S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 372–379 (2014)

УДК 519.644

MSC 65D32

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА СФЕРЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ТЕТРАЭДРА С ИНВЕРСИЕЙ

А.С. ПОПОВ

Abstract. The unified algorithm of searching for the best (in a sense) cubature formulas on a sphere that are invariant under the tetrahedral group of rotations with inversion is described. This algorithm is applied to find parameters of all the best cubature formulas of this symmetry group up to the 41st order of accuracy.

Keywords: numerical integration, invariant cubature formulas, invariant polynomials, tetrahedral group of rotations.

1. Введение

Основы теории кубатурных формул на сфере, инвариантных относительно конечных групп вращений, были заложены С.Л. Соболевым [1, 2]. К настоящему времени наибольшее распространение получили кубатурные формулы, инвариантные относительно групп симметрии правильных многогранников (см. [3–18] и имеющуюся там литературу). В частности, в [12] был предложен некий алгоритм построения кубатур на сфере, инвариантных относительно группы вращений тетраэдра с инверсией T_h, а в [16] этот алгоритм был использован для поиска всех наилучших (в некотором смысле) кубатур группы T_h до 41-го порядка точности n.

В данной работе будет предложен унифицированный по сравнению с работами [12, 16] алгоритм поиска наилучших кубатур группы T_h для сферы. Будут проведены расчёты по этому алгоритму с целью определить параметры всех наилучших кубатур данной группы симметрии для $n \leq 41$. При этом для $n \leq 11$ будут найдены точные значения параметров соответствующих кубатур,

Popov A.S., Cubature formulas on a sphere invariant under the tetrahedral group with inversion.

© 2014 Попов А.С.

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-00427).

Поступила 17 февраля 2014 г., опубликована 26 мая 2014 г.

а для остальных n – приближённые, полученные путём численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом ньютоновского типа. Даются с 16 значащими цифрами параметры новой кубатуры для $n = 19$.

2. Унифицированный алгоритм поиска наилучших кубатур группы T_h

Пусть S – единичная сфера, т. е. множество точек $(x, y, z) \in R_3$, для которых $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Рассмотрим на S интеграл

$$U(f) = \frac{1}{4\pi} \int_S f(s)\, ds, \tag{1}$$

где $s \in S$, ds – элемент поверхности сферы, $U(1) = 1$.

Для численного нахождения интеграла (1) построим кубатурную формулу, инвариантную относительно преобразований группы T_h, в виде [12, 16]

$$V(f) = A_0 \sum_{j=1}^{6} f(a_{0j}) + B_0 \sum_{j=1}^{8} f(b_{0j}) + \sum_{i=1}^{L} A_i \sum_{j=1}^{12} f(a_{ij}) + \sum_{i=1}^{M} B_i \sum_{j=1}^{24} f(b_{ij}), \tag{2}$$

где 6 точек a_{0j} лежат в вершинах вписанного в сферу октаэдра и имеют координаты $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$; 8 точек b_{0j} отвечают центрам граней октаэдра при координатах $(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$; 12 точек a_{ij} отвечают рёбрам октаэдра при координатах $(\pm a_i, \pm b_i, 0)$, $(0, \pm a_i, \pm b_i)$, $(\pm b_i, 0, \pm a_i)$; 24 точки b_{ij} отвечают точкам общего положения на гранях октаэдра при координатах $(\pm c_i, \pm d_i, \pm e_i)$, $(\pm e_i, \pm c_i, \pm d_i)$, $(\pm d_i, \pm e_i, \pm c_i)$.

Величины a_i, b_i, c_i, d_i, e_i удовлетворяют уравнениям связи

$$a_i^2 + b_i^2 = 1, \quad c_i^2 + d_i^2 + e_i^2 = 1. \tag{3}$$

Общее число узлов в кубатурной формуле (2) обозначим через N.

Пусть $\{Z_{kj}(x, y, z);\ k = 0, 1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, 2k+1\}$ – ортонормированная система многочленов степени не выше n, для которых $U(Z_{kj} Z_{lm}) = \delta_{kl}\delta_{jm}$. Здесь индекс k нумерует степени базисных многочленов, а индекс j – многочлены при данном k; δ_{kl} – символ Кронекера.

Будем говорить, что данная кубатурная формула имеет алгебраический порядок точности n (или просто порядок n), если она точна для всех многочленов степени не выше n и не точна хотя бы для одного многочлена степени $n+1$. Погрешностью кубатурной формулы (2) на многочленах степени k назовём величину [15]

$$E_k = \left(\sum_{j=1}^{2k+1} \left(U(Z_{kj}) - V(Z_{kj}) \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Для кубатурной формулы порядка n все величины $E_k = 0$ при $k \le n$, а $E_{n+1} > 0$. Величину E_{n+1} назовём главным членом погрешности кубатурной формулы.

В данной работе будет сделана попытка построить все наилучшие кубатурные формулы вида (2) на сфере для $n \le 41$. При этом наилучшей среди всех кубатурных формул этого вида, имеющих данный порядок n, мы будем считать ту, которая последовательно удовлетворяет четырём условиям [15]: 1) узлы принадлежат области интегрирования, 2) веса положительны, 3) число узлов минимально, 4) главный член погрешности минимален.

Как известно (см., например, [19, гл. 12]), группа T_h получается из группы вращений тетраэдра T добавлением к ней операции инверсии I, т. е. добавлением центра симметрии. В нашем случае это означает, что кубатура (2) обладает центральной симметрией и все $E_k = 0$ для нечётных k.

Пусть строится кубатурная формула вида (2) для некоторого порядка n. Достаточно потребовать, чтобы эта формула была точна для всех многочленов вида $u^k v^l w^j$, где $k, l = 0, 1, \ldots$; $j = 0, 1$; $4k + 6l + 6j \leq n$; $u = 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)$; $v = 27x^2y^2z^2$; $w = 3\sqrt{3}(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2)$. Тогда для всех других многочленов степени не выше n наша формула будет точна автоматически [12]. Обозначим число базисных многочленов степени не выше n через m.

Параметрами кубатурной формулы (2) являются веса и координаты узлов. С учётом уравнений связи (3) легко видеть, что узлы a_{0j} и b_{0j} имеют по одному свободному параметру (это их вес A_0 и B_0), узлы a_{ij} имеют по два свободных параметра, а узлы b_{ij} – по три свободных параметра. В итоге на один свободный параметр приходится: 6 узлов a_{0j} или a_{ij}, 8 узлов b_{0j} или b_{ij}. Отсюда следует, что для получения формулы с минимальным для данного n числом узлов N выгоднее всего использовать в первую очередь узлы a_{0j} и a_{ij} и лишь в последнюю очередь – узлы b_{0j} и b_{ij}.

Однако здесь имеется одно существенное ограничение [12]. Дело в том, что среди базисных многочленов степени $n \geq 6$ содержатся многочлены вида $u^k v^l w^j$ с $l \geq 1$. Эти многочлены обращаются в нуль в узлах a_{0j} и a_{ij}. В то же время интеграл $U(u^k v^l) > 0$. Поэтому правильное интегрирование этих многочленов возможно лишь с привлечением узлов b_{0j} и b_{ij}. Для кубатурной формулы порядка n число базисных функций, требующих привлечения узлов b_{0j} и b_{ij}, есть величина m_0, которая равна полному числу базисных функций m для кубатурной формулы степени $n-6$. Таким образом, величина M в (2) должна быть такой, чтобы выполнялось условие $3M \geq m_0$ при $B_0 = 0$ или $3M + 1 \geq m_0$ при $B_0 > 0$.

Далее задаём величину L в (2) так, чтобы общее число свободных параметров кубатурной формулы было равно m. При этом, если нужно, можно положить $A_0 = 0$ или $B_0 = 0$. Получаемое в ходе описанной формальной процедуры число узлов даёт нижнюю оценку минимального числа узлов кубатуры (2). Обозначим это число через N_*. Ниже в разделе 3 приведена таблица со значениями N_* для $n \leq 41$.

Затем подставляем m базисных функций на место f в формулу (2) и решаем систему m нелинейных алгебраических уравнений с m неизвестными свободными параметрами кубатуры. В отличие, например, от случая группы вращений октаэдра [15], здесь мы не можем заранее быть уверены, что возникающая система нелинейных уравнений будет разрешима в действительных числах. Тем более мы не можем заранее гарантировать, что при этом все веса кубатуры будут положительны. Поэтому, как правило, нужно выполнить несколько попыток с разным набором параметров кубатуры, чтобы получить для данного n формулу с минимальным N и с положительными весами. Как говорилось выше, в случае наличия нескольких таких формул с одинаковым N наилучшей среди них считается та, которая имеет наименьшую величину главного члена погрешности E_{n+1}.

В работах [12, 16] в качестве искомых параметров выступали величины a_i^2, b_i^2, c_i^2, d_i^2 и e_i^2, связанные линейными уравнениями (3). Эти линейные уравнения явно разрешались относительно величин b_i^2 и e_i^2 и решалась система m нелинейных уравнений относительно величин a_i^2, c_i^2, d_i^2 и весов кубатуры.

Здесь мы опишем унифицированный алгоритм, подобный алгоритмам, применявшимся ранее для групп вращений тетраэдра [13], октаэдра [14, 15], октаэдра с инверсией [4–7, 17] и икосаэдра [18]. А именно, вместо квадратов координат узлов кубатуры мы будем искать значения, которые принимают в этих узлах величины u, v и w. Этот приём, хорошо известный в алгебре (см., например, [20]), позволяет существенно понизить степени входящих в систему уравнений. Это означает, что решение новой системы уравнений, как правило, будет проще, чем решение исходной системы.

Заметим, что базисные инвариантные формы u, v и w связаны на единичной сфере уравнением [13]

$$w^2 = -4v + 3u^2 + 6uv - 4u^3 - v^2. \tag{4}$$

Аналогично работам [13–15, 18], уравнения связей (4), налагаемых на параметры $L + M$ групп точек a_{ij} и b_{ij}, не будем разрешать явно, а добавим их к исходной системе m уравнений. Так что всего будет $m + L + M$ уравнений, определяющих параметры нашей кубатуры. Решив эту систему, получим $L+M$ наборов параметров u_i, v_i и w_i, причём первые L параметров v_i, отвечающих узлам a_{ij}, равны нулю. Заметим также, что в узлах a_{0j} $u = v = w = 0$, в узлах b_{0j} $u = v = 1$, $w = 0$.

Для определения L параметров a_i, b_i через найденные величины u_i, w_i можно использовать следующий **алгоритм 1**.

1. Пусть $x_i \geq y_i \geq 0$ – корни квадратного уравнения

$$x^2 - x + u_i/3 = 0.$$

2. Если $w_i \geq 0$, положим $a_i = \sqrt{x_i}$, $b_i = \sqrt{y_i}$, в противном случае $a_i = \sqrt{y_i}$, $b_i = \sqrt{x_i}$.

Для определения M параметров c_i, d_i, e_i через найденные величины u_i, v_i, w_i можно использовать следующий **алгоритм 2**.

1. Пусть $x_i \geq y_i \geq z_i \geq 0$ – корни кубического уравнения

$$x^3 - x^2 + (u_i/3)x - v_i/27 = 0.$$

2. Положим $e_i = \sqrt{z_i}$.

3. Если $w_i \geq 0$, положим $c_i = \sqrt{x_i}$, $d_i = \sqrt{y_i}$, в противном случае $c_i = \sqrt{y_i}$, $d_i = \sqrt{x_i}$.

3. Построение конкретных кубатур группы T_h

С целью полноты изложения, приведём параметры всех наилучших кубатур группы T_h для $n \leq 11$.

Кубатура $n = 3$, $N = 6$, $L = M = 0$, $A_0 = 1/6$, $B_0 = 0$. Эта формула тривиальна и имеет симметрию группы вращений октаэдра с инверсией O_h [21].

Кубатура $n = 5$, $N = 12$, $L = 1$, $M = 0$, $A_0 = B_0 = 0$, $A_1 = 1/12$, $u_1 = 3/5$. Полагая $w_1 > 0$ и используя алгоритм 1, находим $a_1^2 = (5 + \sqrt{5})/10$, $b_1^2 = (5 - \sqrt{5})/10$. Эта кубатура также тривиальна и имеет симметрию группы вращений икосаэдра с инверсией Y_h [21].

Кубатура $n = 7$, $N = 26$, $L = 1$, $M = 0$, $A_0 = 1/21$, $B_0 = 9/280$, $A_1 = 4/105$, $u_1 = 3/4$, $w_1 = 0$. По алгоритму 1 находим $a_1^2 = b_1^2 = 1/2$. Эта формула хорошо известна и имеет симметрию группы O_h [22].

Кубатура $n = 9$, $N = 32$, $L = 2$, $M = 0$, $A_0 = 0$, $B_0 = 9/280$, $A_1 = 5/168$, $A_2 = 9/280$, $u_1 = 3/5$, $u_2 = 1/3$. Полагая $w_1 > 0$ и $w_2 < 0$, находим $a_1^2 = (5 + \sqrt{5})/10$, $b_1^2 = (5 - \sqrt{5})/10$, $a_2^2 = (3 - \sqrt{5})/6$, $b_2^2 = (3 + \sqrt{5})/6$. Эта формула также хорошо известна и имеет симметрию группы Y_h [23].

Кубатура $n = 11$, $N = 48$, $L = 2$, $M = 1$, $A_0 = B_0 = 0$. Поочерёдно подставляя в (2) семь базисных функций и добавляя три уравнения связей, получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
&V(1) = c_1 + c_2 + c_3 = 1,\\
&V(u) = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 = 3/5,\\
&V(v) = c_3v_3 = 9/35,\\
&V(w) = c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3 = 0,\\
&V(u^2) = c_1u_1^2 + c_2u_2^2 + c_3u_3^2 = 3/7,\\
&V(uv) = c_3u_3v_3 = 81/385,\\
&V(uw) = c_1u_1w_1 + c_2u_2w_2 + c_3u_3w_3 = 0,\\
&w_1^2 = 3u_1^2 - 4u_1^3,\\
&w_2^2 = 3u_2^2 - 4u_2^3,\\
&w_3^2 = -4v_3 + 3u_3^2 + 6u_3v_3 - 4u_3^3 - v_3^2,
\end{aligned}$$

где $c_1 = 12A_1$, $c_2 = 12A_2$, $c_3 = 24B_1$, $u_1 = u(a_{1j})$, $u_2 = u(a_{2j})$, $u_3 = u(b_{1k})$, $v_1 = v(a_{1j}) = 0$, $v_2 = v(a_{2j}) = 0$, $v_3 = v(b_{1k})$, $w_1 = w(a_{1j})$, $w_2 = w(a_{2j})$, $w_3 = w(b_{1k})$, $j = 1, 2, \ldots, 12$, $k = 1, 2, \ldots, 24$. Решая эту систему аналитически, находим:

$$\begin{gathered}
A_1 = \frac{27(356 + 11t) - (196 + t)h}{544320}, \quad u_1 = \frac{20t - 59 - 4h}{99},\\
A_2 = \frac{27(356 + 11t) + (196 + t)h}{544320}, \quad u_2 = \frac{20t - 59 + 4h}{99},\\
B_1 = \frac{11(44 - t)}{20160}, \quad u_3 = \frac{9}{11}, \quad v_3 = \frac{36(44 + t)}{3509},
\end{gathered}$$

где $t = \sqrt{22}$, $h = \sqrt{947 - 197t}$. Полагая $w_1, w_3 > 0$, $w_2 < 0$ и применяя алгоритмы 1 и 2, получаем:

$$\begin{gathered}
a_1^2 = \left(1 + \sqrt{1 - 4u_1/3}\right)/2, \quad b_1^2 = \left(1 - \sqrt{1 - 4u_1/3}\right)/2,\\
a_2^2 = \left(1 - \sqrt{1 - 4u_2/3}\right)/2, \quad b_2^2 = \left(1 + \sqrt{1 - 4u_2/3}\right)/2,\\
c_1^2 = 1/3 + 2pq, \quad d_1^2 = 1/3 - pq + pr, \quad e_1^2 = 1/3 - pq - pr,
\end{gathered}$$

где $p = t/33$, $q = \cos(\arccos((72 - t)/232)/3)$, $r = \sqrt{3 - 3q^2}$.

Числовые значения параметров этой кубатуры (для случая $w_1, w_3 < 0$, $w_2 > 0$) приведены с 16 знаками в [12]. Там же даны параметры наилучшей кубатуры группы T_h для $n = 15$, а в [16] – для $n = 13$, 17.

Здесь мы приведём значения параметров наилучшей кубатуры для $n = 19$. В этом случае $N = 138$, $L = 3$, $M = 4$, $B_0 = 0$,

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 0.7631031003861575E-2, & A_1 &= 0.6925151564272826E-2,\\
A_2 &= 0.7401778582988160E-2, & A_3 &= 0.7750671206033739E-2,\\
a_1 &= 0.8053515602634028E+0, & b_1 &= 0.5927974901948410E+0,\\
a_2 &= 0.3006908454158104E+0, & b_2 &= 0.9537216656253150E+0,\\
a_3 &= 0.9505788266155466E+0, & b_3 &= 0.3104833238520396E+0,\\
B_1 &= 0.6727251713446533E-2, & c_1 &= 0.7788886721198963E+0,\\
B_2 &= 0.7260194527007284E-2, & c_2 &= 0.3018336390756248E+0,\\
B_3 &= 0.7285850784478497E-2, & c_3 &= 0.5488762013611968E+0,\\
B_4 &= 0.7446811214121596E-2, & c_4 &= 0.5766225752438913E+0,\\
d_1 &= 0.5647863813376439E+0, & e_1 &= 0.2726697267736816E+0,\\
d_2 &= 0.9061701988641305E+0, & e_2 &= 0.2962296828694040E+0,\\
d_3 &= 0.7085290562381481E+0, & e_3 &= 0.4435329661316982E+0,\\
d_4 &= 0.8032550988969278E+0, & e_4 &= 0.1492904947248474E+0.
\end{aligned}
$$

Расчёт параметров новых кубатур для $n \geq 13$ проводился с использованием арифметики повышенной точности (более 30 десятичных знаков в мантиссе) на вычислительной технике Сибирского суперкомпьютерного центра. Системы нелинейных уравнений решались методом ньютоновского типа [24] с оценкой числа обусловленности матрицы Якоби $cond$ по формуле $cond = s_{max}/s_{min}$, где s_{max} и s_{min} – максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы Якоби. Заметим, что для всех полученных автором наилучших кубатур величина $cond < 10^{10}$. Такое сравнительно небольшое (для указанной выше точности вычислений) число обусловленности было достигнуто путём частичной ортогонализации и нормирования системы базисных функций.

Отметим, что во всех случаях для каждого конкретного n было получено конечное число решений и не было выявлено ни одного факта вырождения системы уравнений, когда число решений было бы бесконечно большим. Поэтому наш поиск наилучшего для данных n, N решения сводился к нахождению конечного числа изолированных решений с положительными весами и выбору среди них наилучшего по величине E_{n+1}. При этом применялся метод счёта из разных начальных точек. Конечно, этот метод не гарантирует, что мы нашли все возможные решения системы нелинейных уравнений, из которой определяются параметры кубатуры. Поэтому не исключена возможность, что для некоторых n полученные нами результаты могут быть улучшены.

Приведём теперь сводную таблицу, содержащую основные характеристики всех наилучших на сегодняшний день кубатур группы T_h до 41-го порядка точности.

n	m	N_*	N	E_{n+1}	n	m	N_*	N	E_{n+1}
3	1	6	6	2.2913	23	26	186	192	1.6772
5	2	12	12	2.3917	25	31	224	228	1.4229
7	4	26	26	1.8328	27	35	254	260	1.5409
9	5	32	32	2.2441	29	40	294	296	1.7440
11	7	48	48	1.9700	31	46	338	342	1.4387
13	10	68	72	1.6336	33	51	378	384	0.9888
15	12	84	84	2.0117	35	57	422	426	1.1931
17	15	104	108	1.7805	37	64	476	480	1.5549
19	19	134	138	1.5591	39	70	522	528	1.2881
21	22	156	162	1.6219	41	77	576	582	0.5480

Отметим, что для $n \leq 11$ и $n = 15$ наилучшие кубатуры группы T_h содержат минимально возможное в рамках этой группы число узлов $N = N_*$, а для остальных n величина N превосходит величину N_* не более чем на 6.

Заметим, что указанные в этой таблице кубатуры $n = 3, 5, 9, 15, 27, 29, 33 – 41$ являются наилучшими на сегодняшний день не только для группы T_h, но и вообще для всех групп симметрии. Кроме того, для $n = 11$ наилучшая кубатура группы T_h является также наилучшей среди всех известных автору кубатур, обладающих центральной симметрией.

Как говорилось выше, для $n = 3, 7$ наилучшие кубатуры группы T_h совпадают с наилучшими кубатурами группы O_h, а для $n = 5, 9$ – с наилучшими кубатурами группы Y_h. Для всех остальных n наилучшие кубатуры группы T_h содержат меньшее число узлов по сравнению с наилучшими кубатурами групп O_h и Y_h. Однако для больших n всё же предпочтительнее пользоваться кубатурами групп O_h и Y_h, поскольку асимптотически при одинаковой точности они требуют соответственно в два и пять раз меньше информации для хранения в памяти ЭВМ.

4. Заключение

Был представлен унифицированный алгоритм поиска наилучших кубатурных формул группы T_h для сферы. Проведены расчёты по этому алгоритму с целью определить параметры всех наилучших кубатур данного вида симметрии до 41-го порядка точности n. При этом для $n \leq 11$ найдены точные значения параметров соответствующих кубатур, а для остальных n – приближённые, полученные путём численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом ньютоновского типа. Использованный в работе численный метод не гарантирует, что были найдены все возможные решения системы нелинейных уравнений, из которой определяются параметры кубатуры. Поэтому не исключена возможность, что для некоторых n полученные в работе результаты могут быть улучшены.

Список литературы

[1] С.Л. Соболев, *О кубатурных формулах на сфере, инвариантных при преобразовании конечных групп вращений*, Докл. АН СССР, **146**:2 (1962), 310–313. MR0141225

[2] С.Л. Соболев, *О формулах механических кубатур на поверхности сферы*, Сиб. мат. журн., **3**:5 (1962), 769–796. MR0141227

[3] A.D. McLaren, *Optimal numerical integration on a sphere*, Math. Comput., **17**:83 (1963), 361–383. MR0159418

[4] В.И. Лебедев, *Значения узлов и весов квадратурных формул типа Гаусса-Маркова для сферы от 9-го до 17-го порядка точности, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **15**:1 (1975), 48–54. MR0371024

[5] В.И. Лебедев, *О квадратурах на сфере*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **16**:2 (1976), 293–306. MR0438670

[6] В.И. Лебедев, *Квадратурные формулы для сферы 25–29-го порядка точности*, Сиб. мат. журн., **18**:1 (1977), 132–142. MR0448821

[7] В.И. Лебедев, Д.Н. Лайков, *Квадратурная формула для сферы 131-го алгебраического порядка точности*, Докл. РАН, **366**:6 (1999), 741–745. MR1711567

[8] С.И. Коняев, *Квадратуры типа Гаусса для сферы, инвариантные относительно группы икосаэдра с инверсией*, Мат. заметки, **25**:4 (1979), 629–634. MR0534305

[9] С.И. Коняев, *Формулы численного интегрирования на сфере*, Теоремы вложения и их приложения / Труды семинара акад. С.Л. Соболева, Новосибирск, **1** (1982), 75–82. MR0738998

[10] S.I. Konyaev, *On invariant quadrature formulae for a sphere*, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, **10**:1 (1995), 41–47. MR1327472

[11] И.П. Мысовских, *Интерполяционные кубатурные формулы*, Наука, Москва, 1981. MR0656522

[12] А.С. Попов, *Кубатурные формулы для сферы, инвариантные относительно группы тетраэдра*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **35**:3 (1995), 459–466. MR1328179

[13] А.С. Попов, *Кубатурные формулы высоких порядков точности для сферы, инвариантные относительно группы тетраэдра*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **36**:4 (1996), 5–9. MR1395117

[14] А.С. Попов, *Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений октаэдра*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **38**:1 (1998), 34–41. MR1604203

[15] А.С. Попов, *Поиск наилучших кубатурных формул для сферы, инвариантных относительно группы вращений октаэдра*, Сиб. журн. вычисл. матем., **5**:4 (2002), 367–372. MR2116066

[16] А.С. Попов, *Наилучшие кубатурные формулы для сферы, инвариантные относительно группы вращений тетраэдра с инверсией*, Междунар. конф. по вычисл. математике, Новосибирск, 2004, 128–131.

[17] А.С. Попов, *Поиск наилучших кубатурных формул для сферы, инвариантных относительно группы вращений октаэдра с инверсией*, Сиб. журн. вычисл. матем., **8**:2 (2005), 143–148. Zbl 1112.65310

[18] А.С. Попов, *Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений икосаэдра*, Сиб. журн. вычисл. матем., **11**:4 (2008), 433–440. Zbl 1212.41080

[19] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика, Т. 3, Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Наука, Москва, 1989. MR1018103

[20] В.Г. Болтянский, Н.Я. Виленкин, *Симметрия в алгебре*, Наука, Москва, 1967. Zbl 0159.34201

[21] В.А. Диткин, *О некоторых приближенных формулах для вычисления трехкратных интегралов*, Докл. АН СССР, **62**:4 (1948), 445–447. MR0027603

[22] J. Albrecht, L. Collatz, *Zur numerischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale*, Z. angew. Math. Mech., **38**:1/2 (1958), 1–15. MR0093912

[23] В.А. Диткин, Л.А. Люстерник, *Об одном приеме практического гармонического анализа на сфере*, Вычисл. математика и вычисл. техника, Машгиз, Москва, **1** (1953), 3–13. MR0068913

[24] Дж. Дэннис(мл.), Р. Шнабель, *Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений*, Мир, Москва, 1988. MR0956645

Анатолий Степанович Попов
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 6,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: popov@labchem.sscc.ru