S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 457–463 (2014) УДК 519.172.2
MSC 05C15

ВЫСОТА РЕБРА В 3-МНОГОГРАННИКЕ

О.В. БОРОДИН, А.О. ИВАНОВА

Abstract. The height of an edge in 3-polytopes is the maximum degree of its incident vertices and faces. In 1940, Lebesgue proved that each 3-polytope without pyramidal edges has an edge of height at most 11. This upper bound was lowered to 10 by Avgustinovich and Borodin (1995). The best known lower bound for the height of edges is 7.

We lower upper bound to 9 and give a construction of 3-polytope which has no edges of height smaller than 8.

Keywords: planar map, planar graph, 3-polytope, structural properties, height.

1. Введение

Под 3-многогранником мы понимаем конечные трехмерные выпуклые многогранники. Как доказано Штейницем [3], 3-многогранники взаимно-однозначно соответствуют 3-связным плоским графам.

Степень $d(x)$ вершины или грани в 3-многограннике M есть число инцидентных ей ребер. k-*Вершина* (k-*грань*) есть вершина (грань) степени k, а k^+-*вершина* имеет степень не менее k, и т.д. *Элементами* 3-многогранника будем называть его вершины и грани.

Высотой $h(e)$ ребра e в M называется максимум степеней инцидентных ему (двух) вершин и (двух) граней.

Ребро назовем *пирамидальным,* если оно инцидентно не менее чем трем элементам степени 3 (на самом деле ребра, инцидентные четырем элементам степени 3, существуют только в тетраэдре). Заметим, что в n-пирамиде каждое

Borodin O.V., Ivanova A.O. The weight of edge in 3-polytopes.

The work is supported by the grants 12-01-00631, 12-01-00448, 12-01-98510 of Russian Foundation for Basic Research, NSh-1939.2014.1 of President Grants for Government Support the Leading Scientific Schools of the Russian Federation.

Received June, 2, 2014, published June, 16, 2014.

ребро имеет высоту n. Таким образом, при допущении в 3-многограннике пирамидальных ребер все ребра в нем могут оказаться неограниченно большой высоты.

Приведем конструкцию 3-многогранника, в котором высота каждого ребра произвольно велика и присутствуют не только пирамидальные ребра. Возьмем двойную $2n$-пирамиду с $2n$-вершинами x, z и циклом $y_1 \ldots y_{2n}$ из 4-вершин. Каждое ребро $y_k y_{k+1}$ при $1 \le k \le 2n$ (сложение ведется по модулю $2n$), заменим цепью $y_k y_{k,1} \ldots y_{k,n-3} y_{k+1}$, в которой все добавленные вершины имеют степень 2. Наконец, при всех $1 \le k \le 2n$ соединим все 2-вершины $y_{k,1}, \ldots, y_{k,n-3}$ с x, если k четно, и с z в противном случае. В полученном 3-многраннике каждое ребро имеет высоту не менее n, а инцидентные 4-вершинам ребра не являются пирамидальными.

В 1940 г. Лебег [2] доказал, что каждый 3-многогранник без пирамидальных ребер содержит ребро высоты не более 11. Эта верхняя оценка была в 1995 г. понижена Августиновичем и Бородиным [1] до 10.

Наилучшая из ранее известных нижних оценок на высоту ребра равна 7 и получается из ромбокубоктаэдра — полуправильного $(3, 4, 4, 4)$-многогранника, в котором каждая вершина имеет степень 4 и инцидентна одной 3-грани и трем 4-граням, вставкой вершины степени 4 в каждую его 4-грань.

Целью заметки является улучшение каждой из этих оценок на 1.

Теорема 1. *Каждый* 3*-многогранник без пирамидальных ребер содержит ребро высоты не более* 9*. Кроме того, существует* 3*-многогранник без пирамидальных ребер, каждое ребро которого имеет высоту не меньше* 8.

Проблема 1. *Какая из оценок в теореме 1 точна:* 8 *или* 9*?*

2. Доказательство теоремы 1

Для доказательства второго утверждения нашей теоремы достаточно склеить по четырем внешним 8^+-вершинам две копии конструкции, показанной на рис. 1. Нетрудно проверить, что возникает 3-многогранник без пирамидальных ребер, в котором каждое ребро имеет высоту не менее 8.

Предположим теперь, что каждое ребро 3-многогранника M инцидентно по меньшей мере двум 4^+-элементам, хотя бы один из которых имеет степень не меньше 10. Множество вершин, ребер и граней в M обозначим V, E и F, соответственно.

2.1. **Перераспределение зарядов.**

Формула Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для M влечет

$$\sum_{x \in V \cup F} (d(x) - 4) = -8. \tag{1}$$

Присвоим *начальный заряд*, равный $\mu(x) = d(x) - 4$, каждому элементу $x \in V \cup F$ и равный $\mu(e) = 0$, если $e \in E$, так что только элементы степени 3 из $V \cup F$ имеют отрицательный заряд. Используя свойства контрпримера M к первому утверждению теоремы 1, мы определим локальное перераспределение зарядов, сохраняющее их сумму, такое, что *новый заряд* $\mu'(x)$ окажется неотрицательным для всех $x \in V \cup E \cup F$. Последнее будет противоречить тому факту, что сумма новых зарядов согласно формуле (1) равна -8.

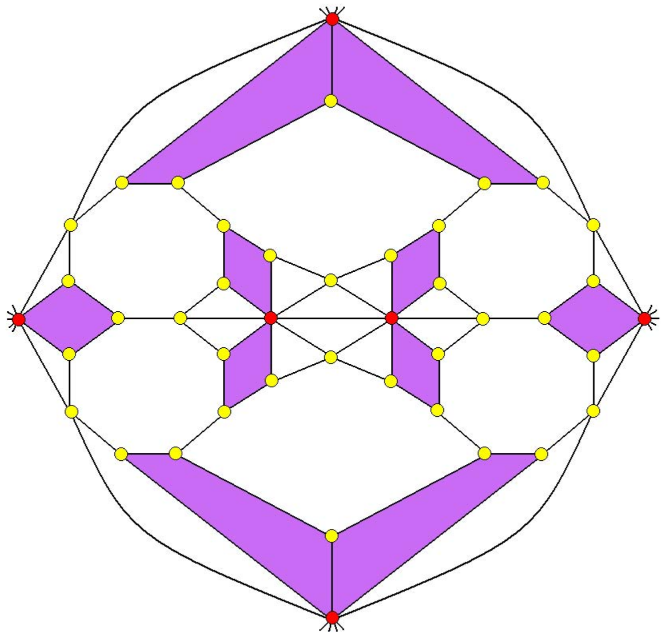

Рис. 1. Конструкция, показывающая достижимость нижней оценки в теореме 1.

Сначала дадим несколько определений. Назовем ребро *дублем*, если оно инцидентно двум элементам степени 3. Пусть ребро e инцидентно вершинам v_1, v_2 и граням f_1, f_2. Если $d(v_1) \geq 10$ и $d(f_1) = d(f_2) = 3$, то ребро e — *хороший вершинный дубль*, если либо

(i) $d(v_2) \geq 6$, либо

(ii) $4 \leq d(v_2) \leq 5$ и выполняется условие: $d(v_2') \leq 5$ и $d(v_2'') \leq 5$, где $v_1 v_2' v_2 = f_1$ и $v_1 v_2'' v_2 = f_2$.

Хороший вершинный дубль типа (ii) называется также *k-специальным ребром*, где $k = d(v_2)$. В частности, если e — 4-специальное ребро, то ребро $v_2 w$ (w смежна с v_2 и отлична от v_2' и v_2'') называется *спонсорским* для e. Отметим, что ребро может являться спонсорским сразу для двух 4-специальных ребер. Только что введенные понятия проиллюстрированы на рис. 2.

Ввиду вершинно-граневой двойственности, возникает аналогичное понятие *хорошего граневого дубля, k-специального и спонсорского ребер* (нужно в приведенных выше определениях поменять местами вершины и ребра; простейший пример приведен на рис. 3).

Дубль любого из этих двух видов (вершинный или граневый) считается *хорошим*.

Мы используем следующие правила перераспределения зарядов (см. рис. 4, где приведены только иллюстрации, относящиеся к “вершинной половине” правил, а двойственные им опущены).

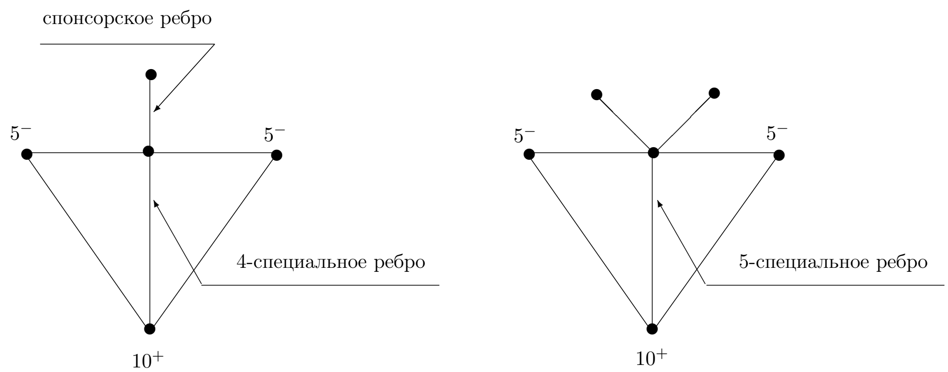

Рис. 2. Хорошие вершинные дубли типа (ii).

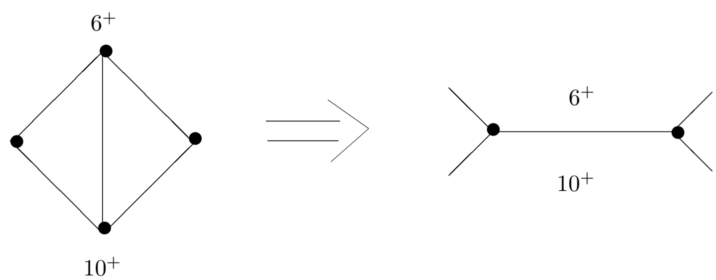

Рис. 3. Хорошие дубли типа (i): вершинный и граневый.

R1. *Каждое ребро получает по* $-\frac{1}{3}$ *от каждого инцидентного элемента степени* 3.

R2. (*i*) *Каждое не* 4*-специальное ребро получает по* 0 *от каждого инцидентного элемента степени* 4*, а* 4*-специальное ребро получает* $\frac{1}{3}$ *от инцидентного элемента степени* 4.

(*ii*) *Каждый элемент степени* 4*, инцидентный* 4*-специальному ребру* e*, получает* $\frac{1}{3}$ *от ребра* e'*, спонсорского для* e.

R3. *Каждое ребро получает по* 0 *от каждого инцидентного не* 5*-специального элемента степени* 5*, а от* 5*-специального элемента степени* 5 *получает* $\frac{1}{3}$.

R4. *Каждое ребро получает по* $\frac{1}{3}$ *от каждого инцидентного элемента степени от* 6 *до* 9.

R5. *Каждое ребро* e *получает от каждого инцидентного* 10^+*-элемента* v*:*

(*i*) $\frac{1}{3}$*, если* e *не является дублем;*

(*ii*) $\frac{1}{3}$*, если* e *инцидентно* 6^+*-элементу* $v' \neq v$*, однотипному с* v*, и двум элементам степени* 3*;*

(*iii*) $\frac{1}{3}$*, если* e *является* 4*- или* 5*-специальным ребром;*

(*iv*) $\frac{2}{3}$ *— в остальных случаях (т.е. когда* e *— дубль, не являющийся хорошим).*

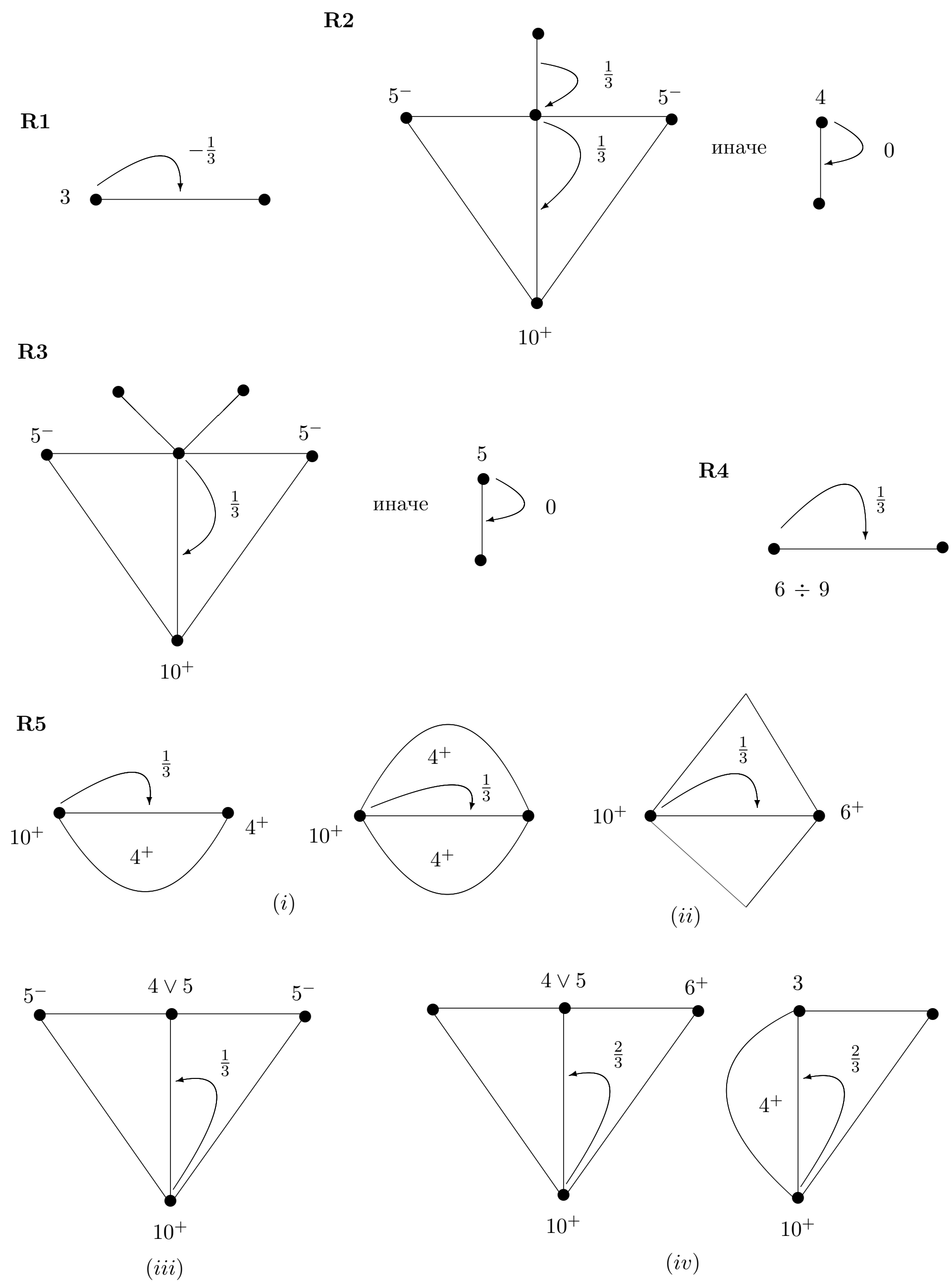

Рис. 4. Правила перераспределения зарядов.

2.2. **Доказательство $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup E \cup F$.**

СЛУЧАЙ 1. $e \in E$. Пусть ребро e инцидентно вершинам v_1, v_2 и граням f_1, f_2. Если e не дубль, то $\mu'(e) \geq 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$, т.к. e получает $\frac{1}{3}$ от инцидентного 10^+-элемента согласно R5i и отдает $\frac{1}{3}$ не более одного раза по R1.

Пусть e — дубль. Если $d(v_1) = d(f_1) = 3$, то e получает $\frac{2}{3}$ от инцидентного 10^+-элемента согласно R5iv и отдает дважды по $\frac{1}{3}$ согласно R1, откуда $\mu'(e) = 0$.

Остается предположить, что $d(f_1) = d(f_2) = 3$, т.к. случай $d(v_1) = d(v_2) = 3$ получается переходом к двойственным терминам.

Пусть $d(v_1) \geq 10$. Заметим, что $d(v_2) \geq 4$, так как ребро e не пирамидальное. Если $d(v_2) \geq 6$, то $\mu'(e) = 0$ согласно R1, R4 и R5ii.

Пусть теперь $4 \leq d(v_2) \leq 5$. Заметим, что e либо получает $\frac{1}{3}$ от v_2 по одному из правил R2, R3, и тогда получает еще $\frac{1}{3}$ от v_1 по R5iii, либо ничего не получает от v_2, но тогда получает $\frac{2}{3}$ от v_1 по R5iv. Поскольку e отдает в сумме $\frac{2}{3}$ инцидентным 3-граням, то в обоих вариантах имеем $\mu'(e) = 0$.

СЛУЧАЙ 2. $v \in V$. Пусть $v_1, \ldots, v_{d(v)}$ — соседи вершины v в циклическом порядке, а $f_i = v_i v v_{i+1} \ldots$, где $1 \leq i \leq d(v)$, — инцидентные v грани (сложение по модулю $d(v)$).

Подслучай 2.1. $d(v) = 3$. Поскольку наша v посылает $-\frac{1}{3}$ каждому инцидентному ребру согласно R1, то $\mu'(v) = 3 - 4 - 3 \times (-\frac{1}{3}) = 0$.

Подслучай 2.2. $d(v) = 4$. Согласно R2, если v не инцидентна 4-специальному ребру, то $\mu'(v) = 4 - 4 = 0$, а иначе $\mu'(v) = 4 - 4 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$.

Подслучай 2.3. $d(v) = 5$. Отметим, что v инцидентна не более чем одному 5-специальному ребру, поэтому, $\mu'(v) \geq 5 - \frac{1}{3} > 0$ по R3.

Подслучай 2.4. $6 \leq d(v) \leq 9$. Виду R4, v отдает $\frac{1}{3}$ каждому инцидентному ребру, откуда $\mu'(v) \geq d(v) - 4 - d(v) \times \frac{1}{3} = \frac{2(d(v)-6)}{3} \geq 0$.

Подслучай 2.5. $d(v) \geq 10$. Нам понадобится ряд определений.

Вершина v *симплициальна*, если $d(f_i) = 3$ при $1 \leq i \leq d(v)$. Пусть $d(f_{d(v)}) \geq 4$, $d(f_i) = 3$ при $1 \leq i \leq k-1$, а $d(f_k) \geq 4$ (не исключается, что $k = d(v)$); тогда последовательность $v_1, \ldots, v_k$ называется *k-островом*.

Ребро при v назовем *хорошим*, если на него не действует правило R5iv, то есть если оно получает от v согласно R5 не $\frac{2}{3}$, а лишь $\frac{1}{3}$.

Замечание 1. *Ребро, составляющее 1-остров — хорошее, как и хотя бы одно из ребер, составляющих 2-остров.*

Вторая часть этого замечания следует из того, что ребро v_1v_2 — не пирамидальное, а значит либо $d(v_1) \geq 4$ (и тогда ребро vv_1 — хорошее), либо $d(v_2) \geq 4$.

Замечание 2. *Среди ребер vv_1, vv_2, vv_3, входящих в k-остров при $k \geq 3$ найдется хорошее ребро.*

Действительно, vv_1 не является хорошим лишь если $d(v_1) = 3$. Если $d(v_2) \geq 6$ или $d(v_3) \geq 6$, то мы уже нашли хорошее ребро согласно R5ii. Если же $d(v_2) \leq 6$ и $d(v_3) \leq 6$, то оба ребра v_1v_2 и v_2v_3 инцидентны 10^+-граням, а значит ребро vv_2 является специальным, а следовательно хорошим согласно правилу R5iii.

Из замечаний 1 и 2 легко получаем такой факт.

Следствие 1. *Каждый k-остров содержит хорошее ребро, а при $k \geq 6$ — не менее двух хороших ребер.*

Отметим, что при вершине нет ни одного острова если и только если она симплициальна.

Замечание 3. *Если вершина v симплициальна, то среди ребер vv_1, vv_2, vv_3 найдется хорошее ребро.*

В самом деле, либо среди v_1, v_2, v_3 найдется 6^+-вершина, либо ребро vv_2 является специальным.

Следствие 2. *Симплициальная 10^+-вершина инцидентна не менее чем $\lceil\frac{10}{3}\rceil = 4$ хорошим ребрам.*

Теперь мы завершаем разбор случая 2. Заметим, что если v инцидентна не менее чем двум хорошим ребрам, то $\mu'(v) \geq d(v) - 4 - 2 \times \frac{1}{3} - (d(v) - 2) \times 2/3 = \frac{d(v)-10}{3} \geq 0$.

Если v симплициальна, то пользуемся следствием 2. Если v инцидентна ровно одной 4^+-грани, то окрестность вершины v представляет собой $d(v)$-остров, и два хороших ребра находим по следствию 1. Если же окрестность вершины v состоит из не менее чем двух островов, то можем снова воспользоваться следствием 1.

СЛУЧАЙ 3. $f \in F$. Повторяя разбор случая 2 в двойственных терминах (то есть заменяя повсюду вершины на грани и наоборот), мы получаем доказательство того, что $\mu'(f) \geq 0$.

Таким образом, мы доказали, что $\mu'(x) \geq 0$ для каждого $x \in V \cup E \cup F$, что противоречит (1) и тем самым завершает доказательство теоремы 1.

Авторы благодарят рецензента за замечания, особенно за пожелание указать бесконечный класс 3-многогранников с неограниченной высотой каждого ребра, в которых бы содержались непирамидальные ребра.

Литература

[1] С.В. Августинович, О.В. Бородин, *Окрестности ребер в нормальных картах*, Дискретный анализ и исследование операций, **2**: 2–3 (1995) 3–9. MR1388656

[2] H. Lebesgue, *Quelques conséquences simples de la formule d'Euler*, J. Math. Pures Appl., **19** (1940) 27–43. MR0001903

[3] E. Steinitz, *Polyheder und Raumeinteilungen*, Enzykl. math. Wiss. (Geometrie), **3AB, 12** (1922) 1–139.

Oleg Veniaminovich Borodin
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: brdnoleg@math.nsc.ru

Anna Olegovna Ivanova
Ammosov North-Eastern Federal University,
str. Kulakovskogo, 48,
677013, Yakutsk, Russia
E-mail address: shmgnanna@mail.ru