S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 605–625 (2014) УДК 517.958:533
MSC 35B06, 35Q99

ВЛОЖЕННЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

Р.Ф. ШАЯХМЕТОВА

Abstract. We consider the gas dynamics equations with the state equation of the monatomic polytropic gas. From optimal system of a 14-dimensional Lie algebra admitted by the model we select subalgebras containing projective operator which is specific to this model. The optimal system consists of 73 subalgebras. The graph of all inserted subalgebras was constructed. It submits from 6 fragments. For any 4-dimensional subalgebra a hierarchy of inserted invariant submodels was constructed.

Keywords: gas dynamics equations, optimal system of subalgebras, graph of inserted subalgebras, invariant submodel.

1. Введение

Модель движения одноатомного газа задается системой уравнений [1]:

$$\begin{gathered}\rho\, D\vec{u} + \nabla p = 0,\\ D\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0,\\ Dp + \frac{5}{3}p\,\mathrm{div}\vec{u} = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где $D = \partial_t + \vec{u}\cdot\nabla$ – оператор полного дифференцирования по времени, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ – градиент, $\vec{u} = (u, v, w)$ – вектор скорости, ρ – плотность, p – давление. Все зависимые переменные считаются функциями времени t и декартовых координат $\vec{x} = (x, y, z)$. Система (1) допускает 14–мерную алгебру Ли операторов дифференцирования первого порядка.

Shayakhmetova, R.F., Inserted invariant submodels for motion of monatomic gas.

© 2014 Шаяхметова Р.Ф.

Работа поддержана РФФИ (грант 14-01-97027).

Поступила 29 июля 2014 г., опубликована 21 августа 2014 г.

Базисные операторы алгебры L_{14}, записанные в декартовой системе координат имеют вид:

$X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = \partial_z$ – переносы по пространству;

$X_4 = t\partial_x + \partial_u$, $X_5 = t\partial_y + \partial_v$, $X_6 = t\partial_z + \partial_w$ – Галилеевы переносы;

$X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w,$

$X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u$ – вращения;

$X_{10} = \partial_t$ – перенос по времени;

$X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ – равномерное растяжение;

$X_{12} = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + tz\partial_z + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v + (z - tw)\partial_w -$

$- 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p$ – проективный оператор;

$X_{13} = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - 3\rho\partial_\rho - 5p\partial_p$, $X_{14} = \rho\partial_\rho + p\partial_p$ – растяжения.

Таблица 1: Коммутаторы для алгебры Ли L_{14}.

(вместо операторов пишутся их номера)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	0	0	0	0	0	-3	2	0	1	4	0	0
2	0	0	0	0	0	0	3	0	-1	0	2	5	0	0
3	0	0	0	0	0	0	-2	1	0	0	3	6	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	-6	5	-1	0	0	-4	0
5	0	0	0	0	0	0	6	0	-4	-2	0	0	-5	0
6	0	0	0	0	0	0	-5	4	0	-3	0	0	-6	0
7	0	-3	2	0	-6	5	0	-9	8	0	0	0	0	0
8	3	0	-1	6	0	-4	9	0	-7	0	0	0	0	0
9	-2	1	0	-5	4	0	-8	7	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	1	2	3	0	0	0	0	10	11+13	10	0
11	-1	-2	-3	0	0	0	0	0	0	-10	0	12	0	0
12	-4	-5	-6	0	0	0	0	0	0	-11-13	-12	0	-12	0
13	0	0	0	4	5	6	0	0	0	-10	0	12	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Система (1) и таблица 1 допускает три дискретных преобразования [1]:

$I_1 : (t, \vec{x}) \to (-t, -\vec{x}),$

$I_2 : (t, \vec{u}) \to (-t, -\vec{u}),$

$I_3 : t \to (1/t), x \to (x/t), y \to (y/t), z \to (z/t), u \to (x - tu), v \to (y - tv),$

$w \to (z - tw), p \to (-t^3 p), \rho \to (-t^5 \rho).$

Внутренним автоморфизмом алгебры L_{14} является решение задачи [2]:

$$\frac{dX'}{da_i} = [X', X_i],\, X'|_{a_i=0} = X, i = 1, \ldots, 14$$

Обозначим произвольный элемент из L_{14} так:
$X = x^1 X_1 + x^2 X_2 + x^3 X_3 + \cdots + x^{14} X_{14} \subset L_{14},$
$x = (x^1, \ldots, x^{14})$ – коэффициенты разложения оператора по базису $X_1, \ldots, X_{14}$.

Для удобства введены проекции:
$p_1(x) = (x^1, x^2, x^3)$, $p_2(x) = (x^4, x^5, x^6)$, $p_3(x) = (x^7, x^8, x^9)$;
а также параметры внутренних автоморфизмов:
$\vec{\alpha_1} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\alpha_2} = (a_4, a_5, a_6)$ – векторные; $b = e^{-a_{11}}, c = e^{-a_{13}}$.
S - общая (3×3) матрица вращений в трехмерном пространстве.

В работе [3] приведены внутренние автоморфизмы алгебры L_{14}. С помощью введенных обозначений они сгруппированы в удобном виде:

$$T : p_1(\widetilde{x}) = p_1(x) - \vec{\alpha_1} \times p_3(x) + x^{11}\vec{\alpha_1},\ p_2(\widetilde{x}) = p_2(x) + x^{12}\vec{\alpha_1};$$
$$\Gamma : p_1(\widetilde{x}) = p_1(x) - x^{10}\vec{\alpha_2},\ p_2(\widetilde{x}) = p_2(x) - \vec{\alpha_2} \times p_3(x) - x^{13}\vec{\alpha_2};$$
$$S : p_1(\widetilde{x}) = Sp_1(x),\ p_2(\widetilde{x}) = Sp_2(x),\ p_3(\widetilde{x}) = Sp_3(x);$$
$$A_{10} : p_1(\widetilde{x}) = p_1(x) + a_{10}p_2(x),\ \widetilde{x}^{10} = x^{10} + a_{10}x^{11} + a_{10}^2 x^{12} + a_{10}x^{13},$$
$$\widetilde{x}^{11} = x^{11} + a_{10}x^{12}, \widetilde{x}^{13} = x^{13} + a_{10}x^{12};$$
$$A_{11} : p_1(\widetilde{x}) = bp_1(x),\ p_2(\widetilde{x}) = b^{-1}p_2(x),\ \widetilde{x}^{10} = b^2 x^{10},\ \widetilde{x}^{12} = b^{-2}x^{12};$$
$$A_{12} : p_2(\widetilde{x}) = a_{12}p_1(x) + p_2(x),\ \widetilde{x}^{11} = a_{12}x^{10} + x^{11},$$
$$\widetilde{x}^{12} = a_{12}^2 x^{10} + a_{12}x^{11} + x^{12} + a_{12}x^{13}, \widetilde{x}^{13} = a_{12}x^{10} + x^{13};$$
$$A_{13} : p_1(\widetilde{x}) = cp_1(x),\ p_2(\widetilde{x}) = cp_2(x);$$

Также замечены дискретные автоморфизмы:

$$\varepsilon_1 : p_1(\widetilde{x}) = -p_1(x),\ \widetilde{x}^{10} = -x^{10},\ \widetilde{x}^{12} = -x^{12};$$
$$\varepsilon_2 : p_2(\widetilde{x}) = -p_2(x),\ \widetilde{x}^{10} = -x^{10},\ \widetilde{x}^{12} = -x^{12};$$
$$\varepsilon_3 : p_1(\widetilde{x}) = p_2(x),\ p_2(\widetilde{x}) = p_1(x),\ \widetilde{x}^{10} = -x^{12},\ \widetilde{x}^{11} = -x^{13},\ \widetilde{x}^{12} = -x^{10},$$
$$\widetilde{x}^{13} = -x^{11}.$$

2. Оптимальная система подалгебр с проективным оператором, допускаемых уравнениями газовой динамики одноатомного газа

В работе [3] построена оптимальная система всех подалгебр 14–мерной алгебры Ли, допускаемых уравнениями движения одноатомного газа. В этой таблице 1248 классов неподобных подалгебр различных размерностей. С таким числом подалгебр работать невозможно, если иметь ввиду построение графа вложенных друг в друга подалгебр. Поэтому ограничимся рассмотрением подалгебр, содержащих проективный оператор, специфический для одноатомного газа. Кроме того покажем, что достаточно рассмотреть 13–мерный идеал.

2.1. **Общие положения.** Алгебра L_{14} является прямой суммой идеалов L_{13} и $X_{14} : L_{14} = L_{13} \oplus X_{14}$, где $L_{13} = \{X_1, X_2, \ldots, X_{13}\}$, а X_{14} – центр в алгебре L_{14}, т.е. $[X_i, X_{14}] = 0, i = \overline{1, 13}$ (см. табл. 1). Подалгебы L_{14}, образованные из подалгебр алгебры L_{13} добавлением к базису оператора X_{14}, назовем тривиальными. В дальнейшем речь пойдет о нетривиальных подалгебрах.

Любая нетривиальная подалгебра N_k размерности k из L_{14}, не входящая в оптимальную систему для L_{13}, имеет следующий базис:

$$\widetilde{Y_1} = \widetilde{a_1}X_{14} + \sum_{i=1}^{13} \widetilde{b_{1i}}X_i, \widetilde{Y_2} = \widetilde{a_2}X_{14} + \sum_{i=1}^{13} \widetilde{b_{2i}}X_i, \ldots, \widetilde{Y_k} = \widetilde{a_k}X_{14} + \sum_{i=1}^{13} \widetilde{b_{ki}}X_i,$$

где не все $\widetilde{a_j}$ равны нулю.

Очевидно, можно выбрать новый базис в виде:

$$Y_1 = X_{14} + \overline{Y_1}, Y_2 = \sum_{i=1}^{13} b_{2i} X_i, \ldots, Y_k = \sum_{i=1}^{13} b_{ki} X_i,$$

где $\overline{Y_1} = \sum\limits_{i=1}^{13} b_{1i} X_i \neq 0$(нетривиальный случай) определен с точностью до линейной комбинации $Y_2, \ldots, Y_k$.

Условия подалгебры есть $[Y_i, Y_j] = \sum\limits_{l=2}^{k} c_{ij}^l Y_l, i, j = \overline{1, k}$, т.к. при коммутировании оператор X_{14} появиться не может (см. табл. 1), а значит, оператор Y_1 не появится в правой части равенства.

Отсюда следует равенство $[Y_i, Y_j] = \sum\limits_{l=2}^{k} c_{ij}^l Y_l, i, j = \overline{2, k}$, значит $J_{k-1} =$ $= \{Y_2, \ldots, Y_k\}$ – подалгебра из L_{13} размерности $k-1$. Подпространство $N_k = \left\{\overline{Y_1}, Y_2, \ldots, Y_k\right\}$ также есть подалгебра из L_{13} размерности k, т.к. $\left[\overline{Y_1}, Y_j\right] = \left[X_{14} + \overline{Y_1}, Y_j\right] = [Y_1, Y_j] = \sum\limits_{l=2}^{k} c_{1j}^l Y_l, j = \overline{2, k}$. Более того, J_{k-1} есть идеал для N_k.

2.2. **Принцип построения оптимальной системы, содержащей проективный оператор.** Из таблицы работы [3] выберем подалгебры, содержащие оператор X_{12}, и не содержащие оператор X_{14}. Результат содержит 73 класса подалгебр, которые приведены в таблице 2. Оператор X_{12} входит только в один из базисных операторов.

Перечисление нетривиальных подалгебр из L_{14} состоит из двух этапов.

Этап 1. Для каждой подалгебры J_{k-1} размерности $k-1$ из таблицы найти всевозможные надалгебры N_k размерности k ($N_k = \{J_{k-1}, \overline{Y_1}\}$), для которых подалгебра J_{k-1} является идеалом. Выбрать базис в N_k так, чтобы он содержал базисные операторы J_{k-1}. Прибавить X_{14} к оператору $\overline{Y_1}$.

Этап 2. Для каждой подалгебры из таблицы выбрать операторы, не содержащие X_{12}, и проверить образуют ли они идеал выбранной подалгебры. Если это выполнено, то прибавить X_{14} к оператору, содержащему X_{12}.

Далее приведены примеры описанных процедур. Вместо операторов пишутся их номера.

Пример 1.
Подалгебра 4.3 подпространство $\{7, 8, 9, 10 + 12 + a(11 - 13)\}$ вложена в подалгебру 5.2 подпространство $\{7, 8, 9, 10 + 12, 11 - 13\} \sim$
$\{7, 8, 9, 10 + 12 + a(11 - 13), 11 - 13\}$. Вычисляя коммутаторы, получаем, что подалгебра 4.3 является идеалом в 5.2. Значит, подалгебра
$\{7, 8, 9, 10 + 12 + a(11 - 13), 11 - 13 + b14\}$ входит в оптимальную систему для L_{14} (см. [3]).

Пример 2.
Возьмем подалгебру 5.2 подпространство $\{7, 8, 9, 10 + 12, 11 - 13\}$. Подпространство $\{7, 8, 9, 11 - 13\}$ является идеалом в 5.2. Значит, существует подалгебра $\{7, 8, 9, 11 - 13, 10 + 12 + a14\}$ из оптимальной системы для L_{14}(см. [3]).

Пояснение к этапу 1.
J_{k-1} не является идеалом в N_k, если при коммутировании операторов из J_{k-1} с $\overline{Y_1}$ получится оператор, содержащий $\overline{Y_1}$. Из таблицы коммутаторов можно

заключить, что так может произойти, только если $\overline{Y_1}$ содержит операторы $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_{10}$ или X_{12}. В остальных случаях J_{k-1} будет идеалом в N_k.

Пояснение к этапу 2.
Если операторы, не содержащие X_{12}, не образуют идеал выбранной подалгебры, то оператор, полученный при коммутировании, должен содержать X_{12}. Из таблицы коммутаторов видно, что он может появиться только при коммутировании оператора, содержащего X_{11} или X_{13} с оператором, содержащим X_{12}. Так что проверять будем только такие операторы. Причем, как видно из таблицы 2, это либо X_{11}, X_{13}, либо $X_{11} \pm X_{13}$.
Вычислим коммутаторы:
$[X_{11}, X_{12}] = X_{12}, [X_{13}, X_{12}] = X_{12}, [X_{11} + X_{13}, X_{12}] = 2X_{12}$,
$[X_{11} - X_{13}, X_{12}] = 0$.

Отсюда следует, что подалгебра не будет идеалом в тех надалгебрах, в которых есть операторы X_{11}, X_{13} или $X_{11} + X_{13}$. Просмотр подалгебр из таблицы 2 дает следующий результат.

Этапу 1 удовлетворяют вложения подалгебр в качестве идеала:
$1.1 \subset 2.2, 2.3; 1.2 \subset 2.1, 2.3; 1.3 \subset 2.5; 2.1 \subset 3.2; 2.2 \subset 3.2; 2.3 \subset 3.2; 2.4 \subset 3.3;$
$2.5 \subset 3.4; 3.1 \subset 4.1, 4.2; 3.4 \subset 4.6, 4.9; 3.5 \subset 4.7; 3.6 \subset 4.8, 4.10; 3.7 \subset 4.4, 4.9;$
$3.8 \subset 4.11, 4.12; 4.1 \subset 5.1; 4.2 \subset 5.1; 4.3 \subset 5.2; 4.4 \subset 5.5; 4.5 \subset 5.4; 4.6 \subset 5.5;$
$4.8 \subset 5.4; 4.9 \subset 5.5; 4.10 \subset 5.4; 4.11 \subset 5.6; 4.12 \subset 5.8; 5.3 \subset 6.2, 6.3; 5.8 \subset 6.7, 6.9;$
$5.9 \subset 6.6; 5.10 \subset 6.8, 6.10; 5.11 \subset 6.4, 6.9; 6.1 \subset 7.1; 6.2 \subset 7.2; 6.3 \subset 7.2; 6.4 \subset 7.5;$
$6.5 \subset 7.4; 6.7 \subset 7.5; 6.8 \subset 7.4; 6.9 \subset 7.5; 6.10 \subset 7.4; 6.11 \subset 7.6; 7.3 \subset 8.1, 8.2;$
$7.7 \subset 8.4, 8.5; 7.8 \subset 8.3, 8.5; 8.1 \subset 9.1; 8.2 \subset 9.1; 8.3 \subset 9.3; 8.4 \subset 9.3; 8.5 \subset 9.3;$
$9.2 \subset 10.1, 10.2; 10.1 \subset 11.1; 10.2 \subset 11.1; 10.3 \subset 11.2.$

Этапу 2 удовлетворяют все подалгебры из таблицы 2 кроме следующих: 3.1, 4.1, 4.2, 5.1, 5.3, 6.1, 6.2, 6.3, 7.1, 7.2, 7.3, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2, 10.1, 10.2, 11.1, 12.1, 13.1.

2.3. **Таблица подалгебр из L_{13}.** В таблице в первой колонке стоит номер подалгебры, где число до точки обозначает размерность подалгебры, а число после точки – порядковый номер подалгебры данной размерности. Во второй колонке указаны номера подалгебр из [3], по которым получена указанная в строке подалгебра. В третьей колонке приведен базис подалгебры и условия на параметры операторов.

Таблица 2: Неподобные подалгебры L_{13}, содержащие X_{12}.

1.1	2.13,14	$7 + a(10 + 12) + b(11 - 13)$, $a \neq 0$
1.2	2.65	$10 + 12 + a(11 - 13)$
1.3	2.97	$a(3 - 5) + b(2 + 6) + 7 + 10 + 12$, $a^2 + b^2 \neq 0$
2.1	3.24	$10 + 12, 11 - 13$
2.2	3.26	$7 + a(10 + 12), 11 - 13$, $a \neq 0$
2.3	3.27,28	$7 + a(11 - 13), 10 + 12 + b(11 - 13)$
2.4	3.61,62	$-3 + 5, 7 + 10 + 12 + a(11 - 13)$
2.5	3.182	$-3 + 5, a(2 + 6) + 7 + 10 + 12$, $a \neq 0$
3.1	4.7	$10, 12, 11 + 13$
3.2	4.9	$7, 10 + 12, 11 - 13$
3.3	4.37	$-3 + 5, 7 + 10 + 12, 11 - 13$

3.4	4.82,83	$2+6, -3+5, 7+a(10+12)+b(11-13),\ a\neq 0$
3.5	4.86	$a4+2+6, a1-3+5, (2)7+10+12+b(11-13),\ a\neq 0$
3.6	4.87,88	$1, 4, 7+a(10+12)+b(11-13),\ a\neq 0$
3.7	4.173–175	$a2+6, -3+a5, 10+12+b(11-13),\ a\geq 0$
3.8	4.258	$1, 4, a(-3+5)+b(2+6)+7+10+12,\ a^2+b^2\neq 0$
4.1	5.1	$10, 11, 12, 13$
4.2	5.3	$7+a13, 10, 12, 11+13$
4.3	5.12	$7, 8, 9, 10+12+a(11-13)$
4.4	5.58	$a2+b3+6, -b2+c3+5, 10+12, 11-13,\ ac+b^2+1=0$
4.5	5.59	$1, 4, 10+12, 11-13$
4.6	5.60	$2+6, -3+5, 7+a(10+12), 11-13,\ a\neq 0$
4.7	5.61	$a4+2+6, a1-3+5, (2)7+10+12, 11-13,\ a\neq 0$
4.8	5.62	$1, 4, 7+a(10+12), 11-13,\ a\neq 0$
4.9	5.63,65	$2+6, -3+5, 7+a(11-13), 10+12+b(11-13)$
4.10	5.64,66	$1, 4, 7+a(11-13), 10+12+b(11-13)$
4.11	5.115,116	$1, 4, -3+5, 7+10+12+a(11-13)$
4.12	5.250	$1, 4, -3+5, a(2+6)+7+10+12,\ a\neq 0$
5.1	6.1	$7, 10, 11, 12, 13$
5.2	6.4	$7, 8, 9, 10+12, 11-13$
5.3	6.14	$1, 4, 10, 12, 11+13$
5.4	6.15	$1, 4, 7, 10+12, 11-13$
5.5	6.16	$2+6, -3+5, 7, 10+12, 11-13$
5.6	6.63	$1, 4, -3+5, 7+10+12, 11-13$
5.7	6.64	$3, 5, 2+6, 7-10-12, 11-13$
5.8	6.96,97	$1, 4, -3+5, 2+6, 7+a(10+12)+b(11-13),\ a\neq 0$
5.9	6.100	$a3+4, 1+a6, 2+6, -3+5, (2)7-10-12+b(11-13),\ a\neq 0$
5.10	6.101	$2, 3, 5, 6, 7+a(10+12)+b(11-13),\ a\neq 0$
5.11	6.166–168	$1, 4, a2+6, -3+a5, 10+12+b(11-13),\ a\geq 0$
6.1	7.1	$7, 8, 9, 10, 12, 11+13$
6.2	7.3	$1, 4, 10, 11, 12, 13$
6.3	7.4	$1, 4, 7+a13, 10, 12, 11+13$
6.4	7.46	$1, 4, a2+b3+6, -b2+c3+5, 10+12, 11-13,\ ac+b^2+1=0$
6.5	7.47	$2, 3, 5, 6, 10+12, 11-13$
6.6	7.48	$a3+4, 1+a6, 2+6, -3+5, (2)7-10-12, 11-13,\ a\neq 0$
6.7	7.49	$1, 4, 2+6, -3+5, 7+a(10+12), 11-13,\ a\neq 0$
6.8	7.50	$2, 3, 5, 6, 7+a(10+12), 11-13,\ a\neq 0$
6.9	7.51,53	$1, 4, -3+5, 2+6, 7+a(11-13), 10+12+b(11-13)$
6.10	7.52,54	$2, 3, 5, 6, 7+a(11-13), 10+12+b(11-13)$
6.11	7.78	$1, 2, 4, 6, -3+5, 7-10-12+a(11-13)$
7.1	8.1	$7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$
7.2	8.2	$1, 4, 7, 10, 11, 12, 13$
7.3	8.18	$2, 3, 5, 6, 10, 12, 11+13$
7.4	8.19	$2, 3, 5, 6, 7, 10+12, 11-13$
7.5	8.20	$1, 4, 2+6, -3+5, 7, 10+12, 11-13$

7.6	8.40	$1, 2, 4, 6, -3+5, 7-10-12, 11-13$
7.7	8.48	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7+a(10+12)+b(11-13)$, $a \neq 0$
7.8	8.67	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10+12+a(11-13)$
8.1	9.3	$2, 3, 5, 6, 10, 11, 12, 13$
8.2	9.4	$2, 3, 5, 6, 7+a13, 10, 12, 11+13$
8.3	9.21	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10+12, 11-13$
8.4	9.23	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7+a(10+12), 11-13$, $a \neq 0$
8.5	9.24,25	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7+a(11-13), 10+12+b(11-13)$
9.1	10.2	$2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13$
9.2	10.8	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 11+13$
9.3	10.10	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10+12, 11-13$
10.1	11.1	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13$
10.2	11.3	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7+a13, 10, 12, 11+13$
10.3	11.12	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10+12+a(11-13)$
11.1	12.1	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13$
11.2	12.4	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10+12, 11-13$
12.1	13.1	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 11+13$
13.1		$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$

3. Граф вложенных подалгебр

Оптимальная система, приведенная выше, состоит из подалгебр(по одному представителю из класса подобных), а также из семейств подалгебр, зависящих от параметров, которые есть инварианты группы внутренних автоморфизмов. Далее представлен граф–дерево всех вложенннных подалгебр из оптимальной системы.

3.1. **Общие правила построения графа.** Алгоритм построения графа заключается в следующем. Для лучшей обозримости граф поделен на 6 фрагментов. Сначала строится основной подграф $\Gamma_7(13.1)$, в котором прослеживаются все вложения подалгебр размерности больше или равной 7 в подалгебру 13.1(конечная вершина графа). Затем строятся промежуточные подграфы $\Gamma_4(7.1–3)$, $\Gamma_4(7.4)$, $\Gamma_4(7.5–8)$, в которых приведены все вложенные подалгебры размерности больше или равной 4 в подалгебры 7.1–3, 7.4 и 7.5–8 соответственно. Далее строятся конечные подграфы $\Gamma_1(4.1–5)$, $\Gamma_1(4.6–12)$, в которых приведены вложения подалгебр размерности 1–3 в подалгебры 4.1–5 и 4.6–12. Таким образом, основная связь между фрагментами графа осуществляется за счет того, что конечные вершины одного подграфа являются вершинами в основании другого подграфа.

Отметим, что подалгебра 6.6 не вкладывается ни в одну семимерную подалгебру, но справедливо вложение $6.6 \subset 8.4$. Она добавлена как конечная вершина к подграфу $\Gamma_4(7.5–8)$(см. рис. 4). Аналогично, подалгебра 3.2 добавлена к $\Gamma_1(4.6–12)$(см. рис. 6).

Введены следующие обозначения.

В вершинах графа записаны номера подалгебр из таблицы 2. Те из них, которые удовлетворяют этапу 2, выделены жирной линией. Ребра–стрелки обозначают вложение подалгебры в надалгебру, причем если оно удовлетворяет этапу 1, то также выделены жирной линией. Одни подалгебры могут вкладываться в другие при некоторых значениях параметров семейств подалгебр, тогда эти значения указываются вдоль стрелок возле подалгебр и надалгебр соотвественно.

Подалгебра является подалгеброй надалгебры, если любой базисный элемент подалгебры является линейной комбинацией базисных элементов надалгебры. Граф построен с учетом подобия в классе подобных подалгебр, то есть подалгебра может вкладываться в надалгебру после применения внутренних автоморфизмов.

Все фрагменты графа вложенных подалгебр строятся методом перебора подалгебр из оптимальной системы в несколько этапов. Сначала для подалгебр каждой из конечных вершин подграфа размерности n выписываются все вложения в нее подалгебр до размерности $m(m$ размерность подалгебр в вершинах основания подграфа). Они являются вершинами строящегося фрагмента. Затем для каждой подалгебры размерности $k(k=\overline{n-1,m})$ проверяется вкладывается ли она в вершины размерности $l(l=\overline{k+1,n})$. Причем с вершиной размерности $k+2,\ldots,n$ она соединяется в том случае, если она не соединяется с ней через подалгебры меньших размерностей. То есть проводятся лишь те ребра подграфа, которые обозначают вложение подалгебр только "напрямую". Следует отметить, что большинство подалгебр вкладывается в подалгебры размерности больше на 1 или 2. Но есть и такие, которые вкладываются только в подалгеры, размерность которых больше на 3, 4, 5 и даже 6. Так, для основного и промежуточных подграфов выписаны подалгебры размерности меньше 7 и 4 соответственно, которые вкладываются только "напрямую"в подалгебры размерности больше 7 и 4 соотвественно. Они отделены от остальных подалгебр пунктирной линией.

3.2. **Основной подграф Γ_7(13.1).** Рассматриваются подалгебры из таблицы 2, начиная с 13–мерной подалгебры 13.1, которая является конечной вершиной подграфа. В нее вкладывается подалгебра 12.1. которая составляет второй уровень графа. Подалгебры 11.1 и 11.2 не вкладываются в подалгебру 12.1, а вкладываются только в 13.1. Подалгебры 10.1 и 10.2 вкладываются в 11.1, а 10.3 в подалгебру 11.2. Но также подалгебра 10.2 вкладывается в 12.1 при значении параметра $a=0$(указывается у начала ребра, соединяющего их). Подобным образом прослеживаются вложения всех подалгебр до размерности 7. Потом дописываются подалгебры меньших размерностей, "перепрыгивающие"семимерные(вкладывающиеся только "напрямую"в подалгебры размерности 8 и больше).

Наблюдается следующее свойство подграфа(и всего графа). Подалгебры разбиваются на 2 сорта: содержащие в качестве базисных операторы X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}(или$X_{11}+X_{13}$) и содержащие операторы $X_{10}+X_{12}, X_{11}-X_{13}$(не обязательно в качестве базисных). Подалгебры первого сорта вкладываются только друг в друга. Подалгебры второго сорта же иногда могут вкладываться в подалгебры первого сорта. Например, $8.5 \subset 10.2$ при значении параметра $b=0$.

Большинство подалгебр вкладываются в подалгебры размерности больше на 1 или 2, что происходит при объединении двух базисных операторов или при отбрасывании одного-двух операторов. Некоторые подалгебры "перепрыгивают"через несколько уровней, например, $7.1 \subset 13.1, 7.2 \subset 11.1$.

Есть подалгебры, которые вкладываются в другие подалгебры после применения внутренних автоморфизмов. Так, подалгебра 6.2 подпространство $\{1, 4, 10, 11, 12, 13\}$ под действием S переходит в подалгебру $\{2, 5, 10, 11, 12, 13\}$, которая вкладывается в подалгебру 8.2 подпространство $\{2, 3, 5, 6.10, 11, 12, 13\}$.

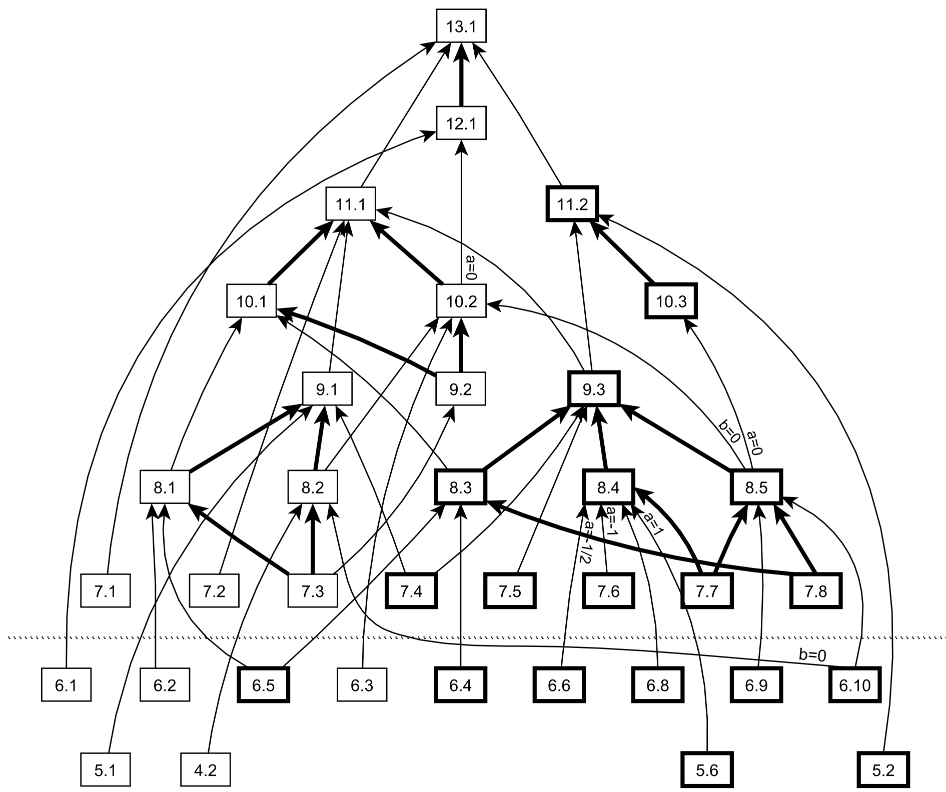

Рис. 1. Основной подграф $\Gamma_7(13.1)$

3.3. **Промежуточные подграфы** Γ_4**(7.1–3),** Γ_4**(7.4),** Γ_4**(7.5–8).** Рассматриваются вершины 7.1, 7.2, 7.3 в основании основного фрагмента графа. Для них прослеживаются все вложения подалгебр размерности k ($k = \overline{4, 6}$) и подалгебр меньших размерностей, "перепрыгивающих" четырехмерные подалгебры. Получаем подграф $\Gamma_4(7.1–3)$.

Отметим, что $3.6 \subset 6.3$ и подалгебра 5.3 вкладывается в подалгебру 7.3 после действия внутренним автоморфизмом S.

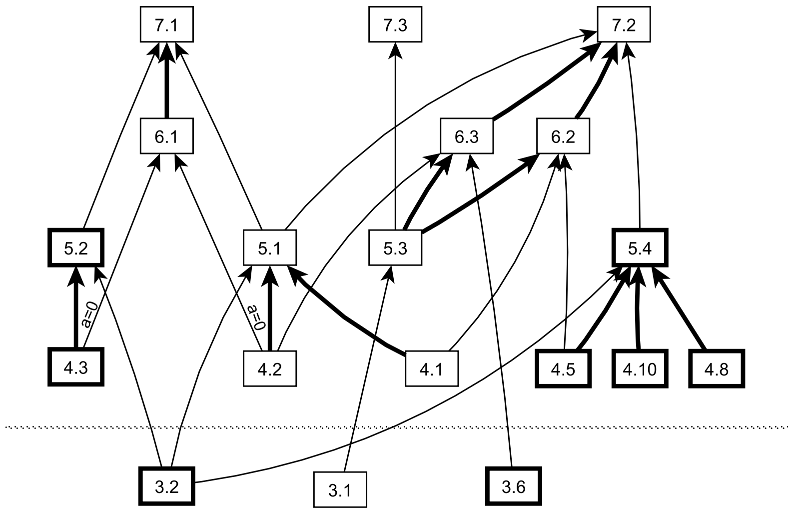

Рис. 2. Промежуточный подграф $\Gamma_4(7.1–3)$

Аналогично, для подграфа $\Gamma_4(7.4)$ рассматривается вершина 7.4. Подалгебра 4.5 после действия внутренним автоморфизмом S вкладывается в подалгебру 6.5.

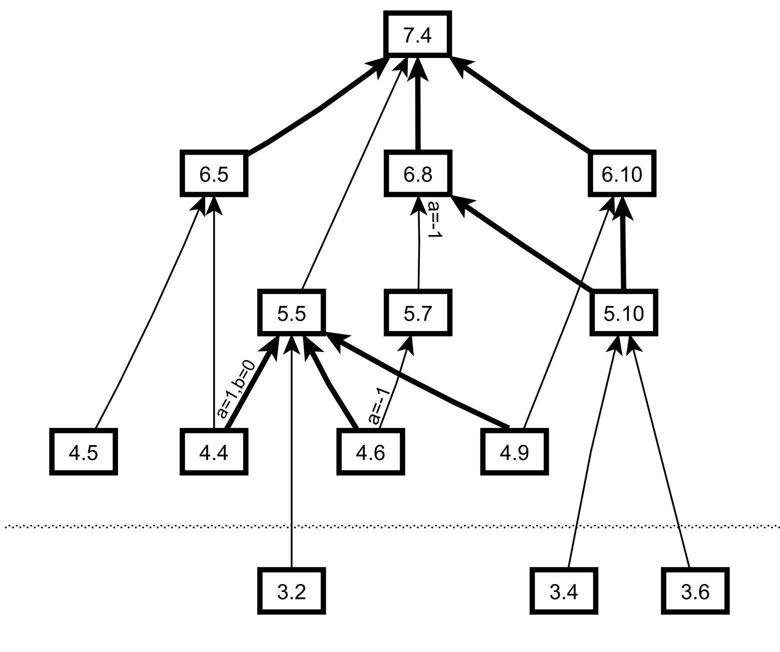

Рис. 3. Промежуточный подграф $\Gamma_4(7.4)$

Для подграфа $\Gamma_4(7.5\text{–}8)$ рассматриваются вершины 7.5, 7.6, 7.7, 7.8 и 6.6, которая вкладывается только в 8.4.

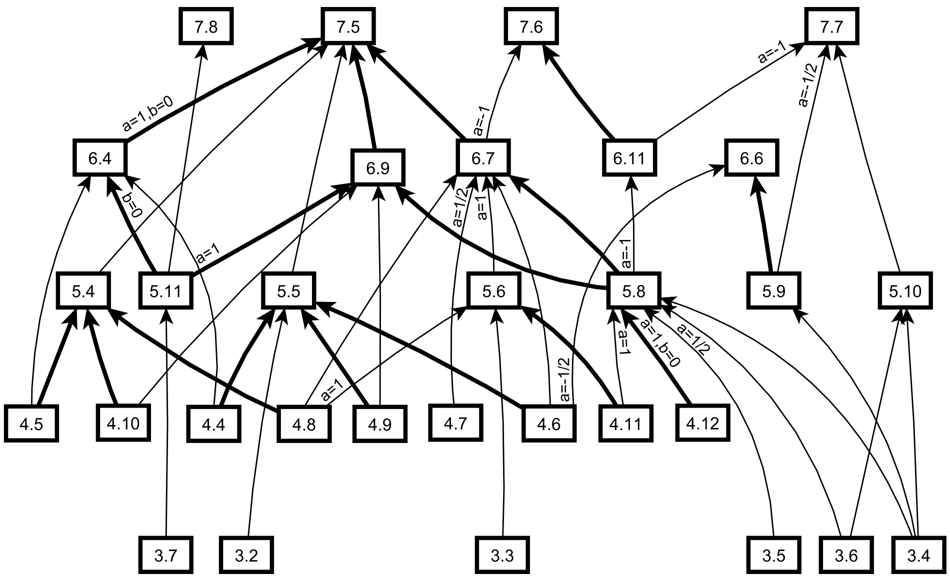

Рис. 4. Промежуточный подграф $\Gamma_4(7.5\text{–}8)$

3.4. **Конечные подграфы Γ_1(4.1–5), Γ_1(4.6–12).** Рассматриваются вершины 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 в основании промежуточных фрагментов графа. По ним строится подграф $\Gamma_1(4.1\text{–}5)$ всех вложенных подалгебр размерности $k(k=\overline{1,3})$. Отметим, что в трехмерные подалгебры 3.1, 3.7 входит только одномерная подалгебра 1.2.

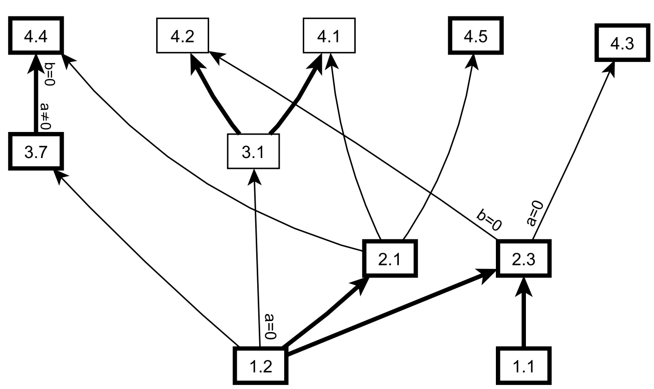

Рис. 5. Конечный подграф $\Gamma_1(4.1\text{–}5)$

Граф $\Gamma_1(4.6\text{–}12)$ строится по вершинам 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 и вершине 3.2, которая вкладывается в подалгебры 5.1, 5.2, 5.4, 5.5. Отметим, что в подалгебры 3.5 и 3.6 вкладывается только 1.1, а в 3.8 только 1.3.

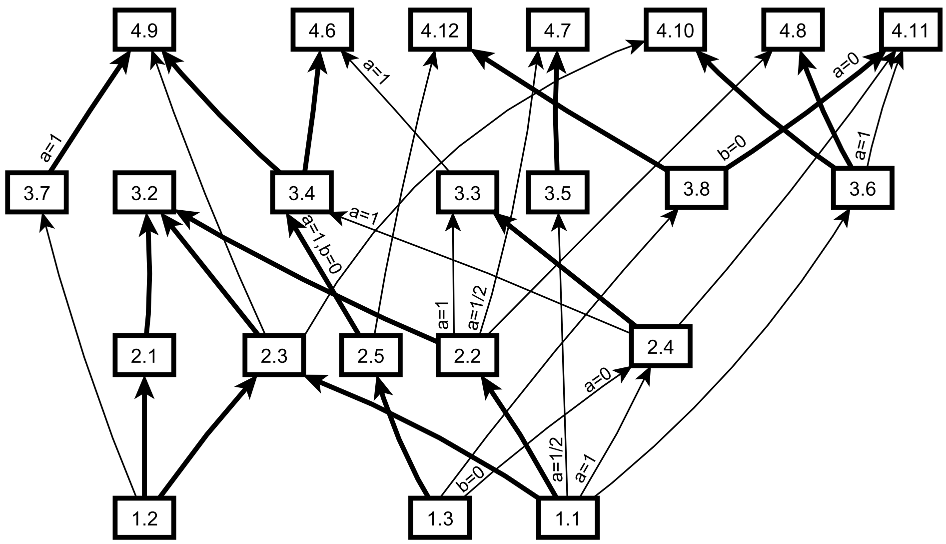

Рис. 6. Конечный подграф $\Gamma_1(4.6\text{–}12)$

4. Система вложенных подмоделей для конечного фрагмента графа $\Gamma_1(4.4)$

Для каждой подалгебры из оптимальной системы можно построить подмодель (инвариантную, частично инвариантную или дифференциально инвариантную). На примере четырехмерной подалгебры 4.4 рассматривается граф $\Gamma_1(4.4)$, по которому строится иерархия вложенных инвариантных подмоделей. Для подалгебр графа вычисляются согласованные инварианты. По инвариантам строятся инвариантные подмодели. При этом решение любой подмодели надалгебры будет решением некоторой подмодели подалгебры [4].

4.1. **Вычисление согласованных инвариантов.** Граф $\Gamma_1(4.4)$, являющийся подграфом $\Gamma_1(4.1\text{–}5)$, представлен на рис. 7. Он состоит из 4–х подалгебр, параметры которых согласованы.

Рассмотрим подалгебру 1.2 с базисным оператором
$Y_1 = X_{10} + X_{12} + d(X_{11} - X_{13}) = (1+t^2)\partial_t + (t+d)x\partial_x + (t+d)y\partial_y + (t+d)z\partial_z + (x+(d-t)u)\partial_u + (y+(d-t)v)\partial_v + (z+(d-t)w)\partial_w + 3(d-t)\rho\partial_\rho + 5(d-t)p\partial_p$.
Оператор Y_1 действует в пространстве независимых (t,x,y,z) и зависимых (u,v,w,ρ,p) переменных.

Функция $I(t,\vec{x},\vec{u},\rho,p)$ - инвариант оператора Y_1, если $Y_1 I = 0 \Rightarrow$
$(1+t^2)I_t + (t+d)x^i I_{x^i} + (x^i + (d-t)u^i)I_{u^i} + 3(d-t)\rho I_\rho + 5(d-t)pI_p = 0$

Получили линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка. Общее решение есть произвольная функция от функционально

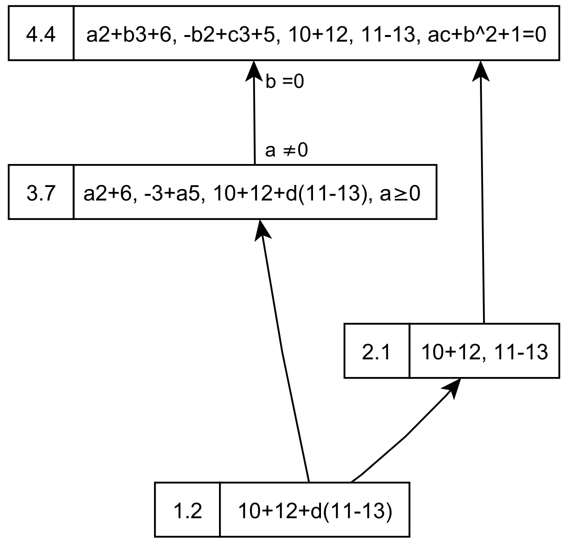

Рис. 7. Подграф $\Gamma_1(4.4)$

независимого набора интегралов (инвариантов) характеристического уравнения

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{dx^i}{(t+d)x^i} = \frac{du^i}{x^i+(d-t)u^i} = \frac{d\rho}{3(d-t)\rho} = \frac{dp}{5(d-t)p}$$

Рассмотрим первое уравнение этой системы

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{dx^i}{(t+d)x^i}$$

Интеграл(инвариант) имеет вид:

$$I_i = x^i(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-d\tau}, \text{где } \tau = \operatorname{arctg} t$$

Для уравнений, содержащих скорости

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{du^i}{x^i+(d-t)u^i}$$

используя равенства $x^i = I_i(1+t^2)^{\frac{1}{2}}e^{d\tau}$, получим уравнение

$$du^i_t = I_i(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{d\tau} + (d-t)(1+t^2)^{-1}u^i$$

Решение линейного однородного уравнения: $u^i = k^i(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{d\tau}$
Методом вариации произвольной постоянной k находятся интегралы

$$I_{3+i} = \left(u^i(1+t^2)^{\frac{1}{2}} - tx^i(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{-d\tau}$$

Последние два уравнения с разделяющимися переменными дают интегралы

$$I_7 = \rho(1+t^2)^{\frac{3}{2}}e^{-3d\tau}, I_8 = p(1+t^2)^{\frac{5}{2}}e^{-5d\tau}.$$

Подалгебра 1.2 вкладывается в двумерную подалгебру 2.1. Инвариантом подалгебры 2.1 является функция от всех переменных, которая обнуляется любым оператором из подалгебры.

В качестве базисных операторов подалгебры 2.1 возьмем следующие

$$Y_1 = X_{10} + X_{12} + d(X_{11} - X_{13}), Y_2 = X_{11} - X_{13} = x^i \partial_{x^i} + u^i \partial_{u^i} + 3\rho\partial_\rho + 5p\partial_p$$

Инварианты для Y_1 уже вычислены:

$$\bar{x}^i = x^i(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-d\tau}, \bar{u}^i = \big(u^i(1+t^2)^{\frac{1}{2}} - tx^i(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\big)e^{-d\tau},$$
$$\bar{\rho} = \rho(1+t^2)^{\frac{3}{2}} e^{-3d\tau}, \bar{p} = p(1+t^2)^{\frac{5}{2}} e^{-5d\tau}, \tau = \operatorname{arctg} t$$

Возьмем их в качестве новых переменых:

$(t, x^i, u^i, \rho, p) \longrightarrow (t, \bar{x}^i, \bar{u}^i, \bar{\rho}, \bar{p})$

И запишем Y_1 и Y_2 в новых переменных:

$$Y_1 = (Y_1 t)\partial_t = (1+t^2)\partial_t,$$
$$Y_2 = (Y_2 t)\partial_t + (Y_2\bar{x}^i)\partial_{\bar{x}^i} + (Y_2\bar{u}^i)\partial_{\bar{u}^i} + (Y_2\bar{\rho})\partial_{\bar{\rho}} + (Y_2\bar{p})\partial_{\bar{p}} = \bar{x}^i\partial_{\bar{x}^i} + \bar{u}^i\partial_{\bar{u}^i} + 3\bar{\rho}\partial_{\bar{\rho}} + 5\bar{p}\partial_{\bar{p}}$$

Из уравнения $Y_1 I = 0$ следует, что I не завист от t.

Из уравнения $Y_2 I = 0$ следует характеристическое уравнение:

$$\frac{d\bar{x}^i}{\bar{x}^i} = \frac{d\bar{u}^i}{\bar{u}^i} = \frac{d\bar{\rho}}{3\bar{\rho}} = \frac{d\bar{p}}{5\bar{p}}$$

Отсюда получаем следующие инварианты:

$$\frac{\bar{y}}{\bar{x}}, \frac{\bar{z}}{\bar{x}}, \frac{\bar{u}^i}{\bar{x}}, \frac{\bar{\rho}}{\bar{x}^3}, \frac{\bar{p}}{\bar{x}^5},$$

выраженные в инвариантах подалгебры 1.2.

Перепишем их в исходных переменных:

$$y_1 = \frac{y}{x}, z_1 = \frac{z}{x}, u_1 = \frac{u}{x}(1+t^2) - t, v_1 = \frac{v}{x}(1+t^2) - t\frac{y}{x}, w_1 = \frac{w}{x}(1+t^2) - t\frac{z}{x},$$
$$\rho_1 = \frac{\rho}{x^3}(1+t^2)^3, p_1 = \frac{p}{x^5}(1+t^2)^5$$

Таким образом, сначала вычисляем инварианты для одномерных подалгебр. Затем переходим к подалгебрам большей размерности. Так, по цепочке вложенных подалгебр вычисляем согласованные инварианты. При этом инварианты надалгебры есть функции от инвариантов подалгебры. Это свойство справедливо для всех подалгебр [4].

Подалгебра 1.2 вкладывается в подалгебру 3.7, содержащую 3 базисных оператора:

$$Y_1 = X_{10} + X_{12} + d(X_{11} - X_{13}), \quad Y_2 = aX_2 + X_6 = a\partial_y + t\partial_z + \partial_w,$$
$$Y_3 = -X_3 + aX_5 = at\partial_y - \partial_z + a\partial_v, \ a > 0$$

Если инварианты Y_1 взять в качестве новых переменных, то:

$$Y_1 = (1+t^2)\partial_t, Y_2 = \big(a\partial_{\bar{y}} + \partial_{\bar{w}} + t(\partial_{\bar{z}} - a\partial_{\bar{v}})\big)(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-d\tau}$$
$$Y_3 = \big(t(a\partial_{\bar{y}} + \partial_{\bar{w}}) - \partial_{\bar{z}} + a\partial_{\bar{v}}\big)(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-d\tau}$$

Уравнения для вычисления инвариантов $Y_1 I = 0, Y_2 I = 0, Y_3 I = 0$ принимают вид:

$$I_t = 0, aI_{\bar{y}} + I_{\bar{w}} = 0, I_{\bar{z}} - aI_{\bar{v}} = 0,$$

после расщепления по свободной переменной t.

Получаем инварианты, выраженные через инварианты подалгебры 1.2:

$$\bar{x}, \bar{u}, v_2 = a\bar{z} + \bar{v}, w_2 = a^{-1}\bar{y} - \bar{w}, \bar{\rho}, \bar{p}.$$

Подалгебра 3.7 при $a \neq 0$ вкладывается в подалгебру 4.4 при $b = 0$. В ней возьмем следующие базисные операторы

$$Y_1 = X_{10} + X_{12} + d(X_{11} - X_{13}), Y_2 = aX_2 + X_6, Y_3 = -X_3 + aX_5,$$
$$Y_4 = X_{11} - X_{13} = x^i\partial_{x^i} + u^i\partial_{u^i} + 3\rho\partial_\rho + 5p\partial_p$$

Если инварианты операторов $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ подалгебры 3.7 взять в качестве новых переменных, то

$$Y_1 = (1+t^2)\partial_t + (t+d)y\partial_y + (t+d)z\partial_z,$$
$$Y_2 = a\partial_y + t\partial_z, Y_3 = at\partial_y - \partial_z,$$
$$Y_4 = \bar{x}\partial_{\bar{x}} + \bar{u}\partial_{\bar{u}} + v_2\partial_{v_2} + w_2\partial_{w_2} + 3\bar{\rho}\partial_{\bar{\rho}} + 5\bar{p}\partial_{\bar{p}}$$

Получим инварианты:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{x}}, \frac{v_2}{\bar{x}}, \frac{w_2}{\bar{x}}, \frac{\bar{\rho}}{\bar{x}^3}, \frac{\bar{p}}{\bar{x}^5}.$$

Подалгебра 2.1 вкладывается в подалгебру 4.4. В этом случае базисные операторы возьмем в виде:

$$Y_1 = X_{10} + X_{12}, Y_2 = X_{11} - X_{13},$$
$$Y_3 = aX_2 + bX_3 + X_6 = a\partial_y + (b+t)\partial_z + \partial_w,$$
$$Y_4 = -bX_2 + cX_3 + X_5 = (-b+t)\partial_y + c\partial_z + \partial_v$$

Если инварианты операторов $\{Y_1, Y_2\}$ подалгебры 2.1 взять в качестве новых переменных, то

$$Y_1 = (1+t^2)\partial_t + (t+d)x\partial_x, Y_2 = x\partial_x,$$
$$Y_3 = \frac{a}{x}\partial_{y_1} + \frac{b+t}{x}\partial_{z_1} - \frac{at}{x}\partial_{v_1} + \frac{1-bt}{x}\partial_{w_1},$$
$$Y_4 = \frac{-b+t}{x}\partial_{y_1} + \frac{c}{x}\partial_{z_1} + \frac{1+bt}{x}\partial_{v_1} - \frac{tc}{x}\partial_{w_1}$$

Из уравнений $Y_1 I = 0, Y_2 I = 0, Y_3 I = 0, Y_4 I = 0 \Rightarrow$

$$I_t = 0, I_x = 0, aI_{y_1} + bI_{z_1} + I_{w_1} = 0, I_{z_1} - aI_{v_1} - bI_{w_1} = 0$$

Решение третьего уравнения имеет вид:

$I_1 = by_1 - az_1, I_2 = y_1 - aw_1$

Перепишем четвертое уравнение через переменные I_1, I_2, v_1:

$$-aI_{I_1} + abI_{I_2} - aI_{v_1} = 0$$

Получим инварианты: $bI_1 + I_2, I_1 - v_1$.

Перепишем в исходных переменных все инварианты:

$$u_1 = \frac{u}{x}(1+t^2) - t, \rho_1 = \frac{\rho}{x^3}(1+t^2)^3, p_1 = \frac{p}{x^5}(1+t^2)^5,$$
$$v_1 - by_1 + az_1 = \frac{v}{x}(1+t^2) - (b+t)\frac{y}{x} + a\frac{z}{x},$$
$$cy_1 + bz_1 + w_1 = \frac{w}{x}(1+t^2) + (b-t)\frac{z}{x} + c\frac{y}{x}.$$

Все результаты вычислений сведены в таблицу 3. В подалгебре 2.1 для удобства введены новые инварианты, которые являются функциями найденных инвариантов.

Таблица 3: Инварианты для подалгебр графа $\Gamma_1(4.4)$.

N	Инварианты
1.2	$\bar{x}^i = x^i(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-d\tau}; \bar{u}^i = \big(u^i(1+t^2)^{\frac{1}{2}} - tx^i(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\big)e^{-d\tau}$, $\bar{\rho} = \rho(1+t^2)^{\frac{3}{2}}e^{-3d\tau}, \bar{p} = p(1+t^2)^{\frac{5}{2}}e^{-5d\tau}$
2.1	$x_1 = \dfrac{x}{z} = \dfrac{\bar{x}}{\bar{z}}, y_1 = \dfrac{y}{z} = \dfrac{\bar{y}}{\bar{z}}; u_1 = \dfrac{u}{z}(1+t^2) - t\dfrac{x}{z} = \dfrac{\bar{u}}{\bar{z}}$, $v_1 = \dfrac{v}{z}(1+t^2) - t\dfrac{y}{z} = \dfrac{\bar{v}}{\bar{z}}, w_1 = \dfrac{w}{z}(1+t^2) - t = \dfrac{\bar{w}}{\bar{z}}$, $\rho_1 = \dfrac{\rho}{z^3}(1+t^2)^3 = \dfrac{\bar{\rho}}{\bar{z}^3}, p_1 = \dfrac{p}{z^5}(1+t^2)^5 = \dfrac{\bar{p}}{\bar{z}^5}$
3.7	$\bar{x}; \bar{u}, \bar{\rho}, \bar{p}, v_2 = \big(v(1+t^2)^{\frac{1}{2}} + (az - ty)(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\big)e^{-d\tau} = a\bar{z} + \bar{v}$, $w_2 = \big(-w(1+t^2)^{\frac{1}{2}} + (a^{-1}y + tz)(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\big)e^{-d\tau} = a^{-1}\bar{y} - \bar{w}$
4.4	$u_3 = \dfrac{u}{x}(1+t^2) - t = \dfrac{u_1}{x_1} = \dfrac{\bar{u}}{\bar{x}}$, $v_3 = \dfrac{v}{x}(1+t^2) - (b+t)\dfrac{y}{x} + a\dfrac{z}{x} = \dfrac{v_1}{x_1} - b\dfrac{y_1}{x_1} + \dfrac{a}{x_1}$, $v_3\|_{b=0} = \dfrac{v_2}{\bar{x}}$, $w_3 = \dfrac{w}{x}(1+t^2) + (b-t)\dfrac{z}{x} + c\dfrac{y}{x} = \dfrac{w_1}{x_1} + c\dfrac{y_1}{x_1} + \dfrac{b}{x_1}$, $w_3\|_{b=0} = -\dfrac{w_2}{\bar{x}}$ $\rho_3 = \dfrac{\rho}{x^3}(1+t^2)^3 = \dfrac{\rho_1}{x_1^3} = \dfrac{\bar{\rho}}{\bar{x}^3}, p_3 = \dfrac{p}{x^5}(1+t^2)^5 = \dfrac{p_1}{x_1^5} = \dfrac{\bar{p}}{\bar{x}^5}$

В таблице введены следующие обозначения:

в первом столбце N - номер подалгебры из таблицы 2; $\tau = \operatorname{arctg} t$, $\vec{x} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3), \vec{u} = (u, v, w) = (u^1, u^2, u^3)$. Во втором столбце сначала указаны инварианты, зависящие от независимых переменных, а после точки с запятой указаны инварианты, зависящие от функций. Также представлено, как инварианты надалгебры выражаются через инварианты подалгебр.

4.2. **Инвариантная подмодель ранга 3.** Система уравнений газовой динамики (1) в проекциях на декартовы оси имеет вид:

$$
\begin{gathered}
\rho(u_t + uu_x + vu_y + wu_z) + p_x = 0 \\
\rho(v_t + uv_x + vv_y + wv_z) + p_y = 0 \\
\rho(w_t + uw_x + vw_y + ww_z) + p_z = 0 \\
\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0 \\
S_t + uS_x + vS_y + wS_z = 0, S = p\rho^{-\frac{5}{3}},
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Здесь вместо уравнения для давления записано уравнение для энтропии S.

Система уравнений газовой динамики (2), записанная через инварианты подалгебры, называется подмоделью для данной подалгебры. Представление решения подмодели получается следующим образом. Инварианты подалгебры, зависящие от функций, назначаются новыми функциями от инвариантов, зависящих от независимых переменных. Если из инвариантов подалгебры, содержащих функции, можно определить все газодинамические функции, то подмодель называется инвариантной(ИП). Решения ИП есть инвариантные решения. Число независимых переменных называется рангом подмодели.

Рассмотрим подалгебру 1.2 графа $\Gamma_1(4.4)$. Из таблицы 3 инвариантов назначим одни инварианты функциями других: $\bar{u}^i = \bar{u}^i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \bar{p} = \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Представление решения имеет вид:

$$\begin{aligned} &u^i = \bar{u}^i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})e^{d\tau}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + tx^i(1+t^2)^{-1},\\ &\rho = \bar{\rho}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})e^{3d\tau}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}, p = \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})e^{5d\tau}(1+t^2)^{-\frac{5}{2}},\\ &S = \bar{S}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \text{где } \bar{x}^i = x^i e^{-d\tau}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

При подстановки (3) в УГД (2) получается инвариантная подмодель стационарного типа

$$\begin{aligned} (\bar{u} - \bar{x}d)\bar{u}_{\bar{x}} + (\bar{v} - \bar{y}d)\bar{u}_{\bar{y}} + (\bar{w} - \bar{z}d)\bar{u}_{\bar{z}} + \frac{\bar{p}_{\bar{x}}}{\bar{\rho}} &= -d\bar{u} - \bar{x}\\ (\bar{u} - \bar{x}d)\bar{v}_{\bar{x}} + (\bar{v} - \bar{y}d)\bar{v}_{\bar{y}} + (\bar{w} - \bar{z}d)\bar{v}_{\bar{z}} + \frac{\bar{p}_{\bar{y}}}{\bar{\rho}} &= -d\bar{v} - \bar{y}\\ (\bar{u} - \bar{x}d)\bar{w}_{\bar{x}} + (\bar{v} - \bar{y}d)\bar{w}_{\bar{y}} + (\bar{w} - \bar{z}d)\bar{w}_{\bar{z}} + \frac{\bar{p}_{\bar{z}}}{\bar{\rho}} &= -d\bar{w} - \bar{z}\\ (\bar{u} - \bar{x}d)\bar{\rho}_{\bar{x}} + (\bar{v} - \bar{y}d)\bar{\rho}_{\bar{y}} + (\bar{w} - \bar{z}d)\bar{\rho}_{\bar{z}} + \bar{\rho}(\bar{u}_{\bar{x}} + \bar{v}_{\bar{y}} + \bar{w}_{\bar{z}}) &= -3d\bar{\rho}\\ (\bar{u} - \bar{x}d)\bar{S}_{\bar{x}} + (\bar{v} - \bar{y}d)\bar{S}_{\bar{y}} + (\bar{w} - \bar{z}d)\bar{S}_{\bar{z}} = 0, \bar{S} &= \bar{p}\bar{\rho}^{-\frac{5}{3}}, \end{aligned} \tag{4}$$

в которой лишь три независимые переменные.

4.3. **Инвариантная подмодель ранга 2.** Для подалгебры 2.1 представление решения имеет вид:

$$\begin{aligned} &u = \big(zu_1(x_1, y_1) + tx\big)(1+t^2)^{-1},\\ &v = \big(zv_1(x_1, y_1) + ty\big)(1+t^2)^{-1},\\ &u = \big(zw_1(x_1, y_1) + tz\big)(1+t^2)^{-1},\\ &\rho = \rho_1(x_1, y_1)z^3(1+t^2)^{-3}, p = p_1(x_1, y_1)z^5(1+t^2)^{-5},\\ &S = S_1(x_1, y_1), \text{где } x_1 = \frac{x}{z}, y_1 = \frac{y}{z} \end{aligned} \tag{5}$$

Подстановка (5) в УГД (2) дает инвариантную подмодель

$$\begin{aligned} &(u_1 - w_1x_1)u_{1x_1} + (v_1 - w_1y_1)u_{1y_1} + \rho_1^{-1}p_{1x_1} = -w_1u_1 - x_1,\\ &(u_1 - w_1x_1)v_{1x_1} + (v_1 - w_1y_1)v_{1y_1} + \rho_1^{-1}p_{1y_1} = -w_1v_1 - y_1,\\ &(u_1 - w_1x_1)w_{1x_1} + (v_1 - w_1y_1)w_{1y_1} + \rho_1^{-1}(5p_1 - x_1p_{1x_1} - y_1p_{1y_1}) = -w_1^2 - 1,\\ &(u_1 - w_1x_1)\rho_{1x_1} + (v_1 - w_1y_1)\rho_{1y_1} + \rho_1\big(u_{1x_1} + v_{1y_1} - x_1w_{1x_1} - y_1w_{1y_1}\big) = -4w_1\rho_1,\\ &(u_1 - w_1x_1)S_{1x_1} + (v_1 - w_1y_1)S_{1y_1} = 0, \quad S_1 = p_1\rho_1^{-\frac{5}{3}} \end{aligned} \tag{6}$$

Проверим, что подмодель (6) вкладывается в подмодель (4). Для этого инварианты подалгебры 1.2 выразим через инварианты подалгебры 2.1, используя таблицу 3 и сделаем замену переменных по формулам:

$$\bar{x} = x_1\bar{z}, \bar{y} = y_1\bar{z}, \bar{u} = u_1(x_1, y_1, \bar{z})\bar{z}, \bar{v} = v_1(x_1, y_1, \bar{z})\bar{z},$$

$$\bar{w} = w_1(x_1, y_1, \bar{z})\bar{z}, \bar{\rho} = \rho_1(x_1, y_1, \bar{z})\bar{z}^3, \bar{p} = p_1(x_1, y_1, \bar{z})\bar{z}^5$$

Преобразованная система (4) примет вид:

$$
\begin{gathered}
(u_1-w_1x_1)u_{1x_1}+(v_1-w_1y_1)u_{1y_1}+(w_1-d)\bar{z}u_{1\bar{z}}+\rho_1^{-1}p_{1x_1}=-w_1u_1-x_1,\\
(u_1-w_1x_1)v_{1x_1}+(v_1-w_1y_1)v_{1y_1}+(w_1-d)\bar{z}v_{1\bar{z}}+\rho_1^{-1}p_{1y_1}=-w_1v_1-y_1,\\
(u_1-w_1x_1)w_{1x_1}+(v_1-w_1y_1)w_{1y_1}+(w_1-d)\bar{z}w_{1\bar{z}}+\\
+\rho_1^{-1}(\bar{z}p_{1\bar{z}}+5p_1-x_1p_{1x_1}-y_1p_{1y_1})=-w_1^2-1,\\
(u_1-w_1x_1)\rho_{1x_1}+(v_1-w_1y_1)\rho_{1y_1}+(w_1-d)\bar{z}\rho_{1\bar{z}}+\\
+\rho_1\big(u_{1x_1}+v_{1y_1}-x_1w_{1x_1}-y_1w_{1y_1}+\bar{z}w_{1\bar{z}}\big)=-4w_1\rho_1,\\
(u_1-w_1x_1)S_{1x_1}+(v_1-w_1y_1)S_{1y_1}+(w_1-d)S_{1\bar{z}}=0,\quad S_1=p_1\rho_1^{-\frac{5}{3}}
\end{gathered}
$$

Если в этой системе считать, что функции не зависят от $\bar{z}$, то получим систему (6).

4.4. **Инвариантная подмодель ранга 1.** Для подалгебры 3.7 представление решения имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&u=\bar{u}(\bar{x})e^{d\tau}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}+tx(1+t^2)^{-1},\\
&v=v_2(\bar{x})e^{d\tau}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}+(ty-az)(1+t^2)^{-1},\\
&w=-w_2(\bar{x})e^{d\tau}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}+(tz+a^{-1}y)(1+t^2)^{-1},\\
&\rho=\bar{\rho}(\bar{x})e^{3d\tau}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}},p=\bar{p}(\bar{x})e^{5d\tau}(1+t^2)^{-\frac{5}{2}},\\
&S=\bar{S}(\bar{x}),\text{где } \bar{x}=xe^{-d\tau}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Подстановка (7) в УГД (2) дает инвариантную подмодель

$$
\begin{gathered}
(\bar{u}-\bar{x}d)\bar{u}_{\bar{x}}+\frac{\bar{p}_{\bar{x}}}{\bar{\rho}}=-d\bar{u}-\bar{x},\\
(\bar{u}-\bar{x}d)v_{2\bar{x}}=-dv_2-w_2a,\\
(\bar{u}-\bar{x}d)w_{2\bar{x}}=-dw_2+a^{-1}v_2,\\
(\bar{u}-\bar{x}d)\bar{\rho}_{\bar{x}}+\bar{\rho}\bar{u}_{\bar{x}}=-3d\bar{\rho}\\
(\bar{u}-\bar{x}d)\bar{S}_{\bar{x}}=0,\ \bar{S}=\bar{p}\bar{\rho}^{-\frac{5}{3}}
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Проверим, что подмодель (8) вкладывается в подмодель (4). Для этого инварианты подалгебры 1.2 выразим через инварианты подалгебры 3.7, используя таблицу 3 и сделаем замену переменных:

$$
\bar{v}=v_2(\bar{x},\bar{y},\bar{z})-\bar{z}a,\bar{w}=-w_2(\bar{x},\bar{y},\bar{z})+a^{-1}\bar{y},\bar{u}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}),\bar{\rho}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}),\bar{p}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})
$$

Преобразованная система (4) примет вид:

$$
\begin{gathered}
(\bar{u}-\bar{x}d)\bar{u}_{\bar{x}}+(v_2-\bar{z}a-\bar{y}d)\bar{u}_{\bar{y}}+(-w_2+a^{-1}\bar{y}-\bar{z}d)\bar{u}_{\bar{z}}+\frac{\bar{p}_{\bar{x}}}{\bar{\rho}}=-d\bar{u}-\bar{x},\\
(\bar{u}-\bar{x}d)v_{2\bar{x}}+(v_2-\bar{z}a-\bar{y}d)v_{2\bar{y}}+(-w_2+a^{-1}\bar{y}-\bar{z}d)v_{2\bar{z}}+\frac{\bar{p}_{\bar{y}}}{\bar{\rho}}=-dv_2-w_2a,\\
(\bar{u}-\bar{x}d)w_{2\bar{x}}+(v_2-\bar{z}a-\bar{y}d)w_{2\bar{y}}+(-w_2+a^{-1}\bar{y}-\bar{z}d)w_{2\bar{z}}-\frac{\bar{p}_{\bar{z}}}{\bar{\rho}}=-dw_2+a^{-1}v_2,\\
(\bar{u}-\bar{x}d)\bar{\rho}_{\bar{x}}+(v_2-\bar{z}a-\bar{y}d)\bar{\rho}_{\bar{y}}+(-w_2+a^{-1}\bar{y}-\bar{z}d)\bar{\rho}_{\bar{z}}+\bar{\rho}(\bar{u}_{\bar{x}}+v_{2\bar{y}}-w_{2\bar{z}})=-3d\bar{\rho}\\
(\bar{u}-\bar{x}d)\bar{S}_{\bar{x}}+(v_2-\bar{z}a-\bar{y}d)\bar{S}_{\bar{y}}+(-w_2+a^{-1}\bar{y}-\bar{z}d)\bar{S}_{\bar{z}}=0,\ \bar{S}=\bar{p}\bar{\rho}^{-\frac{5}{3}}
\end{gathered}
$$

Если функции не зависят от $\bar{y},\bar{z}$, то получаем подмодель (8).

Найдем интегралы системы (8).
Если $\bar{u} = d\bar{x}$, то получим решение $d = 0, \bar{u} = v_2 = w_2 = 0, \bar{\rho} = -\bar{p}_{\bar{x}}\bar{x}^{-1}, \bar{p}(\bar{x})$ – произвольная функция.

Пусть $\bar{u} \neq d\bar{x}$, тогда $S = S_0$ – постоянная.

Введем новую независимую переменную s по формуле: $\dfrac{d\bar{x}}{\bar{u} - \bar{x}d} = ds, \quad \bar{x}_s = \bar{u} - \bar{x}d \neq 0$:

$$v_{2s} = -dv_2 - w_2 a$$
$$w_{2s} = -dw_2 + a^{-1}v_2$$

Линейная система дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами имеет общее решение

$$w_2 = (C_1 \sin s + C_2 \cos s)e^{-ds},$$
$$v_2 = a(C_1 \cos s - C_2 \sin s)e^{-ds},$$

где C_1, C_2 – постоянные.

Оставшиеся уравнения системы (8) принимают вид::

$$\bar{u}_s + d\bar{u} + \bar{x} + \frac{5}{2}S_0(\bar{\rho}^{\frac{2}{3}})_s\frac{1}{\bar{x}_s} = 0,$$
$$\bar{\rho}_s + \bar{\rho}\bar{u}_s\frac{1}{\bar{x}_s} + 3d\bar{\rho} = 0$$

Учитывая равенство $\bar{u} = \bar{x}_s + \bar{x}d$, получим:

$$\bar{x}_{ss} + 2d\bar{x}_s + (d^2+1)\bar{x} + \frac{5}{2}S_0(\bar{\rho}^{\frac{2}{3}})_s\frac{1}{\bar{x}_s} = 0,$$
$$\frac{\bar{\rho}_s}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{x}_{ss}}{\bar{x}_s} + 4d = 0.$$

Интегрирование дает

$$\bar{x}_{ss} + 2d\bar{x}_s + (d^2+1)\bar{x} = Ne^{-\frac{8}{3}ds}\bar{x}_s^{-\frac{5}{3}}\left(\frac{\bar{x}_{ss}}{\bar{x}_s} + 4d\right),$$
$$\bar{\rho}\bar{x}_s e^{4ds} = C,$$

где $C, N = \frac{5}{3}S_0C^{\frac{2}{3}}$ – постоянные.

Таким образом, свели систему к одному нелинейному уравнению второго порядка.
Найдено частное решение: $\bar{x} = (-3N)^{\frac{3}{8}}d^{-\frac{1}{4}}e^{-dS} = (-5S_0)^{\frac{3}{8}}C^{\frac{1}{4}}d^{-\frac{1}{4}}e^{-dS}$.

4.5. **Инвариантная подмодель ранга 0.** Инварианты подалгебры 4.4 дают представление инвариантного решения:

$$\begin{aligned}
&u = (u_3 + t)x(1+t^2)^{-1},\\
&v = (v_3x + (b+t)y - az)(1+t^2)^{-1},\\
&w = (w_3x - cy + (t-b)z)(1+t^2)^{-1},\\
&\rho = \rho_3x^3(1+t^2)^{-3},\\
&p = p_3x^5(1+t^2)^{-5},
\end{aligned} \tag{9}$$

где $u_3, v_3, w_3, \rho_3, p_3$ - постоянные.

Подстановка (9) в УГД (2) дает ИП:

$$
\begin{aligned}
&u_3^2+1+5\frac{p_3}{\rho_3}=0,\\
&v_3u_3-aw_3+bv_3=0,\\
&w_3u_3-cv_3-bw_3=0,\\
&u_3=0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Проверим, что подмодель (10) вкладывается в подмодель (6) подалгебры 2.1 и подмодель (8) подалгебры 3.7. Для этого сделаем замену переменных $u_1=u_3(x_1,y_1)x_1, v_1=v_3(x_1,y_1)x_1+by_1-a, w_1=w_3(x_1,y_1)x_1-cy_1-b, \rho_1=\rho_3(x_1,y_1)x_1^3, p_1=p_3(x_1,y_1)x_1^5$ в подмодели (6) :

$$
\begin{gathered}
x_1(u_3-w_3x_1+cy_1+b)u_{3x_1}+(v_3x_1+2by_1-a-w_3x_1y_1+cy_1^2)u_{3y_1}+\\
+\rho_3^{-1}(x_1p_{3x_1}+5p^3)+u_3^2+1=0,\\
x_1(u_3-w_3x_1+cy_1+b)v_{3x_1}+(v_3x_1+2by_1-a-w_3x_1y_1+cy_1^2)v_{3y_1}+\\
+\rho_3^{-1}x_1p_{3y_1}+u_3v_3+bv_3-aw_3=0,\\
x_1(u_3-w_3x_1+cy_1+b)w_{3x_1}+(v_3x_1+2by_1-a-w_3x_1y_1+cy_1^2)w_{3y_1}-\\
-\rho_3^{-1}(x_1^2p_{3x_1}+y_1x_1p_{3y_1})+u_3w_3-cv_3-bw_3=0,\\
x_1(u_3-w_3x_1+cy_1+b)\rho_{3x_1}+(v_3x_1+2by_1-a-w_3x_1y_1+cy_1^2)\rho_{3y_1}+\\
+4\rho_3u_3+\rho_3(x_1u_{3x_1}+x_1v_{3y_1}-x_1^2w_{3x_1}-x_1y_1w_{3y_1})=0
\end{gathered}
$$

Если функции не зависят от x_1, y_1, то получается подмодель (10).
В подмодели (8) замена переменных $\bar{u}=u_3(\bar{x})\bar{x}, w_2=-w_3(\bar{x})\bar{x}, v_2=v_3(\bar{x})\bar{x}, \bar{\rho}=\rho_3(\bar{x})\bar{x}^3, \bar{p}=p_3(\bar{x})\bar{x}^5$ приводит к следующей системе:

$$
\begin{gathered}
\bar{x}(u_3-d)u_{3\bar{x}}+\rho_3^{-1}(\bar{x}p_{3\bar{x}}+5p_3)+u_3^2+1=0,\\
\bar{x}(u_3-d)v_{3\bar{x}}+u_3v_3-w_3a=0,\\
\bar{x}(u_3-d)w_{3\bar{x}}+w_3u_3+a^{-1}v_3=0,\\
\bar{x}(u_3-d)\rho_{3\bar{x}}+4\rho_3u_3+\bar{x}\rho_3u_{3\bar{x}}=0
\end{gathered}
$$

Если функции не зависят от $\bar{x}$, то получается подмодель (10) при $b=0, ac=-1$.
Решение алгебраической системы (10) такое: $u_3=v_3=w_3=0, \rho_3=-5p_3$, что приводит к решению

$$
\begin{aligned}
&u=xt(1+t^2)^{-1},\\
&v=((b+t)y-az)(1+t^2)^{-1},\\
&w=(-cy+(t-b)z)(1+t^2)^{-1},\\
&\rho=\rho_0x^3(1+t^2)^{-3},\\
&p=-\frac{1}{5}\rho_0x^5(1+t^2)^{-5}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Решение (11) имеет отрицательное давление, что не физично. Поэтому следует искать частично инвариантное решение ранга 1 дефекта 1(простая волна). В этом случае инварианты $u_3, v_3, w_3, \rho_3, p_3$ являются функциями одного переменного $\alpha(t,\vec{x})$.

Заключение

В работе рассмотрена модель газовой динамики в случае уравнения состояния одноатомного политропного газа. Компактно представлена оптимальная система подалгебр с проективным оператором 13–мерной алгебры Ли, допускаемой моделью. Сформулированы правила восстановления оптимальной системы 14–мерной алгебры Ли по 13–мерному идеалу. По оптимальной системе представлен 6–ю фрагментами граф всех вложенных подалгебр 13–мерной алгебры Ли. На примере фрагмента графа с 4–мерной вершиной построена иерархия вложенных инвариантных подмоделей уравнений одноатомной газовой динамики. Было показано, что решение инвариантной подмодели надалгебры является частным решением инвариантной подмодели подалгебры.

Список литературы

[1] Л. В. Овсянников, *Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика*, ПММ, **58**:4 (1994), 30–55. MR1310991

[2] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, 1978. MR0511921

[3] А. А. Черевко, *Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\,\rho^{5/3}$*, Препринт №4-96, РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики, Новосибирск, 1996.

[4] С. В. Хабиров, *Иерархия подмоделей дифференциальных уравнений*, СМЖ, **54**:6 (2013), 1396–1406. MR3184104

Рената Фуатовна Шаяхметова
Институт механики УНЦ РАН,
пр. Октября 71,
450054, Уфа, Россия
E-mail address: shayakhmetova.renata@gmail.com