S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 626–633 (2014) УДК 517.984

MSC 34B05, 34B24, 34L10

ПЕРВЫЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ОПЕРАТОРА ДВУКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА ПРОКОЛОТОМ ОТРЕЗКЕ

М.Е. АХЫМБЕК, Д.Б. НУРАХМЕТОВ

Abstract. There are found the formulas of the first regularized trace (of the type of abstract Gel'fand-Levitan formula) of the two-fold differentiation operator in a punctured segment. Proof of the main result is given by the method of contour integration with corrections of the analytic perturbation theory. Some well-known trace formulas are generalized.

Keywords: Differential operator, First Regularized Trace, Eigenvalue, Characteristic function.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем функциональное пространство $\widetilde{L}^2_{\frac{\pi}{2}}(0,\,\pi)$, которое состоит из функции $y(x)$ определенных почти всюду на $(0,\pi)$ и удовлетворяющие условиям $y(x)\chi_{(0,\frac{\pi}{2})}(x) \in L_2(0,\,\pi)$, $y(x)\chi_{(\frac{\pi}{2},\,\pi)}(x) \in L_2(0,\,\pi)$, где $\chi_{(a,b)}$ — характеристическая функция интервала $(a,\,b)$. Заметим, что введенное пространство $\widetilde{L}^2_{\frac{\pi}{2}}(0,\,\pi)$ не совпадает с $L^2(0,\pi)$, поскольку $\delta(x-\frac{\pi}{2}) \in \widetilde{L}^2_{\frac{\pi}{2}}(0,\,\pi)$, но $\delta(x-\frac{\pi}{2}) \overline{\in} L^2(0,\,\pi)$. Норма

$$\|y\|^2_{\widetilde{L}^2_{\frac{\pi}{2}}(0,\,\pi)} = \|y\chi_{(0,\frac{\pi}{2})}\|^2_{L^2(0,\,\pi)} + \|y\chi_{(\frac{\pi}{2},\pi)}\|^2_{L^2(0,\,\pi)}.$$

Akhymbek, M.E., Nurakhmetov, D.B., The first regularized trace for the two-fold differentiation operator in a punctured segment.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, (грант 0732/ГФ, 2012г.-2014г.)

Поступила 29 апреля 2013 г., опубликована 30 августа 2014 г.

В этой работе в функциональном пространстве $\widetilde{L}^2_{\frac{\pi}{2}}(0,\,\pi)$ исследуем первый регуляризованный след оператора L, порожденного дифференциальным выражением

$$\ell(y) \equiv -y''(x),\ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x < \pi, \tag{1.1}$$

и краевыми условиями

$$y(+0) = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\pi}{2} y'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right), \tag{1.3}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = y'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) + \alpha y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right), \tag{1.4}$$

$$y(\pi - 0) = 0. \tag{1.5}$$

Для полноты изложения дадим корректное определение оператора L на конечном проколотом отрезке. Рассмотрим дифференциальное выражение $\ell(y) \equiv -y''(x)$ на объединении двух интервалов $(0,\,\frac{\pi}{2})$ и $(\frac{\pi}{2},\pi)$. С указанным дифференциальным выражением $\ell(y)$ свяжем максимальный оператор L_M, определенный равенствами

$$L_M = \ell(y),$$

$$D(L_M) := \left\{ y | y,\, y',\, \ell(y) \in \widetilde{L}^2_{\frac{\pi}{2}}(0,\,\pi) \right\}.$$

Тогда оператор L определим как сужение максимального оператора L_M на область

$$D(L) := \{y \in \widetilde{L}^2_{\frac{\pi}{2}}(0,\pi) | y \in W^2_2\left(0,\frac{\pi}{2}\right), W^2_2\left(\frac{\pi}{2},\pi\right); y \text{ удовлетворяет } (1.2)-(1.5)\}.$$

Первые результаты, положившие начало теории регуляризованных следов операторов, получил в 1947-1952 годах И.М. Лифшиц [1]. Оказалось, что формулы регруляризованных следов имели физический смысл: И.М. Лифшиц с помощью своей формулы посчитал изменение свободной энергии кристалла при внедрении в него чужеродной примеси. Для оператора Штурма-Лиувилля в пространстве $L_2(0,\pi)$, порожденного дифференциальным выражением

$$\ell(y) = -y'' + q(x)y \tag{1.6}$$

и граничными условиями Дирихле (1.2), (1.5), собственные значения которого мы будем обозначать λ_n, $n = 1,2,\ldots$, в случае гладкого потенциала $q(x) \in C^1[0,\pi]$ хорошо известна классическая формула первого регуляризованного следа (см. [2]-[5]):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} q(x)dx\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} q(x)dx - \frac{q(0)-q(\pi)}{4}.$$

Эта формула следа сохраняется для произвольного потенциала $q(\cdot) \in L_2$, для которого ряд Фурье в точках 0 и π сходится к значениям функции [6].

В случае $q(\cdot) \in L_1$ первый регуляризованный след вычислен В.А. Винокуровым и В.А. Садовничим [7]. Они показали, что для произвольной функции $q(\cdot) \in L_1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n - n^2 + b_{2n}\right) = 0,$$

сходится. Здесь $b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos kx du(x)$, а $u(\cdot)$ — функция ограниченной вариации на $[0,\pi]$, непрерывная в концах этого отрезка.

В работе [8] показано, что первый регуляризованный след задачи (1.6), (1.2), (1.5) с потенциалом $q(x) = \delta(x - \frac{\pi}{2})$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi} + (-1)^n\frac{1}{\pi}\right)$$

сходится, а его сумма равна $-\frac{1}{8}$. Этот оператор можно определить, используя общие результаты работы [9]. Практическое приложение таких видов операторов можно найти в работе [10].

Пусть $u(\cdot)$ — функция ограниченной вариации на $[0,\pi]$, непрерывная в концах этого отрезка. В случае $q(\cdot) = u'(\cdot)$ (равенство в смысле распределений) для оператора Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле в работе [11] доказана формула следа:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k - k^2 + b_{2k}\right) = -\frac{1}{8}\sum h_j^2,$$

где $b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos kx du(x)$, а h_j — скачки функции $u'(\cdot)$.

В дальнейшем под первым регуляризованным следом изучаемого оператора L будем понимать предел частичных сумм при $n \to \infty$

$$\sum_{\lambda_k \in int\gamma_n}\lambda_k - 2\sum_{(2k+1)\in int\gamma_n}\left((2k+1)^2 + \frac{4}{\pi^2}\right) \tag{1.7}$$

если существует некоторая неограниченно расширяющаяся последовательность контуров γ_n. Обозначим через γ_n окружность в комплексной плоскости радиуса $n + \frac{1}{2}$.

Теорема. Пусть L — оператор двукратного дифференцирования соответствующий задаче (1.1)-(1.5). Тогда существует предел частичных сумм (1.7) при $n \to \infty$, а его сумма равна $-\frac{2\alpha}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}$.

2 ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

В этом параграфе в функциональном пространстве $\widetilde{L}^2_{\frac{\pi}{2}}(0,\,\pi)$ вычислим характеристический определитель для более широкого класса операторов L_σ, порожденного дифференциальным выражением (1.1) и краевыми условиями

$$y(+0) = 0, \tag{1.2}$$

$$y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) + \int\limits_0^\pi y''(x)\overline{\sigma(x)}dx, \tag{2.1}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = y'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) + \alpha y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right), \tag{1.4}$$

$$y(\pi - 0) = 0, \tag{1.5}$$

где $\sigma(\cdot) \in L_2(0,\pi)$. Заметим, что при $\alpha \neq \frac{4}{\pi}$ оператор L_σ является ограниченно обратимым, вполне непрерывным оператором [12-13].

Если выбрать

$$\sigma(x) = \begin{cases} -x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases} \tag{2.2}$$

то из оператора L_σ получим оператор L.

В случае, когда $\sigma(\cdot) \equiv 0, \alpha = -1$ оператор L эквивалентен оператору Штурма-Лиувилля, порожденный дифференциальным выражением

$$-y''(x) + \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) y(x), \ \ 0 < x < \pi,$$

с краевыми условиями Дирихле (1.2), (1.5) [8].

В статье [14] дано описание корректно разрешимых краевых задач для оператора Лапласа в проколотом круге. В работе [15] дано описание самосопряженных расширений оператора Лапласа в проколотой области.

В дальнейших исследованиях существенную роль играет следующая лемма.

Лемма 2.1 Характеристический определитель оператора L_σ определяется формулой:

$$D(\sqrt{\lambda}) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda}} tg \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} + \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{2\Delta(\lambda)\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} \overline{\sigma(t)} dt \right\} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi}{2\Delta(\lambda)} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\sqrt{\lambda}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \overline{\sigma(t)} dt +$$

$$+ \frac{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi\left(\sqrt{\lambda} ctg \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} - \alpha\right)}{2\Delta(\lambda)} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(t - \frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}} \overline{\sigma(t)} dt, \tag{2.3}$$

где $\Delta(\lambda) = 1 - \lambda \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\sqrt{\lambda}(t - \frac{\pi}{2}) \overline{\sigma(t)} dt$.

Доказательство леммы 2.1. На $0 < x < \frac{\pi}{2}$ решение $y(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$. Учитывая условие (2.1), имеем

$$y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}} + c,$$

где $c = \int\limits_0^{\pi} (-y''(x)) \overline{\sigma(x)} dx$. Учитывая условие (1.4), имеем

$$y'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} - \alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Таким образом, на отрезке $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$$y(x) = \left(\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}} + c\right)\cos\sqrt{\lambda}(x - \frac{\pi}{2}) + \left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} - \alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x - \frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}.$$

Определим константу c :

$$c = \int\limits_0^{\pi} (-y''(x)) \overline{\sigma(x)} dx = \lambda \int\limits_0^{\pi} y(x)\overline{\sigma(x)} dx = \lambda \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \overline{\sigma(x)} dx +$$

$$+\lambda\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}+c\right)\cos\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})\overline{\sigma(x)}dx+$$

$$+\lambda\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(x)}dx$$

Отсюда получим:

$$c=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\lambda\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(x)}dx+\frac{\lambda\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})\overline{\sigma(x)}dx\right\}+$$

$$+\frac{\lambda\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right)}{\Delta(\lambda)}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(x)}dx$$

Тогда

$$y(x)=\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}+$$

$$+\frac{\cos\sqrt{\lambda}(x-\frac{\pi}{2})}{\Delta(\lambda)}\left\{\lambda\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(t)}dt+\frac{\lambda\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})\overline{\sigma(t)}dt\right\}+$$

$$+\frac{\lambda\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right)}{\Delta(\lambda)}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(t)}dt\cos\sqrt{\lambda}\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

Учитывая условие (1.5), имеем

$$y(\pi-0)=2\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha\frac{\sin^2\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\lambda}+$$

$$+\frac{\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\Delta(\lambda)}\left\{\lambda\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(t)}dt+\frac{\lambda\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\sqrt{\lambda}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\overline{\sigma(t)}dt\right\}+$$

$$+\frac{\lambda\left(\cos^2\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}-\alpha\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right)}{\Delta(\lambda)}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda}}\overline{\sigma(t)}dt.$$

Из последнего соотношения непосредственно следует формула (2.3).

Лемма 2.1 доказана.

3 ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ

Так как граничная функция $\sigma(\cdot)$ представима в виде формулы (2.2), то $\Delta(\lambda)=1$.

Учитывая соотношение (2.2), преобразуем формулу (2.3):

$$D(\sqrt{\lambda}) = 2\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} - \alpha\frac{\sin^2\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\lambda} + \cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\lambda\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}(-t)dt.$$

А по формуле Лагранжа:

$$\lambda\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}(-t)dt = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} - \frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}. \tag{3.1}$$

Учитывая соотношение (3.1), имеем

$$D(\sqrt{\lambda}) = 2\frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} - \alpha\frac{\sin^2\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\lambda} + \cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} - \frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}}\cos\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos^2\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} - \alpha\frac{\sin^2\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\lambda}$$

Обозначим через $\sqrt{\lambda} = z$:

$$D(z) = \frac{\pi}{2}\cos^2\frac{z\pi}{2}\left[1 + \Phi(z)\right], \tag{3.2}$$

где

$$\Phi(z) = \frac{2tg\frac{z\pi}{2}}{z\pi} - \frac{2\alpha tg^2\frac{z\pi}{2}}{z^2\pi}$$

Заметим, что $D(z)$ четная функция, функция $\Phi(z)$ ограничена на γ_n некоторой константой, не зависящей от n, а функция $\ln(1+\Phi(z))$ голоморфна на γ_n при больших n.

Лемма 3.1 При $n \to \infty$ справедливы следующие интегральные исчисления:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_n}\frac{4\sin\frac{z\pi}{2}}{\pi\cos\frac{z\pi}{2}}dz = \sum_{(2k+1)\in int\gamma_n}\frac{16}{\pi^2};$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_n}\frac{4\alpha\sin^2\frac{z\pi}{2}}{\pi z\cos^2\frac{z\pi}{2}}dz = -\frac{4\alpha}{\pi};$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_n}\frac{4\sin^2\frac{z\pi}{2}}{\pi^2 z\cos^2\frac{z\pi}{2}}dz = -\frac{4}{\pi^2}$$

Доказательство леммы 3.1 Учитывая, что первый интеграл в точках $z_k = 2k+1$ имеет простые полюса вычислим его:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_n}\frac{4\sin\frac{z\pi}{2}}{\pi\cos\frac{z\pi}{2}}dz =$$

$$-\sum_{(2k+1)\in int\gamma_n} 2\cdot\frac{4}{\pi}\lim_{z\to(2k+1)}\left(\frac{(z-2k-1)\sin\frac{z\pi}{2}}{\cos\frac{z\pi}{2}}\right) = \sum_{(2k+1)\in int\gamma_n}\frac{16}{\pi^2}.$$

Вычислим второй интеграл. Действительно, при $n \to \infty$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_n}\frac{4\alpha\sin^2\frac{z\pi}{2}}{\pi z\cos^2\frac{z\pi}{2}}dz=$$

$$=\sum_{(2k+1)\in int\gamma_n}\frac{8\alpha}{\pi}\lim_{z\to(2k+1)}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-2k-1)^2\sin^2\frac{z\pi}{2}}{z(z-2k-1)^2(a+b(z-2k-1)+c(z-2k-1)^2+...)^2}\right)=$$

$$=\sum_{(2k+1)\in int\gamma_n}\frac{8\alpha}{\pi}\lim_{z\to(2k+1)}\left(\frac{2\frac{\pi}{2}\sin\frac{z\pi}{2}\cos\frac{z\pi}{2}z(a+b(z-2k-1)+...)^2}{z^2(a+b(z-2k-1)+c(z-2k-1)^2+...)^4}\right)-$$

$$-\left(\frac{\sin^2\frac{z\pi}{2}[(a+b(z-2k-1)+...)^2+2z(a+b(z-2k-1)+...)(b+2c(z-2k-1)+...)]}{z^2(a+b(z-2k-1)+c(z-2k-1)^2+...)^4}\right)=$$

$$=\sum_{(2k+1)\in int\gamma_n}\frac{8\alpha}{\pi}\left(\frac{-a^2}{(2k+1)^2a^4}\right)=\begin{bmatrix} a=-\frac{\pi}{2}(-1)^k, \\ b=0. \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{32\alpha}{\pi^3}\sum_{(2k+1)\in int\gamma_n}\frac{1}{(2k+1)^2}=-\frac{32\alpha}{\pi^3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=-\frac{4\alpha}{\pi},$$

где a,b,c,... коэффициенты Тейлора функций $\cos\frac{z\pi}{2}$, а $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

Теперь используя второй интеграл, вычислим третий интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_n}\frac{4\sin^2\frac{z\pi}{2}}{\pi^2 z\cos^2\frac{z\pi}{2}}dz=-\frac{32}{\pi^4}\sum_{(2k+1)\in int\gamma_n}\frac{1}{(2k+1)^2}=-\frac{32}{\pi^4}\cdot\frac{\pi^2}{8}=-\frac{4}{\pi^2}$$

Лемма 3.1 доказана.

Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы применяем теорему Коши о вычетах к соотношению (3.2), получим

$$2\sum_{\lambda_k\in int\gamma_n}\lambda_k=4\sum_{(2k+1)\in int\gamma_n}(2k+1)^2-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_n}2z\ln(1+\Phi(z))dz=4\sum_{(2k+1)\in int\gamma_n}(2k+1)^2-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_n}\frac{4\sin\frac{z\pi}{2}}{\pi\cos\frac{z\pi}{2}}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_n}\frac{4\alpha\sin^2\frac{z\pi}{2}}{\pi z\cos^2\frac{z\pi}{2}}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_n}\frac{4\sin^2\frac{z\pi}{2}}{\pi^2 z\cos^2\frac{z\pi}{2}}dz+o(1)$$

Из леммы 3.1 следует, что

$$\sum_{\lambda_k\in int\gamma_n}\lambda_k=2\sum_{(2k+1)\in int\gamma_n}(2k+1)^2+\sum_{(2k+1)\in int\gamma_n}\frac{8}{\pi^2}-\frac{2\alpha}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}. \qquad (3.3)$$

Таким образом, из соотношения (3.3) следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность профессору Б.Е. Кангужину за постановку задачи и ценные замечания.

Список литературы

[1] И.М. Лифшиц, *Об одной задаче теории возмущений связанной с квантовой статистикой* // УМН, **7**:1(47) (1952), 171–180.

[2] И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан, *Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка* // Докл. АН СССР, **88**:4 (1953), 593–596. MR0056157

[3] Л.А. Дикий, *Об одной формуле Гельфанда-Левитана* // УМН, **8**:2 (1953), 119–123. MR0056808

[4] Б.М. Левитан, *Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма-Лиувилля* // УМН, **19**:1 (1964), 161–165. MR0159981

[5] В.Б. Лидский, В.А. Садовничий, *Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций* // Докл. АН СССР, **176**:2 (1967), 259–262. MR0223572

[6] В.А. Марченко, *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения*, Киев: Наукова думка, 1977. MR0481179

[7] В.А. Винокуров, В.А. Садовничий, *Собственное значение и след оператора Штурма-Лиувилля как дифференцируемые функции суммируемого потенциала* // Докл. РАН, **365**:3 (1999), 295–297. MR1706272

[8] А.М. Савчук, *Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма-Лиувилля с δ — потенциалом* // УМН, **55**:6(336) (2000), 155–156. MR1840377

[9] А.М. Савчук, А.А. Шкаликов, *Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами* // Матем. заметки, **66**:6 (1999), 897–912. MR1756602

[10] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden, *Solvabel models in quantum mechanics*, New Yourk: Springer, 1988 (Second edition: AMS, 2005)

[11] А.М. Савчук, А.А. Шкаликов, *Формула следа для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами* // Матем. заметки, **69**: 3 (2001), 427–442. MR1846840

[12] Б.К. Кокебаев, М. Отелбаев, А.Н. Шыныбеков, *К вопросам расширения и сужения операторов* // Доклады АН СССР, **271**:6 (1983), 1307–1311. MR0722342

[13] B.E. Kanguzhin and D.B. Nurakhmetov, *Boundary Value Problems for 2nd Order Non-homogeneous Differential Equations with Variable Coefficients*// Journal of Xinjiang University (Natural Science Edition). 2011. Vol. 28, 28 (Sum.121), №1, P. 47-56.

[14] Кангужин Б.Е., Анияров А.А. *Корректные задачи для оператора Лапласа в проколотой области* // Матем. заметки, **89**:6, (2011), 856–867. MR2908142

[15] Кангужин Б.Е., Нурахметов Д.Б., Токмагамбетов Н.Е. *Оператор Лапласа с δ-подобными потенциалами* // Изв. вузов. Матем., 2014, 2, 9–16.

Ахымбек Мейрам Ерканатулы
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
пр. аль-Фараби, 71,
050040, Алматы, Казахстан
E-mail address: Akhymbek.Meyram@gmail.com

Нурахметов Даулет Багдатович
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
пр. аль-Фараби, 71,
050040, Алматы, Казахстан
E-mail address: dauletkaznu@gmail.com