S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 64–69 (2014) УДК 512.54, 512.64
MSC 20G15, 15A04

КРИТЕРИЙ ФЛАГ-ТРАНЗИТИВНОСТИ ПРОЕКТИВНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ, ОПРЕДЕЛЕННОЙ НАД ПОДКОЛЬЦОМ ОСНОВНОГО ТЕЛА

С.А. ЗЮБИН

Abstract. It is proved that a projective linear group over a subring of a skew field is flag-transitive if and only if the subring is a Bezout domain and its (left and right) fraction sets coincide with the skew field. This result gives answer for Problem 11.70(b) from Kourovka Notebook.

Keywords: flag-transitivity, projective linear group, projective space.

1. Введение

Пусть K — поле или тело. Естественное действие проективной линейной группы $PGL_{n+1}(K)$ на проективном пространстве $PG(n,K)$ является флаг-транзитивным, то есть для любых двух максимальных флагов существует элемент группы, переводящий один флаг в другой. Флаг-транзитивность сохраняется, если рассматривать не всю группу $PGL_{n+1}(K)$, а некоторые ее подгруппы. Такова, например, подгруппа $PSO_{n+1}(\mathbb{R}) < PGL_{n+1}(\mathbb{R})$, флаг-транзитивная на проективном пространстве $PG(n,\mathbb{R})$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Качественно другим примером флаг-транзитивной подгруппы служит подгруппа $PSL_n(\mathbb{Z}) < PGL_n(\mathbb{Q})$, заданная над кольцом всех целых чисел $\mathbb{Z}$, рассматриваемом как подкольцо поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Возникает естественная задача об описании всех флаг-транзитивных подгрупп H проективной линейной группы. Отметим, что эта проблема эквивалентна задаче об отыскании всех факторизаций вида $PGL_{n+1}(K) = H \cdot PT_{n+1}(K)$, где $PT_{n+1}(K)$ — проективная треугольная группа. Используя данную интерпретацию, можно для произвольной группы Шевалле $G(K)$ поставить задачу об отыскании всех

Zyubin, S.A., Flag-transitivity criterion for projective linear group defined over a subring of a base skew field.

© 2014 Зюбин С.А.

Поступила 14 октября 2013 г., опубликована 30 января 2014 г.

факторизаций вида $G(K) = H \cdot B$, где B — борелевская подгруппа группы Шевалле. Для конечного поля K задача решена для подгрупп полной проективной линейной группы [3], и даже для подгрупп групп Шевалле [4]. Для случая бесконечного поля или тела задача не решена до сих пор и записана в вопросе 11.70(в) из [9], в части (б) которого также спрашивается: какие свойства подкольца R из K обеспечивают флаг-транзитивность $PGL_{n+1}(R)$ на проективном пространстве $PG(n, K)$? Решение последнего вопроса для случая полей анонсировано в [7] и [6], а для случая тел — в [8]. Полное решение вопроса 11.70(б) для всех тел дает следующая

Теорема. *Пусть R — подкольцо (с единицей) тела K. Группа $PGL_{n+1}(R)$ действует флаг-транзитивно на проективном пространстве $PG(n, K)$, $n \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда R является (левой и правой) областью Безу, множества левых и правых частных которой совпадают с K.*

2. Основные понятия и обозначения

Пусть K — тело. Рассмотрим K^{n+1} как левое векторное пространство над K. Его элементы будем обозначать строками

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Полная линейная группа $GL_{n+1}(K)$ действует на пространстве K^{n+1} умножениями справа

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

Проективное пространство $PG(n, K)$ определяется, как множество всех нетривиальных подпространств пространства K^{n+1}. Два элемента из $PG(n, K)$ по определению инцидентны, если один из них является подмножеством (подпространством) другого [1], [2]. Флагом называется подмножество из $PG(n, K)$ попарно инцидентных элементов [2]. Ясно, что флаг представляет собой цепь вложенных подпространств $L_i < K^{n+1}$, рассматриваемых как элементы проективного пространства:

$$L_1 \lneqq L_2 \lneqq \ldots \lneqq L_k.$$

Флаг называется максимальным, если он не содержится ни в каком другом флаге [2]. Таким образом максимальный флаг представляет собой (неуплотняемую) цепь длины $k = n$.

При действии группы $GL_{n+1}(K)$ на K^{n+1} подпространства последней вновь переходят в подпространства. Тем самым группа $GL_{n+1}(K)$ действует и на проективном пространстве.

Проективная линейная группа $PGL_{n+1}(K)$ определяется как фактор-группа полной линейной группы $GL_{n+1}(K)$ по ее центру, состоящему из скалярных матриц вида αE, где E — единичная матрица, а ненулевой элемент α лежит в центре тела K. Поскольку две матрицы из $GL_{n+1}(K)$, отличающиеся только множителем из центра тела K, действуют на подпространствах из K^{n+1} одинаково, то корректно задать действие элемента проективной линейной группы на проективном пространстве, как действие произвольного представителя смежного класса по центру. Говорят, что подгруппа $G < PGL_{n+1}(K)$ действует флаг-транзитивно на $PG(n, K)$, если для любых двух максимальных флагов существует элемент из G, переводящий один флаг в другой [3].

Проективная группа $PGL_{n+1}(R)$ над подкольцом R определяется, как образ подгруппы $GL_{n+1}(R) < GL_{n+1}(K)$ при естественном гомоморфизме $GL_{n+1}(K)$ на $PGL_{n+1}(K)$.

(Ассоциативное) кольцо называется левой (правой) областью Безу, если оно не имеет делителей нуля и любой конечно порожденный идеал является главным [5, Ch. II, §1]. Эквивалентно можно определить левую (правую) область Безу как кольцо с единицей и без делителей нуля, в котором сумма любых двух главных левых (правых) идеалов вновь является главным левым (правым) идеалом. Областью Безу называется кольцо, одновременно являющееся левой и правой областью Безу.

3. Доказательство теоремы

Пусть K — тело, а R — его подкольцо с единицей. Сразу отметим, что так как R вкладывается в тело, то в нем отсутствуют делители нуля.

Необходимость. Пусть кольцо R таково, что группа $PGL_{n+1}(R)$ действует флаг-транзитивно на $PG(n, K)$.

Обозначим вектор $\mathbf{e_i} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in K^{n+1}$, где единица стоит на i-том месте, а на остальных местах — нули. Далее, обозначим E_i — подпространство порожденное векторами $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_i}$. Тогда $E_1 < \ldots < E_n$ — максимальный флаг проективного пространства, а $E_{n+1} = K^{n+1}$.

Выберем произвольно ненулевой $x \in K$. Покажем, что x можно представить как правое частное элементов из R. Для этого рассмотрим подпространство M, порожденное вектором $\mathbf{m} = (x, 1, 0, \ldots, 0)$, где третья и последующие координаты равны нулю. Так как $PGL_{n+1}(R)$ флаг-транзитивна, то найдется матрица $g = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(R)$, переводящая флаг

$$E_1 < E_2 < \ldots < E_i < \ldots < E_n \quad \text{во флаг} \quad M < E_2 < \ldots < E_i < \ldots < E_n.$$

Тогда образ подпространства E_1 под действием элемента g совпадает с подпространством M и, следовательно, вектор

$$\mathbf{e_1} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1,n+1} \end{pmatrix}$$

пропорционален слева вектору $\mathbf{m}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1,n+1} \end{pmatrix} = \lambda(x, 1, 0, \ldots, 0), \ \lambda \in K.$$

Отсюда, $x = a_{12}^{-1} a_{11}$ для некоторых $a_{11}, a_{12} \in R$ и, в силу произвольности x, множество правых частных кольца R совпадает с K.

Далее, элемент g переводит подпространство E_2 в себя. Тогда $\mathbf{e_2} g \in E_2$ и вектор

$$\mathbf{e_2}g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \end{pmatrix}$$

имеет координаты равные нулю на третьем и последующих местах: $a_{23} = \ldots = a_{2,n+1} = 0$. Учитывая $\mathbf{e_1}g \in M < E_2$, заключаем, что матрица g имеет блочно-треугольный вид

$$g = \left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & \dots & a_{n+1,n+1} \end{array}\right).$$

При этом матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ является обратимой в $GL_2(R)$, то есть существуют такие $b_{ij} \in R$, что

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В частности, $a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0$. Откуда $b_{22}b_{12}^{-1} = -a_{12}^{-1}a_{11} = -x$ и, вновь в силу произвольности x, множество левых частных кольца R совпадает с K.

Покажем теперь, что сумма двух главных правых идеалов из R вновь является главным идеалом. Возьмем произвольные ненулевые $a, b \in R$. Положим $x = b^{-1}a \in K$. Повторяя предыдущие рассуждения, заключаем, что найдется матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(R)$, для элементов которой имеем $b^{-1}a = x = a_{12}^{-1}a_{11}$, а также $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1$, где $b_{ij} \in R$ — элементы матрицы A^{-1}. Отсюда $a_{11}R + a_{12}R = R$. Умножая равенство слева на элемент ba_{12}^{-1}, имеем $aR + bR = ba_{12}^{-1}R$. В частности, элемент ba_{12}^{-1} принадлежит кольцу R. Таким образом, сумма двух правых главных идеалов $aR + bR$ является главным. Аналогично, положив $x = -ab^{-1}$, доказываем, что R является и левой областью Безу.

Достаточность. Пусть R является областью Безу, множества левых и правых частных которой совпадают с K.

Для доказательства флаг-транзитивности $PGL_{n+1}(R)$ достаточно для произвольного максимального флага $M_1 < \ldots < M_n$ указать матрицу $g \in GL_{n+1}(R)$, переводящую введенный ранее флаг $E_1 < \ldots < E_n$ в данный.

Выберем базис флага $M_1 < \ldots < M_n$, т.е. векторы с условием

$$(1) \qquad \mathbf{f_1} \in M_1 \backslash \{\mathbf{0}\}; \quad \mathbf{f_i} \in M_i \backslash M_{i-1},\ i = 2, \ldots, n; \quad \mathbf{f_{n+1}} \in K^{n+1} \backslash M_n.$$

Ясно, что матрица, составленная из векторов-строк базиса флага, переводит флаг $E_1 < \ldots < E_n$ в данный. Сложность доказательства состоит в том, что необходимо выбрать $\mathbf{f_i}$ так, чтобы их координаты лежали в R и матрица, составленная из $\mathbf{f_i}$ была обратима в $GL_{n+1}(R)$. Добьемся этого, отталкиваясь от произвольно выбранного базиса и корректируя его в несколько этапов.

Заменим при необходимости каждый $\mathbf{f_i}$ на пропорциональный ему вектор с координатами из R. Это можно сделать следующим образом. Пусть $\mathbf{f_i} =$

$(a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{i,n+1})$ и пусть a_{ij} — первая его координата не лежащая в R. Так как множество правых частных элементов из R покрывает K, то для некоторых $a_j, b_j \in R$ имеем $a_{ij} = b_j^{-1}a_i$. Заменим вектор $\mathbf{f_i}$ на кратный ему $b_j\mathbf{f_i}$. Если вектор $b_j\mathbf{f_i}$ все еще содержит координаты не лежащие в R, то заменяя $\mathbf{f_i}$ на $b_j\mathbf{f_i}$ и повторяя данную процедуру (самое большее еще $n+1-j$ раз) получаем вектор все координаты которого лежат в R.

(*) Так как R является правой областью Безу, то для координат вектора $\mathbf{f_1} = (a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1,n+1})$ найдется их левый наибольший делитель, то есть такой элемент c_1, что $a_{11}R + \ldots + a_{1,n+1}R = c_1R$. Тогда все частные $c_1^{-1}a_{1i}$ лежат в R, а для некоторых $u_{i1} \in R$ имеем $a_{11}u_{11} + \ldots + a_{1,n+1}u_{n+1,1} = c_1$. Обозначим $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \ldots \\ u_{n+1,1} \end{pmatrix}$ и положим $\mathbf{f_1^1} = c_1^{-1}\mathbf{f_1}$, $\quad \mathbf{f_i^1} = \mathbf{f_i} - (\mathbf{f_i}\mathbf{u_1})\mathbf{f_1^1},\ i \geqslant 2$. Здесь вектора умножаются, как матрицы согласно принятым обозначениям. Отметим, что полученные векторы $\mathbf{f_i^1}$ очевидно удовлетворяют свойству (1) (т.е. являются базисом флага $M_1 < \ldots < M_n$), а их координаты лежат в R. Также имеем

$$\mathbf{f_1^1}\mathbf{u_1} = c_1^{-1}a_{11}u_{11} + \ldots + c_1^{-1}a_{1,n+1}u_{n+1,1} = c_1^{-1}c_1 = 1,$$

$$\mathbf{f_i^1}\mathbf{u_1} = \mathbf{f_i}\mathbf{u_1} - \left((\mathbf{f_i}\mathbf{u_1})\mathbf{f_1^1}\right)\mathbf{u_1} = \mathbf{f_i}\mathbf{u_1} - (\mathbf{f_i}\mathbf{u_1})(\mathbf{f_1^1}\mathbf{u_1}) = \mathbf{f_i}\mathbf{u_1} - \mathbf{f_i}\mathbf{u_1}\cdot 1 = 0,\ i \geqslant 2.$$

Затем повторим для вектора $\mathbf{f_2^1} = (a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2,n+1})$ описанную выше процедуру (*). То есть находим левый наибольший общий делитель c_2 его координат: $a_{21}R + \ldots + a_{2,n+1}R = c_2R$ и элементы $u_{i2} \in R$, для которых $a_{21}u_{12} + \ldots + a_{2,n+1}u_{n+1,2} = c_2$, обозначаем $\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} u_{12} \\ \ldots \\ u_{n+1,2} \end{pmatrix}$ и полагаем $\mathbf{f_2^2} = c_2^{-1}\mathbf{f_2^1}$, $\quad \mathbf{f_i^2} = \mathbf{f_i^1} - (\mathbf{f_i^1}\mathbf{u_2})\mathbf{f_2^2},\ i \geqslant 3$. Аналогично при этом получаем

$$\mathbf{f_2^2}\mathbf{u_2} = 1, \mathbf{f_i^2}\mathbf{u_2} = 0,\ i \geqslant 3.$$

При этом, поскольку векторы $\mathbf{f_i^2},\ i \geqslant 2$ являются линейными комбинациями векторов $\mathbf{f_i^1},\ i \geqslant 2$, то для них имеем $\mathbf{f_i^2}\mathbf{u_1} = 0,\ i \geqslant 2$.

Применим процедуру (*) и далее, последовательно заменяя каждый вектор $\mathbf{f_i^j}$ на соответствующий $\mathbf{f_i^{j+1}}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{f_1^1} & & & & & & \\
\mathbf{f_2^1} & \to & \mathbf{f_2^2} & & & & \\
\mathbf{f_3^1} & \to & \mathbf{f_3^2} & \to & \mathbf{f_3^3} & & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \\
\mathbf{f_{n+1}^1} & \to & \mathbf{f_{n+1}^2} & \to & \mathbf{f_{n+1}^3} & \ldots \to & \mathbf{f_{n+1}^{n+1}}.
\end{array}$$

В результате получим векторы-строки $\mathbf{f_i^i}$ и векторы-столбцы $\mathbf{u_i}$, $i = 1,\ \ldots,\ n+1$. Составим из первых и вторых, соответственно, матрицы F и U. Элементы матриц F и U лежат в R, а их произведение

$$FU = \begin{pmatrix} \mathbf{f_1^1}\mathbf{u_1} & \mathbf{f_1^1}\mathbf{u_2} & \ldots & \mathbf{f_1^1}\mathbf{u_{n+1}} \\ \mathbf{f_2^2}\mathbf{u_1} & \mathbf{f_2^2}\mathbf{u_2} & \ldots & \mathbf{f_2^2}\mathbf{u_{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{f_{n+1}^{n+1}}\mathbf{u_1} & \mathbf{f_{n+1}^{n+1}}\mathbf{u_2} & \ldots & \mathbf{f_{n+1}^{n+1}}\mathbf{u_{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * & \ldots & * \\ 0 & 1 & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

является верхне-треугольной матрицей с единицами на главной диагонали и, следовательно, обратимой в $GL_{n+1}(R)$. Таким образом, матрица F также является обратимой в $GL_{n+1}(R)$ и при этом переводит флаг $E_1 < \ldots < E_n$ во флаг $M_1 < \ldots < M_n$. Следовательно, мы построили искомую матрицу $g = F \in GL_{n+1}(R)$ и флаг-транзитивность группы $PGL_{n+1}(R)$ доказана.

Список литературы

[1] Artin E., *Geometric Algebra.* Interscience Publ. Inc., New York, 1967, x+214 p. Артин Э., *Геометрическая алгебра.* Москва: Наука, 1969, 284 с. MR0242847

[2] Beutelspacher A. and Rosenbaum U. *Projective Geometry: From Foundations to Applications.* Cambridge Uni. Press, 1998, x+258 p. MR1629468

[3] Higman D.G., *Flag-transitive collineation groups of finite projective spaces*, Ill. J. Math., **6** (1962), 434–446. MR0143098

[4] Seitz G., *Flag-transitive subgroups of Chevalley groups* Ann. Math., 2nd ser., **97**:1 (1973), 27–56. MR0340446

[5] Stenström B., *An Introduction to Methods of Ring Theory,* Berlin, Heidelberg, New York, 1975. MR0389953

[6] Zyubin S., *Groups acting transitively and flag-transitively on projective spaces*, Межд. алгебр. конф., СПб отд. МИ РАН, Санкт-Петербург, 2007, 180–181.

[7] Зюбин С.А., *Линейные группы, флаг-транзитивные на проективных пространствах*, Классы групп, алгебр и их приложения, межд. алг. конф., тез. докл., Гомель, 2007, 75–76.

[8] Зюбин С.А., *Флаг-транзитивность линейных групп, определенных над подкольцом тела*, Тезисы междун. конф. Мальцевские чтения, Новосибирск, 2009, с.56.

[9] *Коуровская тетрадь* (нерешенные вопросы теории групп), 17-е изд., Новосибирск, ИМ СО РАН, 2010.

Сергей Александрович Зюбин
Томский политехнический университет,
пр. Ленина 30,
634050, Томск, Россия
E-mail address: sergey.zyubin@gmail.com