S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

*Том 11 , стр. 362–371 (2014)*

УДК 512.55

MSC 16P10 16W20

# О ГРУППЕ ОБРАТИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕЦ ХАРАКТЕРИСТИКИ $P$

Е.В. ЖУРАВЛЕВ

Abstract. We describe the structure of the unit group of a commutative finite local rings of characteristic $p$ with Jacobson radical $J$ such that $\dim_F J/J^2 = 3$, $\dim_F J^2/J^3 = 1$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = (0)$ and $F = R/J \cong GF(p^r)$, the finite field of $p^r$ elements.

**Keywords:** local rings, finite rings, unit group of a ring.

## 1. Введение

Все кольца, рассматриваемые в данной работе, являются конечными, ассоциативными и содержат единицу. Обозначим через $J = J(R)$ и $R^*$ соответственно радикал Джекобсона и группу обратимых элементов кольца $R$, $F = GF(p^r)$ – конечное поле и $\mathbb{Z}_n$ – кольцо классов вычетов по модулю $n$.

Кольцо $R$ называется локальным, если $R/J = F$ – поле. Все делители нуля локального кольца образуют радикал $J$, и всякий элемент кольца является либо обратимым, либо нильпотентным. Одним из примеров локальных колец являются так называемые кольца Галуа $GR(p^{nr}, p^n)$, представимые в виде $\mathbb{Z}_{p^n}[x]/(f)$, где $p$ – простое число, $f$ – унитарный многочлен степени $r$, образ которого при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}_{p^n}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$ является неприводимым над $\mathbb{Z}_p$ многочленом. В частности, $GR(p^n, p^n) = \mathbb{Z}_{p^n}$ и $GR(p^r, p) = GF(p^r)$.

Следующие предложения содержат хорошо известные результаты из теории конечных колец (см.: [1, 2, 3]).

**Предложение 1.** *Пусть $R$ – локальное кольцо. Тогда существует простое число $p$ и натуральные числа $n$, $r$, такие, что*

(1) $|R| = p^{nr}$;

---

Zhuravlev, E.V., On unit group of a finite local rings of characteristic $p$.



*Поступила 15 марта 2014, опубликована 23 мая 2014 г.*

(2) *$J^n = 0$;*
(3) *$|J| = p^{(n-1)r}$;*
(4) $\mathrm{char} R = p^k$, *где $1 \le k \le n$;*
(5) *Если $n = k$, то $R$ является кольцом Галуа $GR(p^{kr}, p^k)$. В частности, $J = pR$ и $R = \mathbb{Z}_{p^k}[b]$, где $b$ – элемент $R$ мультипликативного порядка $p^r - 1$;*
(6) *Если $\mathrm{char}(R) = p^k$, то $R$ содержит максимальное подкольцо Галуа $R_0 = GR(p^{kr}, p^k) = \mathbb{Z}_{p^k}[b]$ и если $R_0'$ – другое максимальное подкольцо Галуа кольца $R$, то существует обратимый элемент $x \in R$, такой, что $R_0' = xR_0x^{-1}$;*
(7) *Существуют элементы $m_1, \ldots, m_h \in J$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_h \in Aut(R_0)$, такие, что $R$ раскладывается в прямую сумму левых $R_0$-модулей*

$$R = R_0 \oplus R_0 m_1 \oplus \ldots \oplus R_0 m_h,$$

*где $m_i r_0 = r_0^{\sigma_i} m_i$, для всех $i = \overline{1, h}$ и для любого элемента $r_0 \in R_0$. Отсюда, в частности, следует равенство*

$$J = pR_0 \oplus R_0 m_1 \oplus \ldots \oplus R_0 m_h.$$

Множество $\{m_1, m_2, \ldots, m_h\}$ будем называть отмеченным базисом для радикала $J$. Такие базисы впервые были изучены Р. Рагхавендраном (см. [1]) в случае $R_0 = GF(p^r)$.

**Предложение 2.** *Пусть $R$ – локальное кольцо. Тогда*

(1) *Группа $R^*$ кольца $R$ содержит циклическую подгруппу $\langle b \rangle$ порядка $p^r - 1$, и $R^*$ является полупрямым произведением групп $1 + J$ и $\langle b \rangle$;*
(2) *Группа $R^*$ является разрешимой;*
(3) *Если $G$ – подгруппа $R^*$ порядка $p^r - 1$, то группа $G$ сопряжена с $\langle b \rangle$ в $R^*$;*
(4) *Если $R^*$ содержит нормальную подгруппу порядка $p^r - 1$, то множество $K_0 = \langle b \rangle \cup \{0\}$ содержится в центре кольца $R$;*
(5) *$(1 + J^i)/(1 + J^{i+1}) \cong J^i/J^{i+1}$ (как мультипликативная и аддитивная группы).*

Все локальные коммутативные кольца с циклической группой обратимых элементов были определены Р. Гилмером [4]. Р. Рагхавендран (см. [1]) описал структуру мультипликативной группы всех колец Галуа $R = GR(p^{nr}, p^n)$:

$$R^* \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_{p^{n-1}}\right)^r, & \text{если } p \ne 2, \text{ или } p = 2 \text{ и } n \le 2, \\ \mathbb{Z}_{2^r-1} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{n-2}} \times \left(\mathbb{Z}_{2^{n-1}}\right)^{r-1}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь и далее символом $(\mathbb{Z}_n)^m$ обозначим прямое произведение $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \times \ldots \times \mathbb{Z}_n$ из $m$ циклических групп порядка $n$ ($m, n \in \mathbb{N}$).

Г. Гански и Б. Макдональд [5] исследовали строение группы $R^*$ для локальных коммутативных колец $R$ с условием $J^2 = 0$, а именно они доказали, что

$$R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times (\mathbb{Z}_p)^{nr},$$

где $n = \dim_F J/J^2$ и $F = R/J = GF(p^r)$.

К. Чайкунжи в работах [3, 6, 7] привел описание группы $R^*$ для коммутативных локальных колец с радикалом $J$ индекса нильпотентности три. Например, если $\mathrm{char}R = p$, $s = \dim_F J/J^2 = 2$, $t = \dim_F J^2 = 1$, то

$$R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_{p^2}\right)^r \times \left(\mathbb{Z}_p\right)^r \quad \text{или} \quad R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_p\right)^{3r}.$$

Также им были разобраны ситуации $s = 3$, $t = 1$; $s = 2$, $t = 2$; $s \geq 1$, $t = \frac{s(s+1)}{2}$ для колец характеристик $p$, $p^2$ и $p^3$.

В настоящей работе продолжаются исследования по строению группы $R^*$ коммутативных конечных локальных колец характеристики $p$ в случае, когда радикал $J$ имеет индекс нильпотентности четыре.

## 2. Строение группы обратимых элементов

Пусть $R$ является коммутативным локальным кольцом характеристики $p$ и $J^4 = 0$, $\dim_F J/J^2 = 3$, $\dim_F J^2/J^3 = 1$, $\dim_F J^3 = 1$. Тогда $R_0 = F = GF(p^r)$,

$$R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fu_3 \oplus Fv \oplus Fw$$

и

$$J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fu_3 \oplus Fv \oplus Fw,$$

где $\{u_1, u_2, u_3, v, w\}$ – отмеченный базис идеала $J$ над полем $F$ (см. предложение 1), причем $u_1, u_2, u_3 \in J \setminus J^2$, $v \in J^2 \setminus J^3$, $w \in J^3$. Так как $u_i u_j \in J^2$ и $u_i v,\ u_i v \in J^3$, то

$$u_i u_j = a_{ij} v + b_{ij} w \quad \text{и} \quad u_i v = c_{i1} w, \quad v u_i = d_{i1} w$$

для некоторых $a_{ij}$, $b_{ij}$, $c_{i1}$, $d_{i1} \in F$, $i = \overline{1,3}$. Рассмотрим матрицы умножения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} \text{ и } D = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{pmatrix}.$$

В работе [8] автором классифицированы с точностью до изоморфизма коммутативные конечные локальные кольца порядка $p^{6r}$, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре. Все попарно неизоморфные коммутативные кольца, рассматриваемые в данной ситуации, определяются следующими четверками матриц:

[тип I] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

где $(a, b) \in \{(1,1), (1,\delta), (1,0), (0,0)\}$, $\delta \in F^* \backslash F^{*2}$;

[тип II] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, только при $p = 2$.

Так как множество $F^* \backslash F^{*2}$ пусто при $p = 2$, то для всякого значения $p$ получаем ровно четыре кольца указанных типов.

**Теорема.** *Пусть $R$ – коммутативное локальное кольцо характеристики $p$,*

$$\dim_F J/J^2 = 3,\ \dim_F J^2/J^3 = 1,\ \dim_F J^3 = 1,\ J^4 = 0.$$

*Тогда*

(1) *если $p = 2$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{2^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_4^r\right)^2 \times \mathbb{Z}_2^r$ или $R^* \cong \mathbb{Z}_{2^r-1} \times \mathbb{Z}_4^r \times \left(\mathbb{Z}_2^r\right)^3$;*

(2) *если $p = 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{3^r-1} \times \mathbb{Z}_9^r \times \left(\mathbb{Z}_3^r\right)^3$;*

(3) *если* $p > 3$, *то* $R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_p^r\right)^5$.

*Доказательство.* Обозначим через $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 \dots, \varepsilon_r$ базис поля $F = GF(p^r)$ над своим простым подполем $\mathbb{Z}_p$. Так как для коммутативных колец группа $R^*$ является прямым произведением циклической группы $\langle b\rangle$ порядка $p^r - 1$ и группы $1 + J$ порядка $p^{5r}$ (см. предложение 2), то для доказательства теоремы достаточно определить только строение группы $1+J$. При этом изучим каждую ситуацию с типом кольца и возможным значением $p$.

*Случай* $p = 3$.

Для колец данной характеристики справедливы следующие умножения базисных элементов: $u_1^2 = v$, $u_1 v = u_1^3 = w$, $u_2^2 = aw$, $u_3^2 = bw$, где $(a, b) \in \{(1, 1), (1, \delta), (1, 0), (0, 0)\}$, $\delta \in F^* \backslash F^{*2}$. Рассмотрим циклические подгруппы

$$\langle 1 + \varepsilon_i u_1\rangle = \left\{1 + \varepsilon_i u_1, 1 + 2\varepsilon_i u_1 + \varepsilon_i^2 v, 1 + \varepsilon_i^3 w, 1 + \varepsilon_i u_1 + \varepsilon_i^3 w,\right.$$

$$\left. 1 + 2\varepsilon_i u_1 + \varepsilon_i^2 v + \varepsilon_i^3 w, 1 + 2\varepsilon_i^3 w, 1 + \varepsilon_i u_1 + 2\varepsilon_i^3 w, 1 + 2\varepsilon_i u_1 + \varepsilon_i^2 v + 2\varepsilon_i^3 w, 1\right\},$$

$$\langle 1 + \varepsilon_i u_2\rangle = \left\{1 + \varepsilon_i u_2, 1 + 2\varepsilon_i u_2 + \varepsilon_i^2 aw, 1\right\},$$

$$\langle 1 + \varepsilon_i u_3\rangle = \left\{1 + \varepsilon_i u_3, 1 + 2\varepsilon_i u_3 + \varepsilon_i^2 bw, 1\right\},$$

$$\langle 1 + \varepsilon_i v\rangle = \{1 + \varepsilon_i v, 1 + 2\varepsilon_i v, 1\}, \quad i = \overline{1, r}.$$

Заметим, что

$$\prod_{i=1}^r |\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle| \cdot \prod_{i=1}^r |\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle| \cdot \prod_{i=1}^r |\langle 1+\varepsilon_i u_3\rangle| \cdot \prod_{i=1}^r |\langle 1+\varepsilon_i v\rangle| = 9^r \cdot 3^r \cdot 3^r \cdot 3^r = 3^{5r}.$$

Пусть $k_i \le 9$, $l_i \le 3$, $m_i \le 3$, $n_i \le 3$ – некоторые натуральные числа, для которых выполнено

$$\prod_{i=1}^r (1 + \varepsilon_i u_1)^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^r (1 + \varepsilon_i u_2)^{l_i} \cdot \prod_{i=1}^r (1 + \varepsilon_i u_3)^{m_i} \cdot \prod_{i=1}^r (1 + \varepsilon_i v)^{n_i} = 1. \qquad (1)$$

Докажем, что равенство (1) возможно только когда все множители его левой части равны 1, то есть при $k_i = 9$ и $l_i = m_i = n_i = 3$.

Предположим, что $k_i \equiv 0(\mathrm{mod} 3)$ для всех $i = \overline{1, r}$. Тогда

$$\prod_{i=1}^r \left(1 + \varepsilon_i^3 w\right)^{k_i'} \cdot \prod_{i=1}^r (1 + \varepsilon_i u_2)^{l_i} \cdot \prod_{i=1}^r (1 + \varepsilon_i u_3)^{m_i} \cdot \prod_{i=1}^r (1 + \varepsilon_i v)^{n_i} = 1,$$

где $k_i' = \frac{k_i}{3} \in \{1, 2, 3\}$. Отсюда

$$\prod_{i=1}^r (1 + k_i' \varepsilon_i^3 w) \cdot \prod_{i=1}^r \left(1 + l_i \varepsilon_i u_2 + \binom{l_i}{2} \varepsilon_i^2 aw\right) \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^r \left(1 + m_i \varepsilon_i u_3 + \binom{m_i}{2} \varepsilon_i^2 bw\right) \cdot \prod_{i=1}^r (1 + n_i \varepsilon_i v) = 1,$$

$$\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^3\right)w\right)\cdot\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i\right)u_2+\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)aw\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)u_3+\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{m_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)bw\right)\cdot\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i\right)v\right)=1,$$

где $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, при $0\le k\le n$ и $\binom{n}{k}=0$ при $0\le n<k$. Следовательно,

$$1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i\right)u_2+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)u_3+\left(\sum_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i\right)v+$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^3+a\cdot\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}+b\cdot\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{m_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)w=1.$$

Так как $\{u_1,u_2,u_3,v,w\}$, $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\ldots,\varepsilon_r\}$ – базисы, то $\sum\limits_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i=0$, $\sum\limits_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i=0$, $\sum\limits_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i=0$ и $l_i=m_i=n_i=3$ для всех $i=\overline{1,r}$. Следовательно, числа $\prod\limits_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}$, $\prod\limits_{i=1}^{r}\binom{m_i}{\alpha_i}$ кратны 3 и из равенства $\sum\limits_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^3=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i\right)^3=0$ получаем, что $k_i'=3$, а значит, $k_i=9$ для всех $i=\overline{1,r}$.

Пусть существуют числа $k_i$ такие, что $k_i\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}3)$. Тогда, после возведения обеих частей равенства (1) в куб, имеем, что

$$\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i^3w)^{k_i}=\prod_{i=1}^{r}(1+k_i\varepsilon_i^3w)=1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^3\right)w=1$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^3=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i\right)^3=0$, а значит, $k_i\equiv 0(\mathrm{mod}3)$ для всех $i=\overline{1,r}$. Противоречие.

Итак, произведение рассматриваемых $4r$ циклических подгрупп является прямым и

$$1+J=\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_iu_1\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_iu_2\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_iu_3\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_iv\rangle\cong\mathbb{Z}_9^r\times\mathbb{Z}_3^r\times\mathbb{Z}_3^r\times\mathbb{Z}_3^r.$$

*Случай* $p>3$.

В этом случае, как и прежде: $u_1^2=v$, $u_1v=u_1^3=w$, $u_2^2=aw$, $u_3^2=bw$, где $(a,b)\in\{(1,1),(1,\delta),(1,0),(0,0)\}$, $\delta\in F^*\backslash F^{*2}$. Рассмотрим циклические подгруппы порядка $p$

$$\langle 1+\varepsilon_iu_1\rangle=\left\{1+k\varepsilon_iu_1+\binom{k}{2}\varepsilon_i^2v+\binom{k}{3}\varepsilon_i^3w\mid k=\overline{1,p}\right\},$$
$$\langle 1+\varepsilon_iu_2\rangle=\left\{1+k\varepsilon_iu_2+\binom{k}{2}\varepsilon_i^2aw\mid k=\overline{1,p}\right\},$$
$$\langle 1+\varepsilon_iu_3\rangle=\left\{1+k\varepsilon_iu_3+\binom{k}{2}\varepsilon_i^2bw\mid k=\overline{1,p}\right\},$$
$$\langle 1+\varepsilon_iv\rangle=\left\{1+k\varepsilon_iv\mid k=\overline{1,p}\right\},$$

$$\langle 1+\varepsilon_i w\rangle = \left\{1+k\varepsilon_i w \mid k=\overline{1,p}\right\}, \quad i=\overline{1,r}.$$

Заметим, что

$$\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle|\cdot\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle|\cdot\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i u_3\rangle|\cdot\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i v\rangle|\cdot\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_i w\rangle| = p^{5r}.$$

Пусть $k_i$, $l_i$, $m_i$, $n_i$, $q_i$ – некоторые натуральные числа, не превосходящие $p$, для которых выполнено равенство

$$\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i u_1)^{k_i}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i u_2)^{l_i}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i u_3)^{m_i}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i v)^{n_i}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i w)^{q_i} = 1. \quad (2)$$

Тогда

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+k_i\varepsilon_i u_1+\binom{k_i}{2}\varepsilon_i^2 v+\binom{k_i}{3}\varepsilon_i^3 w\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(1+l_i\varepsilon_i u_2+\binom{l_i}{2}\varepsilon_i^2 aw\right)\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(1+m_i\varepsilon_i u_3+\binom{m_i}{2}\varepsilon_i^2 bw\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+n_i\varepsilon_i v)\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+q_i\varepsilon_i w) = 1$$

и

$$\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i\right)u_1+\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{k_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)v+\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=3}\prod_{i=1}^{r}\binom{k_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)w\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i\right)u_2+\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)aw\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)u_3+\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{m_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)bw\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i\right)v\right)\cdot\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}q_i\varepsilon_i\right)w\right) = 1.$$

Следовательно,

$$1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i\right)u_1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i\right)u_2+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)u_3+$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i+\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{k_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}\right)v+$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{r}q_i\varepsilon_i+\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=3}\prod_{i=1}^{r}\binom{k_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}+a\cdot\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{l_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}+\right.$$
$$\left.+\,b\cdot\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=2}\prod_{i=1}^{r}\binom{m_i}{\alpha_i}\varepsilon_i^{\alpha_i}+\sum_{1\le i,j\le r}k_in_j\varepsilon_i\varepsilon_j\right)w = 1.$$

Так как $\{u_1, u_2, u_3, v, w\}$, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_r\}$ – базисы, то $k_i = l_i = m_i = p$ для всех $i = \overline{1,r}$. Следовательно, числа $\prod\limits_{i=1}^{r} \binom{k_i}{\alpha_i}$, $\prod\limits_{i=1}^{r} \binom{l_i}{\alpha_i}$, $\prod\limits_{i=1}^{r} \binom{m_i}{\alpha_i}$ кратны $p$ и из равенства

$$1 + \left(\sum_{i=1}^{r} n_i\varepsilon_i\right) v + \left(\sum_{i=1}^{r} q_i\varepsilon_i + \sum_{1\le i,j\le r} k_i n_j \varepsilon_i\varepsilon_j\right) w = 1$$

получаем сначала $n_i = p$, а затем $q_i = p$.

Таким образом, произведение рассматриваемых $5r$ циклических подгрупп является прямым и

$$1+J = \prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle \times \prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle \times \prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_3\rangle \times \prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i v\rangle \times \prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i w\rangle \cong$$
$$\cong \mathbb{Z}_p^r \times \mathbb{Z}_p^r \times \mathbb{Z}_p^r \times \mathbb{Z}_p^r \times \mathbb{Z}_p^r.$$

*Случай* $p = 2$.

Пусть $R$ – кольцо типа I и $(a, b) \in \{(1,1), (1,0)\}$. Тогда справедливы следующие умножения базисных элементов: $u_1^2 = v$, $u_1 v = u_1^3 = w$, $u_2^2 = w$, $u_3^2 = bw$, где $b = 0$ или $b = 1$. Рассмотрим циклические подгруппы

$$\langle 1 + \varepsilon_i u_1\rangle = \left\{1 + \varepsilon_i u_1, 1 + \varepsilon_i^2 v, 1 + \varepsilon_i u_1 + \varepsilon_i^2 v + \varepsilon_i^3 w, 1\right\},$$
$$\langle 1 + \varepsilon_i u_2\rangle = \left\{1 + \varepsilon_i u_2, 1 + \varepsilon_i^2 w, 1 + \varepsilon_i u_2 + \varepsilon_i^2 w, 1\right\},$$
$$\langle 1 + \varepsilon_i b u_2 + \varepsilon_i u_3\rangle = \{1 + \varepsilon_i b u_2 + \varepsilon_i u_3, 1\}, \quad i = \overline{1,r}, \quad b^2 = b.$$

Заметим, что

$$\prod_{i=1}^{r} |\langle 1 + \varepsilon_i u_1\rangle| \cdot \prod_{i=1}^{r} |\langle 1 + \varepsilon_i u_2\rangle| \cdot \prod_{i=1}^{r} |\langle 1 + \varepsilon_i b u_2 + \varepsilon_i u_3\rangle| = 4^r \cdot 4^r \cdot 2^r = 2^{5r}.$$

Пусть $k_i \le 4$, $l_i \le 4$, $m_i \le 2$ – некоторые натуральные числа, для которых выполнено равенство

$$\prod_{i=1}^{r}(1 + \varepsilon_i u_1)^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^{r}(1 + \varepsilon_i u_2)^{l_i} \cdot \prod_{i=1}^{r}(1 + \varepsilon_i b u_2 + \varepsilon_i u_3)^{m_i} = 1. \tag{3}$$

Предположим, что $k_i$ и $l_i$ – четные числа и $k_i' = \frac{k_i}{2}$, $l_i' = \frac{l_i}{2}$. Тогда

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1 + \varepsilon_i^2 v\right)^{k_i'} \cdot \prod_{i=1}^{r}(1 + \varepsilon_i^2 w)^{l_i'} \cdot \prod_{i=1}^{r}(1 + \varepsilon_i b u_2 + \varepsilon_i u_3)^{m_i} = 1.$$

Отсюда

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1 + k_i'\varepsilon_i^2 v\right) \cdot \prod_{i=1}^{r}\left(1 + l_i'\varepsilon_i^2 w\right) \cdot \prod_{i=1}^{r}\left(1 + m_i\varepsilon_i b u_2 + m_i\varepsilon_i u_3\right) = 1,$$

$$\left(1 + \left(\sum_{i=1}^{r} k_i'\varepsilon_i^2\right) v\right) \cdot \left(1 + \left(\sum_{i=1}^{r} l_i'\varepsilon_i^2\right) w\right) \cdot \left(1 + \left(\sum_{i=1}^{r} m_i\varepsilon_i\right) b u_2 + \right.$$
$$\left. + \left(\sum_{i=1} m_i\varepsilon_i\right) u_3 + \left(\sum_{i\ne j} m_i\varepsilon_i m_j\varepsilon_j\right) b^2 w + \left(\sum_{i\ne j} m_i\varepsilon_i m_j\varepsilon_j\right) bw\right) = 1,$$

$$\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^2\right)v\right)\cdot\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i'\varepsilon_i^2\right)w\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)bu_2+\left(\sum_{i=1}m_i\varepsilon_i\right)u_3\right)=1.$$

Следовательно,

$$1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^2\right)v+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)bu_2+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)u_3+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i'\varepsilon_i^2\right)w=1.$$

Так как $\{u_1,u_2,u_3,v,w\}$, $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\dots,\varepsilon_r\}$ – базисы, то $\sum\limits_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i=0$, $\sum\limits_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i\right)^2=0$, $\sum\limits_{i=1}^{r}l_i'\varepsilon_i^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}l_i'\varepsilon_i\right)^2=0$. Следовательно, $m_i=2$, $k_i'=l_i'=2$, а значит, $k_i=l_i=4$ для всех $i=\overline{1,r}$.

Предположим, что $k_i$ или $l_i$ – нечетное число для некоторого $i\in\{1,\dots,r\}$. Тогда, после возведения обеих частей равенства (3) в квадрат, имеем, что

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i^2v\right)^{k_i}\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i^2w\right)^{l_i}=\prod_{i=1}^{r}\left(1+k_i\varepsilon_i^2v\right)\prod_{i=1}^{r}\left(1+l_i\varepsilon_i^2w\right)=$$
$$=\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^2\right)v\right)\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i^2\right)w\right)=1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^2\right)v+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i^2\right)w=1.$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i\right)^2=0$, $\sum\limits_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i\right)^2=0$, а значит, $k_i$ и $l_i$ – четные числа для всех $i=\overline{1,r}$. Противоречие.

Итак, произведение рассматриваемых $4r$ циклических подгрупп является прямым и

$$1+J=\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_iu_1\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_iu_2\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_ibu_2+\varepsilon_iu_3\rangle\cong\mathbb{Z}_4^r\times\mathbb{Z}_4^r\times\mathbb{Z}_2^r.$$

Пусть $R$ – кольцо типа I и $(a,b)=(0,0)$ или $R$ – кольцо типа II. Тогда справедливы следующие умножения базисных элементов: $u_1^2=v$, $u_1v=u_1^3=w$, $u_2u_3=cw$, где $c=0$ или $c=1$. Рассмотрим циклические подгруппы

$$\langle 1+\varepsilon_iu_1\rangle=\left\{1+\varepsilon_iu_1,1+\varepsilon_i^2v,1+\varepsilon_iu_1+\varepsilon_i^2v+\varepsilon_i^3w,1\right\},$$
$$\langle 1+\varepsilon_iu_2\rangle=\{1+\varepsilon_iu_2,1\},$$
$$\langle 1+\varepsilon_iu_3\rangle=\{1+\varepsilon_iu_3,1\},$$
$$\langle 1+\varepsilon_iw\rangle=\{1+\varepsilon_iw,1\},\quad i\in\{1,\dots,r\}.$$

Заметим, что

$$\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_iu_1\rangle|\cdot\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_iu_2\rangle|\cdot\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_iu_3\rangle|\cdot\prod_{i=1}^{r}|\langle 1+\varepsilon_iw\rangle|=4^r\cdot 2^r\cdot 2^r\cdot 2^r=2^{5r}.$$

Пусть $k_i\le 4$, $l_i\le 2$, $m_i\le 2$, $n_i\le 2$ – некоторые натуральные числа, для которых выполнено равенство

$$\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_iu_1)^{k_i}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_iu_2)^{l_i}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_iu_3)^{m_i}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_iw)^{n_i}=1.\qquad(4)$$

Предположим, что $k_i$ – четные числа и $k_i' = \frac{k_i}{2}$. Тогда

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i^2 v\right)^{k_i'}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i u_2)^{l_i}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i u_3)^{m_i}\cdot\prod_{i=1}^{r}(1+\varepsilon_i w)^{n_i}=1.$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+k_i'\varepsilon_i^2 v\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(1+l_i\varepsilon_i u_2\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(1+m_i\varepsilon_i u_3\right)\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(1+n_i\varepsilon_i w\right)=1,$$

$$\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^2\right)v\right)\cdot\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i\right)u_2\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)u_3\right)\cdot\left(1+\left(\sum_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i\right)w\right)=1.$$

Следовательно,

$$1+\left(\sum_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i\right)u_2+\left(\sum_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i\right)u_3+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^2\right)v+$$
$$+\left(\left(\sum_{1\le i,j\le r}l_i m_j\varepsilon_i\varepsilon_j\right)c+\sum_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i\right)w=1.$$

Так как $\{u_1,u_2,u_3,v,w\}$, $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\ldots,\varepsilon_r\}$ – базисы, то $\sum\limits_{i=1}^{r}l_i\varepsilon_i=0$, $\sum\limits_{i=1}^{r}m_i\varepsilon_i=0$, $\left(\sum\limits_{i=1}^{r}l_i m_j\varepsilon_i\varepsilon_j\right)c+\sum\limits_{i=1}^{r}n_i\varepsilon_i=0$, $\sum\limits_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}k_i'\varepsilon_i\right)^2=0$. а значит, $l_i=m_i=n_i=2$ и $k_i'=2$, $k_i=4$ для всех $i=\overline{1,r}$.

Предположим, что $k_i$ – нечетное число для некоторого $i\in\{1,\ldots,r\}$. Тогда, после возведения обеих частей равенства (4) в квадрат, имеем, что

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+\varepsilon_i^2 v\right)^{k_i}=\prod_{i=1}^{r}\left(1+k_i\varepsilon_i^2 v\right)=1+\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^2\right)v=1,$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\varepsilon_i\right)^2=0$, а значит, $k_i$ – четное число для всех $i=\overline{1,r}$. Противоречие.

Итак, произведение рассматриваемых $4r$ циклических подгрупп является прямым и

$$1+J=\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_1\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_2\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i u_3\rangle\times\prod_{i=1}^{r}\langle 1+\varepsilon_i w\rangle\cong\mathbb{Z}_4^r\times\mathbb{Z}_2^r\times\mathbb{Z}_2^r\times\mathbb{Z}_2^r.$$

Принимая во внимание найденные представления группы $1+J$ в виде прямого произведения своих циклических подгрупп, а также п. 1 предложения 2, получаем требуемые результаты. Теорема доказана.

## Список литературы

[1] R. Raghavendran, *Finite associative rings*, Compositio Math., **21** (1969), 195–229. MR0246905
[2] B.R. McDonald, *Finite rings with identity*, Pure and Applied Mathematics, **28**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1974. MR0354768
[3] C.J. Chikunji, *Unit groups of cube radical zero commutative completely primary finite rings*, Int. J. Math. Sci., **4** (2005), 572–579. MR2172397
[4] R.W. Gilmer, *Finite rings having a cyclic multiplicative group of units*, Amer. J. Math., **85** (1963), 447–452. MR0154884
[5] G. Ganske, B.R. McDonald, *Finite local rings*, Rocky Mountain J. Math., **3**:4 (1973), 521–540. MR0364218
[6] C.J. Chikunji, *Unit groups of a certain class of completely primary finite rings*, Math. J. Okayama Univ., **47** (2005), 39–53. MR2198859
[7] C.J. Chikunji, *On unit groups of completely primary finite rings*, Math. J. Okayama Univ., **50** (2008), 149–160. MR2376553
[8] Е.В. Журавлев, *Локальные кольца порядка* $p^6$ *с 4-нильпотентным радикалом Джекобсона*, Сибирские электронные математические известия, **3** (2006), 15–59. MR2172790

Евгений Владимирович Журавлев
Алтайский государственный университет,
пр. Ленина 61,
656049, Барнаул, Россия
*E-mail address*: evzhuravlev@mail.ru