S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 508–516 (2014) УДК 512.52

MSC 17A42

РЕДУЦИРОВАННО ЛИЕВЫ ТЕРНАРНЫЕ АЛГЕБРЫ

А.П. ПОЖИДАЕВ

Abstract. We introduce a notion of variety of RLT-algebras as a variety of ternary anticommutative algebras such that the Jacobian $J(x, y, z; u, v)$ (see (3)) is skew-symmetric in all the arguments. The algebras in this variety possess the property that their reduced algebra is a Lie algebra. We show that this variety properly contains the variety of Filippov algebras and coincides with the variety of Filippov algebras in the presence of a non-degenerate (skew)symmetric anti-invariant form. We also obtain some structure results on RLT-algebras.

Keywords: RLT-algebra, Filippov algebra, Engel theorem, multiplication algebra.

Последние десятилетия большой интерес представляет вопрос нахождения надлежащего обобщения алгебр Ли на случай n-арной операции. Одним из таких обобщений являются алгебры Филиппова, введенные В.Т.Филипповым в 1984 году [1]. Помимо прочего, этот класс алгебр является алгебраическим аппаратом механики Намбу, предложенной Й.Намбу [2], как обобщение классической гамильтоновой механики. Однако, в отличие от алгебр Ли, данный класс алгебр содержит незначительное число простых объектов (в конечномерном случае характеристики 0), поэтому представляет интерес нахождение класса n-арных алгебр, обобщающего класс алгебр Ли и более насыщенного простыми объектами. В данной работе доказывается, что многообразие редуцированно лиевых тернарных алгебр (RLT-алгебр) содержит многообразие алгебр Филиппова в качестве собственного подмногообразия. Пусть L — пространство операторов правого умножения на RLT-алгебре. В случае, когда RLT-алгебра

Pozhidaev, A.P., Reduced Lie ternary algebras.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-33031).

Получена 31 января 2014, опубликована 29 июня 2014.

проста и конечномерна над полем характеристики 0, показывается, что L является полупростой алгеброй Ли. Далее мы рассматриваем билинейные невырожденные (косо)симметрические инвариантные формы на RLT-алгебрах и их связь со структурой RLT-алгебры.

1. Свободные RLT-алгебры

Рассмотрим тернарную алгебру, обладающую тем свойством, что при фиксировании любой компоненты в операции получается алгебра Ли: для фиксированного элемента a мы определяем новые операции правилами $x \cdot_a^1 y = [a, x, y]$, $x \cdot_a^2 y = [x, a, y]$, $x \cdot_a^3 y = [x, y, a]$.

Таким образом, каждая операция $x \cdot_a^i y$ удовлетворяет тождеству Якоби:

$$(x \cdot_a^i y) \cdot_a^i z + (y \cdot_a^i z) \cdot_a^i x + (z \cdot_a^i x) \cdot_a^i y = 0.$$

Из определения следует, что A задается тождествами

$$\begin{gathered}[x_1, x_2, x_3] = sgn(\sigma)[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}] \quad \forall\sigma \in \mathbb{S}_n, \\ [[x, y, a], z, a] + [[y, z, a], x, a] + [[z, x, a], y, a] = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

и последнее тождество после линеаризации превращается в

$$\begin{gathered}[[x, y, a], z, b] + [[y, z, a], x, b] + [[z, x, a], y, b]+ \\ + [[x, y, b], z, a] + [[y, z, b], x, a] + [[z, x, b], y, a] = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Тождество (2) можно записать в виде

$$J(x, y, a; z, b) + J(x, y, b; z, a) = 0, \tag{3}$$

где

$$J(x, y, a; z, b) = [[x, y, a], z, b] - [[x, z, b], y, a] - [x, [y, z, b], a] - [x, y, [a, z, b]]$$

является *якобианом* от x, y, a, z, b. Заметим, что в антикоммутативной тернарной алгебре якобиан кососимметричен по первым трем аргументам и по последним двум аргументам. Учитывая (3), получаем кососимметричность якобиана в RLT-алгебре по всем переменным. Таким образом, RLT-алгебру можно определить как антикоммутативную тернарную алгебру, у которой якобиан кососимметричен по всем переменным.

Итак, тернарную алгебру, удовлетворяющую (1) и (2), назовем *редуцированно лиевой тернарной алгеброй* (RLT-алгеброй).

Напомним, что тернарная антикоммутативная алгебра F называется алгеброй Филиппова, если $J(x, y, z; u, v) = 0$ для любых $x, y, z, u, v \in F$. Заметим, что из определения RLT-алгебры непосредственно следует, что многообразие RLT-алгебр содержит многообразие алгебр Филиппова.

Заметим, что А.Г.Курош рассматривал тернарные антикоммутативные алгебры $A^{(-)}$, получающиеся из ассоциативных алгебр A при помощи введения новой операции:

$$[x_1, x_2, x_3] = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_3} (-1)^\sigma x_{\sigma 1} x_{\sigma 2} x_{\sigma 3},$$

где $\mathbb{S}_3$ — симметрическая группа степени 3. В общем случае такие алгебры не являются тернарными алгебрами Филиппова (хотя полупростые конечномерные тернарные алгебры Филиппова характеристики 0 реализуются как подалгебры в $A^{(-)}$). Хотя класс RLT-алгебр и шире, чем класс алгебр Филиппова, несложно заметить, что в общем случае $A^{(-)}$ не являются RLT-алгебрами.

Классы n-арных алгебр Филиппова и Мальцева обладают тем свойством, что редуцированные алгебры для данных алгебр вновь лежат в рассматриваемых классах [1], [3] (*редуцированная* алгебра — это $(n-1)$-арная алгебра, получающаяся из данной фиксацией элемента в операции). Из определения следует, что класс RLT-алгебр также обладает данным свойством.

Отметим, что класс RLT-алгебр был выделен и ранее в работе [4] при классификации тождеств антикоммутативных тройных систем.

RLT-алгебры можно получать из алгебр Пуассона. А именно, пусть A — алгебра Пуассона $(A;\{\,,\},\cdot)$, где $\{\,,\}$ — скобка Ли, $\cdot$ — ассоциативная коммутативная операция (AC-операция). (Отметим, что $(A;\{\,,\})$ — алгебра Ли.) Предположим также, что на A выполняется тождество

$$\{a,x\}\cdot\{y,z\}\cdot a+\{a,y\}\cdot\{z,x\}\cdot a+\{a,z\}\cdot\{x,y\}\cdot a \quad = \quad 0.$$

Определим на векторном пространстве алгебры A новую тернарную операцию правилом

$$[x,y,z] \quad = \quad \{x,y\}\cdot z+\{z,x\}\cdot y+\{y,z\}\cdot x$$

для любых $x,y,z\in A$. Обозначим получившуюся тернарную алгебру через $RLT(A)$.

Предложение 1. *$RLT(A)$ является RLT-алгеброй.*

Доказательство состоит в непосредственной проверке тождества (2). □

Построим свободную RLT-алгебру, порожденную множеством X. Пусть V — векторное пространство с базисом X. Рассмотрим тензорную алгебру

$$T=V\oplus\sum_{k\in\,2\mathbb{N}+1}\sum_{f_k}f_k(\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{k}),$$

где f_k обозначает некоторую расстановку тернарных скобок. Определим в T тернарную операцию $[\cdot,\cdot,\cdot]$ правилом: для $x_i\in f_i(\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{i})$ элемент $[x_k,x_m,x_l]$ получается последовательным приписыванием x_k,x_m и x_l с соответствующей индуцированной расстановкой скобок, т.е. $[x_k,x_m,x_l]\in\sum\limits_{f_{k+m+l}}f_{k+m+l}(\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{k+m+l})$ с соответствующей индуцированной расстановкой скобок.

Пусть R — идеал в T, порожденный всеми элементами вида

$$\begin{aligned}
&[[x_1,x_2,y_1],x_3,y_2]+[[x_2,x_3,y_1],x_1,y_2]+[[x_3,x_1,y_1],x_2,y_2]\\
&\quad+[[x_1,x_2,y_2],x_3,y_1]+[[x_2,x_3,y_2],x_1,y_1]+[[x_3,x_1,y_2],x_2,y_1],\\
&[x_1,x_2,x_3]+[x_2,x_1,x_3],\\
&[x_1,x_2,x_3]+[x_1,x_3,x_2],
\end{aligned}$$

где $x_1,x_2,x_3,y_1,y_2\in T$.

Тогда $\mathfrak{B}=T/R$ — тернарная алгебра, удовлетворяющая (1) и (2), т.е. это RLT-алгебра.

Скажем, что *длина* $|\omega|$ элемента ω равна k, если ω лежит в $\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{k}$.

Слова вида $[\dots[[x,y,z],\dots],u,v]$, где $x,y,z,\dots,u,v\in V$, будем называть *левонормированными.*

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{F}$ — свободная RLT-алгебра характеристики не 3. Тогда левонормированные слова порождают $\mathcal{F}$.*

Доказательство проведем индукцией по длине слова ω. База индукции $|\omega|=3$ очевидна. Предположим, что при $|\omega|\le n$ лемма доказана. Пусть $|\omega|=n+2$. По линейности наше утверждение достаточно доказать для $\omega=[u,v,w]$, где u,v,w — левонормированные слова, поскольку их длина меньше n.

Пусть сумма длин слов v и w минимальна. Если $|v|+|w|=2$, то $v,w\in V$, т. е. ω левонормировано. В противном случае мы можем предполагать, что $v=[f,g,h]$, где f,g,h левонормированы. По (2) имеем

$$\begin{aligned}
&[[g,h,f],u,w]+[[h,u,f],g,w]+[[u,g,f],h,w]+\\
&\quad+[[g,h,w],u,f]+[[h,u,w],g,f]+[[u,g,w],h,f]=0,\\
&[[h,f,g],u,w]+[[f,u,g],h,w]+[[u,h,g],f,w]+\\
&\quad+[[h,f,w],u,g]+[[f,u,w],h,g]+[[u,h,w],f,g]=0,\\
&[[f,g,h],w,u]+[[g,w,h],f,u]+[[w,f,h],g,u]+\\
&\quad+[[f,g,u],w,h]+[[g,w,u],f,h]+[[w,f,u],g,h]=0.
\end{aligned}$$

Вычитая из последнего равенства первое и второе и пользуясь антикоммутативностью, получаем

$$\begin{aligned}
\omega=[u,[f,g,h],w] \quad = \quad & \frac{1}{3}\,(-[[u,h,f],g,w]+[[u,g,f],h,w]-2[[u,h,w],g,f]\\
&+2[[u,g,w],h,f]+[[u,h,g],f,w]-2[[u,f,w],h,g]).
\end{aligned}$$

Таким образом, слово ω представляется как линейная комбинация слов вида $[u_1,v_1,w_1]$, которые левонормированы, так как сумма длин слов v_1 и w_1 строго меньше, чем сумма длин слов v и w. □

Предложение 2. *Многообразие RLT-алгебр V_{RLT} содержит многообразие алгебр Филиппова V_F в качестве собственного подмногообразия.*

Доказательство. Выше уже замечено включение $V_F\subseteq V_{RLT}$. Для доказательства собственности достаточно построить RLT-алгебру, которая не является алгеброй Филиппова. Мы строим такую алгебру как фактор-алгебру свободной тернарной алгебры от пяти порождающих.

Пусть I — идеал, порожденный словами длины 7 свободной RLT-алгебры $\mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{C}=\mathfrak{B}/I$ — тернарная алгебра, состоящая из слов длины пять и менее, которая антикоммутативна и удовлетворяет (2). Далее доказательство сводится к анализу системы линейных уравнений от 10 переменных. Мы дадим только набросок дальнейших рассуждений. Рассмотрим слова от пяти различных букв и выпишем всевозможные соотношения для этих слов, следующие из (2). Получаем систему, где переменными являются различные слова. В полученной системе пять свободных неизвестных. Предполагая выполнение тождества Филиппова $J(x,y,z;u,v)=0$, мы легко приходим к противоречию, получая нетривиальное соотношение на свободные неизвестные. □

Лемма 2. *Фактор-алгебра свободной RLT-алгебры от трех порождающих по идеалу слов длины более 9 является алгеброй Филиппова.*

Доказательство. Как мы отмечали выше, в RLT-алгебре якобиан кососимметричен по всем аргументам. Значит, чтобы якобиан был отличен от нуля, необходима линейная независимость его аргументов. В нашем случае, без ограничения общности, это возможно только для аргументов $x, y, z, [x, y, z]$, $[[x, y, z], x, y]$. Однако в этом случае слагаемые якобиана — это элементы длины 11, которые в нашей алгебре равны нулю. □

Как известно [1], минимальная размерность неабелевой тернарной алгебры Филиппова равна трем, при этом минимальная размерность простой тернарной алгебры Филиппова равна 4.

Лемма 3. *Пусть A — RLT-алгебра, не являющаяся алгеброй Филиппова. Тогда* $\dim A \geq 5$.

Доказательство. Следуя доказательству леммы 2, получаем, что алгебра должна содержать по крайней мере 5 линейно независимых элементов, чтобы хотя бы один якобиан не был равен нулю. □

2. Теорема Энгеля и формы на RLT-алгебрах

Напомним, что оператором правого умножения в тернарной алгебре A называется линейное отображение $R_x := R_{x_1,x_2}$, действующее по правилу $R_x(z) = [z, x_1, x_2]$. Определим операцию $[\,,]$ на пространстве $L = L(A)$ операторов правого умножения

$$[R_x, R_y] = R_x \circ R_y - R_y \circ R_x,$$

где $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), R_x \circ R_y(z) = [[z, y_1, y_2], x_1, x_2]$. Покажем, что $[R_x, R_y] \in L$. Из тождеств (1) и (2) следует выполнение на L соответствующих операторных тождеств:

$$\begin{aligned} &R_x + R_{\bar{x}} = 0, \\ &[R_x, R_y] - [R_{x_1,y_1}, R_{x_2,y_2}] + R_{x_1,R_y(x_2)} - R_{R_x(y_1),y_2} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2), \bar{x} = (x_2, x_1), y = (y_1, y_2)$. Тогда из (4) следует

$$[R_{\bar{x}}, R_{\bar{y}}] - [R_{x_2,y_2}, R_{x_1,y_1}] + R_{x_2,R_{\bar{y}(x_1)}} - R_{R_{\bar{x}(y_2)},y_1} = 0.$$

Складывая (4) и последнее тождество, получаем

$$2[R_x, R_y] = R_{R_x(y_1),y_2} + R_{y_1,R_x(y_2)} - R_{R_y(x_1),x_2} - R_{x_1,R_y(x_2)}. \tag{5}$$

Очевидно, что если характеристика основного поля не равна 2, то (4) и (5) эквивалентны. Таким образом, $[R_x, R_y] \in L$. Как следствие получаем следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть характеристика основного поля не равна 2. Тогда* $(L; +, [\,,])$ *является алгеброй Ли.*

Тернарная антикоммутативная алгебра A называется *нильпотентной*, если $A^{<r>} = 0$ для некоторого $r \geq 0$, где $A^{<0>} = A, A^{<s+1>} = [A^{<s>}, A, A]$ при $s \geq 0$. Для RLT-алгебр справедлива следующая теорема, являющаяся аналогом теоремы Энгеля для алгебр Ли.

Теорема 1. *Пусть A — конечномерная RLT-алгебра, в которой все операторы правого умножения R_a нильпотентны. Тогда A левонильпотентна и*

A^* нильпотентна, где A^* — ассоциативная алгебра, порожденная операторами R_a.

Доказательство. Множество операторов правого умножения R_a является алгеброй Ли нильпотентных линейных преобразований. Поэтому по теореме Энгеля ассоциативная алгебра A^* нильпотентна. То есть существует такое число N, что $R_{a_1}R_{a_2}\dots R_{a_N} = 0$ для любых $a_i = (a_1^i, a_2^i) \in A \times A$. Поэтому $[[\dots[a, a_1^1, a_2^1]\dots], a_1^N, a_2^N] = 0$ для любого $a \in A$ и, следовательно, $A^{<N>} = 0$. □

Пусть A — произвольная RLT-алгебра, а (x, y) — билинейная форма, определенная на A. Билинейная форма (x, y) называется *антиинвариантной*, если $(R_a(x), y) = (x, R_a(y))$, и *инвариантной*, если $(R_a(x), y) = -(x, R_a(y))$, где R_a — оператор правого умножения. Билинейная форма (x, y) называется *невырожденной*, если ее ядро S равно нулю, где $S = \{x \in A : (x, y) = 0 \text{ для всех } y \in A\}$.

Теорема 2. *Если A — RLT-алгебра характеристики не 3 и существует невырожденная* (*косо*)*симметрическая инвариантная форма на A, то A — алгебра Филиппова.*

Доказательство. Заметим, что из инвариантности следует равенство

$$(R_xR_y(a), b) = -(R_y(a), R_x(b)) = (a, R_yR_x(b)).$$

Из тождества (2) следует выполнение операторного тождества

$$R_{z,b}R_{x,y} + R_{x,b}R_{y,z} + R_{y,b}R_{z,x} + R_{[x,y,b],z} + R_{[y,z,b],x} + R_{[z,x,b],y} = 0,$$

то есть для всех $u, v \in A$ справедливо

$$((R_{z,b}R_{x,y} + R_{x,b}R_{y,z} + R_{y,b}R_{z,x} + R_{[x,y,b],z} + R_{[y,z,b],x} + R_{[z,x,b],y})(u), v) = 0. \tag{6}$$

Из инвариантности формы получаем

$$(u, (R_{x,y}R_{z,b} + R_{y,z}R_{x,b} + R_{z,x}R_{y,b} - R_{[x,y,b],z} - R_{[y,z,b],x} - R_{[z,x,b],y})(v)) = 0.$$

В следствии (косо)симметричности формы и произвольности u и v выполнено равенство

$$((R_{x,y}R_{z,b} + R_{y,z}R_{x,b} + R_{z,x}R_{y,b} - R_{[x,y,b],z} - R_{[y,z,b],x} - R_{[z,x,b],y})(u), v) = 0,$$

складывая которое с (6), получаем

$$R_{z,b}R_{x,y} + R_{x,b}R_{y,z} + R_{y,b}R_{z,x} + R_{x,y}R_{z,b} + R_{y,z}R_{x,b} + R_{z,x}R_{y,b} = 0,$$

так как форма невырождена. Запишем операторные тождества

$$R_{z,b}R_{x,y} + R_{x,b}R_{y,z} + R_{y,b}R_{z,x} + R_{[x,y,b],z} + R_{[y,z,b],x} + R_{[z,x,b],y} = 0,$$
$$R_{b,z}R_{x,y} + R_{x,z}R_{y,b} + R_{y,z}R_{b,x} + R_{[x,y,z],b} + R_{[y,b,z],x} + R_{[b,x,z],y} = 0$$

и найдем их разность

$$(R_{z,b}R_{x,y} + R_{x,b}R_{y,z} + R_{y,b}R_{z,x} + R_{z,x}R_{y,b} + R_{y,z}R_{x,b}) + R_{[x,y,b],z} +$$
$$+R_{[y,z,b],x} + R_{[z,x,b],y} - R_{b,z}R_{x,y} - R_{[x,y,z],b} + R_{[y,z,b],x} + R_{[z,x,b],y} = 0.$$

Используя выведенное ранее равенство, имеем

$$-R_{x,y}R_{z,b} - R_{b,z}R_{x,y} + R_{[x,y,b],z} - R_{[x,y,z],b} + 2R_{[y,z,b],x} + 2R_{[z,x,b],y} = 0,$$
$$(2[R_{x,y}, R_{b,z}] + 2R_{x,[b,z,y]} + 2R_{[b,z,x],y}) - [R_{x,y}, R_{b,z}] + R_{b,[x,y,z]} + R_{[x,y,b],z} = 0.$$

Преобразуя известное нам соотношение

$$2[R_{x,y}, R_{b,z}] = R_{[x,y,b],z} + R_{b,[x,y,z]} - R_{[b,z,x],y} - R_{x,[b,z,y]}$$

следующим образом

$$[R_{x,y}, R_{b,z}] + R_{[b,z,x],y} + R_{x,[b,z,y]} = [R_{b,z}, R_{x,y}] + R_{[x,y,b],z} + R_{b,[x,y,z]},$$

получаем

$$\begin{aligned}&(2[R_{b,z}, R_{x,y}] + 2R_{[b,x,y],z} + 2R_{b,[z,x,y]}) - [R_{x,y}, R_{b,z}] + R_{b,[x,y,z]} + R_{[x,y,b],z} = 0,\\ &3[R_{b,z}, R_{x,y}] + 3R_{[b,x,y],z} + 3R_{b,[z,x,y]} = 0,\\ &[R_{b,z}, R_{x,y}] + R_{[b,x,y],z} + R_{b,[z,x,y]} = 0,\end{aligned}$$

что эквивалентно выполнению тождества Филиппова в A. □

Предложение 3. *Если A — RLT-алгебра характеристики не 2 и существует невырожденная антиинвариантная форма на A, то $L(A)$ — абелева алгебра Ли.*

Доказательство. Так как A — RLT-алгебра, то выполняется тождество (5), которое вместе с антикоммутативностью дает $([R_x, R_y](a), b) = (a, [R_x, R_y](b))$. С другой стороны, из антиинвариантности следует равенство

$$\begin{aligned}&([R_x, R_y](a), b) = (R_xR_y(a) - R_yR_x(a), b) =\\ &= (a, R_yR_x(b) - R_xR_y(b)) = (a, [R_y, R_x](b)) = (a, -[R_x, R_y](b)),\end{aligned}$$

складывая которое с предыдущим, получаем $[R_x, R_y] = 0$, так как форма невырождена. □

Предложение 4. *Пусть A — RLT-алгебра характеристики не 2. Тогда $(x, y) = tr(R_{x,y})$ — кососимметрическая антиинвариантная форма, определенная на A. Если A — простая RLT-алгебра, то либо $L(A)$ — подалгебра специальной алгебры Ли, либо $L(A)$ — абелева алгебра Ли.*

Доказательство. Кососимметричность формы очевидна. Так как след коммутатора равен нулю, то из (4) следует антиинвариантность:

$$\begin{aligned}&tr([R_x, R_y] - [R_{x_1,y_1}, R_{x_2,y_2}] + R_{x_1,R_y(x_2)} - R_{R_x(y_1),y_2}) = 0,\\ &tr(R_{x_1,R_y(x_2)} - R_{R_x(y_1),y_2}) = 0,\\ &tr(R_{x_1,[x_2,y_1,y_2]} - R_{[y_1,x_1,x_2],y_2}) = 0,\\ &(x_1, R_{x_2,y_1}(y_2)) = tr(R_{x_1,[x_2,y_1,y_2]}) = tr(R_{[y_1,x_1,x_2],y_2}) = (R_{x_2,y_1}(x_1), y_2).\end{aligned}$$

Пусть A — простая RLT-алгебра. Рассмотрим ядро S формы (x, y) и докажем, что S является идеалом алгебры A. Так как форма билинейна, то достаточно доказать, что $[x, a, b] \in S$ для всех $x \in S, a, b \in A$. Действительно, в силу антиинвариантности имеем $([x, a, b], y) = (x, [y, a, b]) = 0$. Так как A — простая алгебра, то $S = A$ или $S = 0$, значит $L(A)$ является подалгеброй специальной алгебры Ли или, как следует из предложения 3, абелевой алгеброй Ли, соответственно. □

Следствие. *Если A — простая конечномерная RLT-алгебра над полем характеристики 0, то $L(A)$ — полупростая подалгебра специальной алгебры Ли.*

3. Соответствие между RLT-алгебрами и алгебрами Ли

Теорема 3. *Пусть A — простая конечномерная RLT-алгебра над полем характеристики 0, тогда $L = L(A)$ является полупростой алгеброй Ли, и A, как L-модуль, неприводим.*

Доказательство. Пусть U — собственный L-подмодуль в A, то есть $R_x(U) \subseteq U$ для всех $R_x \in L$, значит $[U, x_1, x_2] \in U$ для всех $x_1, x_2 \in A$, следовательно, U является собственным идеалом алгебры A, что противоречит ее простоте. Таким образом, L — неприводимая алгебра Ли. Тогда $L = Z \oplus L_1$, где Z — центр L, а L_1 — полупростой идеал в L. Пусть $R_a \in Z$, тогда $[R_x, R_a] = 0$ для всех $R_x \in L$. Для любого $y \in A$ справедливо

$$[[y, a_1, a_2], x_1, x_2] - [[y, x_1, x_2], a_1, a_2] = 0.$$

Полагая в последнем равенстве $y = a_1$ и $x_1 = a_2$, получаем

$$[[a_1, a_1, a_2], a_2, x_2] - [[a_1, a_2, x_2], a_1, a_2] = 0.$$

Доказали, что для всех $x \in A$ выполняется $R_a^2(x) = 0$, то есть R_a — нильпотентный полупростой элемент, значит $R_a = 0$, и L — полупростая алгебра Ли. □

Пусть F — поле характеристики не 2, а V — RLT-алгебра над F. Тогда V является модулем над $L = L(V)$ (с действием $v \cdot l = \sum_i [v, x_i, y_i]$, если $l = \sum_i R_{x_i, y_i}$). Легко заметить, что отображение $\phi : V \wedge V \mapsto L$ (из внешнего квадрата V в L) определено корректно и является сюръективным, при этом отображение $(x, y, z) \mapsto xR_{y,z}$ кососимметрично по всем аргументам. Внешний квадрат $V \wedge V$ также является модулем над L с действием $\hat{v} \cdot l = v_1 \cdot l \wedge v_2 + v_1 \wedge v_2 \cdot l$, если $\hat{v} = v_1 \wedge v_2 \in V \wedge V, l \in L$. При этом из (5) следует выполнение следующего равенства

$$2[\phi(\hat{a}), \phi(\hat{b})] = \phi(\hat{b} \cdot \phi(\hat{a}) - \hat{a} \cdot \phi(\hat{b})), \tag{7}$$

где $\hat{a}, \hat{b} \in V \wedge V$. Если V является простой, то V — это неприводимый L-модуль, а если характеристика основного поля при этом равна 0, то по теореме 3 алгебра L является полупростой алгеброй Ли.

Обратно, пусть L — алгебра Ли, а V — модуль над L с действием $v \cdot l, v \in V, l \in L$. Предположим, что определено сюръективное отображение $\phi : V \wedge V \mapsto L$ такое, что отображение $(x, y, z) \mapsto x \cdot \phi(y \wedge z)$ является кососимметричным по всем аргументам и выполнено равенство (7).

Определим тернарную операцию $[\,,\,,\,]$ на V правилом

$$[x, y, z] = x \cdot \phi(y \wedge z).$$

Тогда V относительно данной операции является RLT-алгеброй. Если при этом V — неприводимый L-модуль, то алгебра V является простой. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 4. *Существует взаимно однозначное соответствие между RLT-алгебрами характеристики не 2 и тройками (V, L, ϕ), где L — алгебра Ли (характеристики не 2), V — L-модуль, а ϕ — это сюръективное отображение $V \wedge V$ на L, удовлетворяющее (7) и такое, что следующее отображение $(x, y, z) \mapsto x \cdot \phi(y \wedge z)$ является кососимметричным по всем аргументам. При этом простым RLT-алгебрам соответствуют тройки с неприводимыми модулями.*

References

[1] V.T. Filippov, *n-Lie algebras*, Sib. Math. J. **26**:6 (1985), 126–140. MR0816511

[2] Y. Nambu, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Phys. Rev. **D 7** (1973), 2405–2412. MR0455611

[3] А.П. Пожидаев, *n-арные алгебры Мальцева*, Алгебра и логика **40**:3 (2001), 309–329. MR1857886

[4] M. Bremner, *Varieties of anticommutative n-ary algebras*, J. of Algebra **191**:1 (1997), 76–88. MR1444489

Александр Петрович Пожидаев
Институт математики им. С.Л.Соболева,
пр. Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский госуниверситет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: app@math.nsc.ru