rho(\alpha_k)}|B_k^{-1}(t)|=\max_{t\in K_\rho(\alpha_k)}\prod_{k\neq j}^{+\infty}\ln\left|\frac{1-\overline{\alpha_j}t}{\alpha_j-t}\right|\leq c\cdot|B_k^{-1}(\alpha_k)|, k=1,2,\dots$$

Лемма доказана.

Определим теперь систему $\{\widetilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ аналитических в D функций, положив

$$\widetilde{\Omega}_k(z)=\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}q_k(z)}{(s_k-1)!\tau_k(z)}=$$

$$=\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^{p_k+1}\cdot\frac{B_k(z)g(z)}{(s_k-1)!}\cdot\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^{\nu+s_k-1}, k=1,2,\dots, \quad (8)$$

где $a_\nu(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left[\left\{B_k(z)\cdot\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^{p_k+1}\cdot g(z)\right\}^{-1}\right]_{z=\alpha_k}$.

В следующих двух леммах устанавливаются свойства функций $\widetilde{\Omega}_k(z)$ и коэффициентов $a_\nu(\alpha_k)$.

Лемма 4. *Функции системы $\{\widetilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ обладают следующими интерполяционными свойствами*

$$\widetilde{\Omega}_k^{(r)}(\alpha_k)=\begin{cases}1, & r=s_k-1;\\ 0, & r\neq s_k-1,\ 0\le r\le p_k-1.\end{cases}$$

Доказательство. Из разложения (4) функции $\tau_k(z)$, принимая во внимание определения (5)и (8) полинома $q_k(z)$ и функции $\widetilde{\Omega}_k(z)$, получим для последней следующее представление:

$$\widetilde{\Omega}_k(z)=\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!\tau_k(z)}\cdot\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu=$$

$$=\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!\tau_k(z)}\cdot\left(\sum_{\nu=0}^{+\infty}a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu-\sum_{\nu=p_k-s_k+1}^{+\infty}a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu\right)=$$

$$=\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!}-\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^{p_k+1}\cdot\frac{B_k(z)g(z)}{(s_k-1)!}\cdot\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^{\nu+s_k-1},$$

причём функция $\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^{p_k+1}\cdot\frac{B_k(z)g(z)}{(s_k-1)!}\cdot\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^{\nu+s_k-1}$ в точке $z=\alpha_k$ имеет нуль кратности p_k.

Следовательно, первая и вторая из формул леммы непосредственно следуют из разложения функции $\widetilde{\Omega}_k(z)$.

Лемма доказана.

Теперь,для построения решения интерполяционной задачи, рассмотрим системы типа Эрмита. Отметим, что в безвесовом случае, в классах Харди H_2 такие построения выполнялись в работе [1].

Лемма 5. *Если последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию $\widetilde{\triangle}_p$, то для коэффициентов $a_\nu(\alpha_k)$ разложения справедливы оценки*

$$|a_\nu(\alpha_k)|\le a(\nu),\ 0\le\nu\le p_k,\ k\ge1,$$

где $a(\nu)$ зависит только от ν.

Доказательство.

$$a_\nu(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left[\left\{B_k(z)\cdot\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^{p_k+1}\cdot g(z)\right\}^{-1}\right]_{z=\alpha_k},\ 0\le\nu\le p_k,\ k\ge1.$$

По формуле Лейбница

$$\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left[\left\{B_k(z)\cdot\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^{p_k+1}\cdot g(z)\right\}^{-1}\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{\nu} C_{\nu}^{j}\cdot\frac{1}{(1-|\alpha_k|^2)^{p_k+1}}\cdot\left((1-\overline{\alpha_k}z)^{p_k+1}\right)^{(\nu-j)}\cdot\left(\frac{1}{B_k(z)g(z)}\right)^{(j)}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\nu} C_{\nu}^{j}\frac{(-1)^{\nu-j}\cdot\overline{\alpha_k}^{\nu-j}\cdot(p_k+1)\cdot\ldots\cdot(p_k+1-\nu+j+1)}{(1-|\alpha_k|^2)^{p_k+1}}\left((1-\overline{\alpha_k}z)^{p_k+1-\nu+j}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{B_k(z)g(z)}\right)^{(j)}$$

Следовательно,

$$\frac{d^{\nu}}{dz^{\nu}}\left[\left\{B_k(z)\cdot\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^{p_k+1}\cdot g(z)\right\}^{-1}\right]_{z=\alpha_k}\leq$$

$$\leq\sum_{j=0}^{\nu} C_{\nu}^{j}\frac{|\overline{\alpha_k}^{\nu-j}|\cdot(p_k+1)\cdot\ldots\cdot(p_k+1-\nu+j+1)}{(1-|\alpha_k|^2)^{p_k+1}}\left((1-|\alpha_k|^2)^{p_k+1-\nu+j}\right)\times$$
$$\times\left|\left(\frac{1}{B_k(z)g(z)}\right)^{(j)}\right|_{z=\alpha_k}\leq$$
$$\leq\sum_{j=0}^{\nu} C_{\nu}^{j}\cdot c_1(\nu)\cdot(1-|\alpha_k|^2)^{-\nu+j}\cdot\left|\left(\frac{1}{B_k(z)g(z)}\right)^{(j)}\right|_{z=\alpha_k}.$$

Для любой точки $z\in D$ рассмотрим круг

$$K_{\rho}(z)=\left\{\varsigma:|\varsigma-z|\leq\rho=\frac{1}{2}\cdot\exp-\frac{\delta}{(1-|\alpha_k|)}\right),\ \delta>0$$

Согласно интегральной формуле Коши

$$\left[\left(\frac{1}{B_k(z)g(z)}\right)^{(j)}\right]_{z=\alpha_k}=\frac{j!}{2\pi i}\int_{\partial K_{\rho}(\alpha)}\frac{B_k^{-1}(t)g^{-1}(t)}{(t-\alpha_k)^{j+1}}dt,\ k\geq 1.$$

Поэтому, используя оценки из леммы 3 и леммы 4, имеем

$$\left|\left(\frac{1}{B_k(z)g(z)}\right)^{(j)}\right|_{z=\alpha_k}=\frac{j!}{\rho^{j+1}}\frac{\max_{\partial K_{\rho}(\alpha)}|B_k^{-1}(t)g^{-1}(t)|}{(1-|\alpha_k|^2)^{j}}\leq$$
$$\leq c_2\frac{|B_k^{-1}(\alpha_k)g^{-1}(\alpha_k)|}{(1-|\alpha_k|^2)^{j}},\ k\geq 1.$$

Таким образом,

$$\frac{d^{\nu}}{dz^{\nu}}\left[\left\{B_k(z)\cdot\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k}z}\right)^{p_k+1}\cdot g(z)\right\}^{-1}\right]_{z=\alpha_k}\leq$$
$$\leq\sum_{j=0}^{\nu} C_{\nu}^{j}\cdot c_1(\nu)\cdot(1-|\alpha_k|^2)^{-\nu+j}\cdot c_2\frac{|B_k^{-1}(\alpha_k)g^{-1}(\alpha_k)|}{(1-|\alpha_k|^2)^{j}},\ k\geq 1.$$

Следовательно, справедливы оценки

$$|a_{\nu}(\alpha_k)|\leq\sum_{j=0}^{\nu} c_3(\nu)\cdot(1-|\alpha_k|^2)^{-\nu+j}\cdot\frac{|B_k^{-1}(\alpha_k)g^{-1}(\alpha_k)|}{(1-|\alpha_k|^2)^{j}}\leq$$
$$\leq c_4(\nu)\cdot(1-|\alpha_k|^2)^{-\nu}\cdot|B_k^{-1}(\alpha_k)g^{-1}(\alpha_k)|,\ 0\leq\nu\leq p_k,\ k\geq 1$$

Рассмотрим функцию $g(z) = exp\frac{l}{(1-z)^{\alpha+1}}$, $z \in D$, если последовательность точек $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $\alpha_k \in D$, $k = 1, 2, \dots$ расположена в конечном числе углов Штольца порядка α, то согласно Лемме 1

$$|g(\alpha_k)| \geq \exp\frac{d_1}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}},\ d_1 > \max p_k l,\ k = 1, 2, \dots$$

Поэтому,

$$(1-|\alpha_k|^2)^{-\nu} \cdot |B_k^{-1}(\alpha_k)| \cdot |g^{-1}(\alpha_k)| \leq \exp\left\{\nu \ln \frac{1}{(1-|\alpha_k|^2)}\right\} |B_k^{-1}(\alpha_k)| \cdot |g^{-1}(\alpha_k)| \leq$$

$$\leq \exp\left\{\frac{-d_1 + \delta + c(\nu)}{(1-|\alpha_k|)}\right\} < 1.$$

Таким образом,

$$|a_\nu(\alpha_k)| \leq a(\nu),\ 0 \leq \nu \leq p_k,\ k \geq 1,$$

где $a(\nu)$ зависит только от ν.

Лемма доказана.

3. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы. Положим $f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \frac{\widetilde{\Omega}_k(z) g(z)}{g(\alpha_k)}$, $z \in D$. На основании свойства из Леммы 4 будем иметь $f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k, k = 1, 2, \dots$ Докажем, что функция $f \in N_\alpha$, для этого представим её в виде:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k} z}\right)^{p_k+1} \frac{B_k(z) g(z) (z-\alpha_k)^{s_k-1}}{g(\alpha_k)(s_k-1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu =$$

$$= g(z) \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k} z}\right)^{p_k+1} \frac{B_k(z)(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{g(\alpha_k)(s_k-1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\ z \in D,$$

где $g(z) = exp\frac{l}{(1-z)^{\alpha+1}}$, l - достаточно большое положительное число.

Пусть

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha_k} z}\right)^{p_k+1} \frac{B_k(z)(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{g(\alpha_k)(s_k-1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\ z \in D,$$

в таком случае $f(z) = g(z)\varphi(z),\ z \in D$.

Докажем, что $\varphi(z) \in H^1(z)$, для этого, используя свойство коэффициентов $a_\nu(\alpha_k)$ из Леммы 5, оценим $|\varphi|$:

$$|\varphi(z)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\gamma_k| \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\overline{\alpha_k} z|}\right)^{p_k+1} \left|\frac{B_k(z)(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{g(\alpha_k)(s_k-1)!}\right| \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\alpha_k)||z-\alpha_k|^\nu.$$

Имеем

$$\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\overline{\alpha_k} z|}\right)^{p_k+1} |z-\alpha_k|^{s_k-1+\nu} \leq \frac{(1-|\alpha_k|^2)^{p_k+1}}{|1-\overline{\alpha_k} z|^{p_k+2-s_k-\nu}} =$$

$$\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{p_k+2-s_k-\nu} \cdot (1-|\alpha_k|^2)^{s_k+\nu-1}}{|1-\overline{\alpha_k} z|^{p_k+2-s_k-\nu}} \leq \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\overline{\alpha_k} z|}\right)^{p_k+2-s_k-\nu}.$$

Рассмотрим функцию $g(z) = exp\frac{l}{(1-z)^{\alpha+1}}, z \in D$, если последователь-ность точек $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $z_k \in D$, $k = 1, 2, \dots$ расположена в конечном числе углов Штольца $\Gamma_\alpha(\theta)$ порядка α с вершинами в точках $e^{i\theta_m}$, $m = 1, \dots n$, то

$$|g(\alpha_k)| \geq \exp \frac{c_1}{(1 - |\alpha_k|)^{\alpha+1}}, k = 1, 2, \dots .$$

Получаем $|\varphi(z)| \leq c \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\gamma_k|}{|g(\alpha_k)|} \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\overline{\alpha_k} z|}\right)^{p_k+2-s_k-\nu}$.

Далее, используя Лемму 1 и оценку (7), имеем $\frac{|\gamma_k|}{|g(\alpha_k)|} \leq \exp \frac{-c_1+c(\gamma)}{(1-|\alpha_k|)} < 1$.

Таким образом,

$$|\varphi(z)| \leq c \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - |\alpha_k|^2}{|1 - \overline{\alpha_k} z|}\right)^{p_k+2-s_k-\nu}, \ z \in D.$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}|d\theta \leq c \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |\alpha_k|^2)^{p_k+2-s_k-\nu} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1 - \overline{\alpha_k} re^{i\theta}|^{p_k+2-s_k-\nu}} \leq$$

$$\leq c_1 \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |\alpha_k|) < +\infty.$$

И, следовательно, функция $f \in N_\alpha$.

Список литературы

[1] М.М. Джрбашян, *Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H^2*, Изв. Ан Арм. ССР, **9**:5 (1974), 339–373. Zbl 0319.30032

[2] Н.К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, Москва, 1980. MR0575166

[3] N.K. Nikolskii, *Operators, functions and systems*, Amer. math. soc. surveyes and monogrehaps, **92** (2002), 460. MR1864396, MR1892647

[4] А.Г. Нафталевич, *Об интерполировании функций ограниченного вида* , Ученые записки Вильнюсского университета, (1956), 5–27.

[5] A. Hartman, X. Massaneda, A. Nicolau, P. Thomas, *Interpolation in the Nevanlinna and Smirnov classes and harmonic majorant*, Journal of functional analysis, **217**:1 (2004), 1–37. MR2097605

[6] П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p с приложением доказательства Волффа теоремы о короне* , Мир, Москва, 1984. MR0777505

[7] Ф.А. Шамоян, Е.Н. Шубабко, *Введение в теорию весовых L^p -классов мероморфных функций*, изд. БГУ, Брянск, 2009.

Файзо Агитович Шамоян, Вера Аркадьевна Беднаж
Брянский государственный университет
им. ак. И.Г. Петровского,
ул. Бежицкая,14,
241000, Брянск, Россия
E-mail address: verabednazh@rambler.ru