S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 517–531 (2014) УДК 519.62
MSC 65L05

ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О.Б. АРУШАНЯН, Н.И. ВОЛЧЕНСКОВА, С.Ф. ЗАЛЕТКИН

Abstract. A numerical analytic method is proposed for solving the Cauchy problem for normal systems of ordinary differential equations. This method is based on the approximation of the solution and its derivative by partial sums of shifted Chebyshev series. The coefficients of the series are determined by with the aid of an iterative process using Markov's quadrature formulas. The method yields an analytical representation of a solution and can be used to solve ordinary differential equations with a higher accuracy and with a larger discretization step compared to the classical methods, such as Runge–Kutta, Adams, and Gear methods.

Keywords: ordinary differential equations, numerical methods, shifted Chebyshev series, Markov's quadrature formulas.

1. Введение

Рассматривается задача Коши для нелинейной системы M обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от искомых функций:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \le x \le x_0 + X. \tag{1}$$

В [1, 2] предложен приближенный аналитический метод решения данной задачи. Метод заключается в представлении решения $y(x)$ и его производной $y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$ в виде рядов Фурье по смещенным многочленам Чебышева

Arushanyan, O.B., Volchenskova, N.I., Zaletkin, S.F., Application of Chebyshev series for the integration of ordinary differential equations.

© 2014 Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.

Работа поддержана РФФИ (грант 13–01–00096-а).

Поступила 17 апреля 2014 г., опубликована 29 июня 2014 г.

первого рода и вычислении коэффициентов ряда с помощью итерационного процесса с использованием формул численного интегрирования Маркова.

В настоящей статье отмечается отличие данного подхода от традиционных численных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и приводятся оценки погрешности для приближенных коэффициентов ряда Чебышева. В отличие от [1, 2], где набор примеров состоял только из линейных дифференциальных уравнений, в данной статье расширен круг тестовых задач, который включает в себя также и нелинейные уравнения и системы.

Предполагается, что правая часть $f(x,y)$ дифференциального уравнения имеет достаточное число q непрерывных частных производных в области D определения системы (1) $\big(f(x,y) \in C^q_{xy}(D)\big)$, обеспечивающих верность приводимых оценок и обоснованность применяемых преобразований.

2. Об аппроксимации обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с помощью частичных сумм ряда Чебышева

На основе степенных разложений, как известно, строятся численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, например, наиболее употребительные одношаговые методы типа Рунге–Кутта и многошаговые методы типа Адамса. Приближенное решение y_h, определяемое на одном шаге $[x_0,\, x_0+h]$ методом Рунге–Кутта порядка n, имеет такой же порядок точности, что и увеличенная на единицу степень многочлена $P_n(x)$ в разложении точного решения $y(x)$ задачи (1) по формуле Тейлора на сегменте $[x_0,\, x_0+h]$:

$$\begin{aligned} y(x) \quad = \quad & y_0 + (x-x_0)y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\, y_0'' + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\, y_0^{(n)} + \\ & + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\, y^{(n+1)}(\xi) = P_n(x) + O\big((x-x_0)^{n+1}\big). \end{aligned}$$

Здесь $y_0^{(j)} = y^{(j)}(x_0)$, $x_0 < \xi < x_0 + h$. По-существу, это приближенное значение y_h является с точностью до $O(h^{n+1})$ значением многочлена $P_n(x_0+h)$ в конце частичного сегмента $[x_0,\, x_0+h]$ или даже совпадает с ним, например, точное равенство $y_h = P_n(x_0+h)$ достигается, если решение линейной системы уравнений с постоянными коэффициентами $y' = Ay$ вычисляется явным методом Рунге–Кутта.

Однако многочлен $P_n(x)$ не является многочленом наилучшего равномерного приближения для $y(x)$ на данном сегменте, тогда как частичная сумма ряда Чебышева функции $y(x)$ на том же сегменте не только является многочленом наилучшего квадратического приближения для $y(x)$, но и дает для этой функции хорошее равномерное приближение. Тем самым аппроксимация дифференциального уравнения, основанная на частичных суммах ряда Чебышева, позволяет существенно повысить точность его интегрирования по сравнению с традиционными, наиболее употребительными методами типа Рунге–Кутта и при этом значительно увеличить длину h частичного сегмента. Это же относится и к многошаговым методам типа Адамса. Можно сказать, что при таком подходе (т.е. при использовании рядов Чебышева) интегрирование дифференциальных уравнений выполняется с помощью многочленов, близких к многочленам наилучшего равномерного приближения. Приведенные в статье примеры наряду с примерами в [1, 2] подтверждают это заключение.

Ряды Чебышева применяются в [3] для частного случая интегрирования линейных дифференциальных уравнений, когда коэффициенты уравнений имеют уже известные коэффициенты Чебышева. В отличие от [3] в предлагаемом нами подходе расширена область применимости рядов Чебышева для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, в настоящей статье рассматривается новый численно-аналитический метод решения задачи Коши для линейных и нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, принципиально отличающийся от традиционных методов типа Рунге–Кутта и Адамса. Для его практического применения достаточно иметь только подпрограмму вычисления значений правой части $f(x,y)$ системы (1) по заданным значениям аргументов x и y. Дальнейшее изучение свойств предложенного метода является основной целью этой статьи.

Будем использовать разложение правой части системы, взятой на решении задачи Коши (1), на частичном сегменте $[x_0,\, x_0+h]$, $h \le X$, в ряд Фурье по смещенным многочленам Чебышева первого рода $T_i^*(\alpha)$, т.е. смещенный ряд Чебышева:

$$\Phi(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[\Phi] T_i^*(\alpha), \qquad a_i^*[\Phi] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{\Phi(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, T_i^*(\alpha)\, d\alpha, \tag{2}$$

$$\Phi(\alpha) = F(x_0+\alpha h) = f\bigl(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h)\bigr), \qquad 0 \le \alpha \le 1.$$

Тогда решение задачи (1) можно получить также в виде смещенного ряда Чебышева

$$y(x_0+\alpha h) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[y] T_i^*(\alpha)\, d\alpha, \qquad a_i^*[y] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{y(x_0+\alpha h)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, T_i^*(\alpha)\, d\alpha \tag{3}$$

(штрих у знака суммы означает, что слагаемое с индексом 0 берется с дополнительным множителем $1/2$). При этом коэффициенты Чебышева решения $y(x_0+\alpha h)$ связаны с коэффициентами Чебышева его производной $y'(x_0+\alpha h) = \Phi(\alpha)$ (т.е. правой части системы (1)) следующими соотношениями:

$$a_i^*\bigl[y(x_0+\alpha h)\bigr] = \frac{h}{4i}\, \bigl(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\bigr), \qquad i > 0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\, a_0^*\bigl[y(x_0+\alpha h)\bigr] = y_0 + \frac{h}{4}\left(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}\, a_1^*[\Phi]\right) - \frac{h}{2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2-1}\, a_j^*[\Phi]. \tag{5}$$

Замена рядов (2) и (3) для $\Phi(\alpha)$ и $y(x_0+\alpha h)$ частичными суммами соответственно k-го и $(k+1)$-го порядков, замещение интеграла для $a_i^*[\Phi]$ из (2) формулой численного интегрирования Маркова [4–8] с одним или двумя фиксированными узлами и числом нефиксированных узлов k и использование связей (4) и (5) между коэффициентами Чебышева решения и его производной приводит к следующей системе уравнений для приближенных значений $a_i^*[\tilde{P}_k]$ коэффициентов Чебышева функции $\Phi(\alpha)$:

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \varphi_i\bigl(a_0^*[\tilde{P}_k], a_1^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]\bigr), \qquad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{6}$$

где $\tilde{P}_k(\alpha)$ — многочлен, представляющий собой частичную сумму смещенного ряда Чебышева функции $\Phi(\alpha)$ с приближенными коэффициентами:

$$\tilde{P}_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[\tilde{P}_k] T_i^*(\alpha) \approx \Phi(\alpha),$$

а функция φ_i выражается через квадратурную сумму Маркова для подынтегральной функции $\Phi(\alpha)T_i^*(\alpha)$ из интеграла для $a_i^*[\Phi]$ в (2).

Рассматривая приближенное решение $y(x_0 + \alpha h)$ как функцию не только аргумента $x_0 + \alpha h$, но и аргументов $a_0^*[\tilde{P}_k], a_1^*[\tilde{P}_k], \dots, a_k^*[\tilde{P}_k]$, систему уравнений (6) можно представить в виде

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' f\big(x_0 + \alpha_j^{(1)} h, y(x_0 + \alpha_j^{(1)} h; a_0^*[\tilde{P}_k], \dots, a_k^*[\tilde{P}_k])\big) T_i^*\big(\alpha_j^{(1)}\big),$$

если используется квадратурная формула Маркова с одним фиксированным узлом $\alpha_0^{(1)} = 0$ и k нефиксированными узлами $\alpha_j^{(1)}$, $j = 1, \dots, k$, и в виде

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \frac{2}{k+1} {\sum_{j=0}^{k+1}}'' f\big(x_0 + \alpha_j^{(2)} h, y(x_0 + \alpha_j^{(2)} h; a_0^*[\tilde{P}_k], \dots, a_k^*[\tilde{P}_k])\big) T_i^*\big(\alpha_j^{(2)}\big),$$

если используется квадратурная формула Маркова с двумя фиксированными узлами $\alpha_0^{(2)} = 0$, $\alpha_{k+1}^{(2)} = 1$ и k нефиксированными узлами $\alpha_j^{(2)}$, $j = 1, \dots, k$ (два штриха у знака суммы означают, что слагаемые с индексами 0 и $k+1$ берутся с дополнительным множителем $1/2$).

Система (6) имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений. Доказательство разрешимости системы проведем с помощью принципа сжатых отображений.

Обозначим l-ю компоненту вектор-функции φ_i через φ_{li}, а n-ю компоненту вектора $a_m^*[\tilde{P}_k]$ через a_{nm}. Найдем частную производную $\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}}$; $i, m = 0, 1, \dots, k$; $l, n = 1, 2, \dots, M$. Учитывая, что каждая компонента вектора y зависит от одноименной компоненты вектора $a_m^*[\tilde{P}_k]$, получаем для частной производной следующее выражение в случае квадратурной формулы Маркова с одним фиксированным узлом (для сокращения записи коэффициенты Чебышева $a_0^*[\tilde{P}_k], \dots, a_k^*[\tilde{P}_k]$ в качестве аргументов функции y указывать не будем):

$$\frac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \frac{\partial f_l\big(x_0 + \alpha_j^{(1)} h, y(x_0 + \alpha_j^{(1)} h)\big)}{\partial y_n} \, \frac{\partial y_n(x_0 + \alpha_j^{(1)} h)}{\partial a_{nm}} \, T_i^*\big(\alpha_j^{(1)}\big).$$

Для квадратурной формулы Маркова с двумя фиксированными узлами имеем

$$\frac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = \frac{2}{k+1} {\sum_{j=0}^{k+1}}'' \frac{\partial f_l\big(x_0 + \alpha_j^{(2)} h, y(x_0 + \alpha_j^{(2)} h)\big)}{\partial y_n} \, \frac{\partial y_n(x_0 + \alpha_j^{(2)} h)}{\partial a_{nm}} \, T_i^*\big(\alpha_j^{(2)}\big).$$

Из (4), (5) заключаем, что $\dfrac{\partial y_n}{\partial a_{nm}} = O(h)$ при $h \to 0$; следовательно,

$$\frac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = O(h) \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{7}$$

Подставим в (6) вместо $a_r^*[\tilde{P}_k]$ точные значения коэффициентов Чебышева $a_r^*[\Phi]$ правой части $\Phi(\alpha)$. Невязка, которая при этом получается, складывается из остаточного члена квадратурной формулы Маркова $R_i = O(h^{2k+s-i})$ (где $s = 1$ для квадратурной формулы Маркова с одним фиксированным узлом и $s = 2$ для квадратурной формулы Маркова с двумя фиксированными узлами) и ошибки $O(h^{k+2})$, возникающей вследствие замены ряда Чебышева (3) для $y(x)$ частичной суммой $(k+1)$-го порядка. Таким образом, невязка ρ_i имеет порядок $\rho_i = O(h^{2k+s-i}) + O(h^{k+2})$ при $h \to 0$, а именно

$$\rho_k = O(h^{k+s}), \quad \rho_i = O(h^{k+2}), \quad 0 \le i \le k-1.$$

Если правая часть системы (1) не зависит от y, т.е. система (1) имеет форму $y' = f(x)$, то невязка принимает вид $\rho_i = O(h^{2k+s-i})$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Отсюда получаем

$$\|a_i^*[\Phi] - \varphi_i\bigl(a_0^*[\Phi], a_1^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]\bigr)\|_\infty = O(h^{k+s}). \tag{8}$$

Из (7), (8) следует, что, если в качестве h выбрать достаточно малую величину, то невязку (8) можно сделать сколь угодно малой и можно обеспечить, чтобы какая-нибудь из норм матрицы Q, составленной из максимальных (в области изменения переменных) значений модулей частных производных $\max\left|\dfrac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}}\right|$, станет меньше единицы. Иными словами, система функций φ_i из (6) удовлетворяет условию Липшица с константой, меньшей единицы. Таким образом, при значениях h, для которых невязка (8) мала и норма матрицы Q меньше единицы, по принципу сжатых отображений система (6) имеет единственное решение и выполняется достаточное условие сходимости метода итераций [9, 10]. Последовательные приближения $a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{P}_k]$, $\nu = 0, 1, \ldots,$ определяемые по формулам

$$a_i^{*(\nu)}[y] = \frac{h}{4i}\bigl(a_{i-1}^{*(\nu)}[\tilde{P}_k] - a_{i+1}^{*(\nu)}[\tilde{P}_k]\bigr), \quad i = 1, 2, \ldots, k+1, \quad a_{k+1}^{*(\nu)}[\tilde{P}_k] = a_{k+2}^{*(\nu)}[\tilde{P}_k] = 0,$$

$$\frac{1}{2}a_0^{*(\nu)}[y] = y_0 + \frac{h}{4}\Bigl(a_0^{*(\nu)}[\tilde{P}_k] - \frac{1}{2}a_1^{*(\nu)}[\tilde{P}_k]\Bigr) - \frac{h}{2}\sum_{j=2}^{k}\frac{(-1)^j}{j^2-1}\,a_j^{*(\nu)}[\tilde{P}_k],$$

$$y^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j^{(1)}h) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^{*(\nu)}[y]T_i^*(\alpha_j^{(1)}), \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

$$a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{P}_k] = \frac{4}{2k+1}{\sum_{j=0}^{k}}' f\bigl(x_0 + \alpha_j^{(1)}h, y^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j^{(1)}h)\bigr)T_i^*\bigl(\alpha_j^{(1)}\bigr), \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

при $\nu \to \infty$ сходятся к решению системы (6), если начальное приближение $a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k]$ выбрано достаточно близким к решению системы (6). Последние две формулы для $y^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j^{(1)}h)$ и $a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{P}_k]$ относятся к квадратурной формуле Маркова с одним фиксированным узлом. Для квадратуры Маркова с двумя фиксированными узлами последовательные приближения строятся аналогично. Организация итерационного процесса и способы выбора начального приближения изложены в [1, 2].

Для приближенных значений коэффициентов Чебышева правой части системы (1) справедливы следующие оценки их погрешности $\delta_i = a_i^*[\Phi] - a_i^*[\tilde{P}_k]$, а именно: если для вычисления интеграла в (2) используется квадратурная формула Маркова с одним фиксированным узлом, то погрешность δ_k коэффициента $a_k^*[\tilde{P}_k]$ имеет порядок $O(h^{k+1})$, а погрешности δ_i остальных коэффициентов $a_i^*[\tilde{P}_k]$, $0 \le i \le k-1$, имеют порядок $O(h^{k+2})$. Если правая часть системы (1) не зависит от y, т.е. система (1) имеет вид $y' = f(x)$, то погрешность $\delta_i = O(h^{2k+1-i})$, $0 \le i \le k$. Оценки верны, если $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные по x и y до порядка $2k+1$ включительно. Если для вычисления интеграла (2) используется квадратурная формула Маркова с двумя фиксированными узлами, то погрешности приближенных значений всех коэффициентов $a_i^*[\tilde{P}_k]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, имеют порядок $O(h^{k+2})$. В частном случае, т.е. для уравнения вида $y' = f(x)$, имеем оценку $\delta_i = O(h^{2k+2-i})$, $0 \le i \le k$. Оценки верны, если $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные по x и y до порядка $2k+2$ включительно.

По найденным приближенным значениям коэффициентов $a_i^*\big[y(x_0+\alpha h)\big]$ строится аналитическое приближение к решению задачи (1) на $[x_0,\, x_0+h]$ в виде $(k+1)$-й частичной суммы смещенного ряда Чебышева:

$$y(x_0+\alpha h) \approx {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^*[y] T_i^*(\alpha), \qquad 0 \le \alpha \le 1.$$

В частности, $y(x_0+h) = y(x_1) \approx {\sum\limits_{i=0}^{k+1}}' a_i^*[y]$, при этом погрешность приближенного значения решения имеет порядок $O(h^{k+2})$.

3. Примеры

В этом разделе применение метода рядов Чебышева для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений иллюстрируется на шести тестовых задачах. Одна задача линейная, остальные нелинейные. В первых четырех задачах приближенное решение строится в виде частичной суммы смещенного ряда Чебышева на заданном промежутке интегрирования $[0,\, x_f]$. В задачах 5 и 6 задается разбиение отрезка интегрирования на несколько частичных сегментов и на каждом сегменте решение представляется в виде частичной суммы ряда. В [1, 2] метод рядов Чебышева сравнивался с классическим методом Рунге–Кутта четвертого порядка точности, неявным трехстадийным методом Рунге–Кутта шестого порядка точности и многошаговыми методами Адамса и Штермера типа предиктор-корректор пятого порядка точности.

В настоящей статье метод рядов Чебышева сравнивается с методом Гира [11, 12] с автоматическим выбором шага интегрирования и переменным порядком (вариант для нежестких систем, максимальный допустимый порядок равен семи). Метод Гира основан на многошаговом предсказывающе-исправляющем методе Адамса, в котором *фронт многошагового метода* запоминается в виде вектора производных и в котором предсказание и исправление имеют один и тот же порядок. Все вычисления проводились с 15–16 значащими цифрами.

Пример 1. Интегрируется дифференциальное уравнение

$$y' = 2560x^4 - 5120x^3 + 3360x^2 - 800x + 50, \qquad y(0) = -1, \qquad 0 \le x \le 1. \tag{9}$$

Правая часть уравнения (9) равна $10T_0^*(x) + 20T_2^*(x) + 20T_4^*(x)$. В табл. 1 приведены вычисленные методом рядов коэффициенты Чебышева решения

$y(x) = \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y] T_i^*(x)$ и его производной $y'(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[y'] T_i^*(x)$ на отрезке $[0, 1]$ при $k = 7$. Там же даны точное решение в конце промежутка интегрирования, его приближенное значение и абсолютная погрешность.

Таблица 1

Номер коэффициента	Коэффициенты Чебышева	
	для y	для y'
0	$-.1165300494987420 \times 10^{-14}$	$.9999999999999998 \times 10^{1}$
1	$.0000000000000000 \times 10^{0}$	$.1287468395783087 \times 10^{-13}$
2	$.5920828063943340 \times 10^{-15}$	$.2000000000000000 \times 10^{2}$
3	$.0000000000000000 \times 10^{0}$	$.8138021506676196 \times 10^{-14}$
4	$.3552659468691877 \times 10^{-15}$	$.2000000000000000 \times 10^{2}$
5	$.9999999999999997 \times 10^{0}$	$.2453766356769194 \times 10^{-14}$
6	$.2368620346156665 \times 10^{-15}$	$.3230922474006803 \times 10^{-14}$
7	$.1153900883573858 \times 10^{-15}$	$-.3230922474006803 \times 10^{-14}$
8	$-.1009663273127126 \times 10^{-15}$	–
Приближенное Y и точное YT решения в точке $x = 1$ и абсолютная погрешность DELTA Y: Y $=.9999999999999998 \times 10^{0}$ YT$=.1000000000000000 \times 10^{1}$ DELTA Y$=.2220446049250313 \times 10^{-15}$		

Второй столбец табл. 1 содержит коэффициенты Чебышева для решения $y(x)$: $1/2a_0^*[y], a_1^*[y], \dots, a_8^*[y]$. Все коэффициенты, кроме пятого, с точностью до ошибок округления равны нулю. Пятый коэффициент с точностью до ошибок округления равен единице. Отсюда следует, что решением задачи Коши (9) является смещенный многочлен Чебышева $T_5^*(x)$. Третий столбец содержит коэффициенты Чебышева для производной $y'(x)$: $1/2a_0^*[y'], a_1^*[y'], \dots, a_7^*[y']$. Все коэффициенты, кроме нулевого, второго и четвертого, с точностью до ошибок округления равны нулю. Нулевой $1/2a_0^*[y']$, второй $a_2^*[y']$ и четвертый $a_4^*[y']$ коэффициенты равны соответственно 10, 20 и 20. Таким образом, вычисленная методом рядов производная решения равна

$$y'(x) = \big(T_5^*(x)\big)' = 10T_0^*(x) + 20T_2^*(x) + 20T_4^*(x).$$

Последнее равенство совпадает с выражением производной смещенных многочленов Чебышева первого рода в виде линейной комбинации этих же многочленов при $n = 5$:

$$\big(T_n^*(x)\big)' = 4n \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} T_{n-1-2j}^*(x).$$

Здесь $[\cdot]$ означает целую часть, а в сумме слагаемое, содержащее многочлен T_0^*, делится пополам.

Таким образом, если правая часть дифференциального уравнения является алгебраическим многочленом, то результат интегрирования такого уравнения методом рядов Чебышева заключается в том, что разложения решения и его производной по степеням независимой переменной преобразуются в разложения по смещенным многочленам Чебышева первого рода.

Пример 2. Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение

$$y' = e^{-y}. \quad y(0) = \ln 4, \quad 0 \le x \le 1. \tag{10}$$

Точным решением задачи (10) является логарифмическая функция $y(x) = \ln(x+4)$. Приближенные значения коэффициентов Чебышева разложения решения $y(x) \approx \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y]T_i^*(x)$ на отрезке [0, 1] вычисляются при $k = 11$. Результаты вычислений представлены в табл. 2. Там же приведены точное решение задачи (10), его приближенное значение в конце промежутка интегрирования и абсолютная погрешность.

Таблица 2

Номер коэффициента	Коэффициент	Абсолютная погрешность коэффициента
0	$.1500976589237730 \times 10^{1}$	$.0000000000000000 \times 10^{0}$
1	$.1114561800016824 \times 10^{0}$	$.9714451465470120 \times 10^{-16}$
2	$-.3105620015141859 \times 10^{-2}$	$-.5204170427930421 \times 10^{-17}$
3	$.1153801811414936 \times 10^{-3}$	$-.3388131789017201 \times 10^{-18}$
4	$-.4822437839223926 \times 10^{-5}$	$-.9503709668193250 \times 10^{-18}$
5	$.2149961999412900 \times 10^{-6}$	$.9390948407090021 \times 10^{-18}$
6	$-.9984439649767899 \times 10^{-8}$	$-.4149402650362004 \times 10^{-18}$
7	$.4769260722128374 \times 10^{-9}$	$.4443260630922998 \times 10^{-18}$
8	$-.2325590700189872 \times 10^{-10}$	$.2887108233499891 \times 10^{-18}$
9	$.1152006216789082 \times 10^{-11}$	$.2386453213602661 \times 10^{-18}$
10	$-.5777808786966432 \times 10^{-13}$	$-.1119617334366797 \times 10^{-17}$
11	$.2935882802774257 \times 10^{-14}$	$-.8678370944489626 \times 10^{-17}$
12	$-.1501427308896923 \times 10^{-15}$	$.6091781974775316 \times 10^{-18}$
Приближенное Y и точное YT решения в точке $x = 1$ и абсолютная погрешность DELTA Y: Y $=.1609437912434100 \times 10^{1}$ YT$=.1609437912434100 \times 10^{1}$ DELTA Y$=.0000000000000000 \times 10^{0}$		

Второй столбец табл. 2 содержит приближенные значения коэффициентов разложения решения $y(x)$, третий столбец содержит абсолютные погрешности приближенных значений этих коэффициентов. Погрешности коэффициентов определялись исходя из смещенного ряда Чебышева логарифмической функции:

$$\ln(x+4) = 2\ln\frac{\sqrt{4}+\sqrt{5}}{2} - 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)^{2i}}{i}\, T_i^*(x).$$

Нулевой коэффициент $1/2a_0^*[y]$ имеет все верные значащие цифры. Первый коэффициент $a_1^*[y]$ имеет 15 верных знаков после десятичной запятой, остальные коэффициенты имеют $16-18$ верных знаков после десятичной запятой. Поскольку все коэффициенты Чебышева для $y(x)$ с десятичными порядками от 10^1 до 10^{-15} содержатся в частичной сумме $\sum_{i=0}^{12}{}' a_i^*[y]T_i^*(x)$ и имеют абсолютные погрешности с 16–18 нулями после десятичной запятой, то все цифры в полученном приближенном значении решения $y(1)$ являются верными.

При интегрировании задачи (10) методом Гира седьмого максимального допустимого порядка наилучшая фактически достигнутая точность в конце отрезка [0, 1] составляет $0,444 \times 10^{-15}$, при этом для достижения этой точности требуется выполнить 123 шага интегрирования. Следует отметить, что в методе рядов Чебышева решение с бо́льшей точностью получено за один шаг.

Пример 3. Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{2q}{1+\operatorname{tg}^2 y}\,, \qquad y(0) = -\operatorname{arctg} q, \qquad q = \frac{1}{16}\,, \qquad 0 \le x \le 1. \tag{11}$$

Точным решением задачи (11) является обратная тригонометрическая функция $y = \operatorname{arctg}\bigl(q(2x-1)\bigr) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)$. Приближенные значения коэффициентов Чебышева разложения решения $y(x) \approx \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y]T_i^*(x)$ на $[0, 1]$ вычислены при $k = 8$. Результаты вычислений представлены в табл. 3. Там же приведены точное решение задачи (11), его приближенное значение в конце промежутка интегрирования и абсолютная погрешность.

Таблица 3

Номер коэффициента	Коэффициент	Абсолютная погрешность коэффициента
0	$.7521652571618187 \times 10^{-18}$	$-.7521652571618187 \times 10^{-18}$
1	$.6243908376279473 \times 10^{-1}$	$.0000000000000000 \times 10^{0}$
2	$.1164670302474663 \times 10^{-18}$	$-.1164670302474663 \times 10^{-18}$
3	$-.2028562153266230 \times 10^{-4}$	$.2066760391300493 \times 10^{-18}$
4	$.5436892730188540 \times 10^{-19}$	$-.5436892730188540 \times 10^{-19}$
5	$.1186294783779423 \times 10^{-7}$	$.3495946510057363 \times 10^{-18}$
6	$-.6402157359663753 \times 10^{-19}$	$.6402157359663753 \times 10^{-19}$
7	$-.8258805456130458 \times 10^{-11}$	$-.7623436596693212 \times 10^{-17}$
8	$.3087964488333959 \times 10^{-18}$	$-.3087964488333959 \times 10^{-18}$
9	$.6248516641517523 \times 10^{-14}$	$.1223129825539503 \times 10^{-16}$
Приближенное Y и точное YT решения в точке $x = 1$ и абсолютная погрешность DELTA Y: Y $=.6241880999595735 \times 10^{-1}$ YT$=.6241880999595735 \times 10^{-1}$ DELTA Y$=.0000000000000000 \times 10^{0}$		

Второй столбец табл. 3 содержит приближенные значения коэффициентов разложения решения $y(x)$, третий столбец содержит абсолютные погрешности приближенных значений этих коэффициентов. Абсолютные погрешности коэффициентов определялись исходя из следующего выражения смещенного ряда Чебышева для обратной тригонометрической функции:

$$\operatorname{arctg}\bigl(q(2x-1)\bigr) = 2\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{p^{2i+1}}{2i+1}\, T_{2i+1}^*(x), \qquad p = \frac{\sqrt{1+q^2}-1}{q}\,, \qquad q \ne 0.$$

Четные коэффициенты данного разложения равны нулю. Соответствующие им приближенные значения (второй столбец таблицы 3) имеют десятичные порядки 10^{-18}, 10^{-19}. Приближенные значения нечетных коэффициентов имеют 16–18 верных знаков после десятичной запятой. Поскольку все ненулевые (нечетные) коэффициенты Чебышева для $y(x)$ с десятичными порядками от

10^{-1} до 10^{-14} содержатся в частичной сумме $\sum_{i=0}^{9}{}' a_i^*[y]T_i^*(x)$ и имеют абсолютные погрешности с 16–18 нулями после десятичной запятой, то все цифры в полученном приближенном значении $y(1)$ являются верными.

Как видно из табл. 3, приближенное значение решения задачи в точке $x = 1$ имеет 17 верных десятичных знаков. Наилучший по точности результат, полученный методом Гира для $y(1)$, имеет 16 верных десятичных знаков, при этом для достижения такой точности требуется выполнить 210 шагов. В методе рядов Чебышева решение в точке $x = 1$ получено с бóльшей точностью за один шаг.

Пример 4. Интегрируется нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{lcl} y_1' &=& \dfrac{y_1^2}{y_2 - x}, \quad y_1(0) = 1, \\ y_2' &=& y_1 + 1, \quad y_2(0) = 1, \quad 0 \le x \le x_f, \quad x_f = 6. \end{array} \tag{12}$$

Решение задачи (12) содержит быстро растущую составляющую e^x: $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = x + e^x$. Приближенное значение решения в точке $x_f = 6$ вычислялось с использованием разложения решения

$$y(x) = y(\alpha h) \approx \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y]T_i^*(\alpha), \quad 0 \le \alpha \le 1, \quad h = x_f \tag{13}$$

на отрезке $[0, x_f]$ при $k = 17$. Результаты вычислений представлены в табл. 4.

Таблица 4. Решение задачи (12)

Приближенное Y и точное YT решения в точке $x = 6$ и абсолютная погрешность DELTA Y (при $h = 6$, $k = 17$):		
	y_1	y_2
Y	$.4034287934927340 \times 10^3$	$.4094287934927322 \times 10^3$
YT	$.4034287934927351 \times 10^3$	$.4094287934927351 \times 10^3$
DELTA Y	$.1080024958355352 \times 10^{-11}$	$.2899014361901209 \times 10^{-11}$

Как видно из табл. 4, приближенное решение имеет 14 верных цифр. При интегрировании задачи (12) методом Гира наилучшая фактически достигнутая точность в конце отрезка $[0, x_f]$ составляет для $y_1(x_f)$ и $y_2(x_f)$ соответственно 0.284×10^{-11} и 0.949×10^{-11}, при этом для достижения такой точности требуется выполнить 12679 шагов интегрирования. В методе рядов Чебышева решение получено с бóльшей точностью за один шаг.

Кроме указанного разложения (13) решения на заданном промежутке интегрирования $[0, x_f]$, для задачи (12) также задавалось разбиение этого промежутка на несколько частичных сегментов длиной $h < x_f$ и на каждом таком сегменте решение представлялось в виде $(k+1)$-й частичной суммы ряда Чебышева. Значения h и k, число частичных сегментов длиной h, на которые разбивался отрезок интегрирования (число шагов N_h), а также количество нулей после десятичной запятой в погрешности приближенных значений $y_1(x_f)$ и $y_2(x_f)$, вычисленных в конце промежутка интегрирования x_f, приведены в табл. 5.

Таблица 5. Количество нулей после десятичной запятой в погрешности для приближенных значений $y_1(x_f)$ и $y_2(x_f)$

№	Число шагов N_h	h	k	$y_1(x_f)$	$y_2(x_f)$
1	15	0.4	8	12	13
2	8	0.8	9	12	12
3	6	1	9	11	11
4	3	2	14	13	12
5	2	3	14	11	11
6	1	6	17	11	11

В табл. 6 дано приближенное решение задачи (12), полученное при $h = 0.4$ и $k = 8$.

Таблица 6. Решение задачи (12)

Приближенное Y и точное YT решения в точке $x = 6$ и абсолютная погрешность DELTA Y (при $h = 0.4$, $k = 8$):		
	y_1	y_2
Y	$.4034287934927350 \times 10^3$	$.4094287934927352 \times 10^3$
YT	$.4034287934927351 \times 10^3$	$.4094287934927351 \times 10^3$
DELTA Y	$.1136868377216160 \times 10^{-12}$	$-.5684341886080801 \times 10^{-13}$

Приближенное решение имеет 15 верных цифр. Как видно из табл. 5 и 6, решение $y(x_f)$ задачи (12) в точке x_f методом рядов Чебышева получено с бо́льшей точностью и за существенно меньшее число шагов по сравнению с методом Гира.

Пример 5. Интегрируется нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений [13]

$$\begin{aligned} &y_1' = 2xy_2^{1/5}y_4, \quad y_2' = 10xe^{5(y_3-1)}y_4, \quad y_3' = 2xy_4, \quad y_4' = -2x\ln y_1, \\ &y_i(0) = 1, \quad i = 1,2,3,4, \quad 0 \le x \le x_f, \quad x_f = 3. \end{aligned} \tag{14}$$

Решение системы имеет вид

$$y_1(x) = e^{\sin x^2}, \quad y_2(x) = e^{5\sin x^2}, \quad y_3(x) = \sin x^2 + 1, \quad y_4(x) = \cos x^2.$$

Все компоненты решения колеблющиеся. Компонента y_2 характерна тем, что имеет большую скорость изменения вблизи окрестности своих экстремальных значений. Задавалось разбиение отрезка интегрирования на несколько частичных сегментов длиной h; на каждом таком сегменте решение представлялось в виде $(k+1)$-й частичной суммы ряда Чебышева. Значения h и k, число частичных сегментов, на которые разбивался отрезок интегрирования (т.е.число шагов N_h), количество верных десятичных знаков в компонентах решения $y_i(x_f)$, вычисленных в конце промежутка интегрирования x_f (столбцы 5–8), приведены в табл. 7.

Таблица 7. Количество верных десятичных знаков для компонент решения $y(x_f)$

№	N_h	h	k	$y_1(x_f)$	$y_2(x_f)$	$y_3(x_f)$	$y_4(x_f)$
1	150	0,02	6	11	11	11	13
2	150	0,02	12	11	10	12	12
3	75	0,04	7	11	11	11	12
4	75	0,04	8	12	10	12	13
5	75	0,04	9	14	11	13	13
6	75	0,04	10	12	10	12	12
7	75	0,04	12	12	11	12	13
8	75	0,04	15	12	11	12	13
9	38	0,08	10	12	10	12	12
10	38	0,08	12	13	11	13	13
11	38	0,08	15	11	10	12	12
12	30	0,1	16	11	10	12	13
13	30	0,1	18	12	10	12	12
14	20	0,15	14	11	10	11	12
15	15	0,2	16	11	10	12	12

При $h = 0,02$ и $k = 6$ (первая строка) компоненты решения y_1, y_2, y_3, y_4 в точке x_f имеют соответственно 11, 11, 11 и 13 верных цифр после десятичной запятой. При $h = 0,02$ и $k = 12$ (вторая строка таблицы) уменьшение погрешности метода в $y(x_f)$ сопровождается увеличением вычислительной погрешности, в результате количество верных десятичных знаков в $y_i(x_f)$ составляет соответственно 11, 10, 12, 12. При $h = 0,04$ и $k = 7$ (третья строка таблицы) увеличение погрешности метода в $y_i(x_f)$ по сравнению с погрешностью метода при $k = 6$, $k = 12$ и $h = 0,02$ частично уравновешивается уменьшением вычислительной погрешности, что приводит к числу верных знаков в приближенном значении $y_i(x_f)$ соответственно 11, 11, 11, 12. При $h = 0,04$ и $k = 8$, $k = 9$ (четвертая и пятая строки таблицы) погрешность метода в $y_i(x_f)$ уменьшается по сравнению с погрешностью метода при $h = 0,04$ и $k = 7$, в результате чего уменьшается также полная погрешность приближенного значения $y_i(x_f)$, и количество верных цифр в компонентах возрастает: компоненты y_1, y_3, y_4 имеют соответственно 14, 13, 13 верных цифр после десятичной запятой (пятая строка таблицы).

При $h = 0,04$ и $k = 10$ (6-я строка таблицы) увеличение вычислительной погрешности в $y_i(x_f)$ по сравнению с вычислительной погрешностью при $k = 9$ и $h = 0,04$ преобладает над уменьшением погрешности метода, в результате чего полная погрешность в $y_i(x_f)$ увеличивается и количество верных цифр в $y_i(x_f)$ уменьшается и составляет для y_1, y_2, y_3, y_4 соответственно 12, 10, 12, 12. При дальнейшем увеличении k ($k = 12$, $k = 15$; 7-я и 8-я строки таблицы) погрешность метода в $y(x_f)$ уменьшается по сравнению с погрешностью метода при $k = 10$, в результате уменьшается полная погрешность приближенного значения $y(x_f)$ и количество верных цифр в компонентах y_2, y_4 возрастает: компоненты y_2 и y_4 имеют соответственно 11 и 13 верных цифр.

Увеличение погрешности метода в $y_i(x_f)$ при $h = 0,08$ и $k = 10$ (9-я строка таблицы) по сравнению с погрешностью метода при $h = 0,04$ и $k = 15$ приводит к увеличению полной погрешности для $y_i(x_f)$ и количество верных цифр в $y_2(x_f)$ и $y_4(x_f)$ уменьшается до 10 и 12 соответственно. Увеличение k до $k = 12$ при $h = 0,08$ влечет уменьшение погрешности метода в $y_i(x_f)$. В результате полная погрешность $y_i(x_f)$ уменьшается, и количество верных цифр в компонентах решения $y_i(x_f)$ возрастает до 13, 11, 13 и 13 соответственно (10-я строка таблицы).

Из этой таблицы видно, что количество верных знаков в $y_i(x_f)$ при $h = 0,04$ и $k = 12$ (7-я строка таблицы) больше числа верных цифр при $h = 0,02$ и $k = 12$ (2-я строка таблицы). Такое повышение точности объясняется тем, что при увеличении шага уменьшение вычислительной погрешности в приближенном значении $y_i(x_f)$ преобладает над увеличением погрешности метода, в результате чего полная погрешность уменьшается. По аналогичной причине происходит повышение числа верных знаков для компонент $y_1(x_f)$ и $y_3(x_f)$ до 13 при увеличении шага до значения $h = 0,08$ и $k = 12$ (10-я строка таблицы).

При интегрировании задачи (14) методом Гира седьмого максимального допустимого порядка количество верных десятичных знаков, соответствующее наилучшей фактически достигнутой точности решения $y(x_f)$ в конце отрезка x_f, для компонент $y_1(x_f)$, $y_2(x_f)$, $y_3(x_f)$, $y_4(x_f)$ соответственно следующее: 11, 10, 11, 12. Дальнейшие попытки увеличить точность приводят к столь малым размерам шага интегрирования, что эти шаги выходят за границу *реальной области асимптотики* этого метода [14]. Для достижения указанной точности в методе Гира требуется выполнить 2213 шагов интегрирования. В методе рядов решение получено с более высокой точностью за значительно меньшее число шагов (второй столбец таблицы, параметр N_h).

Пример 6. Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение

$$y' = -10(y-1)^2, \quad y(0) = 2, \quad 0 \le x \le x_f, \quad x_f = 1. \tag{15}$$

Решением уравнения (15) является функция $y(x) = 1 + 1/(1 + 10x)$. Для решения задачи промежуток интегрирования разбивался на три частичных сегмента [0, 0.35], [0.35, 0.7], [0.7, 1] и на каждом сегменте решение представлялось $(k+1)$-й частичной суммой смещенного ряда Чебышева при $k = 30$, при этом приближенное решение $y(x_f)$ задачи вычислено с 16 верными цифрами после десятичной запятой. При интегрировании задачи (15) методом Гира наилучшая фактически достигнутая точность для $y(x_f)$ составляет 0.444×10^{-15}, причем для достижения этой точности требуется выполнить 1696 шагов интегрирования. В методе рядов Чебышева решение получено с более высокой точностью за три шага.

4. Заключение

Тестовые задачи 1, 2, 3 еще раз наглядно иллюстрируют действительную способность рассматриваемого численно-аналитического метода правильно воспроизводить смещенные ряды Чебышева для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведенные результаты во всех шести задачах, наряду с подобными результатами в [1, 2, 15, 16], позволяют сделать следующий вывод. Представление решения обыкновенного дифференциального уравнения в виде частичной суммы ряда Чебышева дает возможность вычислять приближение к решению с высокой точностью, причем такая высокая точность на практике может оказаться недостижимой для одношаговых методов типа Рунге–Кутта (классический метод Рунге–Кутта и метод Мерсона четвертого порядка, неявный трехстадийный метод Рунге–Кутта шестого порядка), многошаговых методов Адамса и Штермера пятого порядка, метода Гира для нежестких задач с переменным порядком (максимально допустимым порядком 7) для той же разрядной сетки, поскольку эта точность требует для указанных методов столь малых размеров шага интегрирования, что эти шаги выходят за границу их *реальной области асимптотики* [14].

Благодаря замечательным аппроксимирующим свойствам предложенный метод может быть использован для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с более высокой точностью и с более крупным шагом дискретизации по сравнению с перечисленными выше алгоритмами. Такие высокоточные методы интегрирования необходимы, например, для решения многих задач небесной механики и астродинамики, задач космической геодезии и навигационных задач.

Список литературы

[1] О.Б. Арушанян, Н.И. Волченскова, С.Ф. Залеткин, *Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева*, Сибирские электронные математические известия, **7** (2010), 122–131. MR2674267

[2] О.Б. Арушанян, Н.И. Волченскова, С.Ф. Залеткин, *О вычислении коэффициентов рядов Чебышева для решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Сибирские электронные математические известия, **8** (2011), 273–283. MR2876546

[3] С. Пашковский, *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*, Наука, Москва, 1983. MR0717037

[4] К.И. Бабенко, *Основы численного анализа*, Наука, Москва, 1986. MR0889669

[5] И.П. Мысовских, *Лекции по методам вычислений*, Изд-во С.-Петербург. ун-та, СПб., 1998.

[6] В.П. Ильин, Ю.И. Кузнецов, *Алгебраические основы численного анализа*, Наука, Новосибирск, 1986. MR0886888

[7] O.B. Arushanyan and S.F. Zaletkin, *Application of Markov's quadrature in orthogonal expansions*, Moscow University Mathematics Bulletin, **64** (2009), 244-248. MR2664103

[8] С.Ф. Залеткин, *Формула численного интегрирования Маркова с двумя фиксированными узлами и ее применение в ортогональных разложениях*, Вычислительные методы и программирование, **6** (2005), 141–157.

[9] И.С. Березин, Н.П. Жидков, *Методы вычислений*, Т. 2, Физматгиз, Москва, 1962. MR0177493

[10] Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков, *Численные методы*, Бином, Москва, 2007.

[11] *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений*, Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта, Мир, Москва, 1979.

[12] C.W. Gear, *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1971. MR0315898

[13] Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер, *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи*, Мир, Москва, 1990. MR1063478

[14] О.Б. Арушанян, С.Ф. Залеткин, *Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране*, Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1990. MR1084590

[15] O.B. Arushanyan, N.I. Volchenskova. and S.F. Zaletkin, *Application of orthogonal expansions for approximate integration of ordinary differential equations*, Moscow University Mathematics Bulletin, **65** (2010), 172–175. MR2767866

[16] O.B. Arushanyan, N.I. Volchenskova. and S.F. Zaletkin, *Calculation of expansion coefficients of series in Chebyshev polinomials for a solution to a Cauchy problem*, Moscow University Mathematics Bulletin, **67** (2012), 211–216. MR3076495

Арушанян Олег Багратович
Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ,
Ленинские горы,
119991, Москва, Россия
E-mail address: arush@srcc.msu.ru

Волченскова Надежда Ивановна
Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ,
Ленинские горы,
119991, Москва, Россия
E-mail address: nad1946@srcc.msu.ru

Залеткин Сергей Федорович
Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ,
Ленинские горы,
119991, Москва, Россия
E-mail address: iraz@srcc.msu.ru