S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 52–63 (2014) УДК 517.53, 517.54
MSC 47A68, 30C15

ФАКТОРИЗАЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ОПИСАНИЕ КОРНЕВЫХ МНОЖЕСТВ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Е.Г. РОДИКОВА

Abstract. We obtain full description of zero sets and construct factorization representation for the class of holomorphic functions in a disk with the Nevanlinna-type characteristic from L^p-spaces.

Keywords: analytic function, unit disk, factorization, zero sets, the Nevanlinna characteristic

1. Введение

Пусть D – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(D)$ – множество всех аналитических в D функций, $h(D)$ – множество всех гармонических в D функций. Обозначим через $T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi$ характеристику Р. Неванлинны функции $f \in H(D)$, $a^+ = \max(a,0)$, $a \in \mathbb{R}$, N – класс функций ограниченного вида (см. [1]), S_α – класс Неванлинны-Джрбашяна порядка $\alpha > -1$:

$$S_\alpha := \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha T(r,f)dr < \infty \right\}.$$

Хорошо известно, что корневые множества функций из класса N характеризуются условием Бляшке. Необходимое условие на нули функций из класса S_α:

Rodikova, E.G., Factorization representation and the description of zero sets for the class of holomorphic functions in a disk.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-97508).

Поступила 4 ноября 2013 г., опубликована 30 января 2014 г.

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\alpha+2}<+\infty$ получено в [1]. Достаточность найденного Р. Неванлинной условия доказана Ф.А. Шамояном в [2]. В 1999 г. Ф.А. Шамоян ввел в рассмотрение классы S_α^p ($\alpha>-1$, $0<p<+\infty$) (см. [3]):

$$S_\alpha^p := \left\{ f\in H(D): \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha T^p(r,f)dr<+\infty \right\},$$

и получил полное описание корневых множеств этих классов функций. Очевидно, что $S_\alpha=S_\alpha^1$.

В 1964 г. М.М. Джрбашяном была введена характеристическая функция $T_\alpha(r,f)$, $\alpha>-1$ (см. [4]):

$$T_\alpha(r,f)=\frac{\alpha+1}{2\pi}r^{-(\alpha+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln|f(te^{i\varphi})|dt\right)^+ d\varphi,$$

и рассмотрен класс N_α - аналитических в D функций с ограниченной характеристикой $T_\alpha(r,f)$. Отметим, что $T_\alpha(r,f)\to T(r,f)$ при $\alpha\to-1+0$. В этой же работе М. Джрбашяном охарактеризованы нулевые множества и получено параметрическое представление указанного класса функций. Очевидно, что $S_\alpha\subset N_\alpha$, причем указанное включение строгое. Как заметил М. Джрбашян, функция $\exp\left\{\frac{1}{(1-z)^{\alpha+2}}\right\}$ принадлежит классу N_α, но не принадлежит классу S_α при всех $\alpha>-1$. В работе [5] Ф.А. Шамоян указал зазор между этими классами.

Для всех $0<p<+\infty$, $\alpha>-1$, $\gamma>-1$ определим класс $N_{\alpha,\gamma}^p$ аналитических в единичном круге функций, для которых

$$\int\limits_0^1 (1-r)^\gamma T_\alpha^p(r,f)<+\infty. \tag{1}$$

Ясно, что $N_{\alpha,\gamma}^p=S_\gamma^p$ при $\alpha\to-1+0$. Целью данной работы является получение полного описания корневых множеств и построение факторизационного представления указанного класса функций.

2. Формулировка основного результата

Основным результатом статьи является доказательство следующих двух утверждений:

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность точек $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ единичного круга являлась корневым множеством некоторой тождественно отличной от нуля функции $f\in N_{\alpha,\gamma}^p$ при всех $0<p<+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n_k^p}{2^{k((\alpha+2)p+\gamma+1)}}, \tag{2}$$

где $n_k=n\left(1-\frac{1}{2^k}\right)=\{card\, z_k:|z_k|<1-\frac{1}{2^k}\}$, $k=1,2,...$

Для формулировки следующего результата введем в рассмотрение класс О. Бесова на единичной окружности (см. [6, с.47]). Напомним, что функция $\psi\in$

H^1 принадлежит классу О. Бесова $B^s_{1,p}$, если

$$\|\psi\|_{B^s_{1,p}} = \|\psi\|_{H^1} + \left(\int\limits_0^1 \frac{\|\Delta_t^2(\psi)\|^p_{L^1}}{t^{sp+1}}dt\right)^{1/p} \leq +\infty, \qquad (3)$$

где $0 < p < +\infty$, $0 < s < 2$, $\Delta_t^2(\psi)(e^{i\theta}) = \psi(e^{i(\theta+t)}) - 2\psi(e^{i\theta}) + \psi(e^{i(\theta-t)})$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, $t \in [0, 1]$.

Если же $s \geq 2$, то $\psi^{(n)} \in B^{s'}_{1,p}$, $s' = s - [s]$, $[s]$ – целая часть числа s.

Отметим так же, что принадлежность функции $\psi(z) \in H^1$ классу $B^s_{1,p}$ $(0 < s < 2)$ равносильна сходимости интеграла

$$\int\limits_0^1 (1-r)^{p(2-s)-1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\psi^{(2)}(re^{i\varphi})|d\varphi\right)^p dr$$

(см. там же).

Следуя М.М. Джрбашяну (см. [7]), введем бесконечное произведение $\pi_\beta(z, \alpha_k)$, $\beta > -1$, с нулями в точках последовательности $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$:

$$\pi_\beta(z, \alpha_k) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right)\exp(-U_\beta(z, \alpha_k)), \qquad (4)$$

где

$$U_\beta(z, \alpha_k) = \frac{2(\beta+1)}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\beta \ln|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\alpha_k}|}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\beta+2}}\rho d\rho d\theta.$$

Как установлено в [7], произведение $\pi_\beta(z, \alpha_k)$ сходится абсолютно и равномерно в D тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1 - |\alpha_k|)^{\beta+2} < +\infty.$$

В случае, когда $\beta = p \in \mathbb{Z}_+$ произведение (4) принимает вид (см. там же):

$$\pi_p(z, \alpha_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\overline{\alpha}_k(\alpha_k - z)}{1 - \overline{\alpha}_k z}\exp\sum_{j=1}^{p+1}\frac{1}{j}\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha}_k z}\right)^j.$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$, $\gamma > -1$, $\beta > \alpha + 1 + \frac{\gamma+1}{p}$, $\beta' > \frac{\gamma+1}{p}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1) $f \in N^p_{\alpha,\gamma}$;
2) $f(z)$ *может быть представлена в виде:*

$$f(z) = c_\lambda z^\lambda \pi_\beta(z, z_k)\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\psi(e^{i\theta})d\theta}{(1 - e^{-i\theta}z)^{\alpha+\beta'+2}}\right), \ z \in D, \qquad (5)$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *– произвольная последовательность точек из* D*, удовлетворяющая условию (2),* $\pi_\beta(z, z_k)$ *- произведение М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности* $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $\psi \in B^s_{1,p}$, $s = \beta' - \frac{\gamma+1}{p}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $c_\lambda \in \mathbb{C}$.

3. Доказательство вспомогательных результатов

Доказательство основных результатов работы основывается на вспомогательных утверждениях. Для полноты изложения приведем их доказательство. Символом $c_{(...)}$, $c(...)$ будем обозначать, если не оговорено иное, положительные константы, значения которых зависят только от (...).

Лемма 1. *Сходимость ряда (2) эквивалентна сходимости интеграла*

$$\int_0^1 n^p(r)(1-r)^{(\alpha+2)p+\gamma}dr, \tag{6}$$

где $n(r) = \{card\, z_k : |z_k| < r\}$, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset D$.

Доказательство. Докажем сначала импликацию (6) $\to$ (2). Пусть интеграл (6) сходится. Разобьем его на части:

$$\int_0^1 n^p(\rho)(1-\rho)^{(\alpha+2)p+\gamma}d\rho = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} n^p(\rho)(1-\rho)^{(\alpha+2)p+\gamma}d\rho,$$

где $\rho_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, ...$

Оценим снизу получившуюся сумму:

$$c \geq \int_0^1 n^p(\rho)(1-\rho)^{(\alpha+2)p+\gamma}d\rho \geq \sum_{k=0}^{+\infty} n^p(\rho_k)\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}(1-\rho)^{(\alpha+2)p+\gamma}d\rho,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{+\infty} n_k^p \frac{1}{2^{k((\alpha+2)p+\gamma+1)}}\left(1 - \frac{1}{2^{(\alpha+2)p+\gamma+1}}\right) \leq const.$$

Значит, (6) $\to$ (2).

Докажем обратное. Предположим, что (2) сходится. Снова разобьем интеграл (6) на части и оценим его сверху:

$$\int_0^1 n^p(\rho)(1-\rho)^{(\alpha+2)p+\gamma}d\rho = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} n^p(\rho)(1-\rho)^{(\alpha+2)p+\gamma}d\rho \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} n^p(\rho_{k+1})\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}(1-\rho)^{(\alpha+2)p+\gamma}d\rho \leq c_\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} n_{k+1}^p\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{(\alpha+2)p+\gamma+1} \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{+\infty} n_m^p\left(\frac{1}{2^m}\right)^{(\alpha+2)p+\gamma+1} \leq const.$$

Значит, (2) $\to$ (6). Таким образом, лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если ряд (2) сходится, то сходится и ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\beta+2} \tag{7}$$

при всех $\beta > \alpha + \frac{\gamma+1}{p}$, *где* $0 < p < +\infty$.

Доказательство. По лемме 1 интеграл (6) сходится. Поэтому

$$c \geq \int_r^1 n^p(\rho)(1-\rho)^{(\alpha+2)p+\gamma} d\rho,$$

где $0 < r < 1$, далее

$$c \geq n^p(r) \int_r^1 (1-\rho)^{(\alpha+2)p+\gamma} d\rho,$$

откуда

$$n(r) \leq \frac{c}{(1-r)^{(\alpha+2)+\frac{\gamma+1}{p}}}, 0 < r < 1. \tag{8}$$

Разобьем ряд (7) на части:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\beta+2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\Delta_k}(1-|z_k|)^{\beta+2} n_k,$$

где $\Delta_k = [1-\frac{1}{2^{k-1}}, 1-\frac{1}{2^k})$, $n_k = n\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Воспользуемся в последней сумме оценкой (8):

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\beta+2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\Delta_k}(1-|z_k|)^{\beta+2-(\alpha+2)-\frac{\gamma+1}{p}},$$

откуда

$$\sum_{m=0}^{+\infty}(1-|z_m|)^{\beta+2} \leq \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m(\beta-(\alpha+\frac{\gamma+1}{p}))}.$$

Поскольку по условию $\beta > \alpha + \frac{\gamma+1}{p}$, то сходится ряд в правой части последнего неравенства, откуда следует сходимость ряда (7). Лемма 2 доказана.

4. Доказательство основных результатов

Перейдем теперь к доказательству основных результатов работы:

Доказательство теоремы 1. *Необходимость.* По формуле Иенсена при $f(0) = 1$ имеем:

$$\int_0^t \frac{n(s)}{s} ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(te^{i\varphi})| d\varphi,$$

откуда интегрированием по $t \in [0, r)$, $0 < r < 1$ получаем:

$$\int_0^r (r-t)^\alpha \int_0^t \frac{n(s)}{s} ds dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^r (r-t)^\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(te^{i\varphi})| d\varphi dt$$

Умножим теперь обе части равенства на $(\alpha+1)r^{-(\alpha+1)}$. Меняя порядок интегрирования, получим:

$$(\alpha+1)r^{-(\alpha+1)}\int_0^r (r-t)^\alpha \int_0^t \frac{n(s)}{s} ds dt \leq$$

$$\leq \frac{(\alpha+1)}{2\pi} r^{-(\alpha+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln|f(te^{i\varphi})| dt \right)^+ d\varphi = T_\alpha(r,f).$$

Возведем обе части нервенства в степень p, $0 < p < +\infty$, далее умножим на $(1-r)^\gamma$ и проинтегрируем по $r \in [0,1)$:

$$(\alpha+1)^p \int_0^1 (1-r)^\gamma r^{-(\alpha+1)p} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \int_0^t \frac{n(s)}{s} ds dt \right)^p dr \leq \int_0^1 (1-r)^\gamma T_\alpha^p(r,f) dr.$$

По условию интеграл в правой части неравенства сходится, поэтому

$$\int_0^1 (1-r)^\gamma r^{-(\alpha+1)p} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \int_0^t \frac{n(s)}{s} ds dt \right)^p \leq const.$$

Покажем, что сходимость последнего интеграла влечет сходимость интеграла (6). Для этого проинтегрируем во внутреннем интеграле по частям. Получим:

$$const \geq \int_0^1 (1-r)^\gamma r^{-(\alpha+1)p} \left(\int_0^r (r-t)^{\alpha+1} n(t) dt \right)^p dr \geq$$

$$\geq \int_{1/3}^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{r-\frac{1-r}{2}}^r (r-t)^{\alpha+1} n(t) dt \right)^p dr \geq$$

$$\geq \int_{1/3}^1 n^p \left(\frac{3r-1}{2} \right) (1-r)^{\gamma+(\alpha+2)p} dr = c_\alpha \int_0^1 n^p(\rho)(1-\rho)^{(\alpha+2)p+\gamma} d\rho.$$

Итак, интеграл (6) сходится, а значит, по лемме 1 сходится и ряд (2).

Достаточность. Предположим, что ряд (2) сходится. Покажем, что произведение $\pi_\beta(z,z_k)$ принадлежит классу $N^p_{\alpha,\gamma}$ при всех $\beta > \alpha + 1 + \frac{\gamma+1}{p}$, $\alpha > -1$, $\gamma > -1$, $0 < p < +\infty$, то есть нужно доказать сходимость интеграла

$$I = \int_0^1 (1-r)^\gamma T_\alpha^p(\pi_\beta, r) dr. \tag{9}$$

Воспользуемся известной оценкой произведения $\pi_\beta(z,z_k)$ (см. [2]):

$$\ln|\pi_\beta(z,z_k)| \leq \left(c_\beta \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1-|z_k|}{|1-\overline{z}_k z|} \right)^{\beta+2} \right). \tag{10}$$

Обозначим через $c_p = \left(\frac{\alpha+1}{2\pi}\right)^p$. Будем иметь:

$$I \leq c_p \int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(r^{-(\alpha+1)} \int_0^r (r-t)^\alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1-|z_k|}{|1-\overline{z}_k te^{i\varphi}|} \right)^{\beta+2} dt \right)^+ d\varphi \right)^p dr =$$

$$= c_p \int_0^1 (1-r)^\gamma r^{-(\alpha+1)p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\beta+2} \int_0^r \frac{(r-t)^\alpha}{|1-\overline{z}_k te^{i\varphi}|^{\beta+2}} dt \right) d\varphi \right)^p dr =$$

$$= c_p \int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\beta+2} \int_0^1 \frac{(1-u)^\alpha}{|1-\overline{z}_k ure^{i\varphi}|^{\beta+2}} du \right) d\varphi \right)^p dr.$$

Но (см. [2])

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^\alpha}{|1-\overline{z}_k ure^{i\varphi}|^{\beta+2}} du \le \frac{c}{|1-\overline{z}_k re^{i\varphi}|^{\beta-\alpha+1}}.$$

Поэтому

$$I \le \tilde{c}_p \int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-|z_k|)^{\beta+2}}{|1-\overline{z}_k re^{i\varphi}|^{\beta-\alpha+1}} d\varphi \right)^p dr.$$

Используя элементарную оценку внутреннего интеграла, получаем:

$$I \le \tilde{c}_p \int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-|z_k|)^{\beta+2}}{(1-r|z_k|)^{\beta-\alpha}} \right)^p dr. \tag{11}$$

Оценка (11) равносильна

$$I \le \tilde{c}_p \int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{\beta+2}}{(1-rt)^{\beta-\alpha}} dn(t) \right)^p dr.$$

Интегрируя по частям во внутреннем интеграле, будем иметь:

$$I \le \tilde{c}_p \int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_0^1 n(t) \frac{(1-t)^{\beta+1}}{(1-rt)^{\beta-\alpha}} dt \right)^p dr.$$

Разбивая внутренний интеграл на части, получаем:

$$I \le \tilde{c}_p \int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{r_{k-1}}^{r_k} n(t) \frac{(1-t)^{\beta+1}}{(1-rt)^{\beta-\alpha}} dt \right)^p dr \le$$

$$\le \tilde{c}_p \int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\sum_{k=1}^{+\infty} n_k \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{(1-t)^{\beta+1}}{(1-rt)^{\beta-\alpha}} dt \right)^p dr,$$

где $n_k = n(r_k)$, $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, ...$

Продолжим оценивать I сверху.

$$I \le \tilde{c}_p \int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k}{(1-rr_k)^{\beta-\alpha}} \int_{r_{k-1}}^{r_k} (1-t)^{\beta+1} dt \right)^p dr \le$$

$$\le \tilde{c}(\beta, p) \int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k}{(1-rr_k)^{\beta-\alpha}} \frac{1}{2^{k(\beta+2)}} \right)^p dr.$$

Пусть $0 < p \leq 1$. Тогда, используя оценку $(a+b)^p \leq (a^p + b^p)$, $\forall a,\, b \in \mathbb{R}_+$, $0 < p \leq 1$, будем иметь:

$$I \leq \tilde{c}(\beta, p) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p}{2^{(\beta+2)kp}} \int\limits_0^1 \frac{(1-r)^\gamma dr}{(1-rr_k)^{(\beta-\alpha)p}} \leq \tilde{c}(\beta, p) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p}{2^{(\beta+2)kp}} \frac{1}{(1-r_k)^{(\beta-\alpha)p-\gamma-1}}.$$

Но $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, ...$, поэтому

$$I \leq \tilde{c}(\beta, p) \sum_{k=1}^{+\infty} n_k^p \frac{2^{k((\beta-\alpha)p-\gamma-1)}}{2^{(\beta+2)kp}} \leq \tilde{c}(\beta, p) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p}{2^{k((\alpha+2)p+\gamma+1)}} \leq const.$$

Таким образом, мы доказали, что при $0 < p \leq 1$ если (2) сходится, то произведение $\pi_\beta(z, z_k) \in N^p_{\alpha,\gamma}$.

Докажем аналогичное утверждение при $p > 1$.

Сначала заметим, что

$$J = \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma T^p_\alpha(r, f) dr =$$

$$= \left(\frac{\alpha+1}{2\pi}\right)^p \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{-\pi}^{\pi} r^{-(\alpha+1)} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln|f(te^{i\varphi})| dt\right)^+ d\varphi\right)^p dr,$$

$$J \leq (\alpha+1)^p \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_0^1 (1-u)^\alpha T(ru, f) du\right)^p dr,$$

где $T(ru, f)$ - характеристика Р. Неванлинны функции f. Далее, разбивая внутренний интеграл на части и используя неравенство $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$, $\forall a,\, b \in \mathbb{R}_+$, $0 < p < +\infty$, получаем:

$$J \leq 2^p(\alpha+1)^p \times$$

$$\left(\int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_0^r (1-u)^\alpha T(ru, f) du\right)^p dr + \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_r^1 (1-u)^\alpha T(ru, f) du\right)^p dr\right),$$

$$J \leq 2^p(\alpha+1)^p(J_1 + J_2). \tag{12}$$

Рассмотрим интеграл J_2. Так как $T(r, f)$ – монотонно растущая функция на интервале $(0, 1)$, то

$$J_2 = \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int\limits_r^1 (1-u)^\alpha T(ru, f) du\right)^p dr \leq \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma T^p(r, f) \left(\int\limits_r^1 (1-u)^\alpha du\right)^p dr,$$

откуда

$$J_2 \leq \int\limits_0^1 T^p(r, f)(1-r)^{(\alpha+1)p+\gamma} dr. \tag{13}$$

Пусть теперь $g(r)$ - произвольная функция из $L^q(0,1)$, $g(r)\geq 0$, $\|g\|_{L_q}=1$. Рассмотрим интеграл $\tilde{J}_1=(J_1)^{\frac{1}{p}}$:

$$\tilde{J}_1\leq\int\limits_0^1 g(r)(1-r)^{\frac{\gamma}{p}}\int\limits_0^r(1-u)^\alpha T(ru,f)dudr\leq\int\limits_0^1 g(r)(1-r)^{\frac{\gamma}{p}}\int\limits_0^r(1-u)^\alpha T(u,f)dudr.$$

В последнем неравенстве применим неравенство Гёльдера:

$$\tilde{J}_1\leq\left(\int\limits_0^1 g(r)^q dr\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^1(1-r)^\gamma\left(\int\limits_0^r(1-u)^\alpha T(u,f)du\right)^p dr\right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда

$$\tilde{J}_1\leq\left(\int\limits_0^1(1-r)^\gamma\left(\int\limits_0^r(1-u)^\alpha T(u,f)du\right)^p dr\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Применяя теперь неравенство Харди (см. [8, с. 296]), получаем:

$$J_1\leq\int\limits_0^1 T^p(r,f)(1-r)^{(\alpha+1)p+\gamma}dr. \tag{14}$$

В качестве функции f рассмотрим произведение М. Джрбашяна $\pi_\beta(z,z_k)$, где $\beta>\alpha+1+\frac{\gamma+1}{p}$. При указанном выборе параметра β произведение $\pi_\beta(z,z_k)\in S^p_{(\alpha+1)p+\gamma}$ (см. [3, с. 1433]). Поэтому из оценок (13), (14) следует, что интегралы J_1, J_2 сходятся. Из неравенства (12) заключаем, что J сходится, то есть $\pi_\beta(z,z_k)\in N^p_{\alpha,\gamma}$ при всех $\beta>\alpha+1+\frac{\gamma+1}{p}$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Из теоремы 1 следует, что всякая функция $f\in N^p_{\alpha,\gamma}$ представима в виде:

$$f(z)=c_\lambda z^\lambda\pi_\beta(z,z_k)\exp(h(z)),$$

где $\exp(h(z))$ - функция из класса $N^p_{\alpha,\gamma}$, не имеющая нулей. Действительно, не ограничивая общности, будем считать, что кратность нуля в точке $z=0$ равна нулю. Так как $\exp(h(z))=\frac{f(z)}{\pi_\beta(z,z_k)}$, то $\exp(h(z))\in N^p_{\alpha,\gamma}$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{\pi_\beta(z,z_k)}\in N^p_{\alpha,\gamma}$. Последнее включение непосредственно следует из соотношения α-равновесия (см. [9, с. 608]):

$$T_\alpha(r,f)=T_\alpha\left(r,\frac{1}{f}\right)+c(\alpha).$$

Докажем теперь, что $h(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\psi(e^{i\theta})d\theta}{(1-e^{-i\theta}z)^{\alpha+\beta'+2}}$. Обозначим через $c_p=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^p$, $u(z)=\Re h(z)$. Так как $\exp(h(z))\in N^p_{\alpha,\gamma}$, то

$$\left(\frac{\alpha+1}{2\pi}\right)^p\int\limits_0^1(1-r)^\gamma\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}r^{-(\alpha+1)}\left(\int\limits_0^r(r-t)^\alpha u(te^{i\varphi})dt\right)^+d\varphi\right)^p dr<+\infty$$

или

$$\int\limits_0^1(1-r)^\gamma\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}r^{-(\alpha+1)}D^{-(\alpha+1)}_{(+)}u(re^{i\varphi})d\varphi\right)^p dr<+\infty, \tag{15}$$

где $D^{-\alpha}$ – оператор интегро-дифференцирования (см. [9, с. 567]). Функция $r^{-(\alpha+1)}D^{-(\alpha+1)}u(re^{i\varphi}) = u_\alpha(re^{i\varphi}) \in h(D)$. Неравенство (15) с учетом введенного обозначения можно переписать в виде:

$$c_p \int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{-\pi}^{\pi} u_\alpha(re^{i\varphi}) d\varphi \right)^p dr < +\infty.$$

Так как $u_\alpha = u_\alpha^+ - u_\alpha^-$, где $u_\alpha^+ = \max(u_\alpha, 0)$, $u_\alpha^- = \max(-u_\alpha, 0)$, то по теореме о среднем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_\alpha(re^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_\alpha^+(re^{i\varphi})d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_\alpha^-(re^{i\varphi})d\varphi = u_\alpha(0),$$

откуда ввиду неравенства

$$(a+b)^p \le 2^p(a^p + b^p),\ \forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ 0 < p < +\infty, \tag{$*$}$$

получим:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} u_\alpha^-(re^{i\varphi})d\varphi \right)^p dr \le 2^p \left(\left(\int_{-\pi}^{\pi} u_\alpha^+(re^{i\varphi})d\varphi \right)^p dr + |u_\alpha(0)|^p \right).$$

Поэтому

$$\int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{-\pi}^{\pi} u_\alpha^-(re^{i\varphi})d\varphi \right)^p dr < +\infty. \tag{16}$$

Далее, $|u_\alpha| = u_\alpha^+ + u_\alpha^-$, поэтому с учетом (15), (16), а также неравенства (*), получим:

$$\int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u_\alpha(re^{i\varphi})|d\varphi \right)^p dr < +\infty.$$

То есть

$$\int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{-\pi}^{\pi} r^{-(\alpha+1)}|D^{-(\alpha+1)}u(re^{i\varphi})|d\varphi \right)^p dr < +\infty.$$

Учитывая ограниченность оператора гармонического сопряжения в пространстве L^p_γ при всех $0 < p < +\infty$, (см. [3]), получаем:

$$\int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{-\pi}^{\pi} r^{-(\alpha+1)}|D^{-(\alpha+1)}h(re^{i\varphi})|d\varphi \right)^p dr < +\infty. \tag{17}$$

Пусть

$$\psi(z) = D^{-\beta'}h_\alpha(z) = \beta' \int_0^1 (1-s)^{\beta'-1} h_\alpha(sz)ds,\ z \in D, \tag{18}$$

где $h_\alpha(z) = D^{-(\alpha+1)}h(z)$. Очевидно, что $\psi \in H(D)$. Докажем, что $\psi \in H^1$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(re^{i\varphi})|d\varphi \le \beta' \int_0^1 (1-s)^{\beta'-1} \int_{-\pi}^{\pi} |h_\alpha(sre^{i\varphi})|d\varphi ds.$$

Из (17) получаем:

$$\int_R^1 (1-r)^\gamma r^{-(\alpha+1)p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr \to 0, R \to 1-0.$$

Поэтому $\int_{-\pi}^{\pi} |h_\alpha(Re^{i\varphi})| d\varphi \le \frac{c}{(1-R)^{\frac{\gamma+1}{p}}}$. А значит,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(re^{i\varphi})| d\varphi \le \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta'-1}}{(1-sr)^{\frac{\gamma+1}{p}}} ds \le \frac{c}{\beta' - \frac{\gamma+1}{p}}.$$

По условию $\beta' > \frac{\gamma+1}{p}$, поэтому $\psi \in H^1$.

Так как $\psi \in H^1$, то ψ представима в виде интеграла Коши:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})}{(1-e^{-i\theta}z)} d\theta. \tag{19}$$

С другой стороны, с учетом представления (18), $\psi(z) = D^{-\beta'}(D^{-(\alpha+1)}h(z))$, откуда согласно свойству интегро-дифференциальных операторов, получаем $\psi(z) = D^{-(\alpha+\beta'+1)}h(z)$. Применяя обратный оператор к функции $\psi(z)$, будем иметь:

$$h(z) = D^{(\alpha+\beta'+1)}\psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})d\theta}{(1-e^{-i\theta}z)^{\alpha+\beta'+2}}, \ z \in D,$$

где $\psi \in H^1$, $\beta' > \frac{\gamma+1}{p}$.

Докажем теперь, что $\psi \in B^s_{1,p}$, где $s = \beta' - \frac{\gamma+1}{p}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 < s < 2$.

Неравенство (17) с учетом введенных обозначений в (18) можно переписать в виде:

$$\int_0^1 (1-r)^\gamma r^{-(\alpha+1)p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |D^{\beta'}\psi(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr < +\infty.$$

Принимая во внимание теперь представление (19), будем иметь:

$$\int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})d\theta}{(1-e^{-i\theta}z)^{\beta'+1}} \right| d\varphi \right)^p dr < +\infty,$$

где $\psi \in H^1$, $\beta' > \frac{\gamma+1}{p}$.

Как установлено в [3, c.1437], в этом случае функция $\psi \in B^s_{1,p}$, где $s = \beta' - \frac{\gamma+1}{p}$. Итак, импликация 1) $\Rightarrow$ 2) установлена.

Перейдем к доказательству импликации 2) $\Rightarrow$ 1). Учитывая теорему 1, для этого достаточно показать, что функция $h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})d\theta}{(1-e^{-i\theta}z)^{\alpha+\beta'+2}} \in N^p_{\alpha,\gamma}$, где $\psi \in B^s_{1,p}$, $s = \beta' - \frac{\gamma+1}{p}$. Доказательство принадлежности функции $h(z)$

рассматриваемому классу с учетом вышеизложенных замечаний сводится к доказательству сходимости интеграла

$$\int_0^1 (1-r)^\gamma \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr < +\infty, \tag{20}$$

где $h_\alpha(z) = D^{-(\alpha+1)}h(z) = D^{\beta'}\psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})d\theta}{(1-e^{-i\theta}z)^{\beta'+1}}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 < \beta' - \frac{\gamma+1}{p} < 2$.

Оценка (20) при выбранных ограничениях на β' и s установлена в работе Ф.А. Шамояна (см. [3, с. 1440]).

Теорема 2 доказана полностью.

Работа выполнена под научным руководством Ф.А. Шамояна.

Список литературы

[1] Р. Неванлинна, *Однозначные аналитические функции* (пер. с нем), ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1941.

[2] Ф.А. Шамоян, *Факторизационная теорема М.М. Джрбашяна и характеризация нулей аналитических функций с мажорантой конечного роста*, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **13**:5-6 (1978), 405–422. MR0541789

[3] Ф.А. Шамоян, *Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций*, Сиб. мат. журн., **40:6** (1999), 1422–1440. MR1741095

[4] М.М. Джрбашян, *О параметрическом представлении некоторых классов мероморфных функций в единичном круге*, Докл. АН СССР., **157:5** (1964), 1024–1027. MR0168764

[5] Ф.А. Шамоян, *Несколько замечаний к параметрическому представлению классов Неванлинны–Джрбашяна*, Матем. заметки, **52:1** (1992), 128—140. MR1187723

[6] Ф.А. Шамоян, Е.Н. Шубабко, *Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций*, РИО БГУ, Брянск, 2009.

[7] М.М. Джрбашян, *К проблеме представимости аналитических функций*, Сообщ. Института матем. и механики АН Арм. ССР., **2** (1948), 3-–40.

[8] Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, Гос. изд. иностр. лит., Москва, 1948.

[9] М.М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, ГИТТЛ, Москва, 1966. MR0209472

Евгения Геннадьевна Родикова
Брянский государственный университет имени акад. И.Г. Петровского,
ул. Бежицкая, 14,
241036 Россия, г.Брянск
E-mail address: evheny@yandex.ru