S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 567–604 (2014) УДК 512.532.2
MSC 20M07

ТРИ ОСЛАБЛЕННЫХ ВАРИАНТА КОНГРУЭНЦ-ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

Б.М. ВЕРНИКОВ, В.Ю. ШАПРЫНСКИЙ

Abstract. Congruences α and β on an algebra A are called 2.5-permutable if the join of α and β in the lattice of congruences on A coincides with the set-theoretical union of the relations $\alpha\beta$ and $\beta\alpha$. A semigroup variety $\mathcal{V}$ is called almost fi-permutable [almost weakly fi-permutable, almost fi-2.5-permutable] if any two fully invariant congruences on a $\mathcal{V}$-free object S permute [weakly permute, 2.5-permute] whenever these congruences are contained in the least semilattice congruence on S. We completely determine all almost fi-permutable varieties, all almost fi-2.5-permutable varieties, and almost weakly fi-permutable varieties under the additional assumption that all nilsemigroups in a variety are semigroups with zero multiplication. The first and the third of the corresponding results correct some gaps in two previous papers.

Keywords: semigroup, variety, free object of a variety, fully invariant congruence, permutability, weak permutability, 2.5-permutability.

1. Введение и формулировки результатов

Хорошо известно, что выполнение тождеств в решетках многообразий универсальных алгебр тесно связано с мультипликативными свойствами вполне

Vernikov, B.M., Shaprynskiĭ, V.Yu., Three weaker variants of congruence permutability for semigroup varieties.

Поддержано в рамках проекта повышения конкурентоспособности (Соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, №02.A03.21.0006), грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-5161.2014.1) и РФФИ (грант 14-01-00524).

Поступила 24 декабря 2013 г., опубликована 27 июля 2014 г.

инвариантных конгруэнций на свободных алгебрах многообразий. Чтобы сформулировать эту мысль более точно, введем необходимые определения и обозначения.

Пусть α и β — конгруэнции на одной и той же алгебре A, а n — натуральное число. Индукцией по n определим отношение $\alpha \circ_n \beta$ на A, полагая $\alpha \circ_1 \beta = \alpha$, а если $n > 1$, то $\alpha \circ_n \beta = (\alpha \circ_{n-1} \beta)\gamma$, где $\gamma = \beta$, если n четно, и $\gamma = \alpha$ если n нечетно. Конгруэнции α и β называются *n-перестановочными*, если $\alpha \circ_n \beta = \beta \circ_n \alpha$. При $n = 2$ получаем равенство $\alpha\beta = \beta\alpha$, т. е. обычную перестановочность, а 3-перестановочные конгруэнции, т. е. конгруэнции, удовлетворяющие равенству $\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta$, принято называть *слабо перестановочными*. Универсальная алгебра называется *конгруэнц-n-перестановочной*, если любые две ее конгруэнции n-перестановочны. Многообразие, все алгебры которого конгруэнц-n-перестановочны, также называется *конгруэнц-n-перестановочным*. При $n = 2$ [соответственно $n = 3$] конгруэнц-n-перестановочные алгебры и многообразия называются [*слабо*] *конгруэнц-перестановочными*. В силу классических результатов Йонссона (см., например, [15, раздел V.4]), всякое конгруэнц-перестановочное многообразие имеет дезаргову решетку подмногообразий, а у всякого слабо конгруэнц-перестановочного многообразия решетка подмногообразий модулярна. В [17] показано, что конгруэнц-n-перестановочность многообразия влечет наличие нетривиального тождества в решетке его подмногообразий (при любом n).

Однако в случае многообразий полугрупп мультипликативные ограничения, накладываемые на все конгруэнции всех полугрупп из многообразия, оказываются слишком жесткими и не представляют интереса с точки зрения теории полугрупп. А именно, оказывается, что многообразие полугрупп конгруэнц-n-перестановочно тогда и только тогда, когда оно является многообразием периодических групп (при $n = 2$ это доказано в [24], при $n = 3$ легко вытекает из [16, теорема 1.2(iii)], а при произвольном n установлено в [17, следствие 0]).

Ситуация становится намного более интересной, если накладывать мультипликативные ограничения не на все, а только на вполне инвариантные конгруэнции, и не на всех полугруппах данного многообразия, а только на его свободных объектах. При этом, с одной стороны, в полном объеме сохраняются связи с тождествами в решетках многообразий, а с другой — возникают обширные и важные классы многообразий. Более того, оказывается, что мультипликативные ограничения естественно накладывать не на все вполне инвариантные конгруэнции полугрупп, свободных в многообразиях, а только на те из них, которые являются *подполурешеточными*, т. е. содержатся в наименьшей полурешеточной конгруэнции (*наименьшая полурешеточная конгруэнция* на полугруппе S — это наименьшая конгруэнция на S, фактор по которой является полурешеткой). Ограничения такого типа с успехом применялись для изучения тождеств в решетках многообразий полугрупп в работах [19, 21] и некоторых других. В частности, именно на этом пути в двух указанных работах была доказана дезарговость решетки всех *вполне регулярных* многообразий полугрупп (т. е. многообразий, состоящих из *вполне регулярных* полугрупп — объединений групп).

Пусть α и β — конгруэнции на некоторой алгебре A. Через $\alpha\vee\beta$ обозначается объединение α и β в решетке конгруэнций алгебры A, а через $\cup$ — теоретико-множественное объединение бинарных отношений. Общеизвестно, что

$$\alpha \vee \beta = \alpha \cup \beta \cup \alpha\beta \cup \beta\alpha \cup \alpha\beta\alpha \cup \beta\alpha\beta \cup \cdots \cup \alpha \circ_n \beta \cup \beta \circ_n \alpha \cup \cdots . \tag{1.1}$$

Очевидно, что алгебра A конгруэнц-n-перестановочна тогда и только тогда, когда $\alpha \vee \beta = \alpha \circ_n \beta$ для любых двух конгруэнций α и β на A. С учетом равенства (1.1) представляется естественным рассмотрение алгебр, в которых любые две конгруэнции α и β удовлетворяют равенству

$$\alpha \vee \beta = \alpha \circ_n \beta \cup \beta \circ_n \alpha. \tag{1.2}$$

Ясно, что это ограничение слабее конгруэнц-n-перестановочности, но сильнее конгруэнц-$(n+1)$-перестановочности. Исходя из этого, мы называем конгруэнции α и β со свойством (1.2) *n.5-перестановочными*. В частности, конгруэнции α и β *2.5-перестановочны*, если $\alpha \vee \beta = \alpha\beta \cup \beta\alpha$, и *1.5-перестановочны*, если $\alpha \vee \beta = \alpha \cup \beta$.

Как обычно, мы обозначаем через $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел. Положим

$$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{n + 0.5 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Пусть $r \in \overline{\mathbb{N}}$. Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ называется *[почти] fi-r-перестановочным*, если на любой полугруппе, свободной в $\mathcal{V}$, любые две [подполурешеточные] вполне инвариантные конгруэнции r-перестановочны. При $r = 2$ [почти] fi-r-перестановочные многообразия называются просто *[почти] fi-перестановочными*, а при $r = 3$ — *[почти] слабо fi-перестановочными*. Полное описание fi-1.5-перестановочных, почти fi-1.5-перестановочных, fi-перестановочных и fi-2.5-перестановочных многообразий полугрупп получено в работах [27], [6], [28] и [3] соответственно. Слабо fi-перестановочные многообразия в некотором обширном частном случае описаны в [26].

Помимо результатов, упомянутых в предыдущем абзаце, в [29] было предложено описание всех почти fi-перестановочных многообразий, а в [4] — описание почти слабо fi-перестановочных многообразий в некотором обширном частном случае. Однако недавно вторым автором было замечено, что эти два результата неверны. В данной работе мы даем полное описание почти fi-2.5-перестановочных многообразий полугрупп и, попутно, исправляем указанные выше ошибки. Чтобы сформулировать соответствующие результаты, нам понадобятся некоторые определения и обозначения.

Как обычно, мы записываем пару тождеств вида $wx = xw = w$, где w — слово, а x — буква, не входящая в запись w, в виде символического тождества $w = 0$. Эта запись оправдана, поскольку указанная пара тождеств выполнена в полугруппе S тогда и только тогда, когда S содержит нуль 0 и все значения слова w в S равны 0. Мы будем ссылаться на выражения вида $w = 0$ как на обычные тождества. Через $\mathrm{var}\,\Sigma$ обозначается многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ. Положим

$\mathcal{A}_n = \mathrm{var}\,\{x^n y = y,\ xy = yx\}$ для произвольного натурального n,

$\mathcal{C} = \mathrm{var}\,\{x^2 = x^3,\ xy = yx\}$,

$\mathcal{LRB} = \mathrm{var}\,\{x = x^2,\ xyx = xy\}$,

$\mathcal{P} = \mathrm{var}\,\{xy = x^2 y,\ x^2 y^2 = y^2 x^2\}$,

$$\mathcal{RRB} = \text{var}\,\{x = x^2,\, xyx = yx\},$$
$$\mathcal{SL} = \text{var}\,\{x = x^2,\, xy = yx\},$$
$$\mathcal{SLZ} = \text{var}\,\{xyz = xy\},$$
$$\mathcal{SRZ} = \text{var}\,\{xyz = yz\},$$
$$\mathcal{ZM} = \text{var}\,\{xy = 0\}.$$

Отметим, что $\mathcal{A}_n$ — многообразие всех абелевых групп, экспонента которых делит n. Если $\mathcal{X}$ — многообразие полугрупп, что через $\overleftarrow{\mathcal{X}}$ обозначается многообразие, *двойственное к* $\mathcal{X}$ (т. е. многообразие, состоящее из полугрупп, антиизоморфных полугруппам из $\mathcal{X}$). Если π — перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, то тождество

$$x_1x_2\cdots x_n = x_{1\pi}x_{2\pi}\cdots x_{n\pi}$$

обозначается через $p_n[\pi]$. В случае, когда перестановка π нетривиальна, это тождество называется *перестановочным*; число n называется *длиной* тождества $p_n[\pi]$. Мы будем относить прилагательное, обозначающее некоторое свойство, присущее всем полугруппам данного многообразия, и ко всему многообразию; именно в этом смысле мы будем говорить о вполне регулярных, вполне простых, периодических многообразиях, нильмногообразиях и т.п. Многообразие $\mathcal{V}$ называется *многообразием полугрупп с вполне регулярным* [*идемпотентным*] *квадратом*, если квадрат любой полугруппы из $\mathcal{V}$ является вполне регулярной [идемпотентной] полугруппой.

Первым основным результатом работы является

Теорема 1.1. *Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ почти fi-2.5-перестановочно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) *$\mathcal{V}$ — вполне простое многообразие;*
2) *$\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом такое, что $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{V}$ и*

$$\mathcal{LRB} \vee \mathcal{SLZ},\, \mathcal{RRB} \vee \mathcal{SRZ} \nsubseteq \mathcal{V}; \tag{1.3}$$

3) *$\mathcal{V}$ совпадает с одним из многообразий $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$;*
4) *$\mathcal{V} = \mathcal{A}_n \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $n > 1$, а $\mathcal{N}$ удовлетворяет перестановочному тождеству длины 3 и тождествам*

$$x^2 = xyx = 0; \tag{1.4}$$

5) *$\mathcal{V} = \mathcal{C} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ удовлетворяет перестановочному тождеству длины 3 и тождествам*

$$x^2y = xyx = yx^2 = 0; \tag{1.5}$$

6) *$\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из следующих систем тождеств:*

$$p_3[\pi],\, x^2y = xyx = yx^2,\, x^3yz = xy^3z = x^2y^2z^2,\, x^3yzt = 0, \tag{1.6}$$
$$p_3[\pi],\, x^2y = xyx = yx^2,\, x^3yz = xy^3z = 0, \tag{1.7}$$
$$p_3[\pi],\, x^2y = xyx = yx^2,\, x^3yz = xy^3z,\, x^2y^2z^2 = x^3yzt = 0, \tag{1.8}$$
$$p_3[\pi],\, x^2y = xyx = yx^2,\, x^2y^2z = xy^2z^2,\, x^2y^2zt = 0, \tag{1.9}$$
$$p_3[\pi],\, x^2y = xyx = yx^2,\, x^3yz = xy^2z^2,\, x^2y^2z^2 = 0, \tag{1.10}$$

$$p_3[\pi],\ x^2y = xyx,\ xy^2 = yx^2,\ xyz^2 = 0, \tag{1.11}$$

$$p_3[\pi],\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = yxy,\ x^2yz = 0, \tag{1.12}$$

$$p_3[\pi],\ x^2y = yxy,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = xyz^2 = 0, \tag{1.13}$$

$$p_3[\pi],\ x^2y = xy^2,\ xyx = yxy,\ x^2yz = xyzx = 0, \tag{1.14}$$

$$p_3[\pi],\ x^2y = yxy = yx^2,\ xyxz = 0, \tag{1.15}$$

$$p_3[\pi],\ xy^2 = 0, \tag{1.16}$$

$$p_3[\pi],\ x^2y = yxy = xy^2,\ x^2yz = xyxz = 0, \tag{1.17}$$

$$p_3[\pi],\ xyx = 0, \tag{1.18}$$

$$p_3[\pi],\ x^2y = 0, \tag{1.19}$$

$$xyz = yxz,\ x^2y = 0,\ xyx = yxy, \tag{1.20}$$

$$xyz = zyx,\ x^2y = y^2x,\ xy^2 = xyx,\ x^2yz = xyzy = 0, \tag{1.21}$$

$$xyz = zyx,\ xyx = yxy,\ xyzx = 0, \tag{1.22}$$

$$xyz = zyx,\ x^2y = y^2x,\ xyx = 0, \tag{1.23}$$

$$xyz = zyx,\ xy^2 = yx^2,\ xyx = 0, \tag{1.24}$$

$$xyz = xzy,\ x^2y = xyx = xy^2,\ x^2yz = 0, \tag{1.25}$$

$$xyz = xzy,\ xy^2 = 0,\ xyx = yxy, \tag{1.26}$$

где

- *в системах* (1.6)–(1.12) $\pi \in \{(12),(13),(23),(123)\}$,
- *в системах* (1.13) *и* (1.14) $\pi \in \{(12),(13),(23)\}$,
- *в системах* (1.15) *и* (1.16) $\pi \in \{(12),(13)\}$,
- *в системах* (1.17) *и* (1.18) $\pi \in \{(12),(23)\}$,
- *в системе* (1.19) $\pi \in \{(13),(23)\}$;

7) $\mathcal{V}$ *удовлетворяет*
- *либо системе тождеств* (1.16) *при* $\pi \in \{(12),(23)\}$,
- *либо системе тождеств* (1.18) *при* $\pi = (13)$,
- *либо системе тождеств* (1.19) *при* $\pi \in \{(12),(13),(23)\}$,
- *либо одной из следующих систем тождеств:*

$$p_3[\pi],\ x^2y = xy^2,\ x^2yz = 0, \tag{1.27}$$

$$p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x^3y = 0, \tag{1.28}$$

$$p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x^2y^2 = 0, \tag{1.29}$$

$$p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x^3y = x^2y^2,\ x^2y^2z = 0, \tag{1.30}$$

$$xyz = zyx,\ x^2y = yxy,\ x^2yz = 0, \tag{1.31}$$

$$xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x^3y = 0, \tag{1.32}$$

$$xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x^2y^2 = 0, \tag{1.33}$$

$$xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x^3y = x^2y^2,\ x^2y^2z = 0, \tag{1.34}$$

$$xyz = yzx,\ x^3y = 0, \tag{1.35}$$

$$xyz = yzx,\ x^2y^2 = 0, \tag{1.36}$$

$$xyz = yzx,\ x^3y = x^2y^2,\ x^2y^2z = 0, \tag{1.37}$$

$$p_3[\pi],\ x^2y = y^2x,\ xyzt = 0, \tag{1.38}$$

$$p_3[\pi],\ xy^2 = yx^2,\ xyzt = 0, \tag{1.39}$$

$$p_3[\pi],\ x^2y = yx^2,\ x_1x_2x_3x_4x_5 = 0, \tag{1.40}$$

$$xyz = zyx,\ xyx = yxy,\ xyzt = 0, \tag{1.41}$$

$$xyz = zyx,\ x^2y = xyx,\ x_1x_2x_3x_4x_5 = 0, \tag{1.42}$$

$$xyz = yzx,\ x_1x_2x_3x_4x_5 = 0, \tag{1.43}$$

где

- *в системах* (1.27)–(1.30), (1.39) *и* (1.40) $\pi \in \{(12), (23)\}$,
- *в системе* (1.38) $\pi \in \{(12), (13), (23)\}$.

В следующей теореме исправлена неточность в основном результате работы [29].

Теорема 1.2. *Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ почти fi-перестановочно тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет либо одному из условий* 3) *и* 5) *теоремы* 1.1*, либо одному из следующих условий:*

1) *$\mathcal{V}$ — вполне регулярное многообразие;*
2) *$\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп с идемпотентным квадратом такое, что $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{V}$ и выполнено условие* (1.3)*;*
3) *$\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ удовлетворяет*
   - *либо системе тождеств* (1.16) *при* $\pi \in \{(12), (23)\}$,
   - *либо системе тождеств* (1.18) *при* $\pi = (13)$,
   - *либо системе тождеств* (1.19) *при* $\pi \in \{(12), (13), (23)\}$,
   - *либо одной из систем тождеств* (1.27)–(1.30) *при* $\pi \in \{(12), (23)\}$,
   - *либо одной из систем тождеств* (1.31)–(1.37)*;*
4) *$\mathcal{V}$ удовлетворяет одной из следующих систем тождеств:*

$$xyz = 0, \tag{1.44}$$

$$p_3[\pi],\ x^2 = 0, \tag{1.45}$$

$$xyz = zyx,\ x^2 = xyx = 0, \tag{1.46}$$

$$xyz = zyx,\ x^2 = xyzt = 0, \tag{1.47}$$

где в системе (1.45) $\pi \in \{(12), (23), (123)\}$.

Переходя к почти слабо fi-перестановочным многообразиям, отметим следующие обстоятельства:

- в диссертации [5] показано, что нильмногообразие полугрупп слабо fi-перестановочно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет одной из 240 указанных в [5, теорема 17] систем тождеств; как формулировка, так и доказательство этого результата весьма громоздки;
- при переходе от fi-r-перестановочных к почти fi-r-перестановочным многообразиям при $r = 1.5, 2, 2.5$ число участвующих в описании систем тождеств, задающих нильмногообразия, значительно возрастает — ср. основные результаты работ [27] и [6] при $r = 1.5$, основные результаты работ [28] и [29] при $r = 2$, формулируемое ниже предложение 2.1,

являющееся основным результатом работы [3], и теорему 1.1 данной работы при $r = 2.5$.

Это делает обоснованным предположение о том, что полное описание почти слабо fi-перестановочных многообразий, если бы его удалось получить, оказалось бы чрезвычайно громоздким (как по формулировке, так и по доказательству) и трудным для восприятия, причем чтобы избежать этого, надо вводить ограничения на нильподмногообразия рассматриваемых многообразий. Именно поэтому в [4] задача описания почти слабо fi-перестановочных многообразий была рассмотрена только для многообразий, в которых все нильполугруппы являются полугруппами с нулевым умножением. Многообразия, обладающие последним свойством, называются *многообразиями ступени* ≤ 2. В следующем результате исправляется неточность, допущенная в основном результате работы [4].

Теорема 1.3. *Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ ступени ≤ 2 почти слабо fi-перестановочно тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет либо одному из условий* 1) *и* 2) *теоремы* 1.1*, либо одному из следующих условий:*

1) $\mathcal{V} = \mathcal{A}_n \vee \mathcal{X}$*, где n — натуральное число, а $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$;*
2) $\mathcal{V} = \mathcal{ZM}$.

Неточности в основных результатах работ [4] и [29] объясняются ошибкой, допущенной в работе [32]. Теорема 3.1 этой работы утверждает, что всякое многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом, содержащее $\mathcal{SL}$, почти слабо fi-перестановочно. Как заметил недавно второй автор, эта теорема неверна. В ее доказательстве, приведенном в [32], рассматриваются вполне инвариантные конгруэнции α и β на абсолютно свободной полугруппе, отвечающие некоторым многообразиям полугрупп с вполне регулярным квадратом $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, содержащим $\mathcal{SL}$. При этом перебираются семь случаев в зависимости от того, какие многообразия содержатся или не содержатся в многообразиях $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Но этот перебор неполон: пропущен случай, когда (с точностью до двойственности) одно из многообразий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ содержит $\mathcal{LRB}$, но не содержит $\mathcal{SLZ}$, а другое содержит $\mathcal{SLZ}$, но не содержит $\mathcal{LRB}$ (в [32] многообразие $\mathcal{SLZ}$ обозначается через $\mathcal{N}$). Как видно из доказываемой ниже в данной работе леммы 3.1, этот пропущенный случай как раз и доставляет контрпример к обсуждаемому утверждению[1]. Это неверное утверждение стало частью основного результата работы [4]. Оно же привело к появлению в работе [29] предложения 3.3, которое ошибочно утверждает, что всякое многообразие полугрупп с идемпотентным квадратом, содержащее $\mathcal{SL}$, почти fi-перестановочно. Доказательство этого утверждения содержит ссылку на указанное выше неверное доказательство теоремы 3.1 из [32]. Указанное утверждение из работы [29] является частью основного результата этой работы. Других ошибок в [4] и [29] нет. Чтобы сделать основные результаты этих работ верными, надо в п. 2)

[1]Теорема 3.1 работы [32] играет важную роль в доказательстве основного результата этой работы, устанавливающего, что решетка всех многообразий полугрупп с вполне регулярным квадратом дезаргова. Как видно из сказанного выше, это доказательство некорректно. Тем не менее, как показал недавно второй автор, сам указанный результат верен. Его корректное доказательство будет опубликовано в другой работе.

теоремы 1 работы [4] и в п. 3) основной теоремы работы [29] дополнительно потребовать, чтобы многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяло условию (1.3).

Из теорем 1.1 и 1.3 немедленно вытекает

Следствие 1.1. *Многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом почти fi-2.5-перестановочно тогда и только тогда, когда оно почти слабо fi-перестановочно.* □

Исходя из общих соображений, легко понять, что всякое почти fi-1.5-перестановочное [почти fi-перестановочное, почти слабо fi-перестановочное] многообразие полугрупп имеет дистрибутивную [дезаргову, модулярную] решетку подмногообразий. Для почти слабо fi-перестановочных многообразий этот факт в явном виде доказан в [4, лемма 3], а для почти fi-перестановочных и почти fi-1.5-перестановочных многообразий доказательство аналогично (в последнем случае надо учесть, что решетка, представимая 1.5-перестановочными отношениями эквивалентности на некотором множестве, вложима в решетку подмножеств этого множества, и потому дистрибутивна).

Полученные ранее первым автором и М.В. Волковым результаты указывают на феномен, который трудно было предвидеть a priori: в весьма широких классах полугрупповых многообразий дистрибутивность оказывается следствием не только почти fi-1.5-перестановочности, но и почти fi-перестановочности, а fi-2.5-перестановочность вынуждает решетки подмногообразий удовлетворять тождествам весьма близким к дистрибутивности.

Такого рода результаты справедливы для классов многообразий, в том или ином смысле далеких от многообразий периодических групп. К числу последних относятся, в частности, *комбинаторные* многообразия, т. е. многообразия, в которых все группы одноэлементны. Из результатов работы [28] легко вытекает, что комбинаторное fi-перестановочное многообразие имеет дистрибутивную решетку подмногообразий, а из результатов, полученных в [29], легко выводится, что тем же свойством обладают уже комбинаторные почти fi-перестановочные многообразия.

Чтобы перейти к результатам об fi-2.5-перестановочности, введем некоторые обозначения. Как обычно, обозначим через M_3 5-элементную модулярную недистрибутивную решетку, а через $M_{3,3}$ — решетку, изображенную на рис. 1. Многообразия, порожденные решетками M_3 и $M_{3,3}$, обозначим через $\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_{3,3}$ соответственно. Хорошо известно и легко проверяется, что решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{M}_{3,3}$ имеет вид, изображенный на рис. 2, где через $\mathbf{T}$ и $\mathbf{DIS}$ обозначены тривиальное многообразие решеток и многообразие всех дистрибутивных решеток соответственно.

В работе [3] доказано, что решетка подмногообразий комбинаторного fi-2.5-перестановочного многообразия лежит в многообразии $\mathbf{M}_3$. Как мы увидим ниже, из теоремы 1.1 вытекает

Следствие 1.2. *Решетка подмногообразий комбинаторного почти fi-2.5-перестановочного многообразия лежит в $\mathbf{M}_{3,3}$.*

Статья состоит из четырех параграфов. В § 2 собраны необходимые для дальнейшего определения, обозначения и вспомогательные результаты. Необходимость во всех трех теоремах доказывается в § 3, а достаточность — в § 4. В § 3, кроме того, доказывается следствие 1.2.

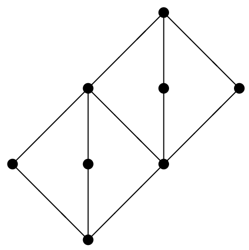

Рис. 1. Решетка $M_{3,3}$

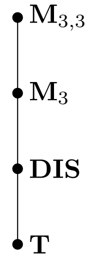

Рис. 2. Решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{M}_{3,3}$

2. Предварительные сведения

2.1. **Тождества некоторых многообразий.** Мы обозначаем через F абсолютно свободную полугруппу счетного ранга с образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Символом $\equiv$ обозначается отношение равенства на полугруппе F. Для всякого слова $u \in F$ через $c(u)$ обозначается *содержание* слова u, т. е. множество всех букв, входящих в запись u, через $h(u)$ [соответственно $t(u)$] — первая [последняя] буква слова u, через $\ell(u)$ — длина u, а через $\ell_x(u)$ [соответственно $\ell_i(u)$] — число вхождений буквы x [соответственно x_i] в u. Если u — слово длины ≥ 2, то через $h^2(u)$ обозначается его префикс длины 2. Если же u является буквой, положим $h^2(u) \equiv u$. Буква x называется *простой* [*кратной*] *в слове* u, если $\ell_x(u) = 1$ [соответственно $\ell_x(u) > 1$]. Если $u \in F$, то *словом левых вхождений* слова u называется слово, которое получится, если, читая u слева направо, оставлять лишь первое вхождение каждой буквы. Слово левых вхождений слова u обозначается через $\langle u \rangle_L$.

Нам понадобятся критерии равенства слов в нескольких конкретных многообразиях. Положим $\mathcal{LZ} = \operatorname{var}\{xy = x\}$. Утверждения (i), (ii), (iv), (vi) и (vii) следующей леммы хорошо известны и легко проверяются, утверждение (iii) можно извлечь, например, из [20], а утверждение (v) легко вытекает из [12, лемма 7].

Лемма 2.1. *Тождество $v = w$ выполнено:*

(i) *в многообразии $\mathcal{A}_n$ тогда и только тогда, когда $\ell_x(v) - \ell_x(w)$ делится на n для всякой буквы x;*
(ii) *в многообразии $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $c(v) = c(w)$ и всякая буква либо проста и в v, и в w, либо кратна и в v, и в w;*
(iii) *в многообразии $\mathcal{LRB}$ тогда и только тогда, когда $\langle v \rangle_L \equiv \langle w \rangle_L$;*
(iv) *в многообразии $\mathcal{LZ}$ тогда и только тогда, когда $h(v) \equiv h(w)$;*
(v) *в многообразии $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $c(v) = c(w)$ и либо $t(v) \equiv t(w)$ и $\ell_{t(v)}(v) = \ell_{t(w)}(w) = 1$, либо $\ell_{t(v)}(v), \ell_{t(w)}(w) > 1$;*
(vi) *в многообразии $\mathcal{SL}$ тогда и только тогда, когда $c(v) = c(w)$;*
(vii) *в многообразии $\mathcal{SLZ}$ тогда и только тогда, когда $h^2(v) \equiv h^2(w)$.* □

Многообразие полугрупп называется *локально нильпотентным*, если всякая его конечно порожденная полугруппа нильпотентна. Ясно, что всякое локально нильпотентное многообразие является нильмногообразием. Будем говорить, что слово u *делит* слово v, и писать $u \lhd v$, если $v \equiv a\xi(u)b$ для некоторых (возможно, пустых) слов a и b и некоторого эндоморфизма ξ на F. Утверждения (i) и (ii) следующей леммы проверяются легко, а утверждение (iii) доказано в [29, лемма 1.3(iii)].

Лемма 2.2. *Пусть $\mathcal{V}$ — нильмногообразие полугрупп.*

(i) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $v = w$ такому, что $c(v) \neq c(w)$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также тождеству $v = 0$.*

(ii) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $v = avb$, где a и b — (возможно, пустые) слова такие, что слово ab непусто, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также тождеству $v = 0$.*

(iii) *Если $\mathcal{V}$ локально нильпотентно и удовлетворяет тождеству $v = w$ такому, что $\ell(v) < \ell(w)$ и $v \lhd w$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также тождеству $v = 0$.* □

Ссылки на лемму 2.2(iii) всюду в дальнейшем будут делаться в ситуации, когда нильмногообразие удовлетворяет некоторому перестановочному тождеству. Эти ссылки корректны, поскольку, как хорошо известно и легко проверяется, нильмногообразие, удовлетворяющее перестановочному тождеству, локально нильпотентно.

2.2. **Группы перестановок и их подгруппы.** Если A — непустое множество, то через $\mathbf{S}_A$ обозначается группа перестановок на A. В случае, когда $A = \{1, 2, \dots, n\}$, мы будем писать $\mathbf{S}_n$ вместо $\mathbf{S}_{\{1,2,\dots,n\}}$. Для всякого $1 \leq k \leq n$ положим

$$\mathrm{Stab}_n(k) = \{\pi \in \mathbf{S}_n \mid k\pi = k\}.$$

Для всякого многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ и всякого натурального n положим

$$\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}) = \bigl\{\pi \in \mathbf{S}_n \mid \mathcal{V} \text{ удовлетворяет тождеству } p_n[\pi]\bigr\}.$$

Ясно, что $\mathrm{Stab}_n(k)$ и $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ — подгруппы в $\mathbf{S}_n$. Следующее утверждение вытекает из результатов работы [23].

Лемма 2.3. *Предположим, что многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $p_3[\pi]$ и $n \geq 4$.*

(i) *Если $\pi = (12)$, то $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}) \supseteq \mathrm{Stab}_n(n)$.*

(ii) *Если $\pi = (23)$, то $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}) \supseteq \mathrm{Stab}_n(1)$.*

(iii) *Если π — одна из перестановок (13) и (123), то $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}) = \mathbf{S}_n$.* □

Подгруппа группы $\mathbf{S}_n$, порожденная перестановкой $\pi \in \mathbf{S}_n$, обозначается через $\mathrm{gr}\{\pi\}$. В следующей лемме, формулируемой для удобства ссылок, приводятся два хорошо известных факта.

Лемма 2.4. *Пусть π — нетривиальная перестановка из $\mathbf{S}_3$, n — натуральное число такое, что $n \geq 4$, и $1 \leq k \leq n$. Тогда:*

(i) *$\mathrm{gr}\{\pi\}$ — максимальная собственная подгруппа в группе $\mathbf{S}_3$;*

(ii) *$\mathrm{Stab}_n(k)$ — максимальная собственная подгруппа в группе $\mathbf{S}_n$.* □

Решетка подгрупп группы G обозначается через $\mathrm{Sub}(G)$. В формулировке следующей леммы символом $\vee$ обозначается объединение в решетке $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_n)$.

Лемма 2.5. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет некоторому перестановочному тождеству длины 3, $n \geq 3$, $\pi \in \mathbf{S}_n$ и $\pi \notin \mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$, то $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}) \vee \mathrm{gr}\{\pi\} = \mathbf{S}_n$.*

Доказательство. Из условия вытекает, что группа $\mathrm{Perm}_3(\mathcal{V})$ нетривиальна. Поэтому при $n = 3$ достаточно сослаться на лемму 2.4(i). Если же $n \geq 4$, то требуемое равенство вытекает из лемм 2.3 и 2.4(ii). □

2.3. **Некоторые факты о [почти] fi-r-перестановочных многообразиях и r-перестановочных отношениях эквивалентности.** Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ не содержит многообразия $\mathcal{SL}$ и $S \in \mathcal{V}$, то наименьшая полурешеточная конгруэнция на S совпадает с универсальным отношением. Следовательно, справедлива следующая

Лемма 2.6. *Пусть $r \in \overline{\mathbb{N}}$, а $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп, не содержащее $\mathcal{SL}$. Многообразие $\mathcal{V}$ почти fi-r-перестановочно тогда и только тогда, когда оно fi-r-перестановочно.* □

Следующее утверждение является основным результатом работы [3].

Предложение 2.1. *Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ fi-2.5-перестановочно тогда и только тогда, когда либо $\mathcal{V} = \mathcal{SL}$, либо $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий* 1) *и* 7) *теоремы* 1.1. □

Следующее легко проверяемое утверждение будет в дальнейшем весьма полезным.

Лемма 2.7. *Пусть $r \in \overline{\mathbb{N}}$, а α, β и ν — отношения эквивалентности на множестве S такие, что $\alpha, \beta \supseteq \nu$. Отношения α и β r-перестановочны тогда и только тогда, когда отношения α/ν и β/ν на множестве S/ν r-перестановочны.* □

Как хорошо известно, решетка вполне инвариантных конгруэнций на полугруппе F антиизоморфна решетке всех полугрупповых многообразий. Если x и y — элементы решетки L и $x \leq y$, то через $[x,\, y]$ обозначается интервал решетки L с наименьшим элементом x и наибольшим элементом y. Вполне инвариантная конгруэнция на полугруппе F, отвечающая многообразию $\mathcal{X}$, обозначается через $\sim_{\mathcal{X}}$. Всюду далее мы полагаем $\sigma = \sim_{\mathcal{SL}}$. Из леммы 2.7 вытекает

Следствие 2.1. *Пусть $r \in \overline{\mathbb{N}}$, а $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп, содержащее $\mathcal{SL}$. Многообразие $\mathcal{V}$ почти fi-r-перестановочно тогда и только тогда, когда любые две вполне инвариантные конгруэнции на F из интервала $[\sim_{\mathcal{V}},\, \sigma]$ r-перестановочны.* □

Это следствие позволит нам существенно упростить рассуждения в доказательствах основных результатов работы, поскольку с элементами полугруппы F, т. е. с обычными полугрупповыми словами, как правило, работать гораздо проще, чем с элементами относительно свободных полугрупп.

Следующее утверждение получено независимо в [19] и [21].

Предложение 2.2. *Каждое вполне простое [вполне регулярное] многообразие полугрупп [почти] fi-перестановочно.* □

Как обычно, решетку подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$ будем обозначать через $L(\mathcal{V})$. Следующее утверждение, уже упоминавшееся в § 1, играет важную роль в доказательстве теоремы 1.1.

Предложение 2.3 ([4, лемма 3]). *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ почти слабо fi-перестановочно, то решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна.* □

2.4. **Конгруэнции на G-множествах.** Значительную роль в доказательстве основных результатов работы играют унарные алгебры специального вида, так называемые G-множества. *G-множеством* называется унарная алгебра на множестве A с множеством (унарных) операций G такая, что множество G образует группу перестановок на A (таким образом, G является подгруппой в $\mathbf{S}_A$). G-множество A называется *транзитивным*, если для любых двух элементов $a, b \in A$ существует элемент $g \in G$ такой, что $g(a) = b$. Транзитивное G-подмножество G-множества A называется *орбитой* в A. Следуя [25], мы называем G-множество A *сегрегированным*, если выполнено следующее условие: если B и C — различные орбиты в A, а α — конгруэнция на A, то из того, что $b\,\alpha\,c$ для некоторых $b \in B$ и $c \in C$ вытекает, что $x\,\alpha\,y$ для всех $x, y \in B \cup C$. Следующее утверждение является частным случаем теоремы 3.4 работы [25].

Предложение 2.4. *G-множество конгруэнц-перестановочно тогда и только тогда, когда оно сегрегировано, содержит не более двух орбит и каждая его орбита конгруэнц-перестановочна.* □

Решетка конгруэнций G-множества A обозначается через $\mathrm{Con}(A)$. Для произвольного элемента x G-множества A положим

$$\mathrm{Stab}_A(x) = \{g \in G \mid g(a) = a\}.$$

Очевидно, что $\mathrm{Stab}_A(a)$ — подгруппа в G. Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [18, лемма 4.20]).

Лемма 2.8. *Если A — транзитивное G-множество, то решетка* $\mathrm{Con}(A)$ *изоморфна интервалу* $[\mathrm{Stab}_A(a), G]$ *решетки* $\mathrm{Sub}(G)$*, где a — произвольный элемент из A.* □

2.5. **Нильмногообразия полугрупп и G-множества.** G-множества будут появляться в тех частях доказательства теоремы 1.1, которые связаны с рассмотрением нильмногообразий. Взаимосвязь между G-множествами и строением решетки нильмногообразий полугрупп установлена в работах [8,9]. Здесь мы воспроизводим те конструкции и результаты из этих работ, которые будут использованы ниже. Кроме того, мы доказываем некоторые необходимые для дальнейшего вспомогательные результаты, ранее появлявшиеся только в диссертации [5]. Эти результаты можно рассматривать как некоторые частичные «мультипликативные аналоги» результатов работ [8, 9].

Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп. Если $\mathcal{V}$ не удовлетворяет тождеству $w = 0$, мы будем для краткости писать «$w \neq 0$ в $\mathcal{V}$». Пусть m и n — натуральные числа, причем $m \leq n$. Многообразие $\mathcal{V}$ называется *(n, m)-расщепляемым*, если из выполнимости в этом многообразии тождества $u = v$ такого, что $\ell(u) = n$, $\bigl|c(u)\bigr| = m$ и $\ell(v) > n$, вытекает выполнимость в нем тождества $u = 0$. Если многообразие (n, m)-расщепляемо для всех $n \geq m$, то оно называется *m-однородным.* Наконец, многообразие называется *однородным*, если оно m-однородно для всех m. Иными словами, многообразие однородно, если в нем из всякого тождества $u = v$ такого, что $\ell(u) \neq \ell(v)$, вытекает тождество $u = 0$. Многообразие называется *наследственно (n, m)-расщепляемым*, [*наследственно m-однородным, наследственно однородным*], если все его подмногообразия (n, m)-расщепляемы [m-однородны, однородны]. Легко понять, что всякое наследственно однородное многообразие является нильмногообразием.

Пусть теперь $\mathcal{V}$ — нильмногообразие полугрупп, а m и n — по-прежнему натуральные числа такие, что $m \leq n$. Положим

$$F_{n,m}(\mathcal{V}) = \bigl\{w \in F \mid w \neq 0 \text{ в } \mathcal{V}, \ell(w) = n \text{ и } c(w) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}\bigr\}.$$

Обозначим через $W_{n,m}(\mathcal{V})$ подмножество множества $F_{n,m}(\mathcal{V})$, обладающее следующим свойством: для всякого слова $w \in F_{n,m}(\mathcal{V})$ существует, и притом только одно слово $w^* \in W_{n,m}(\mathcal{V})$ такое, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $w = w^*$. Множества вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$ будем называть *трансверсалями.* Отметим, что если все слова длины n от m букв равны нулю в $\mathcal{V}$, то $F_{n,m}(\mathcal{V}) = \varnothing$, а потому и $W_{n,m}(\mathcal{V}) = \varnothing$. Предположим, что $W_{n,m}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$. Если $w \in F$, $c(w) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ и $\tau \in \mathbb{S}_m$, то через $w\tau$ обозначается образ слова w при автоморфизме полугруппы F, расширяющем отображение $x_i \mapsto x_{i\tau}$; мы предполагаем здесь, что $i\tau = i$ при $i > m$. Ясно, что если $w \in F_{n,m}(\mathcal{V})$ и $\tau \in \mathbb{S}_m$, то $w\tau \in F_{n,m}(\mathcal{V})$, и потому мы имеем право рассматривать слово $(w\tau)^*$. Для всякой перестановки $\tau \in \mathbb{S}_m$ определим унарную операцию τ^* на $W_{n,m}(\mathcal{V})$ правилом $\tau^*(w) \equiv (w\tau)^*$. Утверждение (i) следующей леммы непосредственно вытекает из [8, лемма 1.1], а утверждение (ii) может быть доказано вполне аналогично лемме 2 работы [9].

Лемма 2.9. *Пусть m и n — натуральные числа такие, что $n \geq m$, $\mathcal{V}$ — (n,m)-расщепляемое многообразие полугрупп такое, что $W_{n,m}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, а α — вполне инвариантная конгруэнция на F, отвечающая некоторому подмногообразию многообразия $\mathcal{V}$. Тогда:*

(i) *множество $W_{n,m}(\mathcal{V})$ с набором операций $\{\tau^* \mid \tau \in \mathbf{S}_m\}$ является $\mathbf{S}_m$-множеством;*

(ii) *ограничение конгруэнции α на множество $W_{n,m}(\mathcal{V})$ является конгруэнцией этого $\mathbf{S}_m$-множества.* □

Лемма 2.10. *Пусть $\mathcal{V}$ — нильмногообразие полугрупп, а n — натуральное число. Многообразие $\mathcal{V}$ наследственно $(n,1)$-расщепляемо. Если трансверсаль $W_{n,1}(\mathcal{V})$ непуста, то она транзитивна и конгруэнц-перестановочна.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из пп. (i) и (ii) леммы 2.2, а второе очевидно, поскольку если $W_{n,1}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, то $W_{n,1}(\mathcal{V}) = \{x^n\}$. □

Слово называется *линейным*, если всякая буква входит в него не более одного раза.

Лемма 2.11. *Пусть $\mathcal{V}$ — нильмногообразие полугрупп, удовлетворяющее перестановочному тождеству длины 3, а m — натуральное число. Многообразие $\mathcal{V}$ наследственно (m,m)-расщепляемо. Если трансверсаль $W_{m,m}(\mathcal{V})$ непуста, то она транзитивна и конгруэнц-перестановочна.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из леммы 2.2(iii). Докажем второе. Предположим, что $W_{m,m}(\mathcal{V}) \neq \varnothing$. Всякое слово из $W_{m,m}(\mathcal{V})$ линейно. Отсюда немедленно вытекает, что трансверсаль $W_{m,m}(\mathcal{V})$ транзитивна. Докажем, что $W_{m,m}(\mathcal{V})$ содержит ≤ 2 элементов. Отсюда с очевидностью будет вытекать, что трансверсаль $W_{m,m}(\mathcal{V})$ имеет ≤ 2 конгруэнций, и потому она конгруэнц-перестановочна. Очевидно, что $W_{1,1}(\mathcal{V}) = \{x\}$ и $W_{2,2}(\mathcal{V}) \subseteq \{xy, yx\}$. Пусть теперь $m \geq 3$ и $w \in W_{m,m}(\mathcal{V})$. Ясно, что $\mathrm{Stab}_{W_{m,m}(\mathcal{V})}(w) = \mathrm{Perm}_m(\mathcal{V})$. Из леммы 2.8 вытекает теперь, что решетка $\mathrm{Con}\bigl(W_{m,m}(\mathcal{V})\bigr)$ изоморфна интервалу $\bigl[\mathrm{Perm}_m(\mathcal{V}), \mathbf{S}_m\bigr]$ решетки $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_m)$. Многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству

$p_3[\pi]$ для некоторой нетривиальной перестановки $\pi \in \mathbf{S}_3$. Если $m = 3$, то требуемое заключение вытекает из леммы 2.4(i), а если $m \geq 4$, то достаточно сослаться на леммы 2.3 и 2.4(ii). $\square$

Как показано в [9], трансверсали вида $W_{n,m}(\mathcal{V})$ играют важную роль в описании строения решеток подмногообразий наследственно однородных многообразий. В дальнейшем эта информация нам не понадобится, но для полноты картины воспроизведем соотвествующий результат. Положим $W^0_{n,m}(\mathcal{V}) = W_{n,m}(\mathcal{V}) \cup \{0\}$, где 0 — некий новый элемент, не лежащий в $W_{n,m}(\mathcal{V})$. Для всякого $\tau \in \mathbf{S}_m$ распространим операцию τ^* с $W_{n,m}(\mathcal{V})$ на $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$, положив $\tau^*(0) = 0$. Из леммы 2.9(i) вытекает, что множество $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ с набором операций $\{\tau^* \mid \tau \in \mathbf{S}_m\}$ является $\mathbf{S}_m$-множеством. Такие $\mathbf{S}_m$-множества будем называть 0-*трансверсалями.* Отметим, что все 0-трансверсали непусты, поскольку содержат элемент 0. В [9] показано, что если многообразие $\mathcal{V}$ наследственно однородно, то решетка $L(\mathcal{V})$ антиизоморфна подпрямому произведению решеток конгруэнций всевозможных 0-трансверсалей вида $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$.

В случае же, когда нильмногообразие $\mathcal{V}$ не является наследственно однородным, для описания строения решетки $L(\mathcal{V})$ приходится вводить в рассмотрение некоторые новые $\mathbf{S}_m$-множества, которые определяются во многом аналогично 0-трансверсалям вида $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. Перейдем к их построению. Пусть вновь $\mathcal{V}$ — нильмногообразие полугрупп, а m — натуральное число. Положим

$$F_m(\mathcal{V}) = \bigl\{w \in F \mid w \neq 0 \text{ в } \mathcal{V} \text{ и } c(w) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}\bigr\}.$$

Далее, пусть $W_m(\mathcal{V})$ — подмножество множества $F_m(\mathcal{V})$, обладающее следующим свойством: для всякого слова $w \in F_m(\mathcal{V})$ существует, и притом только одно слово $w^* \in W_m(\mathcal{V})$ такое, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $w = w^*$. Положим $W^0_m(\mathcal{V}) = W_m(\mathcal{V}) \cup \{0\}$. Здесь 0, формально говоря, — произвольный символ, не лежащий в $W_m(\mathcal{V})$. Но нам будет удобно интерпретировать 0 как обычное полугрупповое слово, зависящее от букв $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и равное 0 в многообразии $\mathcal{V}$. Существование такого слова с очевидностью вытекает из того, что $\mathcal{V}$ — нильмногообразие (например, в качестве 0 можно взять слово $x_1^n x_2 \cdots x_m$, где n — ниль-индекс многообразия $\mathcal{V}$). В частности, эта договоренность позволяет нам в дальнейшем использовать выражения типа $w \equiv 0$, где $w \in F$. Множества вида $W_m(\mathcal{V})$ будем называть *большими трансверсалями*, а множества вида $W^0_m(\mathcal{V})$ — *большими* 0-*трансверсалями.* Заметим, что если многообразие $\mathcal{V}$ m-ступенно нильпотентно (и только в этом случае), то $F_m(\mathcal{V}) = \varnothing$, а потому и большая трансверсаль $W_m(\mathcal{V})$ пуста. Но большая 0-трансверсаль всегда непуста, так как в любом случае содержит слово 0. Ясно, что если $w \in F_m(\mathcal{V})$ и $\tau \in \mathbb{S}_m$, то $w\tau \in F_m(\mathcal{V})$, и потому мы имеем право рассматривать слово $(w\tau)^*$. Для всякой перестановки $\tau \in \mathbb{S}_m$ определим унарную операцию τ^* на большой 0-трансверсали $W^0_m(\mathcal{V})$ правилом:

$$\tau^*(w) \equiv \begin{cases} (w\tau)^*, & \text{если } w \in W_m(\mathcal{V}), \\ 0, & \text{если } w \equiv 0. \end{cases}$$

Следующее утверждение, аналогичное лемме 2.9, проверено в [9].

Лемма 2.12. *Пусть m — натуральное число, $\mathcal{V}$ — нильмногообразие полугрупп, а α — вполне инвариантная конгруэнция на F, отвечающая некоторому подмногообразию многообразия $\mathcal{V}$. Тогда:*

(i) *множество* $W_m^0(\mathcal{V})$ *с набором операций* $\{\tau^* \mid \tau \in \mathbf{S}_m\}$ *является* $\mathbf{S}_m$*-множеством;*
(ii) *ограничение конгруэнции* α *на множество* $W_m^0(\mathcal{V})$ *является конгруэнцией этого* $\mathbf{S}_m$*-множества.* □

Если α — вполне инвариантная конгруэнция на F, отвечающая некоторому подмногообразию многообразия $\mathcal{V}$, то ограничение α на $W_m^0(\mathcal{V})$ будет обозначаться через $\alpha_{m,\mathcal{V}}$, а множество всех конгруэнций на $W_m^0(\mathcal{V})$ вида $\alpha_{m,\mathcal{V}}$ — через $C_m(\mathcal{V})$. В работе [9] показано, что, для всякого натурального m, множество вида $C_m(\mathcal{V})$ является подрешеткой решетки $\mathrm{Con}\bigl(W_m^0(\mathcal{V})\bigr)$, а решетка $L(\mathcal{V})$ некоторым вполне определенным (и описанным в [9]) способом вкладывается в антиизоморфную копию подпрямого произведения решеток вида $C_m(\mathcal{V})$. В данной работе эта информация нам не понадобится. Докажем некоторые необходимые для дальнейшего мультипликативные свойства конгруэнций из $C_m(\mathcal{V})$.

Лемма 2.13. *Пусть m и r — натуральные числа, $\mathcal{V}$ — нильмногообразие полугрупп, а α и β — вполне инвариантные конгруэнции на полугруппе F, отвечающие некоторым подмногообразиям многообразия $\mathcal{V}$. Если $u, v \in W_m^0(\mathcal{V})$ и $(u, v) \in \alpha \circ_r \beta$, то $(u, v) \in \alpha_{m,\mathcal{V}} \circ_r \beta_{m,\mathcal{V}}$.*

Доказательство. Существует последовательность слов $u_0, u_1, \dots, u_r \in F$ такая, что $u_0 \equiv u$, $u_r \equiv v$ и, для всякого $i = 0, 1, \dots, r-1$, пара (u_i, u_{i+1}) лежит в α [в β] в случае, когда i [не]четно. Поскольку конгруэнции α и β отвечают некоторым подмногообразиям многообразия $\mathcal{V}$, из того, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет некоторому тождеству $s = t$, вытекает, что $s \,\alpha\, t$ и $s \,\beta\, t$. Это означает, в частности, что мы всегда можем заменить u_i (где $0 \le i \le r$) на слово u_i' такое, что $u_i = u_i'$ в $\mathcal{V}$. Поэтому мы можем считать, что для всякого $i = 0, 1, \dots, r$ найдется натуральное число k_i такое, что $u_i \in W_{k_i}^0(\mathcal{V})$. В частности, для всякого $i = 0, 1, \dots, r$, либо $u_i \equiv 0$, либо $u_i \ne 0$ в $\mathcal{V}$. Если $u \equiv v$, то доказываемое утверждение очевидно. Поэтому мы можем не рассматривать случай, когда $u \equiv v \equiv 0$. Это позволяет без ограничения общности считать, что $u \ne 0$ в $\mathcal{V}$, и потому $u \in W_m(\mathcal{V})$.

Если $u_i \in W_m^0(\mathcal{V})$ для всех $i = 0, 1, \dots, r$, то $(u, v) \in \alpha_{m,\mathcal{V}} \circ_r \beta_{m,\mathcal{V}}$. Предположим теперь, что $u_i \notin W_m^0(\mathcal{V})$ для некоторого i. Пусть i — наименьший индекс с таким свойством. Ясно, что $i > 0$. Поэтому $u_{i-1} \,\gamma\, u_i$. где γ — одна из конгруэнций α и β, и $u_{i-1} \in W_m^0(\mathcal{V})$. Ясно, что $u_{i-1} \equiv 0$ или $c(u_{i-1}) \ne c(u_i)$. Из леммы 2.2(i) вытекает, что $u_{i-1} \,\gamma\, 0$. Пусть, далее, j — наибольший индекс с тем свойством, что $u_j \notin W_m^0(\mathcal{V})$. Ясно, что $i \le j < r$ и $u_j \,\delta\, u_{j+1}$, где δ — одна из конгруэнций α и β. Рассуждая так же, как выше, получаем, что $0 \,\delta\, u_{j+1}$. Рассмотрим теперь последовательность слов

$$u_0, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{j+1}, \dots, u_r. \tag{2.1}$$

Каждое слово из этой последовательности лежит в $W_m^0(\mathcal{V})$, и каждая пара соседних слов из (2.1) лежит либо в α, либо в β. Следовательно, каждая пара соседних слов из (2.1) принадлежит либо $\alpha_{m,\mathcal{V}}$, либо $\beta_{m,\mathcal{V}}$. Длина последовательности (2.1) не превышает r и $u_0 \,\alpha\, u_1$. Следовательно, $(u, v) \in \alpha_{m,\mathcal{V}} \circ_r \beta_{m,\mathcal{V}}$. □

Предложение 2.5. *Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — нильмногообразие полугрупп, m — натуральное число, а $r \in \overline{\mathbb{N}}$. Если многообразие $\mathcal{V}$ почти fi-r-перестановочно, то любые две конгруэнции из множества $C_m(\mathcal{N})$ r-перестановочны.*

Доказательство. Положим $\nu = \sim_{\mathcal{N}}$. Пусть $\alpha, \beta \in C_m(\mathcal{N})$. Предположим сначала, что r — натуральное число. В силу симметрии достаточно установить, что $\alpha \circ_r \beta \subseteq \beta \circ_r \alpha$. Пусть $u, v \in W_m^0(\mathcal{N})$ и $(u, v) \in \alpha \circ_r \beta$. Тогда существуют слова $u_0, u_1, \dots, u_r \in W_m^0(\mathcal{N})$ такие, что $u_0 \equiv u$, $u_r \equiv v$ и, для всякого $i = 0, 1, \dots, r-1$, пара (u_i, u_{i+1}) лежит в α [в β] при условии, что i [не]четно. Всякая конгруэнция $\mu \in C_m(\mathcal{N})$ является ограничением на $W_m^0(\mathcal{N})$ некоторой вполне инвариантной конгруэнции μ' на F такой, что $\mu' \supseteq \nu$. Ясно, что, для всякого $i = 0, 1, \dots, r-1$, пара (u_i, u_{i+1}) лежит в α' [в β'] при условии, что i [не]четно и $u_0 \, \alpha' \, u_1$. Кроме того, $c(u_0) = c(u_1) = \cdots = c(u_r) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Положим $\alpha'' = \alpha' \wedge \sigma$ и $\beta'' = \beta' \wedge \sigma$. В силу леммы 2.1(vi) $u_0 \, \alpha'' \, u_1$ и, для всякого $i = 0, 1, \dots, r-1$, пара (u_i, u_{i+1}) лежит в α'' [в β''] при условии, что i [не]четно. Следовательно, $(u, v) \in \alpha'' \circ_r \beta''$. Из следствия 2.1 вытекает, что любые две вполне инвариантные конгруэнции на F из интервала $[\nu \wedge \sigma, \sigma]$ r-перестановочны. Поскольку $\alpha'', \beta'' \in [\nu \wedge \sigma, \sigma]$, отсюда вытекает, что $(u, v) \in \beta'' \circ_r \alpha''$. Следовательно, $(u, v) \in \beta' \circ_r \alpha'$. Применяя лемму 2.13, получаем, что $(u, v) \in \beta \circ_r \alpha$.

Предположим теперь, что $r = s + 0.5$ для некоторого натурального s. Достаточно проверить, что $\alpha \circ_{s+1} \beta \subseteq \alpha \circ_s \beta \cup \beta \circ_s \alpha$. Пусть $u, v \in W_m^0(\mathcal{N})$ и $(u, v) \in \alpha \circ_{s+1} \beta$. Рассуждая так же, как и в предыдущем абзаце, получаем, что $(u, v) \in \alpha'' \circ_{s+1} \beta''$. Поскольку конгруэнции α'' и β'' $s.5$-перестановочны, мы получаем, что $(u, v) \in \alpha'' \circ_s \beta'' \cup \beta'' \circ_s \alpha''$. Отсюда вытекает, что $(u, v) \in \alpha' \circ_s \beta' \cup \beta' \circ_s \alpha'$, т. е. либо $(u, v) \in \alpha' \circ_s \beta'$, либо $(u, v) \in \beta' \circ_s \alpha'$. В силу леммы 2.13 пролучаем, что $(u, v) \in \alpha \circ_s \beta$ в первом случае и $(u, v) \in \beta \circ_s \alpha$ во втором. Следовательно, $(u, v) \in \alpha \circ_s \beta \cup \beta \circ_s \alpha$. □

2.6. **Некоторые результаты о решетках многообразий полугрупп.** Следующее утверждение является частью полугруппового фольклора. Оно легко выводится из [31, предложение 2.4].

Лемма 2.14. *Если $\mathcal{X}$ — многообразие полугрупп и $\mathcal{SL} \nsubseteq \mathcal{X}$, то $L(\mathcal{X} \vee \mathcal{SL}) \cong L(\mathcal{X}) \times L(\mathcal{SL})$.* □

Следующее утверждение немедленно вытекает из [1, предложение 2].

Лемма 2.15. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам* (1.5)*, а n — натуральное число, то $L(\mathcal{A}_n \vee \mathcal{N}) \cong L(\mathcal{A}_n) \times L(\mathcal{N})$.* □

Положим $\mathcal{Q} = \mathrm{var}\,\{xy = x^2y,\ xyz^2 = yxz^2,\ xyx = yx^2\}$. Через $\mathcal{T}$ мы будем обозначать тривиальное многообразие полугрупп. Предложение 2.3 объясняет наш интерес к многообразиям полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. Такие многообразия полностью описаны М.В. Волковым (см. обзор [13, п. 11.1]). Но для дальнейшего нам понадобится не это описание в его полном объеме, а только следующее необходимое условие модулярности решетки подмногообразий данного многообразия, вытекающее из результатов работ [2, 11].

Предложение 2.6. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий, то выполнено одно из следующих условий:*

(M1) *$\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом;*

(M2) $\mathcal{V} = \mathcal{D} \vee \mathcal{E}$, *где* $\mathcal{D}$ *— одно из многообразий* $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ *и* $\overleftarrow{\mathcal{Q}}$, *а* $\mathcal{E}$ *— вполне регулярное многообразие;*

(M3) $\mathcal{V} = \mathcal{A}_n \vee \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, *где* n *— натуральное число,* $\mathcal{M}$ *— одно из многообразий* $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$ *и* $\mathcal{C}$, *а* $\mathcal{N}$ *— многообразие, удовлетворяющее тождествам* (1.5)*;*

(M4) $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, *где* $\mathcal{M}$ *— одно из многообразий* $\mathcal{T}$ *и* $\mathcal{SL}$, *а* $\mathcal{N}$ *— нильмногообразие, удовлетворяющее одной из следующих систем тождеств:*

$$x^2y = xyx = yx^2,\ x^3yz = xy^3z, \tag{2.2}$$

$$x^2y = xyx = yx^2,\ x^2y^2z = xy^2z^2, \tag{2.3}$$

$$x^2y = xyx = yx^2,\ x^3yz = xy^2z^2, \tag{2.4}$$

$$x^2y = xyx,\ xy^2 = yx^2, \tag{2.5}$$

$$x^2y = y^2x,\ xy^2 = yxy, \tag{2.6}$$

$$x^2y = yxy,\ xy^2 = yx^2, \tag{2.7}$$

$$x^2y = y^2x,\ xy^2 = xyx, \tag{2.8}$$

$$x^2y = xy^2,\ xyx = yxy, \tag{2.9}$$

$$x^2y = yxy = yx^2, \tag{2.10}$$

$$x^2y = xyx = xy^2, \tag{2.11}$$

$$x^2y = yx^2,\ xyx = yxy, \tag{2.12}$$

$$x^2y = yxy = xy^2, \tag{2.13}$$

$$x^2y = y^2x,\ xyx = x^2yx, \tag{2.14}$$

$$xy^2 = yx^2,\ xyx = xyx^2, \tag{2.15}$$

$$x^2y = x^3y,\ xyx = yxy, \tag{2.16}$$

$$xy^2 = xy^3,\ xyx = yxy, \tag{2.17}$$

$$x^2y = x^3y,\ xy^2 = yx^2, \tag{2.18}$$

$$x^2y = y^2x,\ xy^2 = xy^3, \tag{2.19}$$

$$x^2y = y^2x,\ xy^2 = (xy)^2, \tag{2.20}$$

$$x^2y = (xy)^2,\ xy^2 = yx^2. \tag{2.21}$$

$\square$

Следующее утверждение вытекает из описания нильмногообразий с дистрибутивной решеткой подмногообразий, полученного в [30] и передоказанного более простым и коротким способом в [29, предложение 4.2].

Лемма 2.16. *Если многообразие полугрупп удовлетворяет тождествам* (1.5) *и перестановочному тождеству длины* 3, *то решетка его подмногообразий дистрибутивна.* $\square$

3. Необходимость

Этот параграф делится на шесть пунктов. Четыре из них посвящены доказательству необходимости в теореме 1.1. Пусть $\mathcal{V}$ — почти fi-2.5-перестановочное многообразие полугрупп. В силу предложения 2.3 решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна. Следовательно, $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий (M1)–(M4) предложения

2.6. В пп. 3.1 и 3.3–3.5 рассматриваются четыре возникающих случая и показывается, что в каждом из них $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий 1)–7) теоремы 1.1. Кроме того, в п. 3.2 доказывается необходимость в теоремах 1.2 и 1.3, а в п. 3.6 — следствие 1.2.

3.1. **Условие (M1).** Здесь и в п. 3.2 нам понадобится следующая

Лемма 3.1. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ почти слабо fi-перестановочно, то выполнено условие* (1.3).

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{V}$ почти слабо fi-перестановочно, но условие (1.3) не выполнено, т. е. $\mathcal{V}$ содержит одно из многообразий $\mathcal{LRB} \vee \mathcal{SLZ}$ и $\mathcal{RRB} \vee \mathcal{SRZ}$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{LRB} \vee \mathcal{SLZ} \subseteq \mathcal{V}$. Поскольку $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{LRB}$, отсюда вытекает, что $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{V}$. Положим $\lambda = \sim_{\mathcal{LRB}}$ и $\zeta = \sim_{\mathcal{SLZ} \vee \mathcal{SL}}$. В силу следствия 2.1 конгруэнции λ и ζ слабо перестановочны. Учитывая пп. (iii), (vi) и (vii) леммы 2.1, получаем, что $xyz \,\lambda\, x^2yz \,\zeta\, x^2zy \,\lambda\, xzy$, т. е. $(xyz, xzy) \in \lambda\zeta\lambda$. Следовательно, $(xyz, xzy) \in \zeta\lambda\zeta$, т. е. $xyz \,\zeta\, w_1 \,\lambda\, w_2 \,\zeta\, xzy$ для некоторых слов w_1, w_2. Из леммы 2.1(vii) вытекает, что $h^2(w_1) \equiv h^2(xyz) \equiv xy$. Далее, $c(w_1) = \{x, y, z\}$ в силу леммы 2.1(vi). Следовательно, $\langle w_1 \rangle_L \equiv xyz$. Учитывая лемму 2.1(iii), получаем, что $\langle w_2 \rangle_L \equiv \langle w_1 \rangle_L \equiv xyz$. С другой стороны, $h^2(w_2) \equiv h^2(xzy) \equiv xz$ в силу леммы 2.1(vii), откуда $\langle w_2 \rangle_L \equiv xzy$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Теперь мы уже можем быстро доказать следующее

Предложение 3.1. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ почти fi-2.5-перестановочно и удовлетворяет условию* (M1)*, то оно удовлетворяет одному из условий* 1), 2) *и* 7) *теоремы* 1.1.

Доказательство. Если $\mathcal{V} \not\supseteq \mathcal{SL}$, то из леммы 2.6 и предложения 2.1 вытекает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий 1) и 7) теоремы 1.1, а если $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{SL}$, то в силу леммы 3.1 выполнено условие 2) этой теоремы. □

3.2. **Необходимость в теоремах 1.2 и 1.3.** *Доказательство необходимости в теореме* 1.2. В работе [29] проверено, что если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ почти fi-перестановочно, то либо $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий 3) и 5) теоремы 1.1, либо $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий 1), 3) и 4) теоремы 1.2, либо $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп с идемпотентным квадратом, содержащее $\mathcal{SL}$. В последнем случае из леммы 3.1 вытекает, что выполнено условие 2) теоремы 1.2.

Доказательство необходимости в теореме 1.3. В [4] проверено, что если $\mathcal{V}$ — почти слабо fi-перестановочное многообразие полугрупп ступени ≤ 2, то либо $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 1) теоремы 1.1, либо $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий 1) и 2) теоремы 1.3, либо $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом, содержащее $\mathcal{SL}$. В последнем случае из леммы 3.1 вытекает, что выполнено условие 2) теоремы 1.1.

3.3. **Условие (M2).** Хорошо известно и легко проверяется, что всякое периодическое многообразие полугрупп $\mathcal{X}$ содержит наибольшее вполне регулярное подмногообразие, которое мы будем обозначать через $\mathrm{CR}(\mathcal{X})$. В этом пункте будет доказано

Предложение 3.2. *Если многообразие полугрупп* $\mathcal{V}$ *почти* fi-2.5-*перестановочно и удовлетворяет условию* (M2), *то оно удовлетворяет условию* 3) *теоремы* 1.1.

Доказательство. По условию $\mathcal{V} = \mathcal{D} \vee \mathcal{E}$, где $\mathcal{D}$ — одно из многообразий $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ и $\overleftarrow{\mathcal{Q}}$, а $\mathcal{E}$ — вполне регулярное многообразие. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{D}$ — одно из многообразий $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, а $\mathcal{E} = \mathrm{CR}(\mathcal{V})$. Кроме того, $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{D} \supseteq \mathcal{P} \supseteq \mathcal{SL}$, и потому $\mathcal{E} \supseteq \mathcal{SL}$. Положим $\rho = \sim_{\mathcal{P}}$ и $\varepsilon = \sim_{\mathcal{E}}$. В силу следствия 2.1 эти две конгруэнции 2.5-перестановочны. Ясно, что $\mathcal{P} \wedge \mathcal{E} = \mathrm{CR}(\mathcal{P})$. Хорошо известно и легко проверяется, что решетка $L(\mathcal{P})$ имеет вид, изображенный на рис. 3.

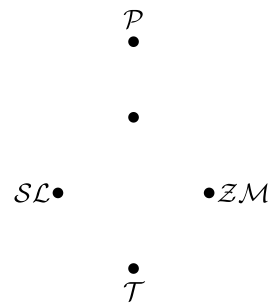

Рис. 3. Решетка $L(\mathcal{P})$

Из этого рисунка видно, что $\mathrm{CR}(\mathcal{P}) = \mathcal{SL}$. Следовательно, $\mathcal{P} \wedge \mathcal{E} = \mathcal{SL}$. Учитывая лемму 2.1(vi), получаем, что $(u, v) \in \rho \vee \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$. В частности, $(x^2y,\, y^2x) \in \rho \vee \varepsilon = \rho\varepsilon \cup \varepsilon\rho$. В силу симметрии мы можем считать, что $(x^2y,\, y^2x) \in \rho\varepsilon$. Следовательно, $x^2y\,\rho\,w\,\varepsilon\,y^2x$ для некоторого слова w. В частности, $x^2y = w$ в $\mathcal{P}$. В силу леммы 2.1(v) получаем, что $c(w) = \{x, y\}$, $t(w) \equiv y$ и $\ell_y(w) = 1$. Другими словами, $w \equiv x^n y$ для некоторого n. Но это означает, что $x^n y = y^2 x$ в $\mathcal{E}$. В частности, последнее тождество выполнено во всякой группе из $\mathcal{V}$. Подставляя в него 1 вместо x, получаем, что всякая группа из $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $y = y^2$. Иными словами, все группы в $\mathcal{V}$ тривиальны. Это означает, что $\mathcal{E}$ — многообразие связок. Напомним, что в этом многообразии выполнено тождество $x^n y = y^2 x$. Следовательно, $\mathcal{E}$ коммутативно, и потому $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{SL}$. Как мы видели выше, верно и обратное включение. Таким образом, $\mathcal{E} = \mathcal{SL}$. Положим $\mathcal{RZ} = \mathrm{var}\,\{xy = y\}$. Если $\mathcal{D} = \mathcal{Q}$, то $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{V}$. Поскольку $\mathcal{RZ} \subseteq \mathcal{Q}$, получаем, что в этом случае $\mathcal{RZ} \subseteq \mathrm{CR}(\mathcal{Q}) \subseteq \mathrm{CR}(\mathcal{V}) = \mathcal{SL}$. Но $\mathcal{RZ} \nsubseteq \mathcal{SL}$. Следовательно, $\mathcal{D} \neq \mathcal{Q}$. Это означает, что $\mathcal{D} = \mathcal{P}$, и потому $\mathcal{V} = \mathcal{D} \vee \mathcal{E} = \mathcal{P} \vee \mathcal{SL} = \mathcal{P}$. Мы показали, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 3) теоремы 1.1. □

3.4. **Условие (M3).** Здесь и в п. 3.5 нам понадобится следующая

Лемма 3.2. *Если многообразие полугрупп* $\mathcal{V}$ *почти* fi-2.5-*перестановочно, то всякое нильподмногообразие многообразия* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет некоторому перестановочному тождеству длины* 3.

Доказательство. Если $\mathcal{SL} \nsubseteq \mathcal{V}$, то, в силу леммы 2.6, $\mathcal{V}$ fi-2.5-перестановочно, и требуемое заключение вытекает из предложения 2.1. Предположим теперь, что $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{V}$. Пусть $\mathcal{N}$ — нильподмногообразие в $\mathcal{V}$. Предположим, что $\mathcal{N}$

не удовлетворяет никакому перестановочному тождеству длины 3. Обозначим через $\mathcal{L}$ [соответственно $\mathcal{R}$] подмногообразие многообразия $\mathcal{N}$, заданное внутри последнего тождеством $xyz = yxz$ [соответственно $xyz = xzy$]. Положим $\lambda = \sim_{\mathcal{L}\vee\mathcal{SL}}$ и $\rho = \sim_{\mathcal{R}\vee\mathcal{SL}}$. В силу следствия 2.1 эти конгруэнции 2.5-перестановочны. Ясно, что $xyz\,\lambda\,yxz\,\rho\,yzx\,\lambda\,zyx$, откуда $(xyz, zyx) \in \lambda\rho\lambda = \lambda\rho \cup \rho\lambda$. В силу симметрии можно считать, что $(xyz, zyx) \in \lambda\rho$, т. е. $xyz\,\lambda\,w\,\rho\,zyx$ для некоторого слова w. Очевидно, что $\mathrm{Perm}_3(\mathcal{L}) = \mathrm{gr}\big\{(12)\big\} = \big\{\iota, (12)\big\}$, где ι — тривиальная перестановка из $\mathbf{S}_3$. В частности, $\mathrm{Perm}_3(\mathcal{L}) \ne \mathbf{S}_3$, и потому $xyz \ne 0$ в $\mathcal{L}$. Используя пп. (i) и (iii) леммы 2.2, получаем, что $c(w) = \{x, y, z\}$ и $\ell(w) = 3$. Следовательно, либо $w \equiv xyz$, либо $w \equiv yxz$. Это означает, что многообразие $\mathcal{R} \vee \mathcal{SL}$ (а значит и многообразие $\mathcal{R}$) удовлетворяет одному из тождеств $xyz = zyx$ и $yxz = zyx$. Другими словами, группа $\mathrm{Perm}_3(\mathcal{R})$ содержит одну из перестановок (13) и (231). Но это противоречит тому очевидному факту, что $\mathrm{Perm}_3(\mathcal{R}) = \mathrm{gr}\big\{(23)\big\} = \big\{\iota, (23)\big\}$. □

Отметим, что доказательства предложения 3.2 и леммы 3.2 во многом аналогичны части доказательства предложения 2.4 работы [29] и доказательству леммы 2.5 той же работы соответственно.

Предложение 3.3. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ почти fi-2.5-перестановочно и удовлетворяет условию* (M3)*, то оно удовлетворяет одному из условий* 1)*,* 4)*,* 5)*,* 6) *и* 7) *теоремы* 1.1.

Доказательство. По условию $\mathcal{V} = \mathcal{A}_n \vee \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где n — натуральное число, $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{C}$, а $\mathcal{N}$ — многообразие, удовлетворяющее тождествам (1.5). Кроме того, $\mathcal{V}$ почти fi-2.5-перестановочно. Из леммы 3.2 вытекает, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет некоторому перестановочному тождеству длины 3. Предположим сначала, что $\mathcal{M} = \mathcal{T}$. Тогда $\mathcal{V} \nsupseteq \mathcal{SL}$, а значит $\mathcal{V}$ fi-2.5-перестановочно по лемме 2.6. Используя теперь предложение 2.1, получаем, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий 1) и 7) теоремы 1.1. Поэтому далее можно считать, что $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{C}$.

Предположим, что $n = 1$, т. е. $\mathcal{A}_n = \mathcal{T}$. Если $\mathcal{M} = \mathcal{C}$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 5) теоремы 1.1. Осталось рассмотреть случай, когда $\mathcal{M} = \mathcal{SL}$. Учитывая, что из тождества (1.5) и перестановочного тождества длины 3 вытекает система тождеств (1.6) с подходящей перестановкой π, получаем, что в этом случае выполнено условие 6) теоремы 1.1.

Пусть, наконец, $n > 1$. Положим $\alpha = \sim_{\mathcal{A}_n\vee\mathcal{SL}}$. Покажем, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству

$$x^2 = 0. \tag{3.1}$$

Положим $\nu = \sim_{\mathcal{N}\vee\mathcal{SL}}$. В силу следствия 2.1 конгруэнции α и ν 2.5-перестановочны. Будучи нильмногообразием, $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^t = 0$ для некоторого t. Тогда $x\,\alpha\,x^{tn+1}\,\nu\,x^{tn+2}\,\alpha\,x^2$, и потому $(x, x^2) \in \alpha\nu\alpha = \alpha\nu \cup \nu\alpha$. Предположим сначала, что $(x, x^2) \in \alpha\nu$, т. е. $x\,\alpha\,w\,\nu\,x^2$ для некоторого слова w. Из леммы 2.1(vi) вытекает, что $c(w) = \{x\}$. Поскольку, кроме того, тождество $x = w$ выполнено в многообразии $\mathcal{A}_n$, лемма 2.1(i) влечет, что $w \equiv x^{kn+1}$ для некоторого k. Это означает, что $x^2 = x^{kn+1}$ в $\mathcal{N}$. Из того, что $n > 1$, вытекает, что $kn + 1 > 2$. Но тогда тождество (3.1) выполнено в $\mathcal{N}$ в силу леммы 2.2(ii). Осталось рассмотреть случай, когда $(x, x^2) \in \nu\alpha$, т. е. $x\,\nu\,w\,\alpha\,x^2$ для некоторого слова w. В этом случае многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x = w$. Если

$w \not\equiv x$, то из пп. (i) и (ii) леммы 2.2 вытекает, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x = 0$, и тем более тождеству (3.1). Наконец, если $w \equiv x$, то $x \,\alpha\, x^2$. Но это означает, что многообразие $\mathcal{A}_n$ удовлетворяет тождеству $x = x^2$, что неверно, поскольку $n > 1$. Итак, мы доказали, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (3.1), которое вместе с тождествами (1.5) влечет систему тождеств (1.4).

Предположим теперь, что $\mathcal{M} = \mathcal{C}$. Положим $\gamma = \sim_{\mathcal{C}}$. В силу следствия 2.1 конгруэнции α и γ 2.5-перестановочны. Ясно, что

$$x^2y \,\alpha\, x^{n+2}y^{n+1} \,\gamma\, x^{n+1}y^{n+2} \,\alpha\, xy^2,$$

откуда $(x^2y, xy^2) \in \alpha\gamma\alpha = \alpha\gamma \cup \gamma\alpha$. В силу симметрии можно считать, что $(x^2y, xy^2) \in \alpha\gamma$. Тогда $x^2y \,\alpha\, w \,\gamma\, xy^2$ для некоторого слова w. Поскольку $w \,\gamma\, xy^2$, из леммы 2.1(ii) вытекает, что $w \equiv y^k xy^\ell$ для некоторых k и ℓ таких, что $k, \ell \geq 0$ и $k + \ell \geq 2$. Мы получаем, что $x^2y \,\alpha\, y^k xy^\ell$, и потому $\mathcal{A}_n$ удовлетворяет тождеству $x^2y = y^k xy^\ell$. Подставляя в это тождество 1 вместо y, мы получаем, что $x^2 = x$ в $\mathcal{A}_n$, что не соответствует действительности. Итак, $\mathcal{M} \neq \mathcal{C}$, и потому $\mathcal{M} = \mathcal{SL}$. Мы доказали, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 4) теоремы 1.1. □

3.5. **Условие (M4).** Введем одно новое понятие, которое нам часто придется использовать в дальнейшем. Будем говорить, что два слова *подобны*, если одно из них может быть получено из другого переименованием букв. В этом пункте будет доказано

Предложение 3.4. *Если многообразие полугрупп* $\mathcal{V}$ *почти* fi-2.5-*перестановочно и удовлетворяет условию* (M4)*, то оно удовлетворяет одному из условий* 6) *и* 7) *теоремы* 1.1.

Доказательство. По условию $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие, удовлетворяющее одной из систем тождеств (2.2)–(2.21). Предположим сначала, что $\mathcal{M} = \mathcal{T}$. Тогда $\mathcal{V} = \mathcal{N}$ — нильмногообразие. В частности, $\mathcal{V} \not\supseteq \mathcal{SL}$. Из леммы 2.6 вытекает, что в этом случае $\mathcal{V}$ fi-2.5-перестановочно. Но тогда, в силу предложения 2.1, $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 7) теоремы 1.1.

Пусть теперь $\mathcal{M} = \mathcal{SL}$. Докажем, что в этом случае $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 6) теоремы 1.1. В силу леммы 3.2 $\mathcal{N}$ удовлетворяет некоторому перестановочному тождеству длины 3. Остается проверить, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (1.6)–(1.26), где в системах (1.6)–(1.19) π — одна из перестановок, указанных в формулировке теоремы 1.1. Дальнейшие рассмотрения разбиваются на шесть случаев.

Случай 1: $\mathcal{N}$ удовлетворяет системе тождеств (2.2). Этот случай существенно сложнее пяти других, поскольку только здесь многообразие $\mathcal{V}$ может не быть наследственно однородным.

Подставляя yz вместо y и t вместо z в тождество $x^3yz = xy^3z$ и используя тождества

$$x^2y = xyx = yx^2, \tag{3.2}$$

имеем $x^3yzt = x(yz)^3t = xy^3z^3t$. Применяя лемму 2.2(iii), получаем, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству

$$x^3yzt = 0. \tag{3.3}$$

Для завершения доказательства достаточно убедиться в том, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет одному из тождеств

$$x^3yz = x^2y^2z^2, \tag{3.4}$$

$$x^3yz = 0, \tag{3.5}$$

$$x^2y^2z^2 = 0. \tag{3.6}$$

В самом деле, очевидно, что тождества (3.4), (3.5) и (3.6) влекут в $\mathcal{N}$ системы тождеств (1.6), (1.7) и (1.8) соответственно. Предположим, напротив, что $\mathcal{N}$ не удовлетворяет ни одному из тождеств (3.4)–(3.6). Тогда из сказанного выше и лемм 2.2 и 2.3 легко выводится, что всякое слово из множества $F_3(\mathcal{N})$ подобно одному из слов xyz, x^2yz, x^2y^2z, $x^2y^2z^2$ и x^3yz, а большая 0-трансверсаль $W_3^0(\mathcal{N})$ является дизъюнктным объединением следующих шести орбит:

$$U_0 = \{0\},\ U_1 \subseteq \{xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx\},\ U_2 \subseteq \{x^2yz, y^2xz, z^2xy\},$$
$$U_3 \subseteq \{x^2y^2z, x^2z^2y, y^2z^2x\},\ U_4 = \{x^2y^2z^2\},\ U_5 = \{x^3yz\},$$

причем $U_i \neq \varnothing$ при $i = 1, 2, 3$. Обозначим через $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ подмногообразия многообразия $\mathcal{N}$, заданные внутри $\mathcal{N}$ тождествами $x^2y^2z = x^3yz$ и $x^2y^2z^2 = x^3yz$ соответственно. Поскольку $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (3.3), мы получаем, что $x^2y^2z^2 = x^3yz^2 = 0$ в $\mathcal{A}$. Обозначим через α и β ограничения на $W_3^0(\mathcal{N})$ конгруэнций $\sim_{\mathcal{A}}$ и $\sim_{\mathcal{B}}$ соответственно. В силу леммы 2.12(ii) α и β являются конгруэнциями $\mathbf{S}_3$-множества $W_3^0(\mathcal{N})$, а из предложения 2.5 вытекает, что эти конгруэнции 2.5-перестановочны. Из сказанного выше вытекает, что конгруэнция α имеет ровно два неодноэлементных класса, а именно, $U_3 \cup U_5$ и $U_0 \cup U_4$, в то время как конгруэнция β имеет ровно один неодноэлементный класс, а именно, $U_4 \cup U_5$. Следовательно, $x^2y^2z \,\alpha\, x^3yz \,\beta\, x^2y^2z^2 \,\alpha\, 0$. Мы видим, что $(x^2y^2z, 0) \in \alpha\beta\alpha = \alpha\beta \cup \beta\alpha$. Предположим, что $(x^2y^2z, 0) \in \alpha\beta$, т. е. $x^2y^2z \,\alpha\, w \,\beta\, 0$ для некоторого слова $w \in W_3^0(\mathcal{N})$. Поскольку $x^2y^2z \,\alpha\, w$, мы получаем, что $w \in U_3 \cup U_5$. Учитывая, что $w \,\beta\, 0$, получаем, что конгруэнция β содержит одну из пар $(x^2y^2z, 0)$ и $(x^3yz, 0)$. Но это противоречит определению конгруэнции β. Осталось рассмотреть случай, когда $(x^2y^2z, 0) \in \beta\alpha$, т. е. $x^2y^2z \,\beta\, w \,\alpha\, 0$ для некоторого $w \in W_3^0(\mathcal{N})$. Из определения конгруэнции β и того факта, что $x^2y^2z \,\beta\, w$, вытекает, что $w \equiv x^2y^2z$. Но тогда $x^2y^2z \,\alpha\, 0$, что противоречит определению конгруэнции α. Это завершает рассмотрение случая 1.

Случай 2: $\mathcal{N}$ удовлетворяет системе тождеств (2.3). В частности, $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (3.2). Подставляя zt вместо z во входящее в систему (2.3) тождество $x^2y^2z = xy^2z^2$ и используя (3.2), получаем, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам $x^2y^2zt = xy^2(zt)^2 = xy^2z^2t^2$. Поэтому из леммы 2.2(iii) вытекает, что в $\mathcal{N}$ выполнено тождество $x^2y^2zt = 0$. Но это означает, что в $\mathcal{V}$ выполнена система тождеств (1.9).

Случай 3: $\mathcal{N}$ удовлетворяет системе тождеств (2.4). Подставляя x^2 вместо x в тождество $x^3yz = xy^2z^2$, получаем $x^6yz = x^2y^2z^2$. Применяя лемму 2.2(iii) получаем, что в $\mathcal{N}$ выполнено тождество $x^2y^2z^2 = 0$, а в $\mathcal{V}$, следовательно, — система тождеств (1.10).

Случай 4: $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (2.5)–(2.13). В частности, в $\mathcal{N}$ выполнено одно из тождеств

$$xy^2 = yx^2, \tag{3.7}$$

$$x^2y = y^2x, \tag{3.8}$$

$$x^2y = xy^2, \tag{3.9}$$

$$x^2y = yxy, \tag{3.10}$$

$$xy^2 = xyx, \tag{3.11}$$

$$xyx = yxy. \tag{3.12}$$

Подставляя yz вместо y в тождество (3.7), мы получаем тождество $x(yz)^2 = yzx^2$. Из леммы 2.3 вытекает, что в $\mathcal{N}$ последнее тождество эквивалентно тождеству $xy^2z^2 = yzx^2$. Применяя теперь лемму 2.2(iii), мы получаем, что $yzx^2 = 0$ в $\mathcal{N}$. Далее, если подставить yz вместо y в любое из тождеств (3.8) и (3.9) и применить лемму 2.3, мы получим, что первое из этих тождеств влечет в $\mathcal{N}$ тождества $x^2yz = (yz)^2x = y^2z^2x$, а второе — тождества $x^2yz = x(yz)^2 = xy^2z^2$. В обоих случаях $x^2yz = 0$ в $\mathcal{N}$ в силу леммы 2.2(iii). Умножим тождество (3.10) справа на z и подставим в (3.10) yz вместо y. В первом случае получим $x^2yz = yxyz$, а во втором — $x^2yz = yzxyz$. Следовательно, (3.10) влечет в $\mathcal{N}$ тождество $yxyz = yzxyz$, а значит, в силу леммы 2.2(iii), — и тождество $yxyz = 0$. В силу двойственности тождество (3.11) влечет в $\mathcal{N}$ тождество $zyxy = 0$. Наконец, подставляя yz вместо y в тождество (3.12), мы получаем $xyzx = yzxyz$. Ссылка на лемму 2.2(iii) показывает, что (3.12) влечет в $\mathcal{N}$ тождество $xyzx = 0$.

Из сказанного в предыдущем абзаце вытекает, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из следующих систем тождеств:

$$x^2y = xyx,\ xy^2 = yx^2,\ xyz^2 = 0, \tag{3.13}$$

$$x^2y = y^2x,\ xy^2 = yxy,\ x^2yz = 0, \tag{3.14}$$

$$x^2y = yxy,\ xy^2 = yx^2,\ xyxz = xyz^2 = 0, \tag{3.15}$$

$$x^2y = y^2x,\ xy^2 = xyx,\ x^2yz = xyzy = 0, \tag{3.16}$$

$$x^2y = xy^2,\ xyx = yxy,\ x^2yz = xyzx = 0, \tag{3.17}$$

$$x^2y = yxy = yx^2,\ xyxz = 0, \tag{3.18}$$

$$x^2y = xyx = xy^2,\ x^2yz = 0, \tag{3.19}$$

$$x^2y = yx^2,\ xyx = yxy,\ xyzx = 0, \tag{3.20}$$

$$x^2y = yxy = xy^2,\ x^2yz = xyxz = 0. \tag{3.21}$$

Кроме того, напомним, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет некоторому перестановочному тождеству длины 3, т. е. тождеству вида $p_3[\pi]$, где π — одна из перестановок (12), (13), (23) и (123). Пусть Σ — одна из систем тождеств (3.13)–(3.21), а π — одна из четырех указанных перестановок из $\mathbf{S}_3$. Тогда система тождеств $\{p_3[\pi],\ \Sigma\}$ влечет в $\mathcal{N}$ одну из систем тождеств, перечисленных в п. 6) теоремы 1.1. Это видно из табл. 1, в которой в клетке с «координатами» (Σ, π) указана та из систем тождеств, перечисленных в п. 6) теоремы 1.1, которая вытекает из системы тождеств $\{p_3[\pi],\ \Sigma\}$.

Случай 5: $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (2.14)–(2.19). Здесь мы можем применить лемму 2.2(ii) и вывести, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из следующих систем тождеств:

$$x^2y = y^2x,\ xyx = 0, \tag{3.22}$$

Таблица 1. Следствия систем тождеств вида $\{p_3[\pi], \Sigma\}$

Σ	$\pi = (12)$	$\pi = (13)$	$\pi = (23)$	$\pi = (123)$
(3.13)	(1.11)	(1.11)	(1.11)	(1.11)
(3.14)	(1.12)	(1.12)	(1.12)	(1.12)
(3.15)	(1.13)	(1.13)	(1.13)	(1.12)
(3.16)	(1.12)	(1.21)	(1.13)	(1.12)
(3.17)	(1.14)	(1.14)	(1.14)	(1.12)
(3.18)	(1.15)	(1.15)	(1.12)	(1.12)
(3.19)	(1.15)	(1.21)	(1.25)	(1.12)
(3.20)	(1.11)	(1.22)	(1.12)	(1.11)
(3.21)	(1.17)	(1.12)	(1.17)	(1.12)
(3.22)	(1.18)	(1.23)	(1.18)	(1.6)
(3.23)	(1.18)	(1.24)	(1.18)	(1.6)
(3.24)	(1.20)	(1.19)	(1.19)	(1.6)
(3.25)	(1.16)	(1.16)	(1.26)	(1.6)
(3.26)	(1.20)	(1.19)	(1.19)	(1.6)
(3.27)	(1.16)	(1.16)	(1.26)	(1.6)

$$xy^2 = yx^2,\ xyx = 0, \tag{3.23}$$

$$x^2y = 0,\ xyx = yxy, \tag{3.24}$$

$$xy^2 = 0,\ xyx = yxy, \tag{3.25}$$

$$x^2y = 0,\ xy^2 = yx^2, \tag{3.26}$$

$$x^2y = y^2x,\ xy^2 = 0. \tag{3.27}$$

Кроме того, как всегда, $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству вида $p_3[\pi]$, где π — одна из перестановок (12), (13), (23) и (123). Как и в предыдущем случае, табл. 1 показывает, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем тождеств, перечисленных в п. 6) теоремы 1.1.

Случай 6: $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (2.20) и (2.21). Предположим сначала, что в $\mathcal{N}$ выполнена система тождеств (2.20). Тогда $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $xy^2 = (xy)^2$. Поскольку $\mathcal{N}$ удовлетворяет также некоторому перестановочному тождеству длины 3, лемма 2.3 влечет, что в $\mathcal{N}$ выполнено тождество $xy^2 = x^2y^2$, а значит, в силу леммы 2.2(ii), и тождество $xy^2 = 0$. Это означает, что в $\mathcal{N}$ выполнена система тождеств (3.27). Двойственные рассуждения показывают, что система тождеств (2.21) влечет в $\mathcal{N}$ систему (3.26). Остается вновь сослаться на табл. 1. $\square$

Предложения 3.1, 3.2, 3.3 и 3.4 в совокупности доказывают необходимость в теореме 1.1.

3.6. **Доказательство следствия 1.2.** Пусть $\mathcal{V}$ — комбинаторное почти fi-2.5-перестановочное многообразие полугрупп. Требуется доказать, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{3,3}$. Как показано в пп. 3.1 и 3.3–3.5, $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий 1)–7) теоремы 1.1. Предположим сначала, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий 1) или 2) этой теоремы. Тогда оно является многообразием полугрупп с вполне регулярным квадратом. Поэтому если $S \in \mathcal{V}$, то S^2 — комбинаторная вполне регулярная полугруппа, т. е. связка. Иными словами, $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп с идемпотентным квадратом. Как показано в [14], отсюда вытекает, что решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна. Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 3) теоремы 1.1, то из рис. 3 и того очевидного факта, что решетки $L(\mathcal{P})$ и $L(\overleftarrow{\mathcal{P}})$ изоморфны, вновь вытекает, что решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна. Хорошо известно, что решетка многообразий периодических абелевых групп дистрибутивна, а решетка $L(\mathcal{SL})$ 2-элементна. Поэтому из лемм 2.14, 2.15 и 2.16 вытекает, что решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна и в том случае, когда $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 4) теоремы 1.1. В работах [10, лемма 3] и [30, лемма 7] доказано, что если многообразие полугрупп $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождествам (1.5), то решетка $L(\mathcal{C} \vee \mathcal{X})$ изоморфна подпрямому произведению решетки $L(\mathcal{X})$ и 3-элементной цепи. Учитывая лемму 2.16, получаем, что если $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 5) теоремы 1.1, то решетка $L(\mathcal{V})$ также дистрибутивна. Наконец, если $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 6) теоремы 1.1, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{3,3}$ в силу [7, теорема 3], а если $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 7) этой теоремы, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_3$ в силу результатов работы [3]. □

4. Достаточность

В этом параграфе будет доказана достаточность в теоремах 1.1–1.3 и тем самым завершено доказательство этих теорем в целом. Параграф делится на четыре пункта. В пп. 4.1, 4.3 и 4.4 доказывается достаточность в теореме 1.1, а в п. 4.2 — достаточность в теоремах 1.2 и 1.3.

4.1. **Условие 2) теоремы 1.1.** В этом пункте будет доказано

Предложение 4.1. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию* 2) *теоремы* 1.1, *то оно почти fi-2.5-перестановочно.*

Доказательство. Проводимые ниже рассмотрения во многом аналогичны тем, что содержатся в работе [32]. Как уже отмечалось в § 1, в доказательстве теоремы 3.1 этой работы имеется неточность. Но доказательства всех ее промежуточных результатов, не использующие теорему 3.1, корректны. Многие такие результаты понадобятся нам ниже, и мы будем ссылаться на них без дополнительных оговорок.

По условию $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом, содержащее многообразие $\mathcal{SL}$ и не содержащее ни одного из многообразий $\mathcal{LRB} \vee \mathcal{SLZ}$ и $\mathcal{RRB} \vee \mathcal{SRZ}$. Хорошо известно, что многообразие полугрупп вполне регулярно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет тождеству вида $x = x^{n+1}$ для некоторого натурального n. Следовательно, в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $xy = (xy)^{n+1}$ для некоторого n. До конца доказательства предложения 4.1 буква n имеет указанный только что смысл. Положим

$$\mathcal{SCR}_n = \mathrm{var}\{xy = (xy)^{n+1}\}.$$

Таким образом, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{SCR}_n$. Положим $\delta = \sim_{\mathcal{SCR}_n}$. Обозначим через S свободную в $\mathcal{SCR}_n$ полугруппу счетного ранга, а через S_1 — свободную в $\mathcal{SCR}_n$ циклическую полугруппу. Для всякого слова u через u^δ будем обозначать образ u при естественном гомоморфизме из F на S. Поскольку $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{SCR}_n$, лемма 2.1(vi) делает корректным обозначение $c(w)$ для произвольного элемента $w \in S$ в следующем смысле: если $u \in F$ и $w = u^\delta$, то $c(w) = c(u)$. Если $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$, то через $\sim_{\mathcal{X}}$ в оставшейся части доказательства предложения 4.1 мы будем обозначать вполне инвариантную конгруэнцию на полугруппе S (а не F, как в остальной части работы!), отвечающую $\mathcal{X}$. В частности, на протяжении доказательства предложения 4.1 через σ обозначается вполне инвариантная конгруэнция на S, а не на F, отвечающая многообразию $\mathcal{SL}$. Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{W} \in [\mathcal{SL}, \mathcal{V}]$, $\alpha = \sim_{\mathcal{U}}$ и $\beta = \sim_{\mathcal{W}}$. Эти обозначения также сохраняются до конца доказательства предложения 4.1. В силу следствия 2.1 достаточно доказать, что конгруэнции α и β 2.5-перестановочны. Положим $S' = \{w \in S \mid |c(w)| \geq 2\}$. Далее, для всякого $i \in \mathbb{N}$, положим $W_i = \{w \in S \mid c(w) = \{x_i\}\}$. Ясно, что S' — идеал в S, а W_i — циклическая подполугруппа в S. Полугруппа S является дизъюнктным обьединением идеала S' и семейства циклических подполугрупп $\{W_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что $W_i \cong S_1$ для всякого $i \in \mathbb{N}$. Поскольку $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{U}$ и $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{W}$, из леммы 2.1(vi) вытекает, что каждое из множеств S' и W_i (для всех $i \in \mathbb{N}$) есть как объединение α-классов, так и объединение β-классов. Поэтому достаточно установить, что ограничения α и β на каждое из множеств S' и W_i 2.5-перестановочны. При этом, поскольку $W_i \cong S_1$ для всякого $i \in \mathbb{N}$, 2.5-перестановочность конгруэнций $\alpha|_{W_i}$ и $\beta|_{W_i}$ (для любого $i \in \mathbb{N}$) равносильна 2.5-перестановочности конгруэнций $\alpha|_{S_1}$ и $\beta|_{S_1}$. Для завершения доказательства предложения 4.1 осталось доказать пп. а) и в) следующей леммы (п. б) этой лемы пригодится нам в п. 4.2).

Лемма 4.1. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *конгруэнции* $\alpha|_{S_1}$ *и* $\beta|_{S_1}$ 2.5-*перестановочны;*
б) *если* $\mathcal{V}$ — *многообразие полугрупп с идемпотентным квадратом, то конгруэнции* $\alpha|_{S_1}$ *и* $\beta|_{S_1}$ 1.5-*перестановочны;*
в) *конгруэнции* $\alpha|_{S'}$ *и* $\beta|_{S'}$ *перестановочны.*

Доказательство. Утверждение а) фактически доказано при проверке базы индукции в доказательстве теоремы 3.1 работы [32][2], а утверждение б) — во втором абзаце доказательства предложения 3.3 работы [29][3]. Осталось доказать утверждение в), чему и будет посвящена оставшаяся часть п. 4.1. Нам понадобятся некоторые новые обозначения и вспомогательные результаты. Для произвольной вполне инвариантной конгруэнции ξ на S будем обозначать ξ-класс элемента $u \in S$ через u^ξ и определим отношение L_ξ на S как множество всех пар $(u, v) \in S \times S$ таких, что $u^\xi \, L \, v^\xi$. Аналогично определяется отношение R_ξ. Ясно, что L_ξ и R_ξ — отношения эквивалентности.

Лемма 4.2. *Если ξ — вполне инвариантная конгруэнция на S, отвечающая некоторому подмногообразию многообразия $\mathcal{V}$, и $\xi \subseteq \sigma$, то $L_\xi \subseteq \sigma$ и $R_\xi \subseteq \sigma$.*

Доказательство. Пусть u и v — различные элементы полугруппы S такие, что $u \, L_\xi \, v$, т. е. $u^\xi \, L \, v^\xi$. Тогда $u^\xi = w^\xi v^\xi = (wv)^\xi$ для некоторого $w \in S$. Следовательно, $u \, \xi \, wv$, т. е. $c(u) = c(wv)$ в силу леммы 2.1(vi). Мы видим, что $c(v) \subseteq c(u)$. Аналогично проверяется, что $c(u) \subseteq c(v)$, и потому $c(u) = c(v)$. Вновь применяя лемму 2.1(vi), получаем, что $u \, \sigma \, v$. Мы доказали, что $L_\xi \subseteq \sigma$. Аналогично проверяется, что $R_\xi \subseteq \sigma$. □

---

[2]Как отмечалось в § 1, доказательство этой теоремы содержит неточность. Но она допущена при проверке шага индукции, а тот фрагмент доказательства, на который мы ссылаемся здесь, корректен.

[3]Как отмечалось в § 1, доказательство этого предложения содержит ссылку на некорректный фрагмент доказательства теоремы 3.1 работы [32]. Но эта ссылка содержится в третьем абзаце доказательства предложения 3.3 работы [29], а второй абзац этого доказательства корректен.

Поскольку $\mathcal{SLZ} \subseteq \mathcal{SCR}_n$, из леммы 2.1(vii) вытекает, что если в многообразии $\mathcal{SCR}_n$ выполнено тождество $v = w$, то $h^2(v) \equiv h^2(w)$, а значит и $h(v) \equiv h(w)$. Это делает корректным использование обозначений $h(w)$ и $h^2(w)$ для произвольного $w \in S$ в следующем смысле: если $w = u^\delta$, где $u \in F$, то $h(w) \equiv h(u)$ и $h^2(w) \equiv h^2(u)$.

Лемма 4.3. *Если многообразия $\mathcal{U}$ и $\mathcal{W}$ не удовлетворяют ни одному из условий*

$$\mathcal{SLZ} \subseteq \mathcal{U},\ \mathcal{SLZ} \nsubseteq \mathcal{W},\ \mathcal{LRB} \nsubseteq \mathcal{U},\ \mathcal{LRB} \subseteq \mathcal{W}, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{SLZ} \nsubseteq \mathcal{U},\ \mathcal{SLZ} \subseteq \mathcal{W},\ \mathcal{LRB} \subseteq \mathcal{U},\ \mathcal{LRB} \nsubseteq \mathcal{W}, \tag{4.2}$$

и хотя бы одно из многообразий $\mathcal{U}$ и $\mathcal{W}$ не содержит многообразия $\mathcal{LRB}$, то отношения R_α и R_β 1.5-перестановочны.

Доказательство. Достаточно доказать, что $R_\alpha R_\beta \subseteq R_\alpha \cup R_\beta$. Пусть $(v, w) \in R_\alpha R_\beta$, т. е. существует элемент $a \in S$ такой, что $v\, R_\alpha\, a\, R_\beta\, w$. Поскольку $\alpha, \beta \subseteq \sigma$, из леммы 4.2 вытекает, что $R_\alpha, R_\beta \subseteq \sigma$. Учитывая лемму 2.1(vi), получаем, что $c(v) = c(a) = c(w)$. Если $\bigl|c(v)\bigr| = 1$, то, очевидно, $v\, R_\alpha\, w$ или $v\, R_\beta\, w$. Пусть теперь $v, w \in S'$. Из [32, предложение 1.10] вытекает, что если $\mathcal{LZ} \nsubseteq \mathcal{U}$, то $v\, R_\alpha\, w$, а если $\mathcal{LZ} \nsubseteq \mathcal{W}$, то $v\, R_\beta\, w$. Пусть теперь $\mathcal{LZ} \subseteq \mathcal{U}$ и $\mathcal{LZ} \subseteq \mathcal{W}$. Тогда $h(v) \equiv h(a) \equiv h(w)$ по лемме 2.1(iv). Используя [32, предложение 1.12], получаем, что если $\mathcal{LRB}, \mathcal{SLZ} \nsubseteq \mathcal{U}$, то $v\, R_\alpha\, w$, а если $\mathcal{LRB}, \mathcal{SLZ} \nsubseteq \mathcal{W}$, то $v\, R_\beta\, w$. По условию одно из многообразий $\mathcal{U}$ и $\mathcal{W}$ не содержит многообразия $\mathcal{LRB}$. Без ограничения общности будем считать, что $\mathcal{LRB} \nsubseteq \mathcal{U}$. Поскольку случай, когда $\mathcal{LRB}, \mathcal{SLZ} \nsubseteq \mathcal{U}$, уже рассмотрен, далее можно считать, что $\mathcal{SLZ} \subseteq \mathcal{U}$. Если, кроме того, $\mathcal{SLZ} \subseteq \mathcal{W}$, то $h^2(v) \equiv h^2(a) \equiv h^2(w)$ по лемме 2.1(vii), и потому $v\, R_\alpha\, w$ согласно [32, предложение 1.13]. Пусть теперь $\mathcal{SLZ} \nsubseteq \mathcal{W}$. Поскольку условие (4.1) должно нарушаться, получаем, что в этом случае $\mathcal{LRB} \nsubseteq \mathcal{W}$. Используя теперь лемму [32, предложение 1.12], получаем, что $v\, R_\beta\, w$. □

Перейдем к непосредственному доказательству леммы 4.1в). Будем писать $\alpha_{S'}$ и $\beta_{S'}$ вместо $\alpha|_{S'}$ и $\beta|_{S'}$ соответственно. В силу симметрии достаточно доказать, что $\alpha_{S'}\beta_{S'} \subseteq \beta_{S'}\alpha_{S'}$. Пусть $(u, v) \in \alpha_{S'}\beta_{S'}$. Проверим сначала, что $(u, v) \in R_\beta R_\alpha$. Доказательство этого факта распадается на три случая.

Случай 1: многообразие $\mathcal{LRB}$ не содержится ни в $\mathcal{U}$, ни в $\mathcal{W}$. В этом случае условия (4.1) и (4.2) не выполняются, и мы можем применить лемму 4.3, в силу которой $(u, v) \in \alpha\beta \subseteq R_\alpha R_\beta = R_\alpha \cup R_\beta \subseteq R_\beta R_\alpha$.

Случай 2: многообразие $\mathcal{LRB}$ содержится в одном из многообразий $\mathcal{U}$ и $\mathcal{W}$, но не содержится в другом. В этом случае $\mathcal{LRB} \subseteq \mathcal{V}$. Напомним, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию (1.3). Следовательно, $\mathcal{SLZ} \nsubseteq \mathcal{V}$, и потому $\mathcal{SLZ}$ не содержится ни в $\mathcal{U}$, ни в $\mathcal{W}$. Как и в предыдущем случае, мы получаем, что условия (4.1) и (4.2) не выполняются. Поэтому мы вновь можем применить лемму 4.3, из которой, как и в предыдущем случае, вытекает, что $(u, v) \in R_\beta R_\alpha$.

Случай 3: многообразие $\mathcal{LRB}$ содержится и в $\mathcal{U}$, и в $\mathcal{W}$. Как и в предыдущем случае, отсюда вытекает, что $\mathcal{SLZ} \nsubseteq \mathcal{U}$ и $\mathcal{SLZ} \nsubseteq \mathcal{W}$. Для того, чтобы рассмотреть этот случай, нам понадобятся некоторые новые обозначения. Пусть $w \in F$. Обозначим через $0(w)$ самый длинный префикс слова w, содержащий все буквы из $c(w)$, кроме одной, а через $\tau(w)$ ту (единственную) букву, которая лежит в $c(w)$, но не лежит в $c\bigl(0(w)\bigr)$. Как показано в [32, предложение 1.6], если в $\mathcal{SCR}_n$ выполнено тождество $v = w$, то $0(v)\,\delta\,0(w)$ и $\tau(v) \equiv \tau(w)$. Это делает корректным использование обозначений $0(w)$ и $\tau(w)$ для произвольного элемента $w \in S$ в обычном смысле: если $w = u^\delta$ для некоторого $u \in F$, то $0(w) = (0(u))^\delta$ и $\tau(w) \equiv \tau(u)$. Следуя [22] и [32], для произвольной вполне инвариантной конгруэнции ξ на S определим отношение ξ_0 на S, полагая $a\,\xi_0\,b$ тогда и только тогда, когда найдутся $u, v \in S$ такие, что $u\,\xi\,v$, $a = 0(u)$ и $b = 0(v)$. Согласно [32, предложение 2.3], из того, что $\mathcal{LRB}$ содержится в $\mathcal{U}$ и в $\mathcal{W}$, вытекает, что α_0 и β_0 — вполне инвариантные конгруэнции на S, а отвечающие им многообразия содержат $\mathcal{LRB}$.

Согласно [32, лемма 1.11], всякое подмногообразие многообразия $\mathcal{SCR}_n$, не содержащее многообразия $\mathcal{SLZ}$, удовлетворяет тождеству $xy = x^{n+1}y$. В частности, это тождество выполнено в многообразиях $\mathcal{U}$ и $\mathcal{W}$. Следовательно, конгруэнции α и β содержат пару $\bigl((xy)^\delta, (x^{n+1}y)^\delta\bigr)$. Обозначим многообразия, отвечающие конгруэнциям α_0 и β_0, через $\mathcal{U}_0$ и $\mathcal{W}_0$ соответственно. Ясно, что $\mathcal{U}_0, \mathcal{W}_0 \supseteq \mathcal{SL}$. Поскольку

$$0\bigl((xy)^\delta\bigr) \equiv \bigl(0(xy)\bigr)^\delta \equiv x^\delta, \text{ а } 0\bigl((x^{n+1}y)^\delta\bigr) \equiv \bigl(0(x^{n+1}y)\bigr)^\delta \equiv \bigl(x^{n+1}\bigr)^\delta,$$

мы получаем, что $\bigl(x^\delta, (x^{n+1})^\delta\bigr) \in \alpha_0$ и $\bigl(x^\delta, (x^{n+1})^\delta\bigr) \in \beta_0$. Иными словами, многообразия $\mathcal{U}_0$ и $\mathcal{W}_0$ удовлетворяют тождеству $x = x^{n+1}$. Следовательно, они вполне регулярны. Ясно, что многообразие $\mathcal{U}_0 \vee \mathcal{W}_0$ также вполне регулярно и $\alpha_0, \beta_0 \in [\sim_{\mathcal{U}_0 \vee \mathcal{W}_0}, \sigma]$. В силу предложения 2.2 многообразие $\mathcal{U}_0 \vee \mathcal{W}_0$ почти fi-перестановочно. Поэтому из следствия 2.1 вытекает, что конгруэнции α_0 и β_0 перестановочны. Напомним, что $(u, v) \in \alpha\beta$, т.е. $u\,\alpha\,w\,\beta\,v$ для некоторого $w \in S$. Отсюда вытекает, что $0(u)\,\alpha_0\,0(w)\,\beta_0\,0(v)$, т.е. $\bigl(0(u), 0(v)\bigr) \in \alpha_0\beta_0 = \beta_0\alpha_0$. Таким образом, $0(u)\,\beta_0\,w'\,\alpha_0\,0(v)$ для некоторого $w' \in S$. Положим $x \equiv \tau(u)$. Тогда $0(u)x^\delta\,\beta_0\,w'x^\delta\,\alpha_0\,0(v)x^\delta$. Таким образом, $\bigl(0(u)x^\delta, 0(v)x^\delta\bigr) \in \beta_0\alpha_0$. В силу [32, предложение 2.4] отсюда вытекает, что $\bigl(0(u)x^\delta, 0(v)x^\delta\bigr) \in R_\beta R_\alpha$, т.е. $0(u)x^\delta\,R_\beta\,d\,R_\alpha\,0(v)x^\delta$ для некоторого $d \in S$. Теперь мы можем сослаться на [32, предложение 1.8] и сделать вывод, что $u\,R\,0(u)x^\delta\,R_\beta\,d\,R_\alpha\,0(v)x^\delta\,R\,v$. Очевидно, что $R \subseteq R_\beta$ и $R \subseteq R_\alpha$. Следовательно, $u\,R_\beta\,d\,R_\alpha\,v$, откуда $(u, v) \in R_\beta R_\alpha$.

Мы доказали, что в любом случае $(u, v) \in R_\beta R_\alpha$. Аналогично проверяется, что $(u, v) \in L_\beta L_\alpha$. Кроме того, $(u, v) \in \alpha_{S'}\beta_{S'} \subseteq \beta \vee \alpha$. Таким образом, $(u, v) \in (\beta \vee \alpha) \cap L_\beta L_\alpha \cap R_\beta R_\alpha$. Поскольку $(u, v) \in \alpha_{S'}\beta_{S'}$, имеем $u, v \in S'$. Покажем, что $(u, v) \in \beta\alpha$. Условия $(u, v) \in L_\beta L_\alpha$ и $(u, v) \in R_\beta R_\alpha$ означают, что $u\,L_\beta\,s\,L_\alpha\,v$ и $u\,R_\beta\,t\,R_\alpha\,v$ для некоторых $s, t \in S$. По определению отношения L_β, элементы u^β и s^β полугруппы S/β лежат в одном и том же L-классе. В этом же L-классе находится элемент $(s^n)^\beta$. Ясно, что $(s^n)^\beta = (s^\beta)^n$ — идемпотент в S/β. Поскольку идемпотент является правой единицей своего L-класса, получаем, что $u^\beta = u^\beta(s^n)^\beta = (us^n)^\beta$, т.е. $u\,\beta\,us^n$. Аналогично проверяется, что $u\,\beta\,t^nu$, откуда

$$u\,\beta\,t^nus^n. \tag{4.3}$$

Аналогично проверяется, что

$$v\,\alpha\,t^nvs^n. \tag{4.4}$$

Поскольку $(u, v) \in \beta \vee \alpha$, получаем, что $(v, t^nus^n) \in \beta \vee \alpha$. Это означает, что найдутся элементы $w_1, \ldots, w_m \in S$ такие, что в последовательности элементов $v, w_1, \ldots, w_m, t^nus^n$ любые два соседних элемента находятся либо в отношении

β, либо в отношении α. Так как β и α — конгруэнции, а t^n и s^n — идемпотенты в S, в последовательности

$$t^n vs^n, t^n w_1 s^n, \ldots, t^n w_m s^n, t^n us^n \tag{4.5}$$

любые два соседних элемента также будут находиться либо в отношении β, либо в отношении α. Поскольку $\beta, \alpha \subseteq \sigma$, любые два из элементов

$$u, v, s, t, w_1, \ldots, w_m \tag{4.6}$$

находятся в отношении σ. В силу леммы 2.1(vi) все эти элементы зависят от одних и тех же букв. В частности, все они лежат в S'. Из того, что S — полугруппа с вполне регулярным квадратом, вытекает, что если $w \in S'$, то w лежит в некоторой подгруппе полугруппы S. Из [32, предложение 1.5] теперь следует, что любые два из элементов (4.6) D-эквивалентны. Следовательно, элементы (4.5) находятся в H-классе, лежащем на пересечении L-класса элемента t с R-классом элемента s. Обозначим этот H-класс через G. Для удобства будем писать α_G и β_G вместо $\alpha|_G$ и $\beta|_G$ соответственно. Мы видим, что $(t^n vs^n, t^n us^n) \in \alpha_G \vee \beta_G$. Поскольку G — группа, конгруэнции α_G и β_G перестановочны, и потому $\beta_G \vee \alpha_G = \alpha_G \beta_G \subseteq \alpha\beta$. Следовательно, $t^n vs^n \,\alpha\, w \,\beta\, t^n us^n$ для некоторого $w \in S$. Учитывая (4.3) и (4.4), имеем $u \,\beta\, t^n us^n \,\beta\, w \,\alpha\, t^n vs^n \,\alpha\, v$, т. е. $u \,\beta\, w \,\alpha\, v$. Поскольку $\alpha, \beta \subseteq \sigma$, из леммы 2.1(vi) вытекает, что $c(u) = c(w) = c(v)$. Следовательно, $w \in S'$. Таким образом, $(u, v) \in \beta_{S'} \alpha_{S'}$.

Лемма 4.1 доказана. $\square$

Тем самым, доказано и предложение 4.1. $\square$

4.2. **Достаточность в теоремах 1.2 и 1.3.** Теперь мы готовы завершить доказательство теорем 1.2 и 1.3. Напомним, что необходимость в этих теоремах была доказана в п. 3.2. Достаточность в теореме 1.3 также фактически уже доказана: если многообразие удовлетворяет условию 2) теоремы 1.1, то оно почти слабо fi-перестановочно в силу предложения 4.1, а во всех остальных случаях, указанных в формулировке теоремы 1.3, требуемое заключение получено в работе [4]. Тем самым мы доказали теорему 1.3. $\square$

Доказательство достаточности в теореме 1.2. Достаточно доказать, что если $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию 2) теоремы 1.2, то оно почти fi-перестановочно, поскольку во всех остальных случаях, указанных в формулировке теоремы 1.2, $\mathcal{V}$ почти fi-перестановочно в силу результатов работы [29]. Итак, пусть $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп с идемпотентным квадратом, содержащее $\mathcal{SL}$, и выполнено условие (1.3). Будем использовать обозначения из доказательства предложения 4.1. Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{W} \in [\mathcal{SL}, \mathcal{V}]$, $\alpha = \sim_{\mathcal{U}}$ и $\beta = \sim_{\mathcal{W}}$. Рассуждая так же, как в доказательстве предложения 4.1, получаем, что достаточно убедиться в перестановочности ограничений конгруэнций α и β на каждую из полугрупп S_1 и S'. Для завершения доказательства теоремы 1.2 осталось сослаться на пп. б) и в) леммы 4.1. $\square$

4.3. **Условие 4) теоремы 1.1.** В этом пункте будет доказано

Предложение 4.2. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию* 4) *теоремы* 1.1*, то оно почти fi-*2.5*-перестановочно.*

Доказательство. По условию $\mathcal{V} = \mathcal{A}_n \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $n > 1$, а $\mathcal{N}$ — многообразие, удовлетворяющее тождествам (1.4) и некоторому перестановочному тождеству длины 3. Пусть $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ — подмногообразия в $\mathcal{V}$, содержащие $\mathcal{SL}$, $\chi_1 = \sim_{\mathcal{X}_1}$ и $\chi_2 = \sim_{\mathcal{X}_2}$. Ввиду следствия 2.1 достаточно проверить, что конгруэнции χ_1 и χ_2 2.5-перестановочны. Пусть u и v — слова такие, что $(u,v) \in \chi_1\chi_2\chi_1$, т.е. $u\,\chi_1\,w_1\,\chi_2\,w_2\,\chi_1\,v$ для некоторых слов w_1 и w_2. Требуется доказать, что $(u,v) \in \chi_1\chi_2 \cup \chi_2\chi_1$. Можно предполагать, что слова u, w_1, w_2 и v попарно различны, так как в противном случае требуемое заключение очевидно. Из леммы 2.1(vi) вытекает, что $c(u) = c(w_1) = c(w_2) = c(v)$. Будем считать, что $c(u) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Из лемм 2.14 и 2.15 вытекает, что $L(\mathcal{V}) \cong L(\mathcal{A}_n) \times L(\mathcal{SL}) \times L(\mathcal{N})$. Напомним, что $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \supseteq \mathcal{SL}$. Следовательно, для всякого $i = 1,2$ выполнено равенство $\mathcal{X}_i = \mathcal{A}_{n_i} \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}_i$, где n_i делит n и $\mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{N}$. Положим $\alpha_1 = \sim_{\mathcal{A}_{n_1} \vee \mathcal{SL}}$ и $\alpha_2 = \sim_{\mathcal{A}_{n_2} \vee \mathcal{SL}}$. Для завершения доказательства нам понадобятся три леммы.

Лемма 4.4. *Существуют нелинейные слова w' и w'' такие, что $u\,\alpha_1\,w'\,\alpha_2\,v$ и $u\,\alpha_2\,w''\,\alpha_1\,v$.*

Доказательство. Пусть $i \in \{1,2,\ldots,m\}$. Положим $a_i = \ell_i(u)$, $b_i = \ell_i(v)$, $c_i = \ell_i(w_1)$ и $d_i = \ell_i(w_2)$. В силу леммы 2.1(i) существуют целые числа p_i, q_i и r_i такие, что $c_i = a_i + p_i n_1$, $d_i = c_i + q_i n_2$ и $b_i = d_i + r_i n_1$. Следовательно, $b_i = a_i + (p_i + r_i)n_1 + q_i n_2$. Обозначим через M_i и N_i натуральные числа такие, что

$$M_i > \frac{1 - a_i - (p_i + r_i)n_1}{n_1 n_2} \quad \text{и} \quad N_i > \frac{1 - a_i - q_i n_2}{n_1 n_2}.$$

Положим $e_i = a_i + (p_i + r_i + M_i n_2)n_1$ и $f_i = a_i + (q_i + N_i n_1)n_2$. Легко проверяется, что $e_i > 1$ и $f_i > 1$. Пусть, далее,

$$w' \equiv x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_m^{e_m} \quad \text{и} \quad w'' \equiv x_1^{f_1} x_2^{f_2} \cdots x_m^{f_m}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\ell_i(w') - \ell_i(u) &= e_i - a_i = (p_i + r_i + M_i n_2)n_1,\\
\ell_i(v) - \ell_i(w') &= b_i - e_i = (q_i - M_i n_1)n_2,\\
\ell_i(w'') - \ell_i(u) &= f_i - a_i = (q_i + N_i n_1)n_2,\\
\ell_i(v) - \ell_i(w'') &= b_i - f_i = (p_i + r_i - N_i n_2)n_1
\end{aligned}$$

для всех $i = 1,2,\ldots,m$. Из пп. (i) и (vi) леммы 2.1 вытекает, что $u\,\alpha_1\,w'\,\alpha_2\,v$ и $u\,\alpha_2\,w''\,\alpha_1\,v$. Кроме того, слова w' и w'' нелинейны, поскольку $e_i > 1$ и $f_i > 1$ для всех $i = 1,2,\ldots,m$. □

В оставшейся части доказательства предложения 4.2 через w' и w'' обозначаются слова, построенные в доказательстве леммы 4.4.

Для удобства ссылок сформулируем следующее простое наблюдение.

Лемма 4.5. *Пусть $i \in \{1,2\}$.*

(i) *Если некоторое перестановочное тождество выполнено в многообразии $\mathcal{N}_i$, то оно выполнено и в многообразии $\mathcal{X}_i$.*
(ii) *Если слово w нелинейно, то многообразие $\mathcal{N}_i$ удовлетворяет тождеству $w = 0$.*

Доказательство. Утверждение (i) вытекает из того, что многообразия $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{SL}$ коммутативны, а утверждение (ii) — из того, что в $\mathcal{N}$ выполнены тождества (1.4). □

Положим $\nu_1 = {\sim_{\mathcal{N}_1}}$ и $\nu_2 = {\sim_{\mathcal{N}_2}}$. Таким образом, $\chi_1 = \alpha_1 \wedge \nu_1$ и $\chi_2 = \alpha_2 \wedge \nu_2$.

Лемма 4.6. *Если многообразие $\mathcal{N}_1$ [соответственно $\mathcal{N}_2$] удовлетворяет тождеству $u = 0$ и слово v нелинейно, то $(u, v) \in \chi_1\chi_2$ [соответственно $(u, v) \in \chi_2\chi_1$].*

Доказательство. Предположим, что тождество $u = 0$ выполнено в $\mathcal{N}_1$. Из леммы 4.5(ii) вытекает, что многообразие $\mathcal{N}_1$ удовлетворяет тождеству $w' = 0$, а многообразие $\mathcal{N}_2$ — тождествам $w' = 0$ и $v = 0$. Следовательно, $u\, \nu_1\, w'\, \nu_2\, v$. Поскольку $u\, \alpha_1\, w'\, \alpha_2\, v$ в силу леммы 4.4, имеем $u\, \chi_1\, w'\, \chi_2\, v$, и потому $(u, v) \in \chi_1\chi_2$. Аналогично проверяется, что если $u = 0$ в $\mathcal{N}_2$, то $u\, \chi_2\, w''\, \chi_1\, v$, и потому $(u, v) \in \chi_2\chi_1$. □

Приступим к непосредственному доказательству предложения 4.2. Дальнейшие рассуждения разбиваются на три случая.

Случай 1: слова u и v нелинейны. Тогда $u\, \nu_1\, w'\, \nu_2\, v$ и $u\, \nu_2\, w''\, \nu_1\, v$ в силу леммы 4.5(ii). Применяя лемму 4.4, получаем, что $u\, \chi_1\, w'\, \chi_2\, v$ и $u\, \chi_2\, w''\, \chi_1\, v$. Следовательно, $(u, v) \in \chi_1\chi_2 \cap \chi_2\chi_1$.

Случай 2: одно из слов u и v линейно, а другое — нет. Без ограничения общности будем считать, что линейным является слово u. С учетом леммы 4.6, достаточно удостовериться в том, что в одном из многообразий $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ выполнено тождество $u = 0$. Если слово w_1 нелинейно, то из выполнения в многообразии $\mathcal{X}_1$ тождества $u = w_1$ и леммы 2.2(iii) вытекает, что $u = 0$ в $\mathcal{N}_1$. Предположим теперь, что слово w_1 линейно, а w_2 — нет. Поскольку многообразие $\mathcal{X}_2$ удовлетворяет тождеству $w_1 = w_2$, из леммы 2.2(iii) вытекает, что $w_1 = 0$ в $\mathcal{N}_2$. Поскольку слова u и w_1 линейны и $c(u) = c(w_1)$, это означает, что $\mathcal{N}_2$ удовлетворяет тождеству $u = 0$. Наконец, предположим, что слова w_1 и w_2 линейны. Тогда из выполнимости тождества $w_2 = v$ в $\mathcal{X}_1$ и леммы 2.2(iii) вытекает, что $w_2 = 0$ в $\mathcal{N}_1$. Слова u и w_2 линейны и $c(u) = c(w_2)$. Следовательно, $u = 0$ в $\mathcal{N}_1$.

Случай 3: слова u и v линейны. В этом случае тождество $u = v$ перестановочно. Достаточно проверить, что тождество $u = v$ выполнено в одном из многообразий $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, поскольку в этом случае $(u, v) \in \chi_1 \cup \chi_2$ по лемме 4.5(i). Предположим сначала, что слово w_1 нелинейно. Тогда из выполнимости тождества $u = w_1$ в $\mathcal{X}_1$ и леммы 2.2(iii) вытекает, что $\mathcal{N}_1$ удовлетворяет тождеству $x_1x_2 \cdots x_m = 0$. Это означает, что в $\mathcal{N}_1$ выполнено всякое перестановочное тождество длины m, в том числе тождество $u = v$. Аналогично разбирается случай, когда слово w_2 нелинейно.

Пусть, наконец, слова w_1 и w_2 линейны. Поскольку слова u, w_1, w_2 и v попарно различны, $m \geq 3$. Обозначим через π_1, π_2 и π_3 перестановки, соответствующие перестановочным тождествам $u = w_1$, $w_1 = w_2$ и $w_2 = v$ соответственно. Из леммы 2.5 вытекает, что если хотя бы одна из перестановок π_1 и π_3 не лежит в $\mathrm{Perm}_m(\mathcal{N})$, то $\mathcal{N}_1$ удовлетворяет всем перестановочным тождествам длины m, в том числе тождеству $u = v$. Аналогично, если $\pi_2 \notin \mathrm{Perm}_m(\mathcal{N})$, то $u = v$ в $\mathcal{N}_2$. Наконец, если $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \mathrm{Perm}_m(\mathcal{N})$, то перестановочное тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{N}$, и тем более в каждом из многообразий $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$.

Предложение 4.2 доказано. □

4.4. **Условие 6) теоремы 1.1.** Трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{X})$ будем называть *собственной*, если $1 < m < n$. Последним нетривиальным шагом в доказательстве теоремы 1.1 является следующее

Предложение 4.3. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию* 6) *теоремы* 1.1, *то оно почти fi-2.5-перестановочно.*

Доказательство. По условию $\mathcal{V} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — многообразие, удовлетворяющее одной из систем тождеств (1.6)–(1.26), где в системах (1.6)–(1.19) перестановка π имеет смысл, указанный в формулировке теоремы 1.1[4]. Из следствия 2.1 вытекает, что если $\mathcal{X}$ — почти fi-2.5-перестановочное многообразие, содержащее $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, то многообразие $\mathcal{Y}$ почти fi-2.5-перестановочно. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{N}$ задано одной из систем тождеств (1.6)–(1.26). Нам понадобится следуюшая

Лемма 4.7. *Пусть $\mathcal{N}$ — многообразие полугрупп, заданное одной из систем тождеств* (1.6)–(1.26), *где в системах* (1.6)–(1.19) *перестановка π имеет смысл, указанный в формулировке теоремы* 1.1. *Тогда:*

(i) *если многообразие $\mathcal{N}$ задано системой тождеств* (1.6), *то оно наследственно m-однородно для всех $m \neq 3$, а если $\mathcal{N}$ задано одной из систем тождеств* (1.7)–(1.26), *то $\mathcal{N}$ наследственно однородно;*

(ii) *все непустые трансверсали вида $W_{n,m}(\mathcal{N})$ конгруэнц-перестановочны;*

(iii) *для всякого m существует не более одной непустой нетранзитивной трансверсали вида $W_{n,m}(\mathcal{N})$;*

(iv) *если $W_{n,m}(\mathcal{N})$ и $W_{k,m}(\mathcal{N})$ — непустые собственные трансверсали и первая из них не транзитивна, то каждое слово из $W_{n,m}(\mathcal{N})$ делит каждое слово из $W_{k,m}(\mathcal{N})$.*

Доказательство. Весьма длинные, но простые и рутинные вычисления, систематически использующие леммы 2.2 и 2.3, позволяют указать в явном виде все непустые собственные трансверсали вида $W_{n,m}(\mathcal{N})$. Мы позволим себе опустить эти вычисления и привести только их результаты. Для этого нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения. Пусть i и m — натуральные числа и $i \leq m$. Положим

$$G_{m,i} = \{\psi \in \mathbf{S}_m \mid j\psi \leq i \text{ при } j \leq i, \text{ и } j\psi > i \text{ при } j > i\}.$$

Ясно, что $G_{m,i}$ — подгруппа в $\mathbf{S}_m$. Обозначим через $\Psi_{m,i}$ систему всех различных представителей правых смежных классов группы $\mathbf{S}_m$ по подгруппе $G_{m,i}$. Пусть Σ — любая из систем тождеств (1.6)–(1.26). Все непустые собственные трансверсали вида $W_{n,m}(\mathrm{var}\ \Sigma)$ указаны в табл. 2; точки с запятой разделяют нетранзитивные трансверсали на орбиты.

Приступим к непосредственному доказательству пп. (i)–(iv) из формулировки леммы.

(i) Пусть $\mathcal{X}$ — подмногообразие многообразия $\mathcal{N}$, удовлетворяющее тождеству $u = v$ такому, что $\ell(u) < \ell(v)$, но не удовлетворяющее тождеству $u = 0$ (а значит, и тождеству $v = 0$). Из леммы 2.2(i) вытекает, что $c(u) = c(v)$. Пусть $|c(u)| = m$, $\ell(u) = n$ и $\ell(v) = k$. Если $m = 1$ или $m = n$, то $\mathcal{N}$ наследственно (n, m)-расщепляемо по леммам 2.10 и 2.11 соответственно. Пусть теперь

[4] Эта оговорка о возможных значениях перестановки π в системах тождеств (1.6)–(1.19) всюду в дальнейшем подразумевается, но, как правило, не формулируется в явном виде.

Таблица 2. Все непустые собственные трансверсали

m и n	Σ	$W_{n,m}(\mathrm{var}\,\Sigma)$
$m=2$, $n=3$	(1.6)–(1.10) при любом π, (1.16) при $\pi=(12)$, (1.18) при $\pi=(12)$, (1.23), (1.25)	$\{x^2y, y^2x\}$
	(1.11) при $\pi \in \{(12), (13), (123)\}$, (1.13) при $\pi=(13)$, (1.14) при $\pi \in \{(12), (23)\}$, (1.15) при $\pi=(12)$, (1.17) при $\pi=(23)$, (1.26)	$\{x^2y\}$
	(1.11) при $\pi=(23)$	$\{x^2y, y^2x; yx^2\}$
	(1.12) при $\pi=(12)$	$\{x^2y; xy^2, yx^2\}$
	(1.12) при $\pi \in \{(13), (23), (123)\}$, (1.20), (1.21)	$\{xy^2\}$
	(1.13) при $\pi=(12)$, (1.14) при $\pi=(13)$, (1.15) при $\pi=(13)$, (1.17) при $\pi=(12)$	$\{x^2y; xyx\}$
	(1.13) при $\pi=(23)$	$\{xyx; yx^2\}$
	(1.16) при $\pi=(13)$, (1.19) при $\pi=(13)$	$\{xyx, yxy\}$
	(1.18) при $\pi=(23)$, (1.19) при $\pi=(23)$, (1.24)	$\{xy^2, yx^2\}$
	(1.22)	$\{x^2y, y^2x; xyx\}$
$m \geq 3$, $n=m+1$	(1.6)–(1.10) при любом π	$\{x_i^2x_1 \cdots x_{i-1}x_{i+1} \cdots x_m \mid 1 \leq i \leq m\}$
$m=2$, $n=4$	(1.6)–(1.10) при любом π	$\{x^3y, y^3x; x^2y^2\}$
$m=3$, $n=5$	(1.6) при любом π	$\{x^3yz\}$
	(1.7) при любом π	$\{x^2y^2z, x^2z^2y, y^2z^2x\}$
	(1.8), (1.10) при любом π	$\{x^3yz, y^3xz, z^3xy\}$
	(1.9) при любом π	$\{x^3yz, y^3xz, z^3xy; x^2y^2z\}$
$m \geq 4$, $n=m+2$	(1.6)–(1.8) при любом π	$\{x_{1\psi}^2x_{2\psi}^2x_{3\psi} \cdots x_{m\psi} \mid \psi \in \Psi_{m,2}\}$
	(1.9) при любом π	$\{x_i^3x_1 \cdots x_{i-1}x_{i+1} \cdots x_m \mid 1 \leq i \leq m\}$
$m=2$, $n=5$	(1.6)–(1.10) при любом π	$\{x^3y^2, y^3x^2\}$
$m=3$, $n=6$	(1.6) при любом π	$\{x^2y^2z^2\}$
$m \geq 4$, $n=m+i$ при $3 \leq i \leq m$	(1.7) при любом π	$\{x_{1\psi}^2 \cdots x_{i\psi}^2x_{(i+1)\psi} \cdots x_{m\psi} \mid \psi \in \Psi_{m,i}\}$

$1 < m < n$. Если $m = k$, то $\ell(v) = k = m < n = \ell(u)$ вопреки выбору тождества $u = v$. Следовательно, $m < k$. Далее, существуют слова $u^* \in W_{n,m}(\mathcal{N})$ и $v^* \in W_{k,m}(\mathcal{N})$ такие, что тождества $u = u^*$ и $v = v^*$ выполнены в $\mathcal{N}$. Ясно, что $u^* = v^*$ в $\mathcal{X}$. Поскольку $1 < m < n$ и $m < k$, трансверсали $W_{n,m}(\mathcal{N})$ и $W_{k,m}(\mathcal{N})$

являются собственными. Из табл. 2 легко извлекается, что либо $u^* \lhd v^*$, либо $\mathcal{N}$ задано системой тождеств (1.6), $m = 3$, $u^* \equiv x^3yz$ и $v^* \equiv x^2y^2z^2$. Таким образом, если $\mathcal{N}$ задано системой тождеств (1.6) и $m \neq 3$, а также если $\mathcal{N}$ задано одной из систем тождеств (1.7)–(1.26), то $u^* \lhd v^*$. Применяя лемму 2.2(iii), получаем, что в указанных случаях многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству $u^* = 0$, а значит, и тождеству $u = 0$. Утверждение (i) доказано.

(ii) Леммы 2.10 и 2.11 позволяют рассматривать здесь только собственные трансверсали. В силу предложения 2.4 нам надо проверить, что все собственные трансверсали сегрегированы и содержат ≤ 2 орбит, а все их орбиты конгруэнц-перестановочны. Из табл. 2 видно, что все эти трансверсали и в самом деле содержат ≤ 2 орбит, причем не более, чем одна из них неодноэлементна. Очевидно, что если G-множество содержит не более одной неодноэлементной орбиты, то оно сегрегировано. Осталось проверить, что все орбиты всех собственных трансверсалей конгруэнц-перестановочны. Легко понять, что если G-множество содержит ≤ 3 элементов, то оно имеет ≤ 2 конгруэнций, и потому конгруэнц-перестановочно. Поэтому мы можем рассматривать только орбиты, содержащие > 3 элементов. Просматривая табл. 2, можно убедиться, что такие орбиты есть только у следующих трансверсалей:

а) $W_{m+1,m}(\mathcal{N}) = \{x_i^2 x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_m \mid 1 \leq i \leq m\}$ при $m \geq 4$, если $\mathcal{N}$ задано одной из систем тождеств (1.6)–(1.10),
б) $W_{m+2,m}(\mathcal{N}) = \{x_i^3 x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_m \mid 1 \leq i \leq m\}$ при $m \geq 4$, если $\mathcal{N}$ задано системой тождеств (1.9),
в) $W_{m+i,m}(\mathcal{N}) = \{x_{1\psi}^2 \cdots x_{i\psi}^2 x_{(i+1)\psi} \cdots x_{m\psi} \mid \psi \in \Psi_{m,i}\}$ при $m \geq 4$, если $\mathcal{N}$ задано одной из систем тождеств (1.6)–(1.8); здесь $i = 2$ для систем (1.6) и (1.8), и $2 \leq i \leq m$ для системы (1.7).

Все эти трансверсали транзитивны. Поэтому надо проверить, что сами эти трансверсали конгруэнц-перестановочны. Если W — трансверсаль типа а) или б) и $w \in W$, то $\mathrm{Stab}_W(w) = \mathrm{Stab}_1(m)$. Учитывая леммы 2.4 и 2.8, получаем, что W имеет ≤ 2 конгруэнций. В частности, в этом случае W конгруэнц-перестановочно. В случае в) положим $w_m \equiv x_1^2 \cdots x_i^2 x_{i+1} \cdots x_m$. Очевидно, что $w_m \in W_{m+i,m}(\mathcal{N})$ и $\mathrm{Stab}_{W_{m+i,m}(\mathcal{N})}(w_m) = G_{m,i}$. В [29, лемма 1.1] проверено, что интервал $[G_{m,i}, \mathbf{S}_m]$ решетки $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_m)$ содержит ≤ 3 элементов. Применяя лемму 2.8, получаем, что трансверсаль $W_{m+i,m}(\mathcal{N})$ имеет ≤ 3 конгруэнций. Следовательно, решетка $\mathrm{Con}\big(W_{m+i,m}(\mathcal{N})\big)$ является цепью, и потому трансверсаль $W_{m+i,m}(\mathcal{N})$ конгруэнц-перестановочна.

(iii) Леммы 2.10 и 2.11 и табл. 2 показывают, что если $\mathcal{N}$ задано одной из систем тождеств (1.6)–(1.10) [соответственно (1.11)–(1.26)], то только трансверсали $W_{4,2}(\mathcal{N})$ и $W_{5,3}(\mathcal{N})$ [соответственно только трансверсаль $W_{3,2}(\mathcal{N})$] может быть непустой и нетранзитивной для некоторого $\mathcal{N}$. Отсюда сразу вытекает доказываемое утверждение.

(iv) Табл. 2 показывает, что существует только одна пара непустых собственных трансверсалей вида $\big\{W_{n,m}(\mathcal{N}), W_{k,m}(\mathcal{N})\big\}$ такая, что $W_{n,m}(\mathcal{N})$ нетранзитивна, а именно, пара $\big\{W_{4,2}(\mathcal{N}), W_{5,2}(\mathcal{N})\big\}$ в случае, когда $\mathcal{N}$ задано одной из систем тождеств (1.6)–(1.10). Но в этом случае каждое слово из $W_{4,2}(\mathcal{N})$ (которое подобно либо x^3y, либо x^2y^2) делит каждое слово из $W_{5,2}(\mathcal{N})$ (подобное слову x^3y^2). $\square$

Приступим к непосредственному доказательству предложения 4.3. Пусть $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ — подмногообразия многообразия $\mathcal{V}$, содержащие $\mathcal{SL}$, $\chi_1 = \sim_{\mathcal{X}_1}$ и $\chi_2 = \sim_{\mathcal{X}_2}$. В силу следствия 2.1 достаточно доказать, что конгруэнции χ_1 и χ_2 2.5-перестановочны. Пусть u и v — слова такие, что $(u, v) \in \chi_1\chi_2\chi_1$, т. е. $u\,\chi_1\,w_1\,\chi_2\,w_2\,\chi_1\,v$ для некоторых слов w_1 и w_2. Требуется проверить, что $(u, v) \in \chi_1\chi_2 \cup \chi_2\chi_1$. Можно считать, что слова u, w_1, w_2 и v попарно различны, так как в противном случае требуемое заключение очевидно. Кроме того, мы всегда можем заменить слово $w \in \{u, w_1, w_2, v\}$ на произвольное слово w' такое, что $w = w'$ в $\mathcal{V}$. Это позволяет нам далее считать, что если $w \in \{u, w_1, w_2, v\}$, то либо $w = 0$ в $\mathcal{N}$, либо $w \in W_{n,m}(\mathcal{N})$ для некоторых m и n. Из леммы 2.1(vi) вытекает, что $c(u) = c(w_1) = c(w_2) = c(v)$. Без ограничения общности будем считать, что $c(u) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Из леммы 2.14 вытекает, что $L(\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}) \cong L(\mathcal{SL}) \times L(\mathcal{N})$. Поскольку $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \supseteq \mathcal{SL}$, мы получаем, что, для всякого $i = 1, 2$, выполнено равенство $\mathcal{V}_i = \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}_i$ для некоторого многообразия $\mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{N}$. Положим $\nu_1 = \sim_{\mathcal{N}_1}$ и $\nu_2 = \sim_{\mathcal{N}_2}$. Ясно, что $\chi_i = \nu_i \wedge \sigma$ при $i = 1, 2$.

Предположим сначала, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет системе тождеств (1.6) и $m = 3$. Тогда $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x^3yz = x^2y^2z^2$. Если одно из слов u, w_1, w_2 и v совпадает с x^3yz, заменим его на $x^2y^2z^2$ (мы можем это сделать, так как в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $x^3yz = x^2y^2z^2$). Для удобства выкладок положим $w_0 \equiv u$ и $w_3 \equiv v$. Список трансверсалей вида $W_{n,3}(\mathcal{N})$ из табл. 2 показывает, что:

(i) каждое из слов w_0, w_1, w_2 и w_3 подобно одному из слов xyz, x^2yz, x^2y^2z и $x^2y^2z^2$;

(ii) либо все слова w_0, w_1, w_2 и w_3 линейны, либо не более трех из них попарно подобны.

Если все слова w_0, w_1, w_2 и w_3 линейны, то доказательство можно завершить с помощью тех же рассуждений, что и в последнем абзаце доказательства предложения 4.2. Поэтому далее можно считать, что не более трех из слов w_0, w_1, w_2 и w_3 попарно подобны. Положим $\ell = \min\bigl\{\ell(w_i) \mid 0 \le i \le 3\bigr\}$. Тогда последовательность слов w_0, w_1, w_2, w_3 содержит два соседних слова различной длины, одно из которых имеет длину ℓ. Иными словами, найдутся $0 \le i, j \le 3$ такие, что $\ell(w_i) = \ell < \ell(w_j)$ и $|i - j| = 1$. Поскольку $xyz \lhd x^2yz \lhd x^2y^2z \lhd x^2y^2z^2$, имеем

$$w_i \lhd w_k \text{ для всех } k = 0, 1, 2, 3,\ k \neq i. \tag{4.7}$$

В частности, $w_i \lhd w_j$. Объединяя эти наблюдения с тем фактом, что тождество $w_i = w_j$ выполнено в одном из многообразий $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, и учитывая лемму 2.2(iii), мы получаем, что одно из многообразий $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ удовлетворяет тождеству $w_i = 0$. Далее, в силу (4.7) слово w_i делит каждое из слов u и v. Следовательно, в одном из многообразий $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ выполнены тождества $u = 0$ и $v = 0$, а значит и тождество $u = v$. Поскольку $c(u) = c(v)$, тождество $u = v$ выполнено в одном из многообразий $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$. Мы доказали, что $(u, v) \in \chi_1 \cup \chi_2$.

В оставшейся части доказательства мы считаем, что либо $\mathcal{N}$ удовлетворяет системе тождеств (1.6) и $m \neq 3$, либо $\mathcal{N}$ удовлетворяет одной из систем тождеств (1.7)–(1.26). В силу леммы 4.7(i) это означает, что $\mathcal{N}$ наследственно m-однородно. Если многообразие $\mathcal{N}_1$ удовлетворяет тождествам $u = 0$ и $v = 0$, то $u\,\nu_1\,v$. Поскольку, кроме того, $u\,\sigma\,v$ по лемме 2.1(vi), мы получаем, что в этом случае $u\,\chi_1\,v$. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что $u \neq 0$ в $\mathcal{N}_1$. Но тогда $u \neq 0$ в $\mathcal{N}$, и потому $u \in W_{n,m}(\mathcal{N})$ для некоторого $n \geq m$. Если $w_1 \notin W_{n,m}(\mathcal{N})$, то $u = 0$ в $\mathcal{N}_1$, поскольку многообразие $\mathcal{N}$ наследственно m-однородно. Следовательно, $w_1 \in W_{n,m}(\mathcal{N})$.

Предположим, что $w_2 \in W_{n,m}(\mathcal{N})$. Обозначим через ν_i' ограничение конгруэнции ν_i на $W_{n,m}(\mathcal{N})$, $i = 1, 2$. В силу леммы 2.9(ii) ν_1' и ν_2' — конгруэнции $\mathbf{S}_m$-множества $W_{n,m}(\mathcal{N})$, а в силу леммы 4.7(ii) это $\mathbf{S}_m$-множество конгруэнц-перестановочно. Поскольку $u\,\nu_1'\,w_1\,\nu_2'\,w_2$, существует слово $w \in W_{n,m}(\mathcal{N})$ такое, что $u\,\nu_2'\,w\,\nu_1'\,w_2$. Ясно, что $u\,\nu_2\,w\,\nu_1\,w_2\,\nu_1\,v$ и $c(u) = c(w) = c(w_2) = c(v)$. Учитывая лемму 2.1(vi), получаем, что $u\,\chi_2\,w\,\chi_1\,w_2\,\chi_1\,v$, т.е. $(u, v) \in \chi_2\chi_1$. Будем теперь предполагать, что $w_2 \notin W_{n,m}(\mathcal{N})$. Тогда из выполнимости в многообразии $\mathcal{N}_2$ тождества $w_1 = w_2$ и наследственной m-однородности многообразия $\mathcal{N}$ вытекает, что $\mathcal{N}_2$ удовлетворяет тождествам $w_1 = 0$ и $w_2 = 0$. Если слова $a, b \in F$ подобны, мы будем писать $a \approx b$. Если $u \approx w_1$, то $u = 0$ в $\mathcal{N}_2$. В этом случае $u\,\nu_2\,w_2\,\nu_1\,v$. Поскольку $c(u) = c(w_2) = c(v)$, из леммы 2.1(vi) вытекает, что $u\,\chi_2\,w_2\,\chi_1\,v$, т.е. $(u, v) \in \chi_2\chi_1$. Поэтому далее можно считать, что $u \not\approx w_1$. Это означает, что слова u и w_1 лежат в различных орбитах трансверсали $W_{n,m}(\mathcal{N})$. В частности, эта трансверсаль нетранзитивна. В силу лемм 2.10 и 2.11 трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{N})$ является собственной.

Предположим, что $v = 0$ в $\mathcal{N}$. Тогда $v = 0$ в $\mathcal{N}_2$, и потому $w_1\,\nu_2\,v$. Как обычно, из равенства $c(w_1) = c(v)$ и леммы 2.1(vi) вытекает, что $u\,\chi_1\,w_1\,\chi_2\,v$, т.е. $(u, v) \in \chi_1\chi_2$. Поэтому мы можем считать, что $v \neq 0$ в $\mathcal{N}$, откуда $v \in W_{k,m}(\mathcal{N})$ для некоторого $k \geq m$. Предположим сначала, что $k = n$. Поскольку $w_2 \notin W_{n,m}(\mathcal{N})$, многообразие $\mathcal{N}$ наследственно m-однородно, а многообразие $\mathcal{N}_1$ удовлетворяет тождеству $w_2 = v$, мы получаем, что $v = 0$ в $\mathcal{N}_1$. Трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{N})$ конгруэнц-перестановочна. В силу предложения 2.4 она содержит ≤ 2 орбит. С другой стороны, как мы видели выше, эта трансверсаль содержит две различных орбиты (одна из которых содержит слово u, а другая — слово w_1). Таким образом, $W_{n,m}(\mathcal{N})$ содержит ровно две орбиты. Слово v лежит в одной из них. Следовательно, оно подобно одному из слов u и w_1. Если $v \approx u$, то $u = 0$ в $\mathcal{N}_1$, поскольку $v = 0$ в $\mathcal{N}_1$. Но это противоречит выбору слова u. Таким образом, $v \approx w_1$. Поскольку $w_1 = 0$ в $\mathcal{N}_2$, мы получаем, что и $v = 0$ в $\mathcal{N}_2$. Но этот случай уже был рассмотрен в начале данного абзаца.

Остается рассмотреть случай, когда $k \neq n$. Предположим сначала, что $w_2 \in W_{k,m}(\mathcal{N})$. Поскольку трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{N})$ нетранзитивна, из леммы 4.7(iii) вытекает, что трансверсаль $W_{k,m}(\mathcal{N})$ транзитивна. Следовательно, $w_2 \approx v$. Поскольку $w_2 = 0$ в $\mathcal{N}_2$, получаем, что и $v = 0$ в $\mathcal{N}_2$. Но этот случай уже рассмотрен в начале предыдущего абзаца. Следовательно, мы можем считать, что $w_2 \notin W_{k,m}(\mathcal{N})$. Многообразие $\mathcal{N}$ наследственно m-однородно, а многообразие $\mathcal{N}_1$ удовлетворяет тождеству $w_2 = v$. Из этих двух фактов вытекает теперь, что $v = 0$ в $\mathcal{N}_1$. Если слово v линейно, то $v \lhd u$, и потому $u = 0$ в $\mathcal{N}_1$ вопреки выбору слова u. Следовательно, v не линейно, и потому $k > m$. Кроме того, $m > 1$, поскольку трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{N})$ является собственной. Мы видим, что трансверсаль $W_{k,m}(\mathcal{N})$ также является собственной. Применяя лемму 4.7(iv), получаем, что $w_1 \lhd v$. Поскольку $w_1 = 0$ в $\mathcal{N}_2$, мы получаем, что $v = 0$ в $\mathcal{N}_2$. Но этот случай уже рассмотрен в начале предыдущего абзаца.

Предложение 4.3 доказано. □

В силу предложений 4.1, 4.2 и 4.3 для завершения доказательства достаточности в теореме 1.1 осталось проверить, что многообразие $\mathcal{V}$ почти fi-2.5-перестановочно, если оно удовлетворяет одному из условий 1), 3), 5) и 7) теоремы 1.1. Для условия 1) достаточно сослаться на любое из предложений 2.1 или 2.2, а для условия 7) — на первое из этих предложений. Если же $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий 3) и 5), то, как показано в [29], оно почти fi-1.5-перестановочно.

С учетом результатов § 3, теорема 1.1 доказана. □

Список литературы

[1] Б.М. Верников, *О многообразиях полугрупп, решетка подмногообразий которых разложима в прямое произведение*, Алгебраические системы и их многообразия, Уральский гос. ун-т, Свердловск (1988), 41–52. MR0958323

[2] Б.М. Верников, *Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: запрещенные подмногообразия*, Изв. Уральского госуниверситета, Сер. матем., механ., № 22(4) (2002), 16–42. MR2003670

[3] Б.М. Верников, *Об одном ослабленном варианте конгруэнц-перестановочности для многообразий полугрупп*, Алгебра и логика, **43** (2004), 3–31. MR2073443

[4] Б.М. Верников, *О многообразиях полугрупп, на свободных объектах которых почти все вполне инвариантные конгруэнции слабо перестановочны*, Алгебра и логика, **43** (2004), 635–649. MR2135385

[5] Б.М. Верников, *Тождества и квазитождества в решетках многообразий олугрупп и связанные с ними конгруэнции*, Дисс. . . . д-ра физ.-мат. наук, Урал. гос. ун-т, Екатеринбург, 2004.

[6] Б.М. Верников, *О многообразиях полугрупп, на свободных объектах которых почти все вполне инвариантные конгруэнции 1.5-перестановочны*, Изв. Уральского госуниверситета, Сер. матем., механ., № 36(7) (2005), 95–106. MR2190944

[7] Б.М. Верников, *Квазитождества в модулярных решетках многообразий полугрупп*, Изв. Уральского госуниверситета, Сер. матем., механ., № 38(8) (2005), 5–35. MR2907153

[8] Б.М. Верников, М.В. Волков, *Решетки нильпотентных многообразий полугрупп.* II, Изв. Уральского госуниверситета, Сер. матем., механ., № 10(1) (1998), 13–33. MR1784293

[9] Б.М. Верников, М.В. Волков, *Строение решеток многообразий нильполугрупп*, Изв. Уральского госуниверситета, Сер. матем., механ., № 18(3) (2000), 34–52. MR1852774

[10] М.В. Волков, *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий.* II, Изв. вузов. Матем., № 7 (1992), 3–8. MR1233671

[11] М.В. Волков, *Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: тождества*, Изв. Уральского госуниверситета, Сер. матем., механ., № 22(4) (2002), 43–61. MR2003671

[12] Э.А. Голубов, М.В. Сапир, *Финитно аппроксимируемые многообразия полугрупп*, Изв. вузов. Матем., № 11 (1982), 21–29. MR0687309

[13] Л.Н. Шеврин, Б.М. Верников, М.В. Волков, *Решетки многообразий полугрупп*, Изв. вузов. Матем., № 3 (2009), 3–36. MR2581451

[14] J.A. Gerhard, *Semigroups with an idempotent power.* II. *The lattice of equational subclasses of* $[(xy)^2 = xy]$, Semigroup Forum, **14** (1977), 375–388. MR0486220

[15] G. Grätzer, *Lattice Theory: Foundation*, Springer Basel AG, Basel, 2011. MR2768581

[16] P.R. Jones, *Congruence semimodular varieties of semigroups*, Lect. Notes Math., **1320** (1988), 162–171. MR0957765

[17] P. Lipparini, *n-permutable varieties satisfy non trivial congruence identities*, Algebra Universalis, **33** (1995), 159–168. MR1318980

[18] R.N. McKenzie, G.F. McNulty, W.F. Taylor, *Algebras. Lattices. Varieties.* Vol. I, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, 1987.

[19] F.J. Pastijn, *Commuting fully invariant congruences on free completely regular semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc., **323** (1991), 79–92. MR1016809

[20] M. Petrich, *A construction and a classification of bands*, Math. Nachr., **48** (1971), 263–274. MR0294542

[21] M. Petrich, N.R. Reilly, *The modularity of the lattice of varieties of completely regular semigroups and related representations*, Glasgow Math. J., **32** (1990), 137–152. MR1058526

[22] L. Polák, *On varieties of completely regular semigroups*. I, Semigroup Forum, **32** (1985), 97–123. MR0803483

[23] Gy. Pollák, *On the consequences of permutation identities*, Acta Sci. Math. (Szeged), **34** (1973), 323–333. MR0322084

[24] E.J. Tully, *The equivalence, for semigroup varieties, of two properties concerning congruence relations*, Bull. Amer. Math. Soc., **70** (1964), 399–400. MR0160838

[25] B.M. Vernikov, *On congruences of G-sets*, Comment. Math. Univ. Carol., **38** (1997), 603–613. MR1485081

[26] B.M. Vernikov, *Completely regular semigroup varieties whose free objects have weakly permutable fully invariant congruences*, Semigroup Forum, **68** (2004), 154–158. MR2027613

[27] B.M. Vernikov, *Semigroup varieties with* 1.5*-permutable fully invariant congruences on their free objects*, Acta Appl. Math., **85** (2005), 313–318. MR2128926

[28] B.M. Vernikov, M.V. Volkov, *Permutability of fully invariant congruences on relatively free semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged), **63** (1997), 437–461. MR1480491

[29] B.M. Vernikov, M.V. Volkov, *Commuting fully invariant congruences on free semigroups*, Contrib. General Algebra, **12** (2000), 391–417. MR1777677

[30] M.V. Volkov, *Semigroup varieties with commuting fully invariant congruences on free objects*, Contemp. Math., **131**, pt.3 (1992), 295–316. MR1175889

[31] M.V. Volkov, *Modular elements of the lattice of semigroup varieties*, Contrib. General Algebra, **16** (2005), 275–288. MR2166965

[32] M.V. Volkov, T.A. Ershova, *The lattice of varieties of semigroups with completely regular square*, Monash Conf. on Semigroup Theory in Honour of G.B. Preston, World Scientific, Singapore (1991), 306–322. MR1232694

Борис Муневич Верников
Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
пр. Ленина 51,
620000, Екатеринбург, Россия
E-mail address: bvernikov@gmail.com

Вячеслав Юрьевич Шапрынский
Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
пр. Ленина 51,
620000, Екатеринбург, Россия
E-mail address: vshapr@yandex.ru