

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

*Том 11, стр. 476–493 (2014)*

УДК 519.63

MSC 65M99

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ  
КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
СЕТОЧНЫМИ И БЕЗСЕТОЧНЫМИ ЧИСЛЕННЫМИ  
МЕТОДАМИ

П.Н. МАРТЫНЮК

ABSTRACT. The first aim of this work was finding an approximate solution for nonlinear free boundary-value problem which describes the mathematical model of filtration consolidation of soil using meshless method with radial basis functions (RBF). The second aim of this work was comparing numerical solutions that have been found by RBF method and finite element method (FEM). The third aim of this work was finding and comparing numerical solutions using different grids. We used an ideas of least square radial point collocation method. The proposed algorithm was tested on two-dimensional non-linear boundary value problem for system of three parabolic equations. Errors of difference between FEM's and RBFM's numerical solutions attained maximum in boundary points.  
**Keywords:** nonlinear free boundary-value problem; meshless method; radial basis function; finite element method.

## 1. ВСТУПЛЕНИЕ

Среди методов приближенного решения краевых задач особой популярностью пользуются проекционные методы [12]. С проекционного метода Бубнова-Галёркина, используя в качестве базисных функций полиномы с компактным носителем, мы получаем метод конечных элементов (МКЭ) [36, 37, 45]. Один из самых больших недостатков проекционно-сеточных методов (включая и МКЭ) — необходимость покрывать расчётную область, в которой ищется приближённое решение краевой задачи, так называемой геометрической сеткой. Под

---

MARTINYUK, P.N., MESHFREE AND MESH METHODS FOR SYSTEM OF NON-LINEAR PARABOLIC EQUATIONS.

© 2014 МАРТЫНЮК П.Н.

*Получено 6 февраля 2014, опубликовано 24 июня 2014.*

геометрической сеткой понимают множество узлов, между которыми определённым образом установлены взаимосвязи [24]. Фактически в МКЭ из набора узлов и взаимосвязей между ними и формируется конечный элемент.

Одной из альтернатив проекционно-сеточным методам являются бессеточные методы [23, 32]. Например, используя в проекционном методе Петрова-Галёркина в качестве пробных функций дельта-функцию Дирака мы получим так называемый метод колокации в точке [3]. В качестве базисных в этом методе можно использовать радиальные базисные функции (РБФ) [19, 20, 21, 26, 46]. Впервые такой подход для решения краевых задач был использован в работах [27, 28] и получил название „метод РБФ“. Своё первое применение РБФ нашли в задачах аппроксимации функций [21].

В статье [31] метод РБФ использован для нахождения приближенного решения краевых задач для уравнения Гельмгольца. Также, основываясь на численных экспериментах, авторами статьи сделаны выводы о лучших аппроксимационных свойствах приближенных решений метода РБФ по сравнению с методом конечных разностей (МКР) и МКЭ.

В работе [19] сопоставлены численные решения методом РБФ и МСР на примере задачи адвекции-диффузии (массопереноса) с доминирующим конвективным членом. Известно, что в сеточных методах (и в МСР, и в МКЭ) возникают определённые проблемы при решении таких задач, связанные с осцилляциями в приближенных решениях. Поэтому в МСР используют монотонные разностные схемы [15], а в МКЭ — стабилизационные и адаптивные схемы [8, 18, 38, 39]. Согласно [19], авторы показали, что метод РБФ, даже в своих самых простых реализациях, даёт приемлемые результаты для задач с вышеуказанной спецификой. Надо сказать, что авторы статьи констатируют этот факт, базируясь на численных экспериментах без строгих теоретических доказательств.

В работе [39] разработан адаптивный метод РБФ. Также в методе РБФ часто используют радиальные базисные функции с компактным носителем [20].

В работах [5, 6, 7, 8, 9, 13, 41, 42] предложен новый подход к математическому моделированию фильтрационной консолидации грунтов. Он заключается в учёте влияния тепло-солепереноса посредством явлений химического и термического осмосов, а также через учёт зависимости параметров фильтрации от теплового и химического состава поровой жидкости грунта. Для численного решения соответствующих одно- и двухмерных краевых задач использовались три метода — метод РБФ, МСР и МКЭ.

Построенная математическая модель процессов фильтрационной консолидации описывается начально-краевой задачей для системы квазилинейных параболических уравнений в областях со свободными границами. Использование и поведение метода РБФ мало изучено для таких краевых задач. Присутствие свободных подвижных границ усложняет теоретический анализ точности конечноэлементных, конечноразностных и приближенных решений согласно метода РБФ. Поэтому, первой целью и заданием этой статьи является поиск приближенного решения двухмерной краевой задачи для квазилинейной системы параболических уравнений со свободными подвижными границами, которой описывается математическая модель фильтрационной консолидации грунтов в условиях тепло-солепереноса, используя бессеточный метод РБФ. Вторая цель — сравнить численные решения, полученные двумя методами - МКЭ и методом РБФ. Третья цель — используя численные решения на множестве

пространственно-временных сеток оценить точность конечноэлементных решений посредством численного эксперимента.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ ГРУНТОВ В УСЛОВИЯХ ТЕПЛО-СОЛЕПЕРЕНОСА

Рассмотрим процесс фильтрационной консолидации двухфазного грунта в двумерной области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  под влиянием мгновенно приложенной внешней нагрузки интенсивностью  $q(x)$ . Пускай  $\Gamma_l$  — это свободная подвижная часть границы  $\Gamma$ , которая задается уравнением  $y = l(x, t)$  и в принципе не известна. Математическая модель вышеуказанного процесса в условиях влияния тепло-солепереноса описывается следующей краевой задачей со свободной границей [6]:

$$(1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot (\mathbf{K}(c, T) \nabla h - \nu(c, T) \nabla c - \mu(c, T) \nabla T), \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,$$

$$(2) \quad n \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T) \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T(c, T) \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c - \gamma_m(c - C_m), \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,$$

$$(3) \quad c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda(c, T) \nabla T) - \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla T, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,$$

$$(4) \quad \mathbf{u} = e \mathbf{v} - \mathbf{K}(c, T) \nabla h - \nu(c, T) \nabla c - \mu(c, T) \nabla T,$$

$$(5) \quad \mathbf{q}_c = \mathbf{u} \cdot c - \mathbf{D}(c, T) \nabla c - \mathbf{D}_T(c, T) \nabla T,$$

$$(6) \quad \mathbf{q}_T = \rho c_\rho \mathbf{u} \cdot T - \lambda(c, T) \nabla T,$$

$$(7) \quad \begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_1} = 0, \quad h|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2, \quad (\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\Gamma_3} = 0, \quad c|_{\Gamma_4} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_4, \\ (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_5} = 0, \quad T|_{\Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_6, \end{aligned}$$

$$(8) \quad h(\mathbf{X}, 0) = h_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, 0) = c_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega},$$

$$(9) \quad \frac{\partial l(x, t)}{\partial t} = \frac{2\gamma a}{(1+e)(1+\xi)} \int_0^{l(x, t)} \frac{\partial h}{\partial t} dx, \quad l_0(x) = l(x, 0),$$

где  $t \in (0; t_0]$ ;  $\mathbf{X} = (x, y)$ ;  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ ,  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \Gamma_5 \cup \Gamma_6$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ ,  $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$ ,  $\Gamma_5 \cap \Gamma_6 = \emptyset$ ,  $C_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $T_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $H_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $h_0(\mathbf{X})$ ,  $c_0(\mathbf{X})$ ,  $T_0(\mathbf{X})$ ,  $l_0(x)$  — известные функции. Здесь использованы следующие обозначения:  $h(\mathbf{X}, t)$  — избыточные напоры;  $c(\mathbf{X}, t)$  — концентрация порового солевого раствора;  $T(\mathbf{X}, t)$  — температура;  $\mathbf{K}(c, T) = \{k_{ij}(c, T)\}$ ,  $\nu(c, T) = \{\nu_{ij}(c, T)\}$ ,  $\mathbf{D}(c, T) = \{D_{ij}(c, T)\}$ ,  $\mathbf{D}_T(c, T) = \{D_{Tij}(c, T)\}$ ,  $\mu(c, T) = \{\mu_{ij}(c, T)\}$ ,  $\lambda(c, T) = \{\lambda_{ij}(c, T)\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , — тензоры коэффициентов фильтрации, химического

осмоса, коэффициента диффузии, термодиффузии [1], термического осмоса, коэффициентов теплопроводности грунта;  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{q}_c$ ,  $\mathbf{q}_T$  — векторы скоростей фильтрации, движения твёрдых частиц грунта, векторы потоков массы и тепла;  $\mathbf{n}$  — вектор нормальных косинусов внешней нормали к границе  $\Gamma$ ;  $\rho$ ,  $c_p$  — плотность и удельная теплоёмкость порового раствора;  $c_T$  — объёмная теплоёмкость грунта;  $t$  — время;  $e$  — коэффициент пористости;  $\gamma$  — удельный вес порового раствора;  $n$  — пористость грунта;  $\xi$  — коэффициент бокового давления грунта;  $a$  — коэффициент сжимаемости грунта;  $\gamma_m$  — константа скорости массообмена;  $C_m$  — концентрация граничного насыщения порового раствора. Отметим, что в кинематическом граничном условии (9) учтены только вертикальные проседания.

Проблема консолидации особенно остро стоит для глинистых грунтов. Известно, что глинистые грунты владеют свойствами полупроницаемых мембран [25]. Поэтому в порах глинистого грунта, насыщенного соевым раствором, возможно возникновение аномальных давлений, как результат химического осмоса. Результаты наблюдений таких явлений в природных геологических формациях опубликованы в [35]. Ещё больше явлений химического осмоса наблюдалось в лабораторных условиях [14, 30, 34].

Б.Ф. Рельтов, Н.А. Новицкая указывают, что осмотические свойства связанных грунтов и вообще дисперсных систем могут быть выражены в одномерном случае следующей зависимостью [14]:

$$v_c = \nu(c) \frac{\partial c}{\partial x},$$

где  $v_c$  — скорость фильтрации, обусловленная химическим осмосом;  $\nu$  — коэффициент химического осмоса;  $c$  — концентрация порового солевого раствора.

Наличие градиента температуры в грунте также может вызывать фильтрацию поровой жидкости. Это объясняется явлением термического осмоса — движением жидкости под воздействием градиента температуры [40]. Аналогично как и для химического осмоса, имеем [22]

$$v_T = \mu \frac{\partial T}{\partial x},$$

где  $v_T$  — скорость фильтрации, обусловленная термическим осмосом;  $\mu$  — коэффициент термического осмоса. Установлено [40], что порядок величины коэффициента  $\mu$  изменяется в границах  $10^{-9} \dots 10^{-5} \text{ м}^2/\text{К} \cdot \text{сутки}$ .

В работах [4, 10, 11, 16] экспериментально показана значительная зависимость коэффициентов фильтрации и проницаемости грунтов от концентрации солей в поровой воде. В [10] отмечается, что при росте минерализации порового раствора проницаемость глин увеличивается. Максимальный рост проницаемости наблюдается в интервале минерализации 5 – 20 г/литр. С увеличением минерализации рост проницаемости замедляется и кривая приближается к горизонтальной асимптоте. Для глин разных типов отношение проницаемости при фильтрации пресной воды к проницаемости при фильтрации концентрированных растворов разное. Также в данной работе отмечается, что проницаемость глин увеличивается и при увеличении температуры, причём особенно интенсивно в интервале температур 40 – 60°C.

Достаточно полные результаты исследований влияния минерализации водных растворов на коэффициент проницаемости и коэффициент фильтрации горных пород изложены в работе [16]. Установлено, что с повышением степени

минерализации водных растворов коэффициент проницаемости увеличивается до тех пор, пока концентрация солей в растворе не достигнет определенной величины  $C_M$ . Для каждой исследованной горной породы существует своя собственная величина  $C_M$ , при которой эффективная проницаемость данной породы будет экстремальной. Уменьшение или увеличение концентрации порового солевого раствора уменьшает фильтрационные свойства породы.

Также известны экспериментальные исследования, где указывается на зависимость коэффициента фильтрации от температуры [2, 17]. Например, для гумбина [2] в интервале температур от  $3^{\circ}\text{C}$  до  $70^{\circ}\text{C}$  коэффициент фильтрации увеличивается на четыре порядка. Зависимость величины потока отфильтрованной воды от температуры подтверждают и результаты работы [43]. Показано, что при росте температуры от  $20^{\circ}\text{C}$  до  $35^{\circ}\text{C}$  величина потока воды, которая фильтруется через грунт, может вырасти в 1,5 – 2 раза. Такие данные еще раз подтверждают о недопустимости пренебрежения в прогнозных расчетах зависимостью параметров фильтрации от физико-химического состояния пористой среды. Поэтому в математической модели (1)-(9) коэффициент фильтрации зависит от функций концентрации солей  $c$  и температуры  $T$ . Зависимость других коэффициентов от указанных функций вообще является допущением.

### 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ МЕТОДОМ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

Здесь мы воспользуемся идеей метода колокации в точке, где в качестве базисных используются радиальные функции, а для решения переопределённых систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) — метод наименьших квадратов [29, 33, 44]. Покроем замыкание области  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  множеством узлов  $\mathbf{Y}_j = (x_{yj}, y_{yj})$ ,  $j = \overline{1, M}$ , и множеством колокационных точек  $\mathbf{X}_i = (x_{xi}, y_{xi})$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Пусть  $N_{\Omega}$  - множество номеров колокационных точек, которые лежат в области  $\Omega$ ;  $N_k$  - множество номеров колокационных точек, которые лежат на части  $\Gamma_k$ ,  $k = \overline{1, 6}$ , границы  $\Gamma$ . Имеем  $N = N_1 \cup N_2 \cup N_{\Omega}$ ,  $N = N_3 \cup N_4 \cup N_{\Omega}$ ,  $N = N_5 \cup N_6 \cup N_{\Omega}$ . Также будем требовать, что  $N \geq M$ . Приближенное решение краевой задачи (1)-(9) ищем в следующем виде:

$$(10) \quad \begin{aligned} h(\mathbf{X}, t) &= \sum_{j=1}^M h_j(t) \varphi_j(r_j, \epsilon_h), c(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=1}^M c_j(t) \varphi_j(r_j, \epsilon_c), \\ T(\mathbf{X}, t) &= \sum_{j=1}^M T_j(t) \varphi_j(r_j, \epsilon_T), \end{aligned}$$

где  $h_j(t)$ ,  $c_j(t)$ ,  $T_j(t)$ ,  $j = \overline{1, M}$ , — неизвестные коэффициенты, которые зависят от времени;  $\varphi_j(r_j, \epsilon)$ ,  $j = \overline{1, M}$ , — известные РБФ;  $\epsilon_h > 0$ ,  $\epsilon_c > 0$ ,  $\epsilon_T > 0$  — параметры формы;  $r_j = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}_j\|_2$ ;  $\|\bullet\|_2$  — Евклидова норма.

Используя метод колокации в точке, с краевой задачи (1)-(9) получаем задачу Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных  $\mathbf{h}(t) = (h_j(t))_{j=1}^M$ ,  $\mathbf{c}(t) = (c_j(t))_{j=1}^M$ ,  $\mathbf{T}(t) = (T_j(t))_{j=1}^M$ :

$$(11) \quad \mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{h}, \mathbf{c}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}^{(3)},$$

$$(12) \quad \mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{c}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{h}, \mathbf{c}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{G}^{(2)} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{F}^{(2)},$$

$$(13) \quad \mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{c}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{F}^{(1)},$$

$$(14) \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{h}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{c}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(0)} &= (h_j(0))_{j=1}^M, \quad \mathbf{c}^{(0)} = (c_j(0))_{j=1}^M, \quad \mathbf{T}^{(0)} = (T_j(0))_{j=1}^M, \quad \mathbf{M}^{(k)} = \left( m_{ij}^{(k)} \right)_{i,j=1}^{N,M}, \\ \mathbf{L}^{(k)} &= \left( l_{ij}^{(k)} \right)_{i,j=1}^{N,M}, \quad \mathbf{F}^{(k)} = \left( f_i^{(k)} \right)_{i=1}^N, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \left( \tilde{m}_{ij}^{(k)} \right)_{i,j=1}^{N,M}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \left( \tilde{f}_i^{(k)} \right)_{i=1}^N, \\ k &= \overline{1,3}, \quad \mathbf{G}^{(k)} = \left( g_{ij}^{(k)} \right)_{i,j=1}^{N,M}, \quad k = 1, 2, \quad \mathbf{G}^{(1)} = \left( g_{ij}^{(1)} \right)_{i,j=1}^{N,M}, \\ m_{ij}^{(3)} &= \begin{cases} c_T \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_T), i \in N_\Omega; \\ 0, i \notin N_\Omega; \end{cases} \quad m_{ij}^{(2)} = \begin{cases} n \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_c), i \in N_\Omega; \\ 0, i f i \notin N_\Omega; \end{cases} \\ l_{ij}^{(3)} &= \begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_T)) + \rho c_\rho (\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_T)), i \in N_\Omega; \\ (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_T) + \rho c_\rho \mathbf{u} \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_T), \mathbf{n}), i \in N_5; \\ \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_T), i \in N_6; \end{cases} \\ f_i^{(3)} &= \begin{cases} 0, i \in N_\Omega; \\ 0, i \in N_5; \\ T_1(\mathbf{X}_i, t), i \in N_6; \end{cases} \quad f_i^{(2)} = \begin{cases} \gamma_m C_m, i \in N_\Omega; \\ 0, i \in N_3; \\ C_1(\mathbf{X}_i, t), i \in N_4; \end{cases} \\ f_i^{(1)} &= \begin{cases} 0, i \in N_\Omega; \\ 0, i \in N_1; \\ H_1(\mathbf{X}_i, t), i \in N_2; \end{cases} \\ l_{ij}^{(2)} &= \begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_c)) + (\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_c)) + \gamma_m \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_c), i \in N_\Omega; \\ (-\mathbf{D} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_c) + \mathbf{u} \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_c), \mathbf{n}), i \in N_3; \\ \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_c), i \in N_4; \end{cases} \\ g_{ij}^{(2)} &= \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_T)), i \in N_\Omega; \\ (-\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_c), \mathbf{n}), i \in N_3; \\ 0, i \in N_4; \end{cases} \\ l_{ij}^{(1)} &= \begin{cases} -\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_h)), i \in N_\Omega; \\ (-\mathbf{K} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_h), \mathbf{n}), i f i \in N_1; \\ \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_h), i f i \in N_2; \end{cases} \\ g_{ij}^{(1)} &= \begin{cases} -\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot (\nu \nabla \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_c)), i \in N_\Omega; \\ (\nu \nabla \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_c), \mathbf{n}), i \in N_1; \\ 0, i \in N_2; \end{cases} \\ g_{ij}^{(1)} &= \begin{cases} -\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot (\mu \nabla \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_T)), i \in N_\Omega; \\ (\mu \nabla \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_T), \mathbf{n}), i \in N_1; \\ 0, i f i \in N_2; \end{cases} \quad m_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_h), i \in N_\Omega; \\ 0, i f i \notin N_\Omega; \end{cases} \\ \tilde{m}_{ij}^{(1)} &= \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_h); \quad \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_c); \quad \tilde{m}_{ij}^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \epsilon_T); \quad \tilde{f}_i^{(1)} = h_0(\mathbf{X}_i); \\ \tilde{f}_i^{(2)} &= c_0(\mathbf{X}_i); \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(\mathbf{X}_i); \quad r_{ji} = \|\mathbf{X}_i - \mathbf{Y}_j\|_2. \end{aligned}$$

Численное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (11)-(13) можно найти с помощью линеаризованной полностью неявной разностной схемы [15] или с помощью схемы Кранка-Николсона. Обозначим  $\tau$  как шаг

по времени и  $m_\tau = \lceil \frac{t_0}{\tau} \rceil$ ,  $t \in [0; t_0]$ . Тогда, например, полностью неявная линеаризованная разностная схема для задачи Коши (11)-(14) имеет следующий вид

$$(15) \quad \mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{\mathbf{T}^{(s+1)} - \mathbf{T}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{h}^{(s)}, \mathbf{c}^{(s)}, \mathbf{T}^{(s)}) \cdot \mathbf{T}^{(s+1)} = \mathbf{F}^{(3)}((s+1)\tau),$$

$$(16) \quad \mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{\mathbf{c}^{(s+1)} - \mathbf{c}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{h}^{(s)}, \mathbf{c}^{(s)}, \mathbf{T}^{(s)}) \cdot \mathbf{c}^{(s+1)} = \mathbf{G}^{(2)} \cdot \mathbf{T}^{(s+1)} + \mathbf{F}^{(2)}((s+1)\tau),$$

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{\mathbf{h}^{(s+1)} - \mathbf{h}^{(s)}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{c}^{(s+1)}, \mathbf{T}^{(s+1)}) \cdot \mathbf{h}^{(s+1)} = \\ = \mathbf{G}^{(1)} \cdot \mathbf{c}^{(s+1)} + \dot{\mathbf{G}}^{(1)} \cdot \mathbf{T}^{(s+1)} + \mathbf{F}^{(1)}((s+1)\tau), \end{aligned}$$

где  $s = 0, 1, \dots, m_\tau$ ,  $f^{(s)}$  - значение функции  $f(t)$  при  $t = s\tau$ .

Допустим, что координаты  $\mathbf{X}_i^{(s)} = (x_{xi}^{(s)}, y_{xi}^{(s)})$ ,  $i = \overline{1, N}$ , колокационных точек и координаты  $\mathbf{Y}_j^{(s)} = (x_{yj}^{(s)}, y_{yj}^{(s)})$ ,  $j = \overline{1, M}$ , узловых точек известны и задача Коши (11)-(14) решена при  $t = (s+1)\tau$ . Тогда для возможности проведения расчётов на следующем временном шаге мы должны уточнить координаты узловых и колокационных точек. Для этого используем кинематическое условие (9). Имеем (например, для  $\mathbf{X}_i^{(s+1)} = (x_{xi}^{(s+1)}, y_{xi}^{(s+1)})$ ,  $i = \overline{1, N}$ )

$$(18) \quad \frac{y_{xi}^{(s+1)} - y_{xi}^{(s)}}{\tau} = \frac{2\gamma a}{(1+e)(1+\xi)} \int_0^{l(x_{xi}^{(s)}, t_s)} \frac{h^{(s+1)}(x_{xi}^{(s)}, y) - h^{(s)}(x_{xi}^{(s)}, y)}{\tau} dy,$$

$i = \overline{1, N}$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$

#### 4. СХЕМАТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Шаг 1. Присвоить  $s := 0$ , где " := оператор присвоения. Вычислить  $\mathbf{h}^{(0)}$ ,  $\mathbf{c}^{(0)}$ ,  $\mathbf{T}^{(0)}$ . Для этого использовать СЛАУ (14).

Шаг 2. Найти  $\mathbf{T}^{(s+1)}$ , используя уравнения (15).

Шаг 3. Используя уравнения (16), вычислить  $\mathbf{c}^{(s+1)}$ .

Шаг 4. Вычислить  $\mathbf{h}^{(s+1)}$ . Для этого использовать СЛАУ (17).

Шаг 5. Вычислить  $\mathbf{X}^{(s+1)}$  и  $\mathbf{Y}^{(s+1)}$ . Для этого использовать условие (18). При этом надо учитывать, что в колокационных и узловых точек изменяются только вертикальные координаты.

Шаг 6.  $s := s + 1$ .

Шаг 7. Если  $s = m_\tau$ , тогда решение задачи найдено. В противном случае перейти к шагу 2.

#### 5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Как известно, МКЭ [6, 8, 36, 37, 45] относится к классу проекционно-сеточных методов [12]. Обозначим через  $W_2^1(\Omega)$  пространство Соболева. Пусть  $H_0$  — пространство вектор-функций  $\mathbf{s}(\mathbf{X}) = (s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X}))$ , где  $s_i(\mathbf{X}) \in W_2^1(\Omega)$ ,

$i = \overline{1, 3}$ , и  $s_1(\mathbf{X})$ ,  $s_2(\mathbf{X})$ ,  $s_3(\mathbf{X})$  удовлетворяют однородным граничным условиям на тех частях границы  $\Gamma$ , где для функций  $h(\mathbf{X}, t)$ ,  $c(\mathbf{X}, t)$ ,  $T(\mathbf{X}, t)$  заданы граничные условия первого рода.

Через  $H$  обозначим пространство вектор-функций  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = (f_1(\mathbf{X}, t); f_2(\mathbf{X}, t); f_3(\mathbf{X}, t))$ , где  $f_i(\mathbf{X}, t) \in W_2^1(\Omega)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  и их первые производные интегрируемые с квадратом по области  $\Omega$ ,  $\forall t \in (0; t_0]$ . Также функции  $f_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $f_2(\mathbf{X}, t)$  и  $f_3(\mathbf{X}, t)$  должны удовлетворять тем же граничным условиям первого рода, что и  $h(\mathbf{X}, t)$ ,  $c(\mathbf{X}, t)$ ,  $T(\mathbf{X}, t)$  соответственно.

Обозначим через  $Pe_c$ ,  $Pe_T$  сеточные числа Рейнольдса уравнений (2) и (3) соответственно, причём

$$Pe_c = \frac{1}{2} h_e \frac{\|\mathbf{u}\|_{\infty, e}}{\|\mathbf{D}\|_{\infty, e}}, \quad Pe_T = \frac{1}{2} h_e \frac{\|\rho c_\rho \mathbf{u}\|_{\infty, e}}{\|\lambda\|_{\infty, e}}$$

где  $h_e$  — длина максимальной стороны из всех конечных элементов;  $\|f\|_{\infty, e} = \max_{\Omega_e} |f|$ ;  $\Omega_e$  — конечные элементы.

Значения чисел  $Pe_c$ ,  $Pe_T$  могут быть больше за 1. Тогда в численных решениях краевой задачи (1)-(9), найденных метода Бубнова-Галёркина, могут появиться осцилляции. Для преодоления этого недостатка в МКЭ разработаны два подхода — адаптивные схемы МКЭ и стабилизационные схемы МКЭ [18, 38, 39]. В этой статье для стабилизации численных решений уравнений (2), (3) мы используем противопотоковую схему Петрова-Галёркина [6, 38].

Используем стандартный подход. Во-первых, умножим каждое из уравнений (1)-(3) и каждое из начальных условий (10)-(12) на функции  $s_1(\mathbf{X})$ ,  $s_2(\mathbf{X})$ ,  $s_3(\mathbf{X})$  такие, что  $\mathbf{s}(\mathbf{X}) = (s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X})) \in H_0$ . Далее проинтегрируем полученные равенства по области  $\Omega$ . И в третьих, используем формулу Остроградского-Гауса, а также противопотоковую схему Петрова-Галёркина. Получим

$$(19) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t} s_1 d\Omega + \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \int_{\Omega} (\mathbf{K}(c, T) \nabla h - \nu(c, T) \nabla c - \mu(c, T) \nabla T) \nabla s_1 d\Omega = 0,$$

$$(20) \quad \int_{\Omega} \left( n \frac{\partial c}{\partial t} s_2 + \mathbf{D} \nabla c \nabla s_2 + \mathbf{D}_T \nabla T \nabla s_2 + \mathbf{u} \nabla c s_2 + \gamma_m (c - C_m) s_2 \right) d\Omega + \\ + \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \left( n \frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{D}_T(c, T) \nabla T) + \right. \\ \left. + \mathbf{u} \nabla c + \gamma_m (c - C_m) \right) \mathbf{u} \nabla s_2 d\Omega = 0,$$

$$(21) \quad \int_{\Omega} \left( c_T \frac{\partial T}{\partial t} s_3 + \lambda \nabla T \nabla s_3 + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla c s_3 \right) d\Omega + \\ + \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \left( c_T \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla c) + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla T \right) \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla s_3 d\Omega = 0,$$



$$(22) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} h(\mathbf{X}, 0) s_1 d\Omega &= \int_{\Omega} h_0(\mathbf{X}) s_1 d\Omega, \\ \int_{\Omega} c(\mathbf{X}, 0) s_2 d\Omega &= \int_{\Omega} c_0(\mathbf{X}) s_2 d\Omega, \\ \int_{\Omega} T(\mathbf{X}, 0) s_3 d\Omega &= \int_{\Omega} T_0(\mathbf{X}) s_3 d\Omega, \end{aligned}$$

$\forall (s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X})) \in H_0, (h(\mathbf{X}, t); c(\mathbf{X}, t); T(\mathbf{X}, t)) \in H.$

Приближенное решение краевой задачи (1)-(9) согласно МКЭ ищем в виде

$$(23) \quad \begin{aligned} (\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t)) &= \left( \sum_{j=1}^{n_1} h_j(t) N_j^{(1)}(\mathbf{X}) + W_1(\mathbf{X}, t); \right. \\ &\left. \sum_{j=1}^{n_2} c_j(t) N_j^{(2)}(\mathbf{X}) + W_2(\mathbf{X}, t); \sum_{j=1}^{n_3} T_j(t) N_j^{(3)}(\mathbf{X}) + W_3(\mathbf{X}, t) \right), \end{aligned}$$

где  $h_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n_1}$ ,  $c_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n_2}$ ,  $T_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n_3}$ , — неизвестные коэффициенты, которые зависят только от времени;  $\mathbf{N}_j = (N_j^{(1)}; 0; 0)$ ,  $j = \overline{1, n_1}$ ,  $\mathbf{N}_j = (0; N_j^{(2)}; 0)$ ,  $j = \overline{1, n_2}$ ,  $\mathbf{N}_j = (0; 0; N_j^{(3)})$ ,  $j = \overline{1, n_3}$  — базисные функции конечномерного подпространства  $M_0 \subset H_0$ ;  $W_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $W_2(\mathbf{X}, t)$ ,  $W_3(\mathbf{X}, t)$  — известные функции, такие, что  $W_1|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\mathbf{X} \in \Gamma_2$ ;  $W_2|_{\Gamma_4} = C_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\mathbf{X} \in \Gamma_4$ ;  $W_3|_{\Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\mathbf{X} \in \Gamma_6$ .

Подставляя  $\hat{h}(\mathbf{X}, t)$ ,  $\hat{c}(\mathbf{X}, t)$ ,  $\hat{T}(\mathbf{X}, t)$  вместо  $h(\mathbf{X}, t)$ ,  $c(\mathbf{X}, t)$ ,  $T(\mathbf{X}, t)$  в (19)-(22), мы получаем задачу Коши (11)-(14) для системы нелинейных дифференциальных уравнений, где

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= (h_i(t))_{i=1}^{n_1}, \quad \mathbf{h}^{(0)} = (h_i(0))_{i=1}^{n_1}, \quad \mathbf{c} = (c_i(t))_{i=1}^{n_2}, \quad \mathbf{c}^{(0)} = (c_i(0))_{i=1}^{n_2}, \quad \mathbf{T} = (T_i(t))_{i=1}^{n_3}, \\ \mathbf{T}^{(0)} &= (T_i(0))_{i=1}^{n_3}, \quad \mathbf{M}^{(3)} = (m_{ij}^{(3)})_{i,j=1}^{n_3}, \quad \mathbf{L}^{(3)} = (l_{ij}^{(3)})_{i,j=1}^{n_3}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} = (\tilde{m}_{ij}^{(3)})_{i,j=1}^{n_3}, \\ \tilde{\mathbf{M}}^{(1)} &= (\tilde{m}_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{n_1}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(3)} = (\tilde{f}_i^{(3)})_{i=1}^{n_3}, \quad \mathbf{F}^{(3)} = (f_i^{(3)})_{i=1}^{n_3}, \quad \mathbf{M}^{(2)} = (m_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^{n_2}, \\ \mathbf{L}^{(2)} &= (l_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^{n_2}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} = (\tilde{m}_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^{n_2}, \quad \mathbf{G}^{(2)} = (g_{ij}^{(2)})_{i,j=1}^{n_2, n_3}, \quad \mathbf{F}^{(2)} = (f_i^{(2)})_{i=1}^{n_2}, \\ \tilde{\mathbf{F}}^{(2)} &= (\tilde{f}_i^{(2)})_{i=1}^{n_2}, \quad \mathbf{M}^{(1)} = (m_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{n_1}, \quad \mathbf{L}^{(1)} = (l_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{n_1}, \quad \mathbf{G}^{(1)} = (g_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{n_1, n_2}, \\ \dot{\mathbf{G}}^{(1)} &= (\dot{g}_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{n_1, n_3}, \quad \mathbf{F}^{(1)} = (f_i^{(1)})_{i=1}^{n_1}, \quad \mathbf{M}^{(0)} = (m_{ij}^{(0)})_{i,j=1}^{n_1}, \quad \mathbf{L}^{(0)} = (l_{ij}^{(0)})_{i,j=1}^{n_1}, \\ \mathbf{G}^{(0)} &= (g_{ij}^{(0)})_{i,j=1}^{n_1, n_2}, \quad \dot{\mathbf{G}}^{(0)} = (\dot{g}_{ij}^{(0)})_{i,j=1}^{n_1, n_3}, \quad \mathbf{F}^{(0)} = (f_i^{(0)})_{i=1}^{n_1}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(1)} = (\tilde{f}_i^{(1)})_{i=1}^{n_1}, \\ \tilde{m}_{ij}^{(3)} &= \int_{\Omega} N_i^{(3)} N_j^{(3)} d\Omega, \quad \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \int_{\Omega} N_i^{(2)} N_j^{(2)} d\Omega, \\ \tilde{f}_i^{(2)} &= \int_{\Omega} c_0 N_i^{(2)} d\Omega - \int_{\Omega} W_2(\mathbf{X}, 0) N_i^{(2)} d\Omega, \quad \tilde{m}_{ij}^{(1)} = \int_{\Omega} N_i^{(1)} N_j^{(1)} d\Omega, \\ \tilde{f}_i^{(3)} &= \int_{\Omega} T_0 N_i^{(3)} d\Omega - \int_{\Omega} W_3(\mathbf{X}, 0) N_i^{(3)} d\Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{ij}^{(3)} &= c_T \left( \int_{\Omega} N_i^{(3)} N_j^{(3)} d\Omega + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega} \rho c_{\rho} N_j^{(3)} \mathbf{u} \nabla N_i^{(3)} d\Omega \right), \\ m_{ij}^{(2)} &= n \int_{\Omega} N_i^{(2)} N_j^{(2)} d\Omega + n \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega} N_j^{(2)} \mathbf{u} \nabla N_i^{(2)} d\Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^{(2)} &= - \int_{\Omega} \mathbf{D}_T \nabla N_j^{(3)} \nabla N_i^{(2)} d\Omega - \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla N_j^{(3)}) \mathbf{u} \nabla N_i^{(2)} d\Omega, \\
 l_{ij}^{(3)} &= \int_{\Omega} \left( \lambda \nabla N_j^{(3)} \nabla N_i^{(3)} + \rho c_{\rho} N_i^{(3)} \mathbf{u} \nabla N_j^{(3)} \right) d\Omega + \\
 &+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega} \rho c_{\rho} \left( -\nabla \cdot (\lambda \nabla N_j^{(3)}) + \rho c_{\rho} \mathbf{u} \nabla N_j^{(3)} \right) \mathbf{u} \nabla N_i^{(3)} d\Omega, \\
 f_i^{(3)} &= - \int_{\Omega} \left( c_T \frac{\partial W_3}{\partial t} N_i^{(3)} + \lambda \nabla W_3 \nabla N_i^{(3)} + \rho c_{\rho} N_i^{(3)} \mathbf{u} \nabla W_3 \right) d\Omega - \\
 &- \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega} \rho c_{\rho} \left( c_T \frac{\partial W_3}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla W_3) + \rho c_{\rho} \mathbf{u} \nabla W_3 \right) \mathbf{u} \nabla N_i^{(3)} d\Omega, \\
 l_{ij}^{(2)} &= \int_{\Omega} \left( \mathbf{D} \nabla N_j^{(2)} \nabla N_i^{(2)} + N_i^{(2)} \mathbf{u} \nabla N_j^{(2)} + \gamma_m N_i^{(2)} N_j^{(2)} \right) d\Omega + \\
 &+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega} \left( -\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla N_j^{(2)}) + \mathbf{u} \nabla N_j^{(2)} + \gamma_m N_j^{(2)} \right) \mathbf{u} \nabla N_i^{(2)} d\Omega, \\
 f_i^{(1)} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial W_1}{\partial t} N_i^{(1)} d\Omega - \frac{(1+\epsilon)(1+\xi)}{2\gamma a} \int_{\Omega} (\mathbf{K} \nabla W_1 - \nu \nabla W_2 - \mu \nabla W_3) \nabla N_i^{(1)} d\Omega, \\
 f_i^{(2)} &= - \int_{\Omega} \left( n \frac{\partial W_2}{\partial t} N_i^{(2)} + \mathbf{D} \nabla W_2 \nabla N_i^{(2)} + \mathbf{D}_T \nabla W_3 \nabla N_i^{(2)} + \mathbf{u} \nabla W_2 N_i^{(2)} + \right. \\
 &+ \left. \gamma_m (W_2 - C_m) N_i^{(2)} \right) d\Omega - \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \left( n \frac{\partial W_2}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla W_2) - \right. \\
 &- \left. \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla W_3) + \mathbf{u} \nabla W_2 + \gamma_m (W_2 - C_m) \right) \mathbf{u} \nabla N_i^{(2)} d\Omega, \\
 \tilde{f}_i^{(1)} &= \int_{\Omega} h_0 N_i^{(1)} d\Omega - \int_{\Omega} W_1(\mathbf{X}, 0) N_i^{(1)} d\Omega, \quad m_{ij}^{(1)} = \int_{\Omega} N_i^{(1)} N_j^{(1)} d\Omega, \\
 l_{ij}^{(1)} &= \frac{(1+\epsilon)(1+\xi)}{2\gamma a} \int_{\Omega} \mathbf{K} \nabla N_j^{(1)} \nabla N_i^{(1)} d\Omega, \quad g_{ij}^{(1)} = \frac{(1+\epsilon)(1+\xi)}{2\gamma a} \int_{\Omega} \nu \nabla N_j^{(2)} \nabla N_i^{(1)} d\Omega, \\
 \acute{g}_{ij}^{(1)} &= \frac{(1+\epsilon)(1+\xi)}{2\gamma a} \int_{\Omega} \mu \nabla N_j^{(3)} \nabla N_i^{(1)} d\Omega, \quad \Omega = \bigcup \Omega_e.
 \end{aligned}$$

Здесь  $\tau_e^{(c)}$ ,  $\tau_e^{(T)}$  – стабилизационные параметры, которые можно выбрать следующим образом [6, 38]:

$$\tau_e^{(T)} = \frac{h_e}{a \|\rho c_{\rho} \mathbf{u}\|_{\infty, e}} \gamma (Pe_T), \quad \tau_e^{(c)} = \frac{h_e}{a \|\mathbf{u}\|_{\infty, e}} \gamma (Pe_c)$$

где  $a = 3$ ,  $\gamma(z) = \begin{cases} z, & \text{если } 0 \leq z \leq 1; \\ 1, & \text{если } 1 \leq z < \infty. \end{cases}$  Численные решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (11)-(13) можно найти также, как и в методе РБФ. Аналогично, используя условие (9), мы должны уточнять координаты узлов конечноэлементной сетки на каждом вре.

## 6. ПОГРЕШНОСТИ

В работе [7] для оценки совпадения двух приближенных решений  $u_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $u_2(\mathbf{X}, t)$  (для момента времени  $t = t_s = s \cdot \tau$ ) начально-краевой задачи использовалось значение максимальной относительной погрешности на шаге.

$$\max_{1 \leq i \leq M} \frac{|u_1(\mathbf{X}_i, t_s) - u_2(\mathbf{X}_i, t_s)|}{|u_1(\mathbf{X}_i, t_s)|} \cdot 100\%$$

(при условии, что  $u_1(\mathbf{X}_i, t_s) \neq 0$ ). В качестве дискретного множества точек  $\mathbf{X}_i$  как правило использовались узлы конечноэлементной сетки. В дополнение к этой погрешности мы также можем использовать следующие: средняя относительная погрешность

$$\bar{v}^{(s)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M v_i^{(s)},$$

где

$$v_i^{(s)} = \frac{|u_1(\mathbf{X}_i, t_s) - u_2(\mathbf{X}_i, t_s)|}{|u_1(\mathbf{X}_i, t_s)|} \cdot 100\%$$

относительная погрешность в узле  $\mathbf{X}_i$  на временном шаге  $s$ ;  
среднеквадратическая относительная погрешность

$$\mathbf{v}^{(s)} = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M \left(v_i^{(s)}\right)^2}.$$

## 7. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ, ИХ АНАЛИЗ И ВЫВОДЫ

Рассмотрим двухмерную задачу фильтрационной консолидации однородного грунта в области прямоугольной формы с размерами  $a = 5(\text{м})$ ,  $b = 10(\text{м})$ ,  $d = 10(\text{м})$  (рис. 1). Допустим, что внешняя нагрузка, интенсивностью  $q = 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{сутки}^2}$ , приложена мгновенно. Границы  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_5$  непроницаемы, а  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$  — дренированы. Границы  $\Gamma_4$  и  $\Gamma_6$  — это линии симметрии. Начальное распределение концентрации солей возьмём в виде

$$c_0(x, y) = \begin{cases} C_m, & \text{если } (x, y) \in \Gamma_1, \\ 8 \text{ г/литр}, & \text{если } (x, y) \notin \Gamma_1, \end{cases}$$

а температуры

$$T_0(x, y) = \begin{cases} 30^\circ\text{C}, & \text{если } (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \\ 4^\circ\text{C}, & \text{если } (x, y) \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_3. \end{cases}$$

Также  $l_0(x) = 0$ ,  $x \in [-b; b]$ .

Другие входные параметры имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} k_{11} = k_{22} = k(c, T); \nu_{11} = \nu_{22} = 2,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^5}{\text{кг} \cdot \text{сутки}}; e = 0,7; \xi = 0,75; \\ D_{11} = D_{22} = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}^2}{\text{сутки}}; \mu_{11} = \mu_{22} = 2,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{К} \cdot \text{сутки}}; \rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \\ \lambda_{11} = \lambda_{22} = 108 \frac{\text{кДж}}{\text{м} \cdot \text{К} \cdot \text{сутки}}; a = 5, 12 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}^2}{\text{Н}}; c_\rho = 42 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; c_T = 2137 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}; \\ \gamma_m = 0 \text{ сутки}^{-1}; D_{T11} = D_{T22} = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{сутки}}; C_m = 160 \frac{\text{г}}{\text{литр}}. \end{aligned}$$

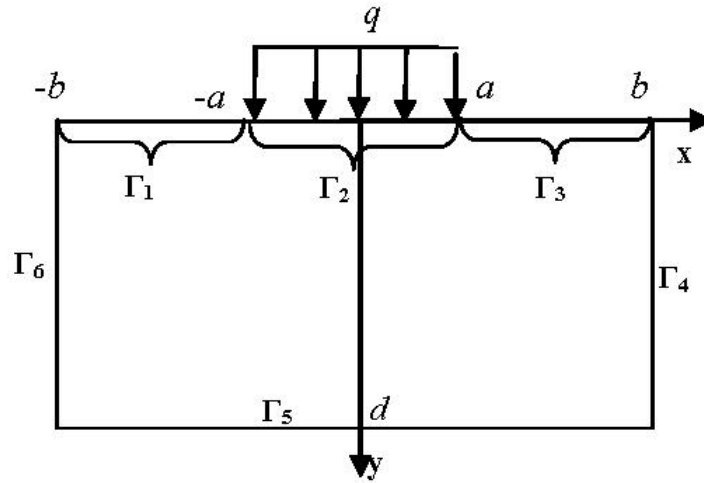


Рис. 1. Область исследуемого массива грунта с внешней нагрузкой

Коэффициент фильтрации чистой воды при температуре  $T = 20^{\circ}\text{C}$  равен  $10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{сутки}}$ . Зависимость коэффициента фильтрации  $k(c, T) = S \cdot k_h(c, T)$  определялась посредством аппроксимации функции  $k_h(c, T)$  с помощью радиальных базисных функций [7, 21] за экспериментальными данными, взятыми с [6]. Результаты отображены в табл. 1. Значение  $S$  — это масштабирующий коэффициент, равный  $S = \frac{10^{-3}}{k_h(0, 20)}$  где  $k_h(0, 20) = 9.215 \frac{\text{м}}{\text{сутки}}$  (см. табл. 1).

Для дискретизации по времени использовалась полностью неявная линеаризованная разностная схема [6, 7, 8, 9, 15] с шагом  $\tau = 10$  суток. Результаты численных экспериментов отображены на рис. 2 при  $t = 300$  суток и в таблицах 3-5. В таблице 2 указаны параметры численных экспериментов. Строки в табл. 2 соответствуют номеру численного эксперимента, а номера столбцов имеют следующие значения: 1 — вид используемых РБФ (MQ — мультиквадратическая функция с параметром формы  $\epsilon$ ; CS — РБФ с компактным носителем  $\alpha > 0$ , например  $\varphi^{[\alpha]}(r) = (1 - \frac{r}{\alpha})_+^6 (35 (\frac{r}{\alpha})^2 + 18 \frac{r}{\alpha} + 3)$ ,  $(1 - r)_+ = \max(0; 1 - r)$ ); 2 — количество узлов в МКЭ; 3 — количество узлов в методе РБФ; 4 — количество колокационных точек в методе РБФ. В МКЭ использовались квадратические базисные функции. В таблицах 3-5 строки соответствуют номеру численного эксперимента, а столбцы имеют следующие значения: 1 — максимальная относительная погрешность (%); 2 — средняя относительная погрешность (%), 3 — среднеквадратическая относительная погрешность(%).

Наибольшая абсолютная погрешность достигается в окрестностях угловых точек приложенной нагрузки (рис. 2). В этих точках происходит "стык" границ, на которых для неизвестных функций задаются граничные условия разных родов. Возможно, решения краевой задачи в окрестностях этих угловых точек не владеют достаточным запасом дифференцируемости, в то же время с помощью метода РБФ мы находим классическое решение, а с помощью МКЭ — обобщённое.

ТАБЛИЦА 1. Значения  $k_h(c, T)$ , м/сутки

	4, <sup>0</sup> C	20, <sup>0</sup> C	30, <sup>0</sup> C	40, <sup>0</sup> C
0, г/литр	4.147	9.215	11.519	18.430
10, г/литр	4.667	10.370	12.963	20.740
20, г/литр	5.702	12.670	15.838	25.340
30, г/литр	6.532	14.515	18.144	29.030
40, г/литр	6.843	15.205	19.006	30.410
50, г/литр	6.976	15.500	19.375	31.000
60, г/литр	5.185	11.520	14.400	23.040
70, г/литр	4.458	9.905	12.381	19.810
80, г/литр	4.147	9.215	11.519	18.430
90, г/литр	3.940	8.755	10.944	17.510
100, г/литр	3.630	8.065	10.081	16.130
110, г/литр	3.423	7.605	9.506	15.210
120, г/литр	3.110	6.910	8.638	13.820
130, г/литр	2.903	6.450	8.063	12.900
140, г/литр	2.799	6.220	7.775	12.440
150, г/литр	2.592	5.760	7.200	11.520
160, г/литр	2.075	4.610	5.763	9.220
170, г/литр	2.025	4.500	5.625	9.000
180, г/литр	1.980	4.400	5.500	8.800
190, г/литр	1.935	4.300	5.375	8.600
200, г/литр	1.913	4.250	5.313	8.500
210, г/литр	1.890	4.200	5.250	8.400
220, г/литр	1.800	4.000	5.000	8.000
230, г/литр	1.755	3.900	4.875	7.800
240, г/литр	1.665	3.700	4.625	7.400
250, г/литр	1.620	3.600	4.500	7.200
260, г/литр	1.530	3.400	4.250	6.800
270, г/литр	1.485	3.300	4.125	6.600
280, г/литр	1.395	3.100	3.875	6.200
290, г/литр	1.350	3.000	3.750	6.000
300, г/литр	1.305	2.900	3.625	5.800
310, г/литр	1.215	2.700	3.375	5.400
320, г/литр	1.170	2.600	3.250	5.200
330, г/литр	1.080	2.400	3.000	4.800
340, г/литр	0.990	2.200	2.750	4.400
350, г/литр	0.900	2.000	2.500	4.000

Как показано в табл. 3-5 параметр формы значительно влияет на величины погрешностей (в случае использования мультиквадратической РБФ). При этом максимальная относительная погрешность может достигать очень больших значений. Поэтому, в случае присутствия угловых точек более информативными являются средняя относительная погрешность и среднеквадратическая относительная погрешность. В случае использования мультиквадратической РБФ, увеличение количества узловых и колокационных точек не всегда

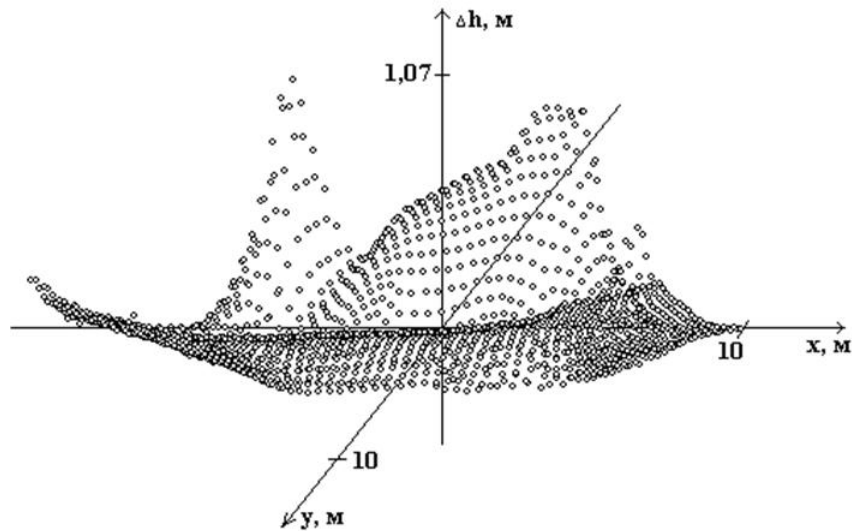


Рис. 2. Распределение разницы избыточных напоров в грунте.

ТАБЛИЦА 2. Параметры численных экспериментов

№	1	2	3	4
1	<b>MQ</b> , $\epsilon = 2$	1695	808	1695
2	<b>MQ</b> , $\epsilon = 2$	2139	1024	2139
3	<b>MQ</b> , $\epsilon = 1$	2139	1024	2139
4	<b>MQ</b> , $\epsilon = 3$	2139	1024	2139
5	<b>CS</b> , $\alpha = 10$	1695	808	1695
6	<b>CS</b> , $\alpha = 10$	2139	1024	2139
7	<b>CS</b> , $\alpha = 10$	2878	1017	2878

приводит к уменьшению погрешностей. С увеличением количества точек увеличивается и число обусловленности СЛАУ, особенно если используется метод наименьших квадратов. Поэтому стоит актуальная задача разработки эффективных методов решения полностью заполненных больших СЛАУ. В тоже время, при использовании РБФ с компактным носителем наблюдается тенденция к уменьшению погрешностей в случае увеличения количества узловых и колокационных точек. Если радиус компактного носителя увеличивается - погрешности уменьшаются, а если радиус уменьшается - погрешности увеличиваются.

В работе [6] доказана теорема о точности конечноэлементных приближенных решений систем квазилинейных параболических уравнений вида (1)-(8) в областях с фиксированными границами (без учёта условия (9)). Доказано, что точность является ограниченной величиной порядка  $O(h_e^p, \tau)$ , где  $p$  — степень полиномиальных базисных функций МКЭ,  $h_e$  — максимальная из всех сторон треугольных конечных элементов. Проверим эту гипотезу для задачи (1)-(9). Рассмотрим двумерную задачу фильтрационной консолидации однородного грунта в прямоугольной области с размерами  $a = 10(\text{м})$ ,  $b = 20(\text{м})$ ,

ТАБЛИЦА 3. Погрешности для избыточных напоров

№	1	2	3
1	31.67	7.65	10.48
2	32.55	8.28	10.95
3	29.68	9.27	11.62
4	39.39	9.15	12.77
5	27.30	4.64	5.75
6	24.84	3.91	4.96
7	23.58	3.00	4.57

$d = 10(\text{м})$ . Используем кусочно-линейные базисные функции для треугольных конечных элементов ( $p = 1$ ). Для дискретизации по времени используем линеаризованную полностью неявную разностную схему. Вертикальные проседания двух начальных точек  $(-10; 0)$  и  $(10; 0)$  отображены в таблицах 6, 7 на момент времени  $t = 360$  суток. В скобках указано уменьшение (знак "-") или увеличение (знак "+") проседаний относительно соответствующей величины при  $\tau = 10$  суток и  $h_e = 0.7$  м.

ТАБЛИЦА 4. Погрешности для концентрации солей

№	1	2	3
1	63.19	12.80	18.08
2	66.24	9.73	12.98
3	49.16	8.69	12.95
4	91.52	16.35	22.95
5	68.91	10.39	16.66
6	65.02	10.08	16.44
7	63.15	10.02	16.24

ТАБЛИЦА 5. Погрешности для температуры

№	1	2	3
1	20.39	4.98	6.10
2	19.65	5.03	5.99
3	19.90	7.69	9.23
4	19.67	5.28	6.51
5	30.22	12.43	13.93
6	27.63	11.66	13.13
7	26.34	11.28	12.66

Рассмотрим значения таблицы 6. Между погрешностью  $E$  и величинами  $h_e$ ,  $\tau$  прослеживается линейная зависимость. Используя для аппроксимации метод наименьших квадратов, получаем

$$(24) \quad E = -18.857 \cdot h_e - 0.113 \cdot \tau + 15.409.$$

ТАБЛИЦА 6. Проседания начальной точки  $(-10; 0)$ 

$h_e(\text{м})/\tau(\text{сутки})$	40	20	10
1.15	0.389 м (-12.78 %)	0.401 м (-10.09 %)	0.406 м (-8.97 %)
1.0	0.422 м (-5.38 %)	0.432 м (-3.14 %)	0.437 м (-2.02 %)
0.7	0.433 м (-2.92 %)	0.442 м (-0.9 %)	0.446 м

ТАБЛИЦА 7. Проседания начальной точки  $(10; 0)$ 

$h_e(\text{м})/\tau(\text{сутки})$	40	20	10
1.15	0.201 м (-17.96 %)	0.213 м (-13.06 %)	0.219 м (-10.61 %)
1.0	0.219 м (-10.61 %)	0.231 м (-5.71 %)	0.237 м (-3.27 %)
0.7	0.227 м (-7.35 %)	0.239 м (-2.45 %)	0.245 м

Величины ошибок, вычисленные согласно (24), представлены в таблице 8. Данные в таблицах 6 и 8 достаточно хорошо совпадают.

ТАБЛИЦА 8. Вычисленные погрешности согласно (24)

$h_e(\text{м})/\tau(\text{сутки})$	40	20	10
1.15	-10.78 %	-8.53 %	-7.40 %
1.0	-7.95 %	-5.70 %	-3.57 %
0.7	-2.30 %	-0.04 %	1.08 %

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основываясь на работе [6], нами исследована математическая модель двумерной задачи фильтрационной консолидации с учётом влияния тепло-солепереноса. Численные решения соответствующей начально-краевой задачи со свободной границей найдены двумя методами — МКЭ и методом РБФ с целью их (решений) сравнения. Показано, что максимальная относительная погрешность не всегда может выступать надёжным критерием сравнения численных решений. Отмечены проблемы метода РБФ — недостаточная точность аппроксимации граничных условий второго рода и необходимость применения устойчивых методов решения больших полностью заполненных СЛАУ. Также численные решения были найдены на разных пространственно-временных сетках и проверена гипотеза о порядке погрешности результатов согласно МКЭ для краевых задач со свободными границами.

## REFERENCES

- [1] Бокштейн Б.С., *Термодиффузия*, Соросовский образовательный журнал, **4** (1999), 40–43.
- [2] Брилинг И.А., *Влияние давления и температуры на фильтрационные свойства глин*, Связанная вода в дисперсных системах, **4** (1977), 82–89.
- [3] Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., *Приближенные методы математической физики*, Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, Москва, 2001.
- [4] Власюк А.П., Кузло Н.Т., *Экспериментальные исследования некоторых параметров фильтрации солевых растворов в песчаных грунтах*, Мелиорация и водное хозяйство, **87** (2000), 43–46. (на укр. языке)



- [5] Власюк А.П., Мартынюк П.Н., *Математическое моделирование консолидации грунтов в процессе фильтрации солевых растворов*, Национальный университет водного хозяйства и природоиспользования, Ровно, 2004. (на укр. языке)
- [6] Власюк А.П., Мартынюк П.Н., *Математическое моделирование консолидации грунтов с учётом фильтрации солевых растворов в неизотермических условиях*, Национальный университет водного хозяйства и природоиспользования, Ровно, 2008. (на укр. языке)
- [7] Власюк А.П., Мартынюк П.Н., *Численное решение задачи консолидации и фильтрационного разрушения грунтов в условиях тепло-масопереноса методом радиальных базисных функций*, Национальный университет водного хозяйства и природоиспользования, Ровно, 2010. (на укр. языке)
- [8] Власюк А.П., Мартынюк П.Н., *Фильтрационная консолидация трёхфазных грунтов с учётом ползучести скелета и влияния солепереноса в неизотермическом режиме*, Математическое моделирование, **4** (2010), 32–56. MR2731163
- [9] Власюк А.П., Мартынюк П.Н., *Контактный размыв и фильтрационная консолидация грунтов в условиях тепло-солепереноса*, Математическое моделирование, **11** (2012), 97–112. MR3112658
- [10] Гольдберг В.М., *Исследования фильтрации в глинах с учётом влияния на этот процесс физико-химических и термодинамических условий*, Исследование фильтрации через глинистые породы, **152** (1983), 6–13.
- [11] Кульчицкий Л.И., Гольдберг В.М., *Влияние минерализации воды на фильтрационные свойства песчано-глинистых пород*, Гидрогеологические вопросы подземного захоронения промышленных стоков, **14** (1969), 6–22.
- [12] Марчук Г.И., Агошков В.И., *Введение в проекционно-сеточные методы*, Наука, Москва, 1981. MR0666396
- [13] Мичута О.Р., Власюк А.П., Мартынюк П.Н., *Моделирование влияния химической суффозии на фильтрационную консолидацию засоленных грунтов в неизотермических условиях*, Математическое моделирование, **2** (2013), 3–18.
- [14] Рельтов Б.Ф., Новицкая Н.А., *Осмотические явления в связанных грунтах при неравномерном их засолении*, Изв. ВНИИГ, **51** (1954), 94–122.
- [15] Самарский А.А., Гулин А.В., *Численные методы математической физики*, Научный мир, Москва, 2003.
- [16] Фиалко А.И., Руденко Ф.А., *Исследование влияния степени минерализации водных растворов на фильтрационные свойства горных пород*, Материалы по геологии, гидрогеологии и геохимии Украины, РСФСР и Молдавии, **14** (1978), 63–68.
- [17] Шостак А.В., Фиалко А.И., *Влияние температуры на сжимаемость и консолидацию глинистых грунтов*, Вестник Киевского ун-та, Серия: Геология, **15** (1997), 47–49. (на укр. языке)
- [18] Ящук Ю.А., Прокопышин И.И., *Решение задачи контактного взаимодействия с использованием  $h$ -адаптивного метода конечных элементов*, Сибирские электронные математические известия, **11** (2014), 220–228.
- [19] Boztosun I., Charafi A., Zerroukat M., Djidjeli K., *Thin-plate spline radial basis function scheme for advection-diffusion problems*, Electronic Journal of Boundary Elements, **2** (2002), 267–282.
- [20] Buhmann M. D., *A new class of radial basis functions with compact support*, Mathematics of Computation, **70**:233 (2000), 307–318.
- [21] Buhmann M.D., *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [22] Dirksen C., *Thermo-osmosis through compacted saturated clay membranes*, Soil Sci.Soc.Am.Proc., **33** (1969), 821–826.
- [23] Fasshauer G.F., *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*, World Scientific Publishing Company, 2007. MR2357267
- [24] Frey P.J., George P.-L., *Mesh Generation*, Wiley-ISTE, 2010.
- [25] Fritz S.J., *Ideality of clay membranes in osmotic processes: a review*, Clays Clay Miner., **34** (1986), 214–223.
- [26] Iske A., *Radial basis functions: basics, advanced topics and meshfree methods for transport problems*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **61**:3 (2003), 247–284. MR2060744

- [27] Kansa E.J., *Multiquadrics — a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. I. Surface approximations and partial derivative estimates*, Comput. Math. Appl., **19** (1990), 127–145. MR1040157
- [28] Kansa E.J., *Multiquadrics — a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations*, Comput. Math. Appl., **19** (1990), 147–161. MR1040158
- [29] Kee B.B.T., Liu G.R., Lu C., *A least-square radial point collocation method for adaptive analysis in linear elasticity*, Engineering Analysis with Boundary Elements, **32** (2008), 440–460. Zbl 1244.74221
- [30] Keijzer Th.J.S., *Chemical osmosis in natural clayey materials*, Geologica Ultraiectina, **196**, 2000.
- [31] Kowalczyk P., Mrozowski M., *Mesh-free approach to Helmholtz equation based on radial basis functions*, J. Telecommunications and Information Technology, **2** (2005), 71–74.
- [32] Liu G.-R., *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press, 2009.
- [33] Liu X., *Radial point collocation method for solving convection-diffusion problems*, J. Zhejiang Univ. SCIENCE A, **7**:6 (2006), 1862–1775.
- [34] Malusis M.A., Shackelford C.D., Olsen H.W., *A laboratory apparatus to measure chemico-osmotic efficiency coefficients for clay soils*, Geotechnical Testing Journal, **24**:3 (2001), 229–242.
- [35] Neuzil C.E., *Osmotic generation of “anomalous” fluid pressures in geological environments*, Nature, **403** (2000), 182–184.
- [36] Rao S.S., *The Finite Element Method in Engineering*, Butterworth-Heinemann, 2010.
- [37] Reddy J.N., Oden J.T., *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, Dover Pubns, 2010.
- [38] Sandra M.C. Malta, Abimael F.D. Loula, Eduardo L.M. Garcia, *Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engineering, **187** (2000), 119–136.
- [39] Sarra S. A., *Adaptive radial basis function methods for time dependent partial differential equations*, Appl. Numer. Math., **54**:1 (2005), 79–94. MR2134096
- [40] Soler J.M., *The effect of coupled transport phenomena in the Opalinus Clay and implications for radionuclide transport*, J. Contaminant Hydrology, **53** (2001), 63–84.
- [41] Vlasyuk A. P., Martynyuk P. M., *Numerical solution of three-dimensional problems of filtration consolidation with regard for the influence of technogenic factors by the method of radial basis functions*, J ournal of Mathematical Sciences, **171**:5 (2010), 632–648. MR2676372
- [42] Vlasyuk A. P., Martynyuk P. M., Fursovyh O. R., *Numerical solution of a one-dimensional problem of filtration consolidation of saline soils in a nonisothermal regime*, Journal of Mathematical Sciences, **160**:4 (2009), 525–535.
- [43] Zhang F., Zhang R., Kang S., *Estimating temperature effects on water flow in variably saturated soils using activation energy*, Soil Sci. Soc. Am. J., **67** (2003), 1327–1333.
- [44] Zhang X., Liu X.-H., Song K.-Z., Lu M.-W., *Least-squares collocation meshless method*, Int. J. Numer. Methods Engin., **51** (2001), 1089–1100. MR1841338
- [45] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.S., *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, Butterworth-Heinemann, 2005.
- [46] Wendland H., *Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree*, Adv. Comput. Math., **4** (1995), 389–396. MR1366510

ПЁТР НИКОЛАЕВИЧ МАРТЫНЮК

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ПРИРОДОИСПОЛЬЗОВАНИЯ,

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ,

УЛ. СОБОРНАЯ, 11,

УА-23300, РОВНО, УКРАИНА

E-mail address: Martinjuk74@gmail.com, Martinjuk@ukr.net