

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. 494–507 (2014)

УДК 517.925

MSC 34C05

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ
СИСТЕМ КОШИ — РИМАНА

Е.П. ВОЛОКИТИН

ABSTRACT. We study the behavior of the trajectories of the Cauchy–Riemann polynomial differential systems at infinity. We use our results to construct the phase portraits for some special cases.

Keywords: singular points at infinity, Poincaré equator, separarices, polynomial first integrals

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим плоскую действительную автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

которая получается о веществлении комплексного уравнения

$$(2) \quad \dot{z} = \mathcal{F}(z), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Сравнивая (1), (2), мы видим, что $P(x, y) \equiv \operatorname{Re} \mathcal{F}(z)$, $Q(x, y) \equiv \operatorname{Im} \mathcal{F}(z)$.

Система (1) и уравнение (2) эквивалентны в том смысле, что если вектор-функция $(x(t), y(t))$ является решением системы (1) на некотором временном интервале, то функция $z(t) = x(t) + iy(t)$ будет решением уравнения (2) на том же интервале, и наоборот. Поэтому мы также будем называть уравнение (2) комплексной системой (иногда просто системой) и использовать при его исследовании терминологию качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которая применяется при описании плоских динамических

VOLOKITIN E.P., UNBOUNDED SOLUTIONS OF THE POLYNOMIAL CAUCHY–RIEMANN SYSTEMS.

© 2014 Волокитин Е.П.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 12-01-00074), СО РАН (междисциплинарный проект №80).

Поступила 26 февраля 2014 г., опубликована 26 июня 2014 г.

систем. На систему (1) мы будем ссылаться как на действительную систему, отвечающую комплексной системе (2).

Если $\mathcal{F}(z)$ — аналитическая функция (в частности, многочлен), функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, задающие правые части системы (1), являются гладкими и удовлетворяют уравнениям Коши — Римана

$$P_x(x, y) = Q_y(x, y), \quad P_y(x, y) = -Q_x(x, y).$$

Справедливо и обратное утверждение: если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ удовлетворяют уравнениям Коши — Римана, то система (1) может быть представлена в виде (2).

В связи с этим рассматриваемые системы называют системами Коши — Римана; употребляют также такие термины, как системы с регулярной правой частью, голоморфные системы, комплексные голоморфные системы, имея в виду представление (2).

Системы Коши — Римана рассматривались различными авторами, см. [1–9] и цитированную там литературу.

В этих работах системы Коши — Римана изучались как с точки зрения общих вопросов качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, так и с точки зрения специальных её разделов, например, таких, как проблема изохронности центра или проблема различения центра и фокуса.

В основном в процитированных работах изучались локальные проблемы теории систем Коши — Римана.

Например, было показано, что невырожденные конечные точки покоя системы (1) — либо грубые фокусы, либо дикритические узлы, либо изохронные центры. Вырожденные особые точки системы (1) — линейные нули; они представляют собой состояния равновесия с эллиптическими секторами.

В этих же работах были получены некоторые результаты, касающиеся глобального поведения решений.

Например, в [5] было показано, что система (1) коммутирует с системой

$$\dot{x} = Q(x, y), \quad \dot{y} = -P(x, y).$$

Отсюда следует [10], в частности, что центры и фокусы в системе (1) будут изохронными. Кроме того в системе (1) отсутствуют предельные циклы. Если мы рассматриваем систему в односвязной области, то каждая замкнутая траектория окружает единственную особую точку, представляющую собой изохронный центр, и вместе с ограниченным ею районом содержится в бассейне этого центра.

В работе [9] было показано, что полиномиальные системы Коши — Римана интегрируемы по Дарбу. Отметим, что эти системы не относятся к классу интегрируемых систем в том смысле, в котором обычно употребляется это понятие [11], за исключением тривиальных случаев систем вида $\dot{z} = i\omega z$, $\omega \in \mathbb{R}$, или $\dot{z} = C$, $C \in \mathbb{C}$.

В [12] рассматривалась система, которая получается о веществлении комплексной системы (2) с неаналитической функцией $\mathcal{F}(z) = |z|^i$.

В настоящей работе мы изучаем некоторые проблемы глобального характера для системы (1) в том случае, когда функция $\mathcal{F}(z)$ является полиномом.

Мы рассматриваем поведение траекторий системы (1) в бесконечно удалённых частях фазовой плоскости.

Доказанная теорема 1 утверждает, что полиномиальная система Коши — Римана степени n имеет $2(n-1)$ бесконечно удалённых сёдел, равномерно распределённых по экватору Пуанкаре. Единственно возможными неограниченными траекториями системы могут быть лишь сепаратрисы этих сёдел. Эти сепаратрисы вместе с состояниями равновесия являются особыми траекториями, их характер и расположение определяют основные черты глобального фазового портрета.

Используя теорему 1, мы описываем строение фазового портрета систем Коши — Римана, имеющих своими состояниями равновесия центры (теорема 2).

Опираясь на полученный результат, мы доказываем, что система Коши — Римана не может иметь полиномиального первого интеграла (теорема 3).

1. БЕСКОНЕЧНО УДАЛЁННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ КОШИ — РИМАНА И ИХ СЕПАРАТРИСЫ

При построении фазовых портретов плоских автономных систем являются полезными сведения о поведении траекторий при удалении в бесконечность. Для получения таких сведений в случае полиномиальных систем используется компактификация Пуанкаре, которая состоит в следующем. Фазовая плоскость \mathbb{R}^2 с координатами (x, y) рассматривается погружённой в \mathbb{R}^3 таким образом, что если $u = (u_1, u_2, u_3)$ — точка в \mathbb{R}^3 , то интересующая нас фазовая плоскость есть плоскость $\mathbb{R}^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : u_3 = 1\}$. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u\| = 1\}$, которая касается нашей плоскости в точке северного полюса $(0, 0, 1)$ (сфера Пуанкаре). Эта же точка является началом координат в фазовой плоскости Oxy . Будем рассматривать отображение плоскости \mathbb{R}^2 на сферу \mathbb{S}^2 с помощью центральной проекции. Траектории на плоскости перейдут в кривые на сфере. При этом на экваторе сферы $\mathbb{S}^1 = \{u \in \mathbb{S}^2 : u_3 = 0\}$ отображаются бесконечно удалённые точки плоскости \mathbb{R}^2 . Таким образом, проблема исследования поведения траекторий на бесконечности сводится к изучению строения полученного поля кривых на сфере в окрестности экватора \mathbb{S}^1 (экватор Пуанкаре). Ортогональная проекция верхнего полушария на плоскость \mathbb{R}^2 даёт удобное изображение всей фазовой плоскости в виде внутренности круга (диск Пуанкаре), границу которого мы по-прежнему будем называть экватором.

Рассмотрение траекторий на сфере обычно проводят, используя атлас сферы \mathbb{S}^2 , состоящий из шести локальных карт: области $U_i = \{u \in \mathbb{S}^2 : u_i > 0\}$, $V_i = \{u \in \mathbb{S}^2 : u_i < 0\}$ и диффеоморфизмы $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, дающие центральные проекции сферы на плоскости, касающиеся её в точках $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, -1)$, $i = 1, 2, 3$. В случае полиномиальных систем изучение траекторий на каждой из карт сводится к изучению некоторой полиномиальной же системы.

Более детальное описание изложенного метода и соответствующей техники, на которых основано наше исследование, см. в [13–15].

Пусть мы имеем полиномиальную комплексную систему

$$(3) \quad \dot{z} = \mathcal{P}(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots$$

Для простоты коэффициент a_0 при старшем члене многочлена $\mathcal{P}(z)$ полагаем равным 1. Общий случай сводится к рассмотренному заменой $\tilde{z} = \alpha z$, $\alpha^{n-1} = a_0$. Кроме того, как правило, мы полагаем $n \geq 2$ (в случае $n = 1$ мы имеем линейную систему, которая легко может быть рассмотрена непосредственно).

Овеществление комплексной системы (3) даёт действительную полиномиальную систему Коши — Римана, на которую мы вновь будем ссылаться как на систему (1):

$$(1) \quad \dot{x} = P(x, y) \equiv \operatorname{Re} \mathcal{P}(z), \quad \dot{y} = Q(x, y) \equiv \operatorname{Im} \mathcal{P}(z).$$

Название полиномиальная система Коши — Римана мы будем относить и к комплексной системе (3). При этом

$$P(x, y) = P_n(x, y) + P_{n-1}(x, y) + \dots, \quad Q(x, y) = Q_n(x, y) + Q_{n-1}(x, y) + \dots,$$

где $P_k(x, y)$, $Q_k(x, y)$ — однородные полиномы степени k , $k = 0, 1, \dots, n$; в частности, $P_n(x, y) = \operatorname{Re} z^n = \operatorname{Re} (x + iy)^n$, $Q_n(x, y) = \operatorname{Im} z^n = \operatorname{Im} (x + iy)^n$.

Особые точки (x_0, y_0) системы (1) определяются как решения полиномиальной системы $P(x, y) = Q(x, y) = 0$, которая равносильна уравнению $\mathcal{P}(z) = 0$, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Собственные числа $\lambda_{1,2}$ матрицы линейного приближения системы (1) в окрестности точки (x_0, y_0) , определяющие тип точки покоя, задаются значением производной многочлена $\mathcal{P}(z)$ в точке z_0 : если $\mathcal{P}'(z_0) = \alpha + i\beta$, то $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Известно [1, 3, 8], что невырожденные конечные точки покоя системы Коши — Римана — либо грубые фокусы, либо дикритические узлы, либо изохронные центры. Вырожденные особые точки системы (1) — линейные нули (матрица линейного приближения является нулевой), они представляют собой состояния равновесия, окружённые эллиптическими секторами¹ в количестве, равном $2(k - 1)$, где k — кратность корня z_0 уравнения $\mathcal{P}(z) = 0$.

Используя результаты [13], исследуем бесконечно удалённые особые точки системы (1).

С помощью замены $x = 1/z_2$, $y = z_1/z_2$ и некоторых дополнительных преобразований вопрос о строении экватора и его окрестности на сфере Пуанкаре (кроме точек пересечения экватора с осью Oy , где $x = 0$) сводится к изучению системы

$$(4) \quad \dot{z}_1 = z_2^n \left(Q\left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right) - z_1 P\left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right) \right), \quad \dot{z}_2 = -z_2^{n+1} P\left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right).$$

В данном случае мы имеем дело с рассмотрением локальной карты, использующей область U_1 сферы \mathbb{S}^2 .

В полученной системе (4) мы должны изучить строение окрестности инвариантной прямой $\{z_2 = 0\}$, которая соответствует экватору сферы Пуанкаре.

Точки покоя системы (4) на инвариантной прямой имеют координаты $(s, 0)$, где s определяется из соотношения

$$(5) \quad F(s) \equiv Q_n(1, s) - sP_n(1, s) = 0.$$

¹В [2] такие состояния равновесия названы диполями.

Положим $s = \operatorname{tg} \varphi$. Тогда

$$(6) \quad P_n(1, s)|_{s=\operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{Re}(1+i \operatorname{tg} \varphi)^n = \frac{\cos n\varphi}{\cos^n \varphi}, \quad Q_n(1, s)|_{s=\operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{Im}(1+i \operatorname{tg} \varphi)^n = \frac{\sin n\varphi}{\cos^n \varphi},$$

$$(7) \quad F(s)|_{s=\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\sin n\varphi}{\cos^n \varphi} - \operatorname{tg} \varphi \frac{\cos n\varphi}{\cos^n \varphi} = \frac{\sin(n-1)\varphi}{\cos^{n+1} \varphi}.$$

В силу (7) интересующими нас корнями уравнения (5) на промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$ будут

$$s_k = \operatorname{tg} \varphi_k, \quad \varphi_k = \frac{k\pi}{n-1}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm[\frac{n}{2} - 1].$$

Характер особой точки $(s_k, 0)$ системы (4) определяется матрицей линейного приближения M_k системы (4), вычисленной в этой точке. Согласно [13] имеем

$$M_k = \begin{pmatrix} F'(s_k) & Q_{n-1}(1, s_k) - s_k P_{n-1}(1, s_k) \\ 0 & -P_n(1, s_k) \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы M_k имеют вид

$$(8) \quad \lambda_1^{(k)} = F'(s_k), \quad \lambda_2^{(k)} = -P_n(1, s_k).$$

С учётом (6), (7) получаем

$$\begin{aligned} F'(s_k) &= Q'_n(1, s) - s P'_n(1, s) - P_n(1, s)|_{s=\operatorname{tg} \varphi_k} = \\ &= n \left(\frac{\cos(n-1)\varphi_k}{\cos^{n-1} \varphi_k} + \operatorname{tg} \varphi_k \frac{\sin(n-1)\varphi_k}{\cos^{n-1} \varphi_k} \right) - \frac{\cos n\varphi_k}{\cos^n \varphi_k} = \\ &= n \frac{\cos(n-2)\varphi_k}{\cos^n \varphi_k} - \frac{\cos n\varphi_k}{\cos^n \varphi_k}. \end{aligned}$$

Так как $\varphi_k = k\pi/(n-1)$, то $\cos(n-2)\varphi_k = \cos n\varphi_k = (-1)^k \cos \varphi_k$, и имеем с учётом (6), (8)

$$\lambda_1^{(k)} = (n-1) \frac{(-1)^k}{\cos^{n-1} \varphi_k}, \quad \lambda_2^{(k)} = \frac{(-1)^{k+1}}{\cos^{n-1} \varphi_k}.$$

Мы видим, что $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}$ при всех k имеют разные знаки. Следовательно, все рассматриваемые особые точки на экваторе — гиперболические седла.

Для каждого из седел собственное подпространство матрицы M_k , отвечающее $\lambda_1^{(k)}$, совпадает с инвариантной прямой $\{z_2 = 0\}$, другое трансверсально ему. При этом в точке $(0, 0)$ имеем $\lambda_1^{(0)} > 0$, поэтому в этой точке вдоль прямой $\{z_2 = 0\}$ направлены неустойчивые сепаратрисы.

На диске Пуанкаре найденные бесконечно удалённые седла располагаются в точках пересечения экватора с прямыми $y = s_k x$.

Кроме рассмотренных особых точек у системы (1) возможно наличие бесконечно удалённых особых точек, расположенных в точках пересечения экватора с осью Oy . Исследование таких точек сводится к исследованию начала координат для системы, получаемой из исходной после замены $x = z_1/z_2, y = 1/z_2$, что соответствует рассмотрению системы на карте, отнесённой к области U_2 .

Аналогичное проведённое исследование показывает, что в случае чётного n , искомые точки отсутствуют, а в случае нечётного n они являются поперечными седлами.

Суммируя наши рассуждения, мы заключаем, что справедлива

Теорема 1. *Экватор диска Пуанкаре для системы (1) состоит из равномерно распределённых $2(n - 1)$ гиперболических седел и соединяющих их двоякоасимптотических траекторий. Сепаратрисы этих седел, принадлежащие внутренности диска, чередуются как входящие и исходящие; сепаратриса седла, расположенного в конце положительной полуоси Ox , является входящей.*

На рис. 1 в качестве примера представлено поведение траекторий системы (1) в окрестности экватора для случая $n = 4$.

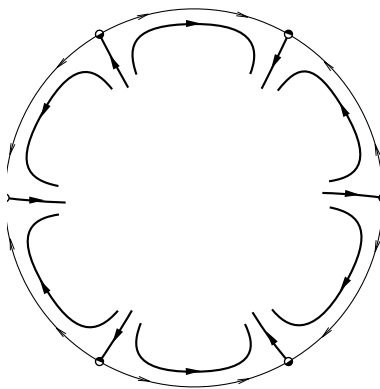


Рис. 1. Траектории системы Коши — Римана в окрестности экватора

Сформулированная теорема исчерпывающим образом характеризует поведение траекторий системы (1) на бесконечности. С другой стороны, список возможных типов конечных особых точек системы (1) и их сочетаний достаточно велик, что приводит к большому разнообразию фазовых портретов [1, 3, 8, 9]. Полная классификация полиномиальных систем Коши — Римана (даже с точностью до топологической эквивалентности) отсутствует. В этой связи нам представляется уместным привести следующую цитату из [13].

«It is interesting to note that we are able to know much more about the behavior at infinity than is known at a finite distance.»

Замечание 1. Утверждение, аналогичное теореме 1, другими способами было доказано в [6, 8]. Приведённое здесь доказательство в большей степени соответствует общепринятому подходу, используемому в современной качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Из доказательства видно, что поведение траекторий системы (1) на бесконечности совпадает с поведением на бесконечности траекторий однородной полиномиальной системы

$$(9) \quad \dot{x} = P_n(x, y), \quad \dot{y} = Q_n(x, y),$$

которая получается оверхествлением комплексной системы $\dot{z} = z^n$. Система (9) может быть проинтегрирована (например, с помощью метода Дарбу) [9], её интеграл имеет вид

$$(10) \quad H(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^{n-1}}{\operatorname{Im}(x + iy)^{n-1}}.$$

Единственное состояние равновесия $O(0, 0)$ лежит в множестве уровня $H(x, y) = 0$, оно является состоянием равновесия с $2(n - 1)$ эллиптическими секторами. Сепаратрисы седел на экваторе лежат в множестве уровня $H(x, y) = \infty$. Сепаратрисы являются лучами, идущими из начала координат в направлении седел, и задаются соотношением $\sin(n-1)\varphi = 0$, где φ — полярный угол.

Интеграл (10) в полярных координатах может быть записан в виде

$$\varrho^{n-1} = C \sin(n-1)\varphi, \quad C \in \mathbb{R}.$$

На рис. 2 приведён фазовый портрет системы

$$(11) \quad \dot{x} = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \quad \dot{y} = 4x^3y - 4xy^3,$$

полученной из системы $\dot{z} = z^4$; первый интеграл системы (11) в соответствии с (10) имеет вид

$$(12) \quad H(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^3}{3x^2y - y^3}.$$

Рисунок получен с помощью системы *Mathematica*.

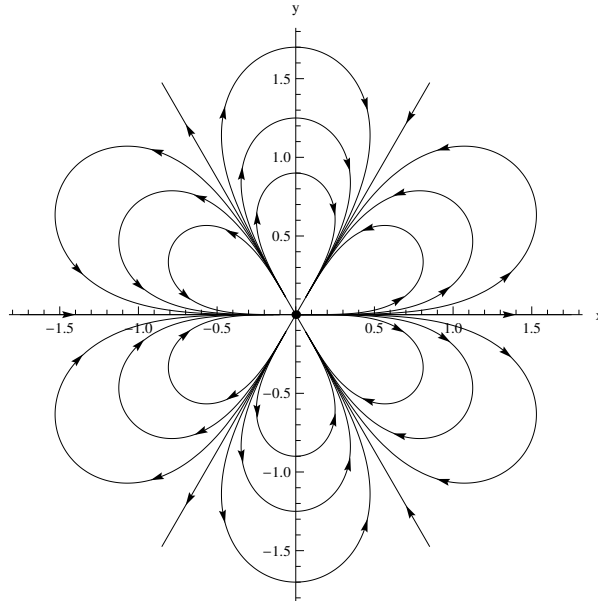


Рис. 2. Фазовый портрет системы $\dot{z} = z^4$

Замечание 2. В работе [3] утверждалось, что если мы рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y + U(x, y), \quad \dot{y} = x + V(x, y),$$

где $U(x, y)$, $V(x, y)$ — произвольные голоморфные функции, удовлетворяющие уравнениям Коши — Римана

$$U_x(x, y) = V_y(x, y), \quad U_y(x, y) = -V_x(x, y),$$

то все бесконечно удалённые особые точки этой системы являются седлами.

Теорема 1 доказывает справедливость этого утверждения для полиномиальных систем Коши — Римана. Однако в том случае, когда функции $U(x, y), V(x, y)$ не являются многочленами, поведение траекторий на бесконечности может быть иным.

В качестве примера рассмотрим систему

$$(13) \quad \dot{x} = -e^x(x \sin y + y \cos y), \quad \dot{y} = e^x(x \cos y - y \sin y),$$

соответствующую комплексной системе

$$\dot{z} = iz e^z.$$

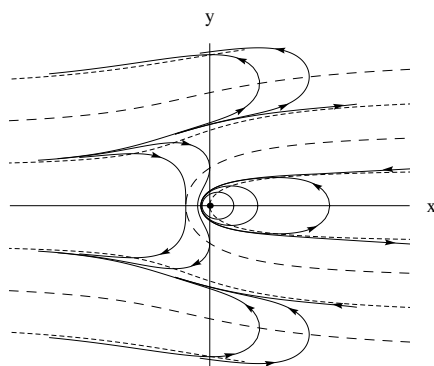


Рис. 3. Фазовый портрет системы $\dot{z} = iz e^z$

Единственной точкой покоя системы (13) в конечной части плоскости является начало координат $O(0, 0)$. Эта точка будет изохронным центром.

Глобальный фазовый портрет системы (13) может быть построен с помощью стандартных методов и приёмов качественной теории плоских автономных систем.

Этот портрет приведен на рис. 3. Кроме траекторий на нём штриховыми линиями изображены изоклины горизонтального ($\dot{y} = 0$) и вертикального ($\dot{x} = 0$) наклонов. Каждая из изоклин имеет две горизонтальные асимптоты.

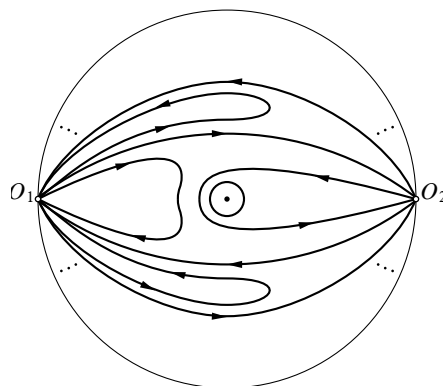


Рис. 4. Схема фазового портрета системы $\dot{z} = iz e^z$ на диске Пуанкаре

После проектирование фазовой плоскости на сферу, а затем на диск Пуанкаре мы получим картину, схематически изображённую на рис. 4. Видно, что рассматриваемая система имеет две бесконечно удалённые особые точки O_1, O_2 , расположенные на концах оси Ox . Эти точки не являются седлами: окрестность точки O_1 состоит из счётного числа эллиптических секторов, окрестность точки O_2 образована счётным числом гиперболических секторов.

Таким образом, рассмотренный пример опровергает упомянутое утверждение из [3].

Из теоремы 1 вытекает, что в полиномиальных системах Коши — Римана в качестве неограниченных траекторий ("уходящих на бесконечность") могут выступать только сепаратрисы бесконечно удалённых седел. Эти траектории являются особыми и играют важную роль при построении глобального фазового портрета системы (1).

В качестве примера рассмотрим вопрос о роли сепаратрис, идущих из седла в седло.

Напомним, что в том случае, когда точка покоя является центром системы (1), то этот центр — изохронный. Граница области изохронного центра может состоять только из неограниченных в обе стороны траекторий [16]. Такими траекториями в рассматриваемом случае систем Коши — Римана могут служить только сепаратрисы, соединяющие бесконечно удалённые седла.

В соответствии с [16] центр называется центром типа B^k , если граница области центра состоит из k неограниченных траекторий. В системах Коши — Римана степени n максимальное число сепаратрис из седла в седло равно $n-1$. Отсюда следует, что центры в системах Коши — Римана могут иметь тип B^k , где индекс k варьируется в пределах от 1 до $n-1$. Границей области центра типа B^k на диске Пуанкаре служит сепаратрисный цикл Γ_k с $2k$ вершинами-седлами на экваторе Пуанкаре, соединёнными сепаратрисами, поочерёдно идущими то вдоль экватора, то внутри диска Пуанкаре.

Справедливо также обратное утверждение.

Теорема 2. *Внутри области D , ограниченной сепаратрисным циклом Γ_k , существует единственная точка покоя системы (1), являющаяся изохронным центром; при этом область D является областью центра типа B^k .*

Доказательство. Для простоты изложения рассмотрим случай, когда область D представляет собой криволинейный двуугольник, ограниченный сепаратрисным циклом Γ_1 с вершинами в двух соседних седлах, из двух сторон двуугольника одна есть дуга экватора, другая — сепаратриса S , расположенная внутри диска и идущая из седла в седло.

Получаем область в виде луночки с предписанным поведением векторного поля на границе (рис. 5а).

Система (1) коммутирует [4] с системой

$$(14) \quad \dot{x} = Q(x, y), \quad \dot{y} = -P(x, y).$$

Траектории коммутирующей системы (14) пересекают траектории рассматриваемой системы (1) (в том числе и сепаратрису S) под прямым углом и являются дугами без контакта. Проведём через точку внутри луночки, расположенную достаточно близко к сепаратрисе, положительную полутраекторию L системы (1) и траекторию l коммутирующей системы (14). В силу строения векторного поля траектория L за конечное время вернётся в окрестность

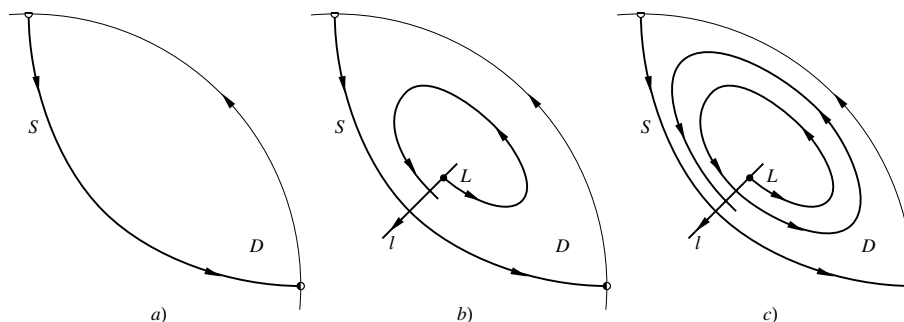


Рис. 5

начальной точки и пересечёт траекторию l . Пусть для примера точка пересечения расположена ближе к сепаратрисе, чем начальная точка (рис. 5b). Если продолжить траекторию L в положительном времени, то она сделает ещё один виток, и точка пересечения сместится вдоль l в том же направлении, то есть окажется ещё ближе к сепаратрисе S (рис. 5c). Поскольку L, l — траектории коммутирующих систем, то отрезки между последовательными точками их пересечения преодолеваются при движении вдоль траектории L за один и тот же промежуток времени T , а при движении вдоль траектории l за один и тот же промежуток времени τ . В таком случае расстояние вдоль l между соседними точками пересечения ограничено снизу некоторой величиной Δ , отделённой от нуля, поскольку в рассматриваемой окрестности отделена от нуля скорость коммутирующей системы. Отсюда следует, что траектория L при дальнейшем её продолжении в конце концов пересечёт сепаратрису S и покинет область D , что невозможно. Таким образом, точки пересечения траектории L с l не могут смещаться от начальной точки в сторону приближения к сепаратрисе. Аналогичным образом они не могут смещаться в сторону удаления от сепаратрисы. Значит первая же точка пересечения траектории L с l совпадает с начальной точкой, то есть траектория L является циклом. Поскольку в системе Коши — Римана не может быть предельных циклов, то и все остальные траектории внутри луночки являются циклами, кроме единственной точки покоя, которая является изохронным центром. Сама луночка представляет собой область центра, сепаратриса будет границей области центра, который в рассматриваемом случае будет центром типа B^1 . \square

Замечание 3. Отметим, что в случае квадратичных систем Коши — Римана при наличии сепаратрисы, соединяющей два бесконечно удалённых седла, оба состояния равновесия будут центрами типа B^1 . В случае кубических систем наличие сепаратрисы, соединяющей два бесконечно удалённых седла, необходимо влечёт наличие у системы, по крайней мере, одного центра типа B^1 .

Одной из основных проблем качественной теории плоских полиномиальных систем является отыскание их первых интегралов. Вещественная функция $H(x, y)$ называется первым интегралом системы (1) в области D , если она, не будучи тождественно постоянной в этой области, сохраняет постоянное значение вдоль любого решения системы. Если функция $H(x, y) \in C^1(D)$, то она

удовлетворяет соотношению

$$DH(x, y) \equiv \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} Q(x, y) = 0.$$

Важность нахождения явного выражения для первого интеграла следует из того, что, зная его, мы фактически знаем фазовый портрет системы: все траектории содержатся в множествах уровня первого интеграла $H(x, y) = \text{const}$.

Рассмотрим простейшие полиномиальные системы Коши — Римана

$$(15) \quad \dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = C_2,$$

$$(16) \quad \dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x, \quad \omega \neq 0.$$

Каждая из этих систем имеет полиномиальный первый интеграл $H(x, y)$.

Для системы (15)

$$H(x, y) = C_2 x - C_1 y, \quad \text{если } C_1^2 + C_2^2 \neq 0,$$

(траектории — прямые), в случае, если $C_1 = C_2 = 0$, интегралом будет любой многочлен $H(x, y)$ (траектории — точки покоя, заполняющие фазовую плоскость).

Для системы (16)

$$H(x, y) = x^2 + y^2,$$

(траектории — окружности).

Используя теоремы 1, 2, можно доказать следующий результат.

Теорема 3. *Если $n \geq 2$, то полиномиальная система Коши — Римана степени n не имеет полиномиального первого интеграла.*

Доказательство. Пусть система (1) имеет полиномиальный первый интеграл $H(x, y)$.

В таком случае система (1) не может иметь особых точек типа фокус, узел или линейный нуль, поскольку тогда к этой точке стремилось бы бесконечно много траекторий, сплошь заполняющих некоторую её окрестность. В свою очередь, это означало бы, что интегралом будет многочлен, тождественно равный константе.

Итак, если система Коши — Римана (1) имеет полиномиальный интеграл, то её особые точки — только простые центры в количестве n штук. В таком случае фазовый портрет представляет собой n областей (области центра), внутри каждой из которых находится единственная точка покоя типа изохронный центр, окружённая концентрическими орбитами, целиком заполняющими всю область. Границами областей служат сепаратрисы, соединяющие бесконечно удалённые седла (рис. 6) и образующие сепаратрисные циклы.

Соединим каждую из точек покоя с какой-либо точкой одной из сепаратрис, образующих границу соответствующей области центра. Рассмотрим одну из этих областей (на рисунке она обозначена как D_1 , а проведённый отрезок — как $O_1 N_1$). Каждая траектория пересекает отрезок $O_1 N_1$ и является линией уровня многочлена $H(x, y)$. Отсюда следует, что множество значений многочлена $H(x, y)$ в области D_1 совпадает с множеством конечных значений, которое он принимает в точках полуоткрытого отрезка $O_1 N_1$ (без точки N_1). Так как значение многочлена $H(x, y)$ в точке N_1 также конечно, мы заключаем, что множество значений многочлена $H(x, y)$ в замыкании области D_1 принадлежит некоторому ограниченному отрезку: $H(\bar{D}_1) \subset [m_1, M_1]$, $-\infty < m_1 < M_1 < +\infty$.

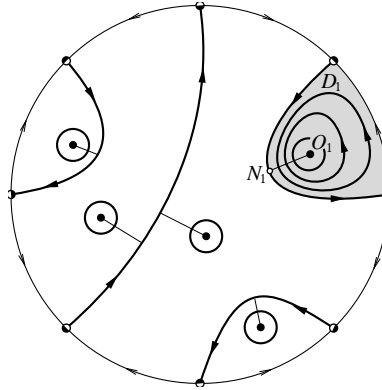


Рис. 6

Рассмотрев таким образом все области, мы получим, что множество всех значений многочлена $H(x, y)$ принадлежит некоторому ограниченному отрезку $[m, M]$, то есть многочлен $H(x, y)$ ограничен сверху и снизу на всей плоскости, что невозможно за исключением случая, когда этот многочлен является константой.

Полученное противоречие доказывает, что полиномиальные системы Коши — Римана степени выше 2 не имеют полиномиального интеграла. \square

Как было отмечено выше, полиномиальная система Коши — Римана (16), у которой есть только одна точка покоя — изохронный центр в начале координат — имеет полиномиальный первый интеграл $H(x, y) = x^2 + y^2$.

Система (13), рассмотренная выше, также имеет изохронный центр в начале координат, который будет единственной точкой покоя. Однако эта система не имеет полиномиального первого интеграла.

В самом деле, пусть имеется полиномиальный первый интеграл $H(x, y)$ системы (13). Рассмотрим одну из сепаратрис, которая является общей границей эллиптического и гиперболического секторов, см. рис. 3, 4. Эта линия имеет две горизонтальные асимптоты: $y = y'_k$ при $x \rightarrow -\infty$, $y = y''_k$ при $x \rightarrow +\infty$. Пусть она задается как линия уровня первого интеграла $H(x, y) = C_k$.

Запишем полином $H(x, y)$ в виде

$$H(x, y) = p_0(y)x^m + p_1(y)x^{m-1} + \dots + p_{m-1}(y)x + p_m(y),$$

где $p_0(y), p_1(y), \dots, p_m(y)$ — полиномы.

Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow -\infty, y \rightarrow y'_k} H(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty, y \rightarrow y''_k} H(x, y) = C_k,$$

имеем

$$p_0(y) \rightarrow 0, p_1(y) \rightarrow 0, \dots, p_{m-1}(y) \rightarrow 0, \text{ если } y \rightarrow y'_k, y \rightarrow y''_k.$$

то есть

$$p_0(y'_k) = 0, p_0(y''_k) = 0, p_1(y'_k) = 0, p_1(y''_k) = 0, \dots, p_{m-1}(y'_k) = 0, p_{m-1}(y''_k) = 0.$$

Так как наборы чисел y'_k , y''_k образуют бесконечное счётное множество, мы заключаем, что

$$p_0(y) = p_1(y) = \dots = p_{m-1}(y) = 0.$$

Таким образом, $H(x, y) = p_m(y)$, и траекториями системы (13) должны быть только горизонтальные прямые $y = \text{const}$, что противоречит полученному результату.

Значит, система (13) не имеет полиномиального первого интеграла.

Подобными рассуждениями можно показать, что не имеет полиномиального первого интеграла система

$$(17) \quad \dot{x} = e^x \cos y, \quad \dot{y} = e^x \sin y,$$

у которой отсутствуют точки покоя, в отличие от системы (15). Система (17) была рассмотрена в [8].

Эти примеры лишней раз подчёркивают специфику полиномиальных систем Коши — Римана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gregor J., *Dynamické systémy s regulární pravou stranou. I* // Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, **3**:2 (1958), 153–160.
Zbl 0081.30802.
- [2] Гаврилов Н. И., *Методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Высшая школа, 1962.
MR 0173800.
- [3] Лукашевич Н. А., *Изохронность центра некоторых систем дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнения, **1**:5 (1965), 295–302.
MR 0197863.
- [4] Плешкан И. И., *Новый способ исследования на изохронность системы двух дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнения, **5**:6 (1969), 1083–1090.
Zbl 0169.42003
- [5] Villarini M., *Regularity properties of the period function near a centre of planar vector fields* // Nonlinear Analysis, **19**:8 (1992), 787–803.
MR 1186791
- [6] Mardešić P., Rousseau C., Toni B., *Linearization of isochronous centers* // Journal of Differential Equations, **121**:1 (1995), 67–108.
MR1348536.
- [7] Christopher C. J., Devlin J., *Isochronous centers in planar polynomial systems* // SIAM J. Math. Anal., **28**:1 (1997), 162–177.
MR 1313199.
- [8] Волокитин Е. П., Чересиз В. М., *Особые точки и первые интегралы голоморфных динамических систем* // Вестник НГУ. Сер.: Математика, механика, информатика, **13**:2 (2013), 21–37.
Zbl 06262003
- [9] Волокитин Е. П., *Интегрируемость по Дарбу полиномиальных комплексных систем* // Сибирские электронные математические известия, **10** (2013), 271–284.
MR 3039995
- [10] Sabatini M., *Characterizing isochronous centres by Lie brackets* // Differential Equations and Dynamical Systems, **5**:1 (1997), 91–99.
MR 1656001
- [11] Арнольд В. И., *Математические методы классической механики*. М.: Наука, 1979.
MR 1037020
- [12] Рылов А. И., *Новые спиральные и слоистые течения как примеры сопряженных течений несжимаемой жидкости* // Доклады РАН, **457**:4 (2014).
- [13] González Velasco, Enrique A., *Generic properties of polynomial vector fields at infinity* // Trans. Amer. Math. Soc., **143** (1969), 201–222.
MR0252788

- [14] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. *Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости*. М.: Наука, 1990.
MR 1126908
- [15] Андронов А. А. и др., *Качественная теория динамических систем на плоскости*. М.: Наука, 1966.
MR 0199506
- [16] Conti R., *Centers of planar polynomial systems*. A review // *Le Matematiche*. 1998. V. LIII. Fasc. II. P. 207–240.
MR 1710759.

Евгений Павлович Волокитин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия.
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: volok@math.nsc.ru