

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

*Том 11, стр. 675–694 (2014)*УДК 517.928
MSC 34C15,34C29АСИМПТОТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ
ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В НЕЛИНЕЙНОЙ
СИСТЕМЕ ДВУХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Н.А. ЛЮЛЬКО, Н.А. КУДРЯВЦЕВА, А.Н. КУДРЯВЦЕВ

ABSTRACT. A parametric resonance in a nonlinear system of ordinary differential equations, which is a mathematical model of a water–oil gas containing layer, is considered. The Krylov–Bolgoliubov–Mitropolsky averaging method is applied to investigate the instability of zero solution of the system and deduce averaged equations for time evolution of the amplitude of oscillations in the cases of main and combinational resonances. The original and averaged equations are also integrated numerically with a high-order strong stability preserving Runge–Kutta scheme. By comparing the numerical solutions it is shown that the averaged equations enable us to predict correctly the maximum amplitude of oscillations and the time moment when it is achieved. The dependence of resonance characteristics on the small parameter is also studied.

Keywords: instability in nonlinear system of two oscillators, main and combinational parametric resonances, asymptotic and numerical analysis of resonance.

1. ВВЕДЕНИЕ

Распространенная в настоящее время при добыче нефти технология вытеснения нефти водой приводит к постепенному заводнению нефтяных пластов и полному или частичному прекращению нефтеотдачи. При этом в залежах

LYULKO, N.A., KUDRYAVTSEVA, N.A., KUDRYAVTSEV, A.N., ASYMPTOTIC AND NUMERICAL ANALYSIS OF PARAMETRIC RESONANCE IN A NONLINEAR SYSTEM OF TWO OSCILLATORS.

© 2014 Люлько Н.А., Кудрявцева Н.А., Кудрявцев А.Н.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 15, Междисциплинарного интеграционного Проекта СО РАН № 30 и Гранта правительства РФ (Договор № 14.Z50.31.0019) для поддержки исследований под руководством ведущих ученых.

Получена 21 апреля 2014 г., опубликована 30 августа 2014 г.

остается значительное количество не извлеченной, т. н. остаточной нефти. Одним из наиболее часто применяемых способов реанимации скважин является их вибрационная обработка [1].

В работах [2, 3, 4] была построена и исследована гидродинамическая модель газосодержащих слоистых систем, позволяющая дать теоретическое обоснование вибрационному методу восстановления нефтеотдачи. В основу модели положена гипотеза о формировании на поверхности поровых каналов макроскопических пленок, образованных чередующимися слоями полярных компонент, насыщенными газом. В модели газосодержащих слоистых систем, представленной в [4], рассматривается слоистая система, заполняющая в состоянии покоя область $((x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < z < l)$. Обозначим через $u(t, x, y, z)$ вертикальные смещения точек этого пласта, предполагая, что его нижняя граница жестко закреплена, а верхняя совершает гармонические колебания малой амплитуды $\epsilon > 0$ с частотой $\omega > 0$. В ([4], формула (1.23)) предложена следующая модель, описывающая малые колебания такого макропласта:

$$(1) \quad \begin{aligned} \rho_* \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\gamma B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - p_0 \frac{\partial \rho}{\partial x}, & \rho_* \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\gamma B \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - p_0 \frac{\partial \rho}{\partial y}, \\ \rho_* \frac{\partial v_z}{\partial t} &= B(1 - \gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - p_0 \frac{\partial \rho}{\partial z} + q(\delta_0 + \delta_1(z - u))\Delta_{\perp} u, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\rho_* \operatorname{div}(\vec{v}), & \frac{\partial u}{\partial t} &= v_z, \\ u|_{z=0} &= 0, & u|_{z=l} &= \epsilon \sin(\omega t), \end{aligned}$$

где v_x, v_y, v_z — компоненты вектора скорости \vec{v} в момент t в точке (x, y, z) , $\rho(t, x, y, z)$ — плотность среды, $q > 0$ — плотность слоев, $\Delta_{\perp} u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2$. Здесь $0 < \gamma < 1$, $B, p_0, p_*, \delta_0, \delta_1$ — положительные физические параметры модели; значения функций v_x, v_y, v_z, u, ρ считаются известными при $t = 0$.

В [4] для системы (1), при некоторых соотношениях между параметрами, в линейном приближении было показано, что периодическое внешнее воздействие на насыщенную газом водонефтяную смесь при определенных частотах может приводить к параметрическому резонансу в распределенной системе. Экспоненциальный рост амплитуды колебаний водонефтяных пленок влечет их разрушение и выход газа, следствием чего и является увеличение проницаемости каналов нефтяного коллектора.

В [5] было начато исследование неустойчивости и нелинейной модели газосодержащей слоистой системы (1). Показано, что если в системе (1) заменить все дифференциальные операторы по пространственным переменным на их символы, то есть $\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow ik_1 u$, $\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow ik_2 u$, $\frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow ik_3 u$, то при некоторых ограничениях на параметры полученную систему можно свести к одному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(2) \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + \sigma_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \sigma_2^2 \right) u = q \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_1^2 \right) u^2 + \epsilon q \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_2^2 \right) (u \sin \omega t).$$

Здесь функция $u(t)$ — это вертикальное смещение точек пласта, совершающего колебания под действием периодического внешнего воздействия, ω и ϵ —

соответственно, частота и амплитуда внешней силы, $\sigma_1, \sigma_2, \omega_1, \omega_2$ и q — некоторые положительные параметры задачи; при этом q предполагается малой величиной, т. е. $q \ll 1$.

Уравнение (2) можно также переписать в виде системы двух уравнений второго порядка

$$(3) \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + \sigma_1^2 \right) u = f,$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \sigma_2^2 \right) f = q \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_1^2 \right) u^2 + \epsilon q \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_2^2 \right) (u \sin \omega t),$$

откуда становится очевидным, что исследуемая система является ничем иным, как нелинейной системой двух гармонических осцилляторов с собственными частотами σ_1 и σ_2 . Не ограничивая общности, можно считать, что $\sigma_1 < \sigma_2$.

Невозмущенная ($\epsilon = 0$) система уравнений (3) инвариантна относительно обращения времени, т. е. замены переменных $t \leftrightarrow -t$. Из ее обратимости следует [6], что если для частот σ_1, σ_2 выполнено условие отсутствия внутренних резонансов до пятого порядка, т. е.

$$p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 \neq 0 \quad \text{для} \quad 0 < |p_1| + |p_2| < 5,$$

где p_1, p_2 — целые числа, и соответствующая нормальная форма Пуанкаре является невырожденной, то невозмущенная система (3) имеет в окрестности нуля бесконечное число квазипериодических решений с базисом частот σ_1, σ_2 и два однопараметрических семейства периодических решений с периодами $T_1 \approx \frac{2\pi}{\sigma_1}$ и, соответственно, $T_2 \approx \frac{2\pi}{\sigma_2}$. С другой стороны, при $q = 0$ система (3) является устойчивой, так как имеет только почти периодические решения $u = C_1 e^{i\sigma_1 t} + C_2 e^{-i\sigma_1 t} + C_3 e^{i\sigma_2 t} + C_4 e^{-i\sigma_2 t}$, $f = C_3(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) e^{i\sigma_2 t} + C_4(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) e^{-i\sigma_2 t}$, где C_1 и C_2 , а также C_3 и C_4 — произвольные комплексно сопряженные числа.

В [5] показано, что нулевое решение возмущенной ($\epsilon > 0, q > 0$) системы (3) будет неустойчивым при малых q вследствие параметрического резонанса при выполнении условий $\omega = 2\sigma_1$ (основной резонанс) или $\omega = \sigma_1 + \sigma_2$ (комбинационный резонанс).

Изучению резонансных явлений в дифференциальных системах посвящено большое количество работ, обзор по которым можно найти в [7] — [9]; в частности, в [10], [11] представлена теория параметрической неустойчивости для линейных систем дифференциальных уравнений. Доказано, что в случае параметрической неустойчивости в линейной возмущенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений решения растут экспоненциально. Имеется также много работ по исследованию резонансов в нелинейных возмущенных системах, но, как правило, это гамильтоновы системы [12] — [14]. Гамильтоновы системы обычно задаются через указание функции Гамильтона и при дальнейшем исследовании используется стандартный вид системы в переменных действие-угол.

Система (3) не является ни гамильтоновой (при записи в переменных u, f, \dot{u}, \dot{f}), ни системой слабо связанных осцилляторов, наиболее часто исследуемой [8]. Вообще говоря, решение задачи Коши для системы (3) или эквивалентного ей уравнения (2) можно найти только численно. Однако, в случаях,

когда q является малым параметром, для исследования неустойчивости нулевого решения можно использовать метод усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского. После усреднения по быстрым колебаниям получается автономная система уравнений, описывающая медленное изменение амплитуды этих колебаний. Соответствующие теоретические вычисления подробно проделаны в [5]. Там же детально исследованы фазовые портреты усредненных систем уравнений при параметрическом резонансе основного и комбинационного типов и найдены первые интегралы усредненных систем, позволяющие вычислить максимальную амплитуду колебаний. Метод усреднения, применяемый в настоящей работе, позволяет найти решение исходного уравнения только на конечном промежутке времени, поэтому возникает естественный вопрос: разовьется ли за это время резонанс и насколько точно усредненная система описывает максимальную амплитуду колебаний при резонансе. Целью настоящей работы является численное решение исходного уравнения (2) и сравнение построенных решений с решениями, полученными с помощью метода усреднения.

Отметим, что исследование параметрического резонанса физиками осуществляется, по сути, также с помощью метода усреднения [15]. Раскладывая возмущенное решение в ряд Фурье по гармоникам, они отбрасывают те члены в разложении, которые не содержат частот, участвующих в возмущающем члене. Если подставить такой вид решения в исходное уравнение и применить формулу Тейлора, а затем в полученном соотношении оставить только члены при младших степенях малого параметра и найти средние значения этих членов, то получатся автономные уравнения, аналогичные тем, которые получаются с помощью метода Крылова–Боголюбова–Митропольского. Отличие настоящей работы от большинства “физических” работ состоит в том, что здесь дано обоснование всем “отбрасываниям” и указана точность полученного приближенного решения.

2. ВЫВОД УСРЕДНЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

При проведении усреднения, так же как при численном решении, удобно исходить из системы уравнений первого порядка. Введя вектор $U = \left(u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^3u}{dt^3} \right)^T$, перепишем (3) в виде

$$(4) \quad \frac{dU}{dt} = AU + q[\epsilon B(\omega t)U + \Phi(U)],$$

где

$$\Phi(U) = \left(0, 0, 0, 2 \left[\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + u \frac{d^2u}{dt^2} \right] + \omega_1^2 u^2 \right)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\sigma_1^2 \sigma_2^2 & 0 & -(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(\omega t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a \sin \omega t & 2\omega \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \omega_2^2 - \omega^2.$$

Сделаем в системе (4) замену переменных $U = \Pi(t)V$, где $\Pi(t)$ — фундаментальная матрица решений системы $\frac{dU}{dt} = AU$ следующего вида:

$$\Pi(t) = \begin{pmatrix} e^{i\sigma_1 t} & e^{-i\sigma_1 t} & e^{i\sigma_2 t} & e^{-i\sigma_2 t} \\ i\sigma_1 e^{i\sigma_1 t} & -i\sigma_1 e^{-i\sigma_1 t} & i\sigma_2 e^{i\sigma_2 t} & -i\sigma_2 e^{-i\sigma_2 t} \\ -\sigma_1^2 e^{i\sigma_1 t} & -\sigma_1^2 e^{-i\sigma_1 t} & -\sigma_2^2 e^{i\sigma_2 t} & -\sigma_2^2 e^{-i\sigma_2 t} \\ -i\sigma_1^3 e^{i\sigma_1 t} & i\sigma_1^3 e^{-i\sigma_1 t} & -i\sigma_2^3 e^{i\sigma_2 t} & i\sigma_2^3 e^{-i\sigma_2 t} \end{pmatrix},$$

а $V = [v_1, v_1^*, v_2, v_2^*]^T$, где звездочкой обозначено комплексное сопряжение. В результате этой замены переменных система (4) примет вид уравнения в стандартной в смысле Боголюбова форме относительно малого параметра $q > 0$

$$(5) \quad \dot{V} = q(\epsilon G(t; \omega)V + F(t, V)), \quad V(0) = V_0.$$

Здесь $G(t; \omega) = \Pi(t)^{-1}B(\omega t)\Pi(t)$ — почти периодическая по t (далее будем обозначать это словосочетание как п.п.) матрица, а $F(t, V) = \Pi(t)^{-1}F(\Pi(t)V)$ — квадратичная по V и п.п. столбец-функция. При применении метода усреднения нам понадобится усреднение правой части (5), поэтому выпишем вид $G(t; \omega)$ и $F(t, V)$. Обозначим

$$(6) \quad \begin{aligned} \Gamma_1 &= e^{i\sigma_1 t}(a \sin(\omega t) + 2i\sigma_1 \omega \cos(\omega t) - \sigma_1^2 \sin(\omega t)), \\ \Gamma_2 &= e^{-i\sigma_1 t}(a \sin(\omega t) - 2i\sigma_1 \omega \cos(\omega t) - \sigma_1^2 \sin(\omega t)), \\ \Gamma_3 &= e^{i\sigma_2 t}(a \sin(\omega t) + 2i\sigma_2 \omega \cos(\omega t) - \sigma_2^2 \sin(\omega t)), \\ \Gamma_4 &= e^{-i\sigma_2 t}(a \sin(\omega t) - 2i\sigma_2 \omega \cos(\omega t) - \sigma_2^2 \sin(\omega t)), \end{aligned}$$

тогда матрицу $G(t; \omega)$ и вектор $F(t, V)$ можно записать в виде

$$(7) \quad G(t; \omega) = \begin{pmatrix} g_1 \Gamma_1 & g_1 \Gamma_2 & g_1 \Gamma_3 & g_1 \Gamma_4 \\ g_2 \Gamma_1 & g_2 \Gamma_2 & g_2 \Gamma_3 & g_2 \Gamma_4 \\ g_3 \Gamma_1 & g_3 \Gamma_2 & g_3 \Gamma_3 & g_3 \Gamma_4 \\ g_4 \Gamma_1 & g_4 \Gamma_2 & g_4 \Gamma_3 & g_4 \Gamma_4 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \frac{e^{-i\sigma_1 t}}{2i\sigma_1(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}, g_2 = \frac{-e^{i\sigma_1 t}}{2i\sigma_1(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}, g_3 = \frac{-e^{-i\sigma_2 t}}{2i\sigma_2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}, g_4 = \frac{e^{i\sigma_2 t}}{2i\sigma_2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)};$$

$$(8) \quad F(t, V) = [g_1 \phi, g_2 \phi, g_3 \phi, g_4 \phi]^T,$$

$$\begin{aligned} \phi &= (\omega_1^2 - 4\sigma_1^2) (e^{2i\sigma_1 t} v_1^2 + e^{-2i\sigma_1 t} v_1^{*2}) + (\omega_1^2 - 4\sigma_2^2) (e^{2i\sigma_2 t} v_2^2 + e^{-2i\sigma_2 t} v_2^{*2}) + \\ & 2\omega_1^2 v_1 v_1^* + 2\omega_1^2 v_2 v_2^* + 2[\omega_1^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)^2] [v_1 v_2 e^{i(\sigma_1 + \sigma_2)t} + v_1^* v_2^* e^{-i(\sigma_1 + \sigma_2)t}] + \\ & 2[\omega_1^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2] [v_1 v_2^* e^{i(\sigma_1 - \sigma_2)t} + v_1^* v_2 e^{i(\sigma_2 - \sigma_1)t}]. \end{aligned}$$

Применим к системе (5) метод усреднения [16], [17], для чего сделаем в ней замену переменных $V = \Psi + qR_1(t, \Psi) + q^2R_2(t, \Psi)$, где R_1, R_2 — п.п. функции. После подстановки этой замены в (5) и использования формулы Тейлора получим

$$(9) \quad \frac{d\Psi}{dt} = q(\epsilon G(t; \omega)\Psi + F(t, \Psi) - \frac{\partial R_1}{\partial t}) + q^2(\epsilon G(t; \omega)R_1(t, \Psi) + \frac{\partial F}{\partial \Psi}R_1(t, \Psi) - \frac{\partial R_1}{\partial \Psi}(\epsilon G(t; \omega)\Psi + F(t, \Psi) - \frac{\partial R_1}{\partial t}) - \frac{\partial R_2}{\partial t}) + O(q^3).$$

Идея метода усреднения состоит в том, чтобы найти такие функции R_1, R_2 , с помощью которых уравнение (9) для $\Psi(t)$ станет автономным с точностью до $O(q^3)$. Тогда решение $\Psi(t)$ “укороченного” автономного уравнения (без слагаемого $O(q^3)$) будет приближенным решением исходного уравнения (5) на конечном промежутке $[0, \frac{T}{q}]$.

Для нахождения функций R_1, R_2 нам понадобится понятие среднего значения $f_0(x)$ п.п. функции $f(t, x)$, где

$$f_0(x) = (\text{с.з.})f(t, x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt.$$

1. Рассмотрим в (9) множитель при q . Так как $\epsilon G(t; \omega)\Psi + F(t, \Psi)$ есть п.п. функция, то мы представим ее в виде суммы $M_0(\Psi) + M_1(t, \Psi)$, где $M_0(\Psi)$ — среднее значение этой функции. Из (8) следует, что среднее значение $F(t, \Psi)$ равно нулю, поэтому $M_0(\Psi) = \epsilon G_0(\omega)\Psi$, где матрица $G_0(\omega) = (\text{с.з.})G(t; \omega)$. Определим функцию $R_1(t, \Psi)$ как первообразную $M_1(t, \Psi)$, т. е. $\frac{\partial R_1}{\partial t} = M_1(t, \Psi)$. $M_1(t, \Psi)$ есть п.п. функция с нулевым средним значением, причем спектр ее конечен, поэтому первообразная этой функции есть также п.п. функция [18]. Так как R_1 определяется с точностью до константы, то будем считать, что R_1 есть п.п. функция с нулевым средним значением, т. е.

$$(10) \quad R_1(t, \Psi) = \epsilon L(t; \omega)\Psi + D(t, \Psi).$$

Здесь $L(t; \omega)$ — п.п. функция с нулевым средним значением, первообразная функции $G(t; \omega) - G_0(\omega)$; $D(t, \Psi)$ — п.п. функция с нулевым средним значением, квадратичная по Ψ , первообразная функции $F(t, \Psi)$.

2. Рассмотрим в (9) множитель при q^2 , который в силу предыдущих построений есть выражение $(\epsilon G(t; \omega) + \frac{\partial F}{\partial \Psi})R_1(t, \Psi) - \epsilon \frac{\partial R_1}{\partial \Psi}G_0(\omega)\Psi - \frac{\partial R_2}{\partial t}$. Рассуждая так же, как в пункте 1, запишем равенство $(\epsilon G(t; \omega) + \frac{\partial F}{\partial \Psi})R_1(t, \Psi) - \epsilon \frac{\partial R_1}{\partial \Psi}G_0(\omega)\Psi = N_0(\Psi) + N_1(t, \Psi)$, где $N_0(\Psi)$ есть среднее значение п.п. функции, стоящей слева в этом равенстве. $R_2(t, \Psi)$ определим как п.п. функцию с нулевым средним значением, являющуюся первообразной п.п. функции $N_1(t, \Psi)$, т. е. $\frac{\partial R_2}{\partial t} = N_1(t, \Psi)$.

Итак, в силу выбора функций R_1, R_2 , уравнение (9) для $\Psi(t)$ примет вид

$$(11) \quad \frac{d\Psi}{dt} = q\epsilon G_0(\omega)\Psi + q^2N_0(\Psi) + O(q^3), \quad \Psi(0) = \Psi_0,$$

где

$$N_0(\Psi) = \frac{\epsilon^2}{i} E\Psi + \epsilon K(\Psi) + \frac{S(\Psi)}{i}.$$

Здесь E — матрица, $K(\Psi)$ — вектор-функция, квадратичная по Ψ , $S(\Psi)$ — вектор-функция, которая есть однородный полином третьей степени относительно Ψ . При этом справедливы следующие соотношения:

$$\frac{E}{i} = (\text{с.з.}) G(t; \omega) L(t; \omega), \quad \frac{S(\Psi)}{i} = (\text{с.з.}) \frac{\partial F}{\partial \Psi} D(t, \Psi),$$

$$(12) \quad K(\Psi) = (\text{с.з.}) \left[G(t; \omega) D(t, \Psi) + \frac{\partial F}{\partial \Psi} L(t; \omega) \Psi \right].$$

Отметим, что п.п. функция $\frac{\partial F}{\partial \Psi} D(t, \Psi)$ не зависит от внешней частоты ω и имеет только мнимые коэффициенты. Поэтому мы обозначили ее среднее значение через $\frac{S(\Psi)}{i}$, где $\Psi = [\psi_1, \psi_1^*, \psi_2, \psi_2^*]^T \in \mathbb{C}^4$. Обозначим через $(s_1, s_2, s_3, s_4)^T$ координаты вектора $S(\Psi)$, тогда, опуская технические выкладки, имеем

$$s_1 = \psi_1(m_1\psi_1\psi_1^* + m_2\psi_2\psi_2^*), \quad s_2 = -s_1^*, \quad s_3 = \psi_2(n_1\psi_1\psi_1^* + n_2\psi_2\psi_2^*), \quad s_4 = -s_3^*,$$

где числа m_1, m_2, n_1, n_2 определяются через параметры исходного уравнения (2).

Далее мы будем рассматривать функцию $\tilde{\Psi}$, являющуюся решением “укороченного” уравнения

$$(13) \quad \frac{d\tilde{\Psi}}{dt} = q\epsilon G_0(\omega)\tilde{\Psi} + q^2 N_0(\tilde{\Psi}), \quad \tilde{\Psi}(0) = \tilde{\Psi}_0.$$

Функция $\tilde{\Psi}$ описывает медленный дрейф [19] асимптотического приближения второго порядка $\tilde{V} = \tilde{\Psi} + qR_1(\tilde{\Psi}, t)$ к точному решению V системы (5). Если $\tilde{\Psi}_0$ такое, что $V(0) = \tilde{V}(0)$, то на промежутке $0 \leq t \leq \frac{T}{q}$ справедлива оценка $\|V(t) - \tilde{V}(t)\| \leq K(T)q$ с константой $K(T)$, не зависящей от q , но зависящей от размеров рассматриваемой области, в которой изучается исходное уравнение [20].

В [5] показано, что нулевое решение системы (5) будет неустойчивым при малых q для тех ω , при которых у $G_0(\omega)$ имеются собственные числа, лежащие в правой полуплоскости, то есть для $\omega: \pm 2\sigma_1, \pm 2\sigma_2, \pm(\sigma_1 + \sigma_2), \pm(\sigma_2 - \sigma_1)$. Для всех других значений ω матрица $G_0(\omega)$ равна нулю. Поэтому далее мы будем исследовать функцию $\tilde{\Psi}$ в случаях $\omega = 2\sigma_1, \omega = \sigma_1 + \sigma_2$ (заметим, что в случаях $\omega = 2\sigma_2, \omega = \sigma_2 - \sigma_1$ исследования, предложенные нами, будут аналогичны).

В случаях $\omega = 2\sigma_1, \omega = \sigma_1 + \sigma_2$, проведя расчеты по формулам (12), получаем, что вектор-функция $K(\Psi)$ является нулевой, а матрица E есть диагональная вещественная матрица: $E = \text{diag}(\gamma, -\gamma, \kappa, -\kappa)$. Поэтому уравнение (13) примет вид

$$\frac{d\tilde{\Psi}}{dt} = q\epsilon G_0(\omega)\tilde{\Psi} + q^2 \left[\frac{\epsilon^2}{i} E\tilde{\Psi} + \frac{S(\tilde{\Psi})}{i} \right], \quad \tilde{\Psi}(0) = \tilde{\Psi}_0.$$

Введем новую переменную $\tau = qt$ (“медленное время”), тогда эту систему можно записать в виде

$$(14) \quad \dot{\tilde{\Psi}} = \epsilon B(\omega)\tilde{\Psi} + \frac{q}{i} \left[\epsilon^2 E \tilde{\Psi} + S(\tilde{\Psi}) \right], \quad \tilde{\Psi}(0) = \tilde{\Psi}_0,$$

относительно неизвестной вектор-функции

$$\tilde{\Psi} = (v + iw, v - iw, r + is, r - is)^T$$

(здесь и далее точкой будем обозначать производную по τ).

Итак, в результате усреднения системы (5) мы имеем систему автономных дифференциальных уравнений (14), описывающую эволюцию переменных $v(\tau)$, $w(\tau)$, $r(\tau)$, $s(\tau)$, являющихся функциями “медленного” времени τ . Получив решение усредненной системы, можно восстановить функцию $\bar{u}(t)$

$$(15) \quad \bar{u}(t) = 2 [v(qt) \cos \sigma_1 t - w(qt) \sin \sigma_1 t + r(qt) \cos \sigma_2 t - s(qt) \sin \sigma_2 t] = \\ 2 \left[\sqrt{v^2 + w^2} \cos(\sigma_1 t + \delta_1) + \sqrt{r^2 + s^2} \cos(\sigma_2 t + \delta_2) \right], \\ \operatorname{tg} \delta_1 = \frac{w}{v}, \quad \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{s}{r},$$

которая является приближенным решением исходного уравнения (2) на промежутке $[0, \frac{T}{q}]$.

2.1. Основной резонанс. Усредненная система уравнений (14) для случая основного резонанса ($\omega = 2\sigma_1$) имеет вид

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{v} &= \epsilon \alpha v + qw [\epsilon^2 \gamma + m_1 (v^2 + w^2) + m_2 (r^2 + s^2)], \\ \dot{w} &= -\epsilon \alpha w - qv [\epsilon^2 \gamma + m_1 (v^2 + w^2) + m_2 (r^2 + s^2)], \\ \dot{r} &= qs [\epsilon^2 \kappa + n_1 (v^2 + w^2) + n_2 (r^2 + s^2)], \\ \dot{s} &= -qr [\epsilon^2 \kappa + n_1 (v^2 + w^2) + n_2 (r^2 + s^2)]. \end{aligned}$$

Здесь константы α , κ , γ , m_1 , m_2 , n_1 , n_2 определяются через коэффициенты исходной системы уравнений (5) и их значения будут приведены ниже.

Из двух последних уравнений системы (16) следует, что $r\dot{r} + s\dot{s} = 0$, так что

$$r^2 + s^2 = C = \text{const},$$

где $C = r_0^2 + s_0^2$, $r_0 \equiv r(0)$, $s_0 \equiv s(0)$.

Обозначив $R_0 \equiv m_2(r_0^2 + s_0^2)$, приходим к системе двух уравнений

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{v} &= \epsilon \alpha v + qw [\epsilon^2 \gamma + m_1 (v^2 + w^2) + R_0], \\ \dot{w} &= -\epsilon \alpha w - qv [\epsilon^2 \gamma + m_1 (v^2 + w^2) + R_0]. \end{aligned}$$

Эта система уравнений имеет интеграл

$$(18) \quad \epsilon \alpha v w + q (\epsilon^2 \gamma + R_0) \frac{v^2 + w^2}{2} + q m_1 \frac{(v^2 + w^2)^2}{4} = C_0 = \text{const}.$$

Записав (18) в полярных координатах ρ , φ , где $v = \rho \cos \varphi$, $w = \rho \sin \varphi$, и анализируя полученное выражение, как это сделано в [5] для аналогичного интеграла, можно сделать следующие выводы о поведении решений системы (17). Для каждого значения R_0 существует положительная функция $q_0 : q_0(\epsilon) = \left| \frac{\epsilon \alpha}{\epsilon^2 \gamma + R_0} \right|$, определенная при $\epsilon > 0$ там, где $\epsilon^2 \gamma + R_0 \neq 0$. Далее, для $q, \epsilon > 0$ таких, что $q < q_0(\epsilon)$, нуль при всех значениях параметра m_1 системы (17)

является седловой точкой. Обозначим через $\rho_{max} = \max_{0 \leq t < \infty} \sqrt{v^2(t) + w^2(t)}$ максимальную амплитуду колебаний системы (17) при фиксированном значении C_0 , тогда справедливо, что $\rho_{max} \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow 0$. При $q > q_0(\epsilon)$ нуль для рассматриваемой системы является устойчивой точкой — центром.

Итак, в случае основного резонанса $\omega = 2\sigma_1$ усредненная система (16) эквивалентна системе (17). Поэтому в рассматриваемом случае необходимо знать только значения коэффициентов α, γ, m_1, m_2 . Для вычисления этих констант через коэффициенты исходной системы уравнений (3) удобно записать ранее введенные функции Γ_i (6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= e^{i\sigma_1 t}(\gamma_{11}^1 e^{i\omega t} + \gamma_{11}^2 e^{-i\omega t}), & \Gamma_2 &= e^{-i\sigma_1 t}(\gamma_{22}^1 e^{i\omega t} + \gamma_{22}^2 e^{-i\omega t}), \\ \Gamma_3 &= e^{i\sigma_2 t}(\gamma_{33}^1 e^{i\omega t} + \gamma_{33}^2 e^{-i\omega t}), & \Gamma_4 &= e^{-i\sigma_2 t}(\gamma_{44}^1 e^{i\omega t} + \gamma_{44}^2 e^{-i\omega t}), \end{aligned}$$

где для чисел γ_{ii}^l справедливы соотношения

$$\gamma_{22}^1 = \gamma_{11}^{2*}, \quad \gamma_{22}^2 = \gamma_{11}^{1*}, \quad \gamma_{44}^1 = \gamma_{33}^{2*}, \quad \gamma_{44}^2 = \gamma_{33}^{1*},$$

при этом

$$(19) \quad \begin{aligned} \gamma_{11}^1 &= \frac{a - \sigma_1^2 - 2\sigma_1\omega}{2i}, & \gamma_{11}^2 &= \frac{-(a - \sigma_1^2) - 2\sigma_1\omega}{2i}, \\ \gamma_{33}^1 &= \frac{a - \sigma_2^2 - 2\sigma_2\omega}{2i}, & \gamma_{33}^2 &= \frac{-(a - \sigma_2^2) - 2\sigma_2\omega}{2i}. \end{aligned}$$

Обращая внимание на значения показателей экспонент у $G(t; \omega)$ в (7), нетрудно видеть, что матрица $G_0(\omega)$, являющаяся средним значением $G(t; \omega)$, при $\omega = 2\sigma_1$ имеет вид

$$G_0(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\lambda_4 = |\alpha|,$$

$$(20) \quad \alpha = \alpha(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\sigma_1^2 - \omega_2^2}{4\sigma_1(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)};$$

$\lambda_i, i=1, \dots, 4$, — собственные числа $G_0(\omega)$. Итак, при выполнении соотношений $|\sigma_1| \neq |\sigma_2|, |\sigma_1| \neq |\omega_2|$ матрица $G_0(\omega)$ неустойчива.

Проведя вычисления по формулам (12), мы находим остальные коэффициенты системы (17), а именно

$$\gamma = \frac{-1}{4(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2} \left(\frac{1}{\sigma_1\sigma_2} \left(\gamma_{11}^2 \left(\frac{\gamma_{44}^1}{\sigma_2 - \sigma_1} + \frac{\gamma_{33}^1}{\sigma_2 + \sigma_1} \right) + \gamma_{11}^1 \left(\frac{\gamma_{44}^2}{\sigma_2 + 3\sigma_1} - \frac{\gamma_{33}^2}{3\sigma_1 - \sigma_2} \right) \right) - \frac{|\gamma_{11}^1|^2}{4\sigma_1^3} \right),$$

$$\begin{aligned} m_1 = m_1(\sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{4\sigma_1(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2} \times \left\langle \frac{2\omega_1^2}{\sigma_1^2}(\omega_1^2 - 4\sigma_1^2) + \frac{2(\omega_1^2 - 4\sigma_1^2)^2}{3\sigma_1^2} + \frac{4\omega_1^4}{\sigma_1^2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{4\omega_1^2}{\sigma_2^2}((\omega_1^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)^2) + (\omega_1^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2)) + \right. \\ &\quad \left. \frac{2(\omega_1^2 - 4\sigma_1^2)}{\sigma_2} \left(\frac{\omega_1^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2}{2\sigma_1 - \sigma_2} - \frac{\omega_1^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)^2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \right) \right\rangle, \end{aligned}$$

$$m_2 = m_2(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{4\sigma_1(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2} \times \left\langle \frac{1}{\sigma_1^2} (4\omega_1^4 + 4\omega_1^2(\omega_1^2 - 4\sigma_1^2)) + \right.$$

$$\frac{4}{\sigma_1} \left(\frac{(\omega_1^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)^2)^2}{2\sigma_1 + \sigma_2} + \frac{(\omega_1^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2)^2}{2\sigma_1 - \sigma_2} \right) +$$

$$\frac{4(\omega_1^2 - 4\sigma_2^2)}{\sigma_2} \left(\frac{\omega_1^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2}{\sigma_1 - 2\sigma_2} - \frac{\omega_1^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)^2}{\sigma_1 + 2\sigma_2} \right) +$$

$$\frac{4\omega_1^2(\omega_1^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)^2)}{\sigma_2} \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2} \right) - \frac{4\omega_1^2(\omega_1^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2)}{\sigma_2} \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right).$$

2.2. Комбинационный резонанс. В случае комбинационного резонанса ($\omega = \sigma_1 + \sigma_2$) усредненная система уравнений имеет вид

$$(21) \quad \begin{aligned} \dot{v} &= \epsilon \alpha r + qw [\epsilon^2 \gamma + m_1 (v^2 + w^2) + m_2 (r^2 + s^2)], \\ \dot{w} &= -\epsilon \alpha s - qw [\epsilon^2 \gamma + m_1 (v^2 + w^2) + m_2 (r^2 + s^2)], \\ \dot{r} &= \epsilon \beta v + qs [\epsilon^2 \kappa + n_1 (v^2 + w^2) + n_2 (r^2 + s^2)], \\ \dot{s} &= -\epsilon \beta w - qr [\epsilon^2 \kappa + n_1 (v^2 + w^2) + n_2 (r^2 + s^2)], \end{aligned}$$

где константы $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, m_1, m_2, n_1, n_2$ определяются через коэффициенты исходной системы (3) и их значения будут приведены ниже.

Введем обозначения

$$(22) \quad \begin{aligned} \Gamma &= \gamma + \kappa, \quad \Lambda_1 = m_1 + n_1, \quad \Lambda_2 = m_2 + n_2, \\ \Lambda &= \alpha \Lambda_1 + \beta \Lambda_2, \quad P = v^2 + w^2, \quad Q = r^2 + s^2. \end{aligned}$$

Рассматривая величины \dot{P}, \dot{Q} , легко показать, что $\frac{\dot{P}}{\alpha} - \frac{\dot{Q}}{\beta} = 0$, т. е. выражение

$$(23) \quad \frac{P}{\alpha} - \frac{Q}{\beta} = C = const$$

есть интеграл системы (21). Далее, вычисляя выражение $\frac{d}{dt}(vs + wr)$, получим еще один интеграл системы (21):

$$(24) \quad \epsilon \Lambda (vs + wr) + \frac{q}{2} (\Lambda_1 P + \Lambda_2 Q) \left[\epsilon^2 \Gamma + \frac{1}{2} (\Lambda_1 P + \Lambda_2 Q) \right] = I = const.$$

При вычислении коэффициентов системы (21) заметим, что мы ранее отмечали независимость нелинейного члена $S(\Psi)$ в усредненной системе (11) от внешней частоты ω . Поэтому в случае комбинационного резонанса ранее найденные коэффициенты m_1, m_2 будут те же, что и при основном резонансе, при этом для коэффициентов n_1, n_2 справедливы симметричные соотношения

$$n_1 = n_1(\sigma_1, \sigma_2) = m_2(\sigma_2, \sigma_1), \quad n_2 = n_2(\sigma_1, \sigma_2) = m_1(\sigma_2, \sigma_1).$$

Найдем значения параметров $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$. В рассматриваемом случае $\omega = \sigma_1 + \sigma_2$ матрица $G_0(\omega)$ имеет вид

$$G_0(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{\alpha\beta}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -\sqrt{\alpha\beta}.$$

Здесь $\alpha = \alpha(\sigma_1, \sigma_2)$ имеет то же выражение, что и в случае основного резонанса (см. (20)), а $\beta = \beta(\sigma_1, \sigma_2) = \alpha(\sigma_2, \sigma_1)$; λ_i — собственные числа $G_0(\omega)$. Поэтому далее мы будем рассматривать случай $\alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \sigma_1^2 < \omega^2 < \sigma_2^2$; при выполнении этого соотношения матрица $G_0(\omega)$ неустойчива.

Проведя вычисления по формулам (12), мы находим остальные коэффициенты системы (21), а именно

$$\gamma = \gamma(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{-1}{4(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2} \left(-\frac{|\gamma_{11}^1|^2}{4\sigma_1^3} + \frac{1}{\sigma_1\sigma_2} \left(\gamma_{11}^2 \left(\frac{\gamma_{44}^1}{\sigma_2 - \sigma_1} + \frac{\gamma_{33}^1}{\sigma_2 + \sigma_1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \gamma_{11}^1 \left(\frac{\gamma_{44}^2}{\sigma_2 + 3\sigma_1} - \frac{\gamma_{33}^2}{3\sigma_1 - \sigma_2} \right) \right) \right), \quad \kappa = \kappa(\sigma_1, \sigma_2) = \gamma(\sigma_2, \sigma_1).$$

Здесь значения констант γ_{ii}^l определены в (19), где $\omega = \sigma_1 + \sigma_2$.

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Численное решение усредненных систем уравнений (16), (21), в которых исключены все “быстрые” движения, не представляет трудностей, для этого может быть использована любая стандартная схема. Что же касается численного интегрирования исходной системы уравнений (4), то здесь основная трудность состоит в том, что функция $u(t)$ является быстро осциллирующей, с характерным временем изменения порядка величины $2\pi/\sigma_1$, $2\pi/\sigma_2$. Таким образом, шаг интегрирования должен быть существенно меньше этих величин. Для достижения того времени, когда амплитуда колебаний функции $u(t)$ в результате неустойчивости, связанной с параметрическим резонансом, существенно возрастет и достигнет максимума, необходимо выполнять интегрирование на протяжении очень большого числа шагов. Требуется, таким образом, метод, близко воспроизводящий точное решение даже на очень больших временах.

В данной работе мы используем 6-стадийную сохраняющую сильную устойчивость (SSP, Strong Stability Preserving) схему Рунге–Кутты 5-го порядка [21]. Схемы, сохраняющие сильную устойчивость [22], были предложены для численного интегрирования систем уравнений, получающихся после пространственной дискретизации систем уравнений в частных производных. Они строятся таким образом, что если метод Эйлера 1-го порядка точности при определенных ограничениях на временной шаг Δt при интегрировании данной системы уравнений будет сильно устойчив в некоторой норме, то дискретизация высокого порядка по времени, называемая SSP методом, также сохранит устойчивость в этой норме (возможно при других ограничениях на Δt).

Для системы уравнений

$$\frac{dU}{dt} = L(U)$$

используемая нами 6-стадийная схема Рунге–Кутты может быть записана как

$$\bar{U}^1 = U^n, \\ \bar{U}^j = U^n + \Delta t_n \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} L(\bar{U}^k), \quad j = 2, \dots, 6 \\ U^{n+1} = U^n + \Delta t_n \sum_{j=1}^6 b_j L(\bar{U}^j).$$

Здесь U^n — численное решение в момент времени t_n , U^{n+1} — решение на следующем временном слое, в момент времени $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$, \bar{U}^j — промежуточное решение на j -ой стадии многостадийной схемы. Коэффициенты a_{jk} и b_j даны в ТАБЛИЦАХ 1 и 2.

ТАБЛИЦА 1. Коэффициенты a_{jk}

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$j = 2$	1				
$j = 3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			
$j = 4$	$\frac{2046}{15625}$	$-\frac{454}{15625}$	$\frac{1533}{16625}$		
$j = 5$	$-\frac{739}{5625}$	$\frac{511}{5625}$	$-\frac{566}{16875}$	$\frac{20}{27}$	
$j = 6$	$\frac{11822}{21875}$	$-\frac{6928}{21875}$	$-\frac{4269}{21875}$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{54}{35}$

ТАБЛИЦА 2. Коэффициенты b_j

$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
$\frac{1}{24}$	0	0	$\frac{125}{336}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{5}{48}$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Всюду далее под решением исходной системы (4) мы понимаем функцию $u(t)$, которая является первой компонентой вектора $U = \left(u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^3u}{dt^3} \right)^T$ в этой системе. Это решение ниже будет сравниваться с функцией $\bar{u}(t)$, рассчитанной по формуле (15), исходя из решения усредненной системы уравнений. Кроме того, как будет видно из дальнейшего, важную роль при анализе изменения амплитуды колебаний функции $u(t)$ будет играть функция

$$(25) \quad A(t) = 2\sqrt{v^2 + w^2} + 2\sqrt{r^2 + s^2},$$

которая является периодической [5] и строится также по решению усредненной системы уравнений.

4.1. Основной резонанс. В случае основного резонанса $\omega = 2\sigma_1$ (мы считаем, что $\sigma_1 < \sigma_2$) во всех расчетах ниже принято $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sqrt{2}, \omega_1 = \omega_2 = 2$. Интеграл (18) позволяет легко исследовать свойства решений усредненной системы (16). Все фазовые траектории системы (16) лежат на двумерных многообразиях фазового пространства переменных v, w, r, s . Эти многообразия есть прямые произведения фазовых траекторий системы (17), задаваемых соотношением (18), и окружностей $r^2 + s^2 = const$. Как указывалось выше (раздел 2.1), в зависимости от значения параметров задачи нулевое решение $v = w = 0$ системы (17) может быть либо седловой точкой, либо центром. Это иллюстрируется рис. 1, на котором показаны фазовые портреты системы (17) для двух различных значений параметра R_0 : $R_0 = 0$ и $R_0 = 20$.

В случае $R_0 = 0$ (рис. 1А) для усредненной системы (17) при малых значениях q и ϵ нулевое решение является седловой точкой; при этом в системе имеются еще две симметричные стационарные точки — центры. Проходящая через начало координат сепаратриса разбивает фазовую плоскость на три области. Все фазовые траектории, за исключением стационарных точек и сепаратрисы, соответствуют периодическим движениям. На каждой такой траектории существуют точки, соответствующие максимальному и минимальному значению

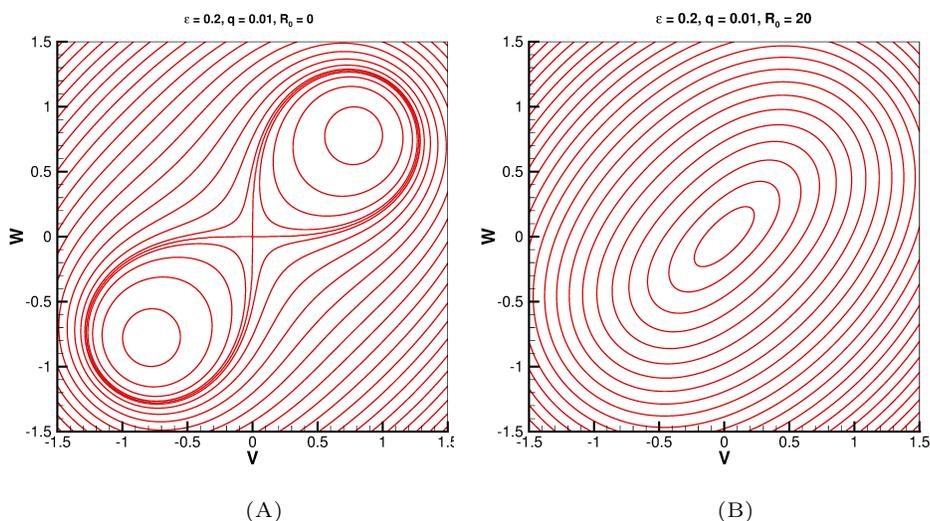


Рис. 1. Фазовый портрет усредненной системы (17) при $\epsilon = 0.2, q = 0.01$: (A) $R_0 = 0$, (B) $R_0 = 20$.

величины $\sqrt{v^2 + w^2}$ — расстояния от начала координат. Для траекторий, проходящих достаточно близко от начала координат, отношение максимального и минимального значений может стать сколь угодно большим.

В случае $R_0 = 20$ (рис. 1B) нулевое решение усредненной системы (17) при данных значениях параметров q и ϵ устойчиво, поскольку является центром — устойчивой стационарной точкой. Для наших целей этот случай не представляет интереса, поэтому ниже он рассматриваться не будет.

Обратимся теперь к решению $u(t)$ исходной системы уравнений и сравним его с решением $\bar{u}(t)$, полученным с помощью метода усреднения. На рис. 2 показано решение $u(t)$, полученное путем численного интегрирования системы (4) на большом интервале времени $t = 0 - 20000$ с шагом $\Delta t = 0.1$ при $\epsilon = 0.2, q = 0.01$ и следующих начальных данных: $v(0) = 0.1, w(0) = -0.1, r(0) = s(0) = 0.1$ (линия, обозначенная “original”). Из-за большого различия длины интервала интегрирования и характерного времени изменения решения, график функции $u(t)$ на рис. 2 кажется заполняющим часть плоскости. Здесь же показана величина $A(t)$, полученная из решения усредненной системы уравнений (линия, обозначенная “averaged”). Видно, что она хорошо совпадает с верхней границей “закрашенной” области.

На рис. 3 то же решение $u(t)$ исходной системы (“original”) показано на двух коротких временных интервалах $t = 0 - 50$ и $t = 2025 - 2075$ вместе с приближенным решением $\bar{u}(t)$, рассчитанным по формуле (15) (“averaged”). Видно, что решения, полученные при численном интегрировании исходной и усредненной систем уравнений, хорошо совпадают друг с другом. На малых интервалах времени их поведение типично для решения, получающегося при сложении двух колебаний с различными несоизмеримыми частотами. Многочисленные

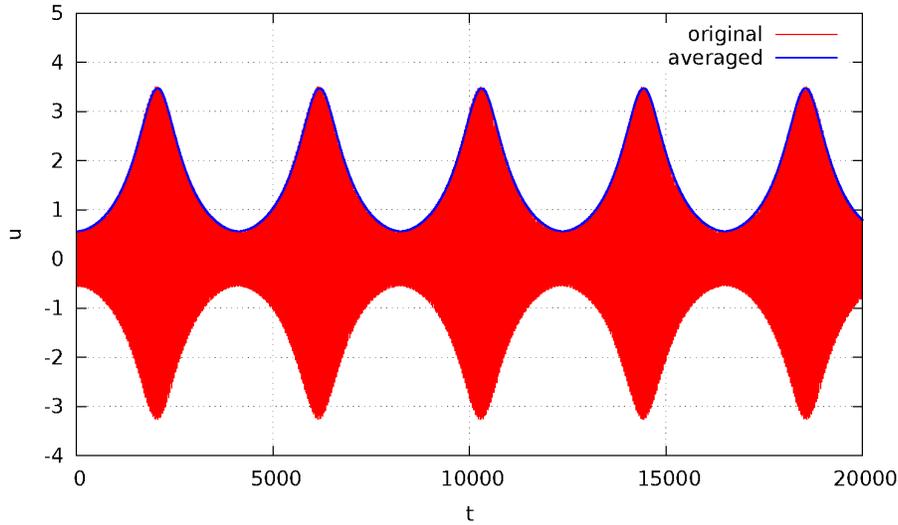


Рис. 2. Решение $u(t)$ исходной системы и функция $A(t)$ при $\epsilon = 0.2, q = 0.01, v(0) = 0.1, w(0) = -0.1, r(0) = s(0) = 0.1$.

локальные максимумы и минимумы имеют различные величины в зависимости от величин фаз двух колебаний в данный момент. Из вида приближенного решения (15) следует, что когда обе фазы $\sigma_1 t + \delta_1$ и $\sigma_2 t + \delta_2$ одновременно оказываются с хорошей точностью кратны 2π , то локальные максимумы становятся существенно выше, чем обычно. Именно такие, большие, чем обычно, максимумы решения образуют верхнюю границу “закрашенной” области на рис. 2. Ее поведение и представляет для нас наибольший интерес, поскольку эта граница может рассматриваться как подходящая мера максимальной амплитуды колебаний, достигаемой в многочастотной системе. Соответствующей ей величиной, получаемой из усредненной системы, является введенная выше функция $A(t)$ (соотношение (25)).

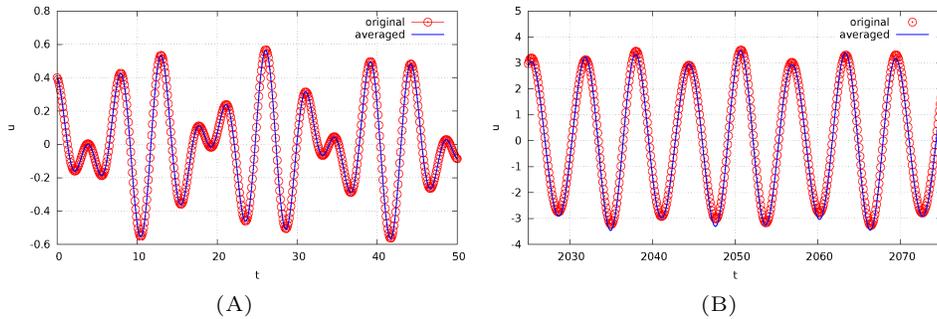


Рис. 3. Сравнение решений $u(t)$ и $\bar{u}(t)$ на начальном участке (А) и вблизи первого максимума амплитуды колебаний (В).

Как видно из рис. 2, метод усреднения позволяет с хорошей точностью предсказать поведение амплитуды колебаний решения исходной системы уравнений. Результаты, полученные при решении исходной и усредненной систем, хорошо согласуются друг с другом на всем временном интервале, включающем пять максимумов функции $A(t)$. Видно, что функция $A(t)$ позволяет правильно предсказать нарастание амплитуды колебаний вследствие нелинейного параметрического резонанса, точно описывает величину и положение максимумов амплитуды.

Что же касается самих функций $u(t)$ и $\bar{u}(t)$, полученных, при решении, соответственно, исходной и усредненной систем, то, как следует из рис. 3В, в момент времени, когда амплитуда колебаний достигает первого максимума ($t \sim 2000$) они еще достаточно хорошо согласуются. Постепенно, однако, накапливаются расхождения. На рис. 4 сравниваются решения $u(t)$ и $\bar{u}(t)$ в самом конце интервала интегрирования. Видно, что они существенно “сдвинуты” относительно друг друга, хотя это практически не сказывается на поведении функции $A(t)$.

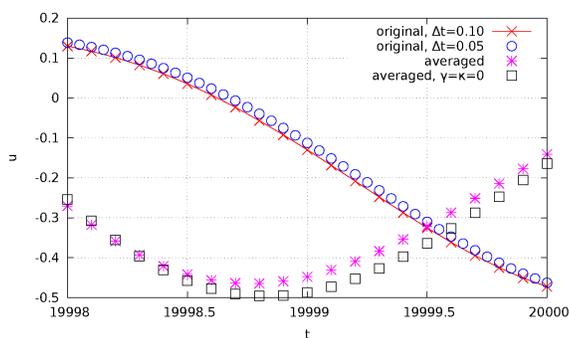


Рис. 4. Сравнение решений $u(t)$ и $\bar{u}(t)$ на интервале $t = 19998 - 20000$.

Чтобы убедиться, что эти различия не связаны с ошибками численного интегрирования, решение исходного уравнение было вычислено с шагом, уменьшенным в два раза ($\Delta t = 0.05$). Результат вычислений также показан на рис. 4. Видно, что решения, полученные с двумя различными временными шагами, мало отличаются друг от друга. Очевидно, что в данном случае интегрирование с шагом $\Delta t = 0.1$ позволяет получить достаточно точное решение на всем исследуемом промежутке, уменьшение шага практически не изменяет результатов. Следует также отметить, что решение $\bar{u}(t)$ практически не меняется, если положить в усредненной системе (16) $\gamma = \kappa = 0$ (см. рис. 4). Это, очевидно, объясняется тем, что при малых ϵ члены, пропорциональные ϵ^2 в (16), существенно меньше остальных слагаемых.

Большой интерес представляет исследование зависимости основных характеристик параметрического резонанса от величины малого параметра q . Вообще говоря, при уменьшении q максимальная амплитуда колебаний увеличивается, так же как и время достижения максимума. В качестве примера на рис. 5 показаны решение $u(t)$ и функция $A(t)$ при значении параметра $q = 0.001$.

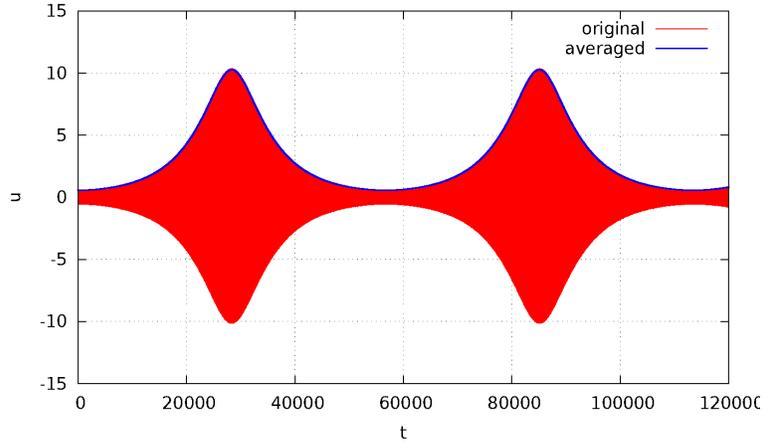


Рис. 5. Решение $u(t)$ и функция $A(t)$ в случае основного резонанса при $\epsilon = 0.2, q = 0.001, v(0) = 0.1, w(0) = -0.1, r(0) = s(0) = 0.1$. Шаг интегрирования $\Delta t = 0.05$.

Очевидно, что время, при котором достигается первый максимум амплитуды колебаний функции $u(t)$, значительно (более, чем на порядок) увеличилось. Чтобы получить решение на столь большом интервале с достаточной точностью, пришлось уменьшить шаг интегрирования — см. сравнение решений, полученных с различным шагом, в конце интервала интегрирования, на рис. 6.

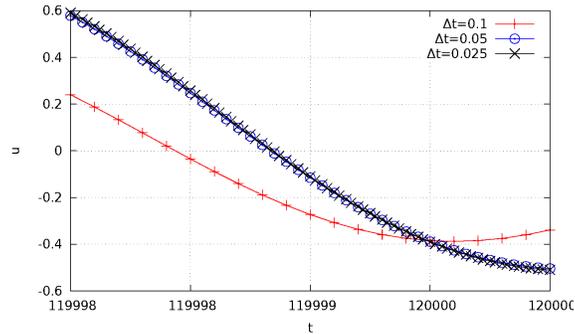


Рис. 6. Сравнение решений исходной системы, полученных с различными шагами интегрирования, на интервале $t = 119998 - 120000$ при $q = 0.001$.

Подробное исследование зависимости характеристик параметрического резонанса от величины параметра q при фиксированном значении ϵ и одинаковых начальных данных приводит к результатам, показанным на рис. 7. Как видно из расчетов, максимальная амплитуда колебаний $|u|_{max}$ функции $u(t)$ с хорошей точностью пропорциональна величине $1/\sqrt{q}$, тогда как время T_{max} , когда амплитуда достигает первого максимума $|u|_{max}$, зависит от q примерно как $1/q^{1.2}$.

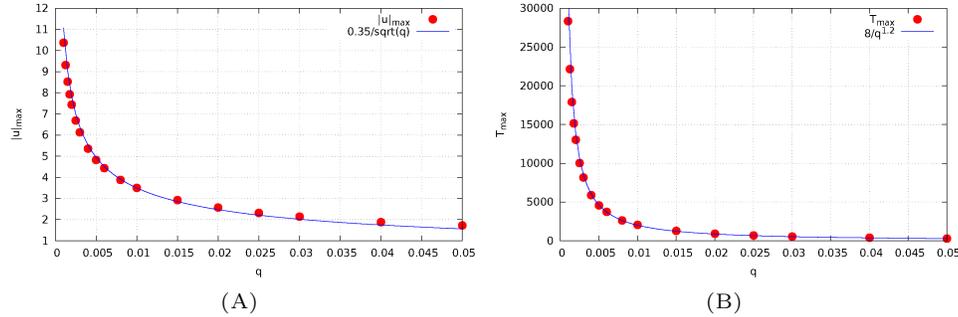


Рис. 7. Зависимость первого максимума амплитуды колебаний (А) и времени, когда достигается первый максимум (В), от параметра q .

4.2. Комбинационный резонанс. Расчеты для случая комбинационного резонанса $\omega = \sigma_1 + \sigma_2$ выполнены при следующих значениях параметров: $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sqrt{2}, \omega_1 = \omega_2 = 1.2$; при этом выполнено условие неустойчивости

$$(26) \quad \sigma_1^2 < \omega_2^2 < \sigma_2^2.$$

Во всех расчетах ниже $\epsilon = 0.2, q = 0.01$; начальные данные были выбраны так, чтобы выполнялось соотношение

$$(27) \quad \frac{v^2 + w^2}{\alpha} = \frac{r^2 + s^2}{\beta},$$

а именно: $v(0) = w(0) = 0.1, r(0) = s(0) = 0.1\sqrt{\beta/\alpha}$.

Система усредненных уравнений (21) для комбинационного резонанса является более сложной, чем соответствующая система для основного резонанса. Фазовые кривые системы (21) лежат также на двумерных многообразиях в фазовом пространстве переменных v, w, r, s . Эти многообразия задаются соотношениями (23), (24). На рис. 8 показано типичное поведение проекции фазовых траекторий системы (21) на плоскость (v, w) . В общем случае они не являются замкнутыми и с течением времени заполняют часть фазовой плоскости между двумя концентрическими окружностями с центром в начале координат. Проекция фазовой траектории усредненной системы на плоскость (r, s) выглядят аналогично.

Численные решение $u(t)$ и функция $A(t)$ сравниваются на рис. 9. Как видно, усредненная система снова очень хорошо предсказывает изменение амплитуды колебаний функции $u(t)$. Отметим, что максимальная амплитуда близка к той, что наблюдалась при аналогичном значении q в случае основного резонанса (рис. 2), однако время, когда первый максимум достигается, во много раз больше. Как показывают численные эксперименты, используемая численная схема с шагом $\Delta t = 0.05$ обеспечивает необходимую точность вычислений даже на столь больших временных интервалах.

Как и в случае основного резонанса, была исследована зависимость характеристик резонанса от величины параметра q . Соответствующие данные для

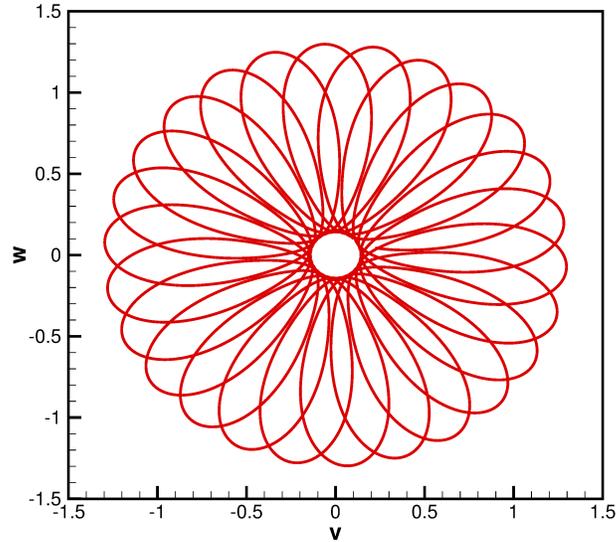


Рис. 8. Проекция фазовой траектории усредненной системы уравнений на плоскость (v, w) при $\epsilon = 0.2, q = 0.01, v(0) = 0.1, w(0) = 0.1, r(0) = s(0) = 0.1\sqrt{\beta/\alpha}$.

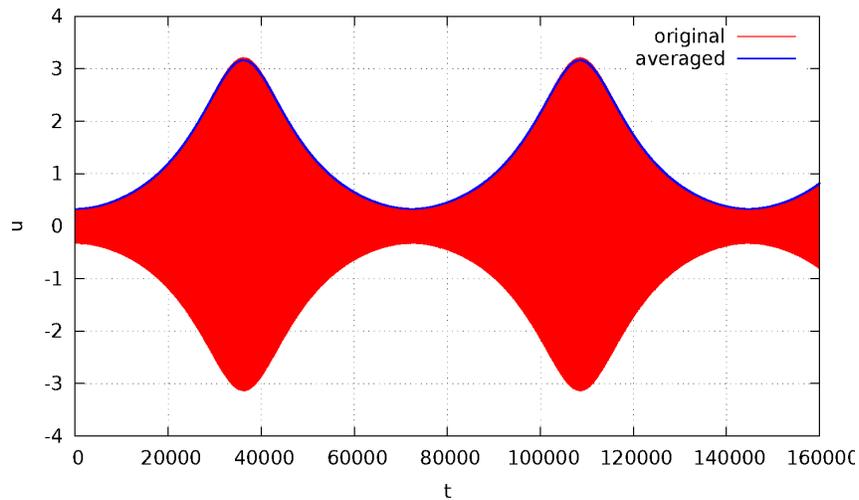


Рис. 9. Сравнение решения $u(t)$ и функции $A(t)$ для систем уравнений при $\epsilon = 0.2, q = 0.01, v(0) = 0.1, w(0) = 0.1, r(0) = s(0) = 0.1\sqrt{\beta/\alpha}$.

комбинационного резонанса приведены на рис. 10. Сравнивая рис. 7 и 10, видим, что в обоих случаях максимальная амплитуда и время, при котором достигается первый максимум, зависят от q одинаковым образом: $|u|_{max}$ пропорциональна $1/\sqrt{q}$, а T_{max} — величине $1/q^{1.2}$.

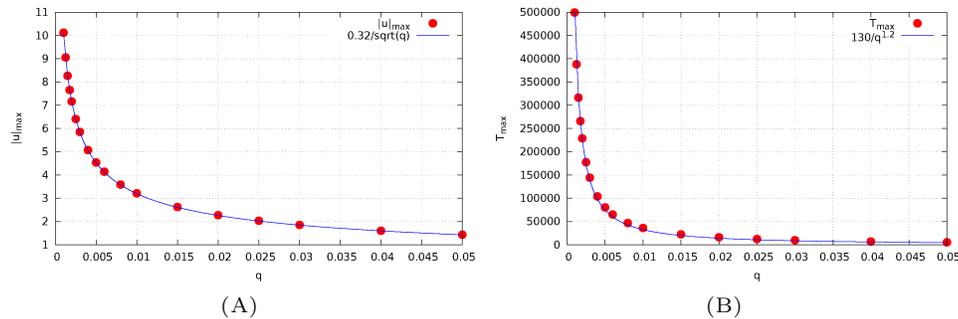


Рис. 10. Зависимость первого максимума амплитуды колебаний (А) и времени, когда достигается первый максимум (В), от параметра q .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе метод усреднения использован для анализа параметрического резонанса в нелинейной системе двух осцилляторов, представляющей собой упрощенную модель колебаний нефтяного пласта при вибрационном воздействии. В отличие от случая параметрического резонанса в линейной системе, когда амплитуда колебаний возмущенной системы растет экспоненциально с увеличением времени, в нелинейной системе картина более сложная: для критических частот также возникает параметрическая неустойчивость, однако амплитуды колебаний остаются ограниченными, а их максимальное значение зависит от выбора начальных данных. При этом максимальная амплитуда колебаний стремится к бесконечности при $q \rightarrow 0$.

Исходная и усредненная системы уравнений решались численно для случаев основного и комбинационного резонанса. Сравнение полученных решений позволяет сделать вывод, что в обоих случаях метод усреднения позволяет с высокой точностью предсказать как время достижения максимальной амплитуды колебаний при параметрическом резонансе, так и саму величину максимума. Был исследован характер зависимости этих величин от входящего в постановку задачу малого параметра.

Авторы выражают глубокую признательность В.С. Белоносову за полезные обсуждения и интерес к настоящей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М.В. Курленя, С.В. Сердюков, *Интенсификация добычи нефти при низкочастотном виброейсмическом воздействии*, Горный информационно-аналитический бюллетень, 2004, №5, 29–34.
- [2] V.N. Dorovsky, S.V. Dorovsky, *Hydrodynamic model of water-oil layered systems*, Math. Comput. Mod., **35** (2002), 751–757. Zbl 1001.76109
- [3] V.N. Dorovsky, V.S. Belonosov, A.S. Belonosov, *Numerical investigation of parametric resonance in water-oil structures containing gas*, Math. Comput. Mod., **36** (2002), 203–209. MR1925071
- [4] В.С. Белоносов, В.Н. Доровский, А.С. Белоносов, С.В. Доровский, *Гидродинамика газосодержащих слоистых систем*, Успехи механики, 2005, №2, 37–70.

- [5] Н.А. Люлько, *Основной и комбинационный резонансы в нелинейной системе двух осцилляторов*, Препринт № 281, ИМ СОРАН, 2012 г., 33 стр.
- [6] Yu.N. Bibikov, *Local Theory of Nonlinear Analytic Ordinary Differential Equation* (Lecture Notes in Mathematics, 702), Springer, Berlin et al., 1979. MR0547669
- [7] П.С. Ланда, *Нелинейные колебания и волны*, М.: Книжный дом «Либроком», 2010.
- [8] А.Д. Морозов, *Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах*, М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт космических исследований, 2005.
- [9] Г.Е.О. Джакалья, *Методы теории возмущений для нелинейных систем*, М.: Наука, 1979.
- [10] В.А. Якубович, В.М. Старжинский, *Параметрический резонанс в линейных системах*, М.: Наука, 1987. MR0901950
- [11] В.Н. Фомин, *Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах*, Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. MR0435537
- [12] В.В. Козлов, *Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике*, Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1995. Zbl 0921.58029
- [13] Д.В. Трещев, *Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем*, М: Фазис, 1998. MR1679494
- [14] О.В. Холостова, *О периодических движениях неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при параметрическом резонансе основного типа*, ПММ, **66:4** (2002), 539–551. MR1942103
- [15] Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса*, М.: Наука, 1988. MR0993506
- [16] Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов, *Введение в нелинейную механику*, Киев.: Изд-во АН УССР, 1937. MR1503326
- [17] Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, М.: Наука, 1974. MR0374550
- [18] Б.М. Левитан, *Почти-периодические функции*, М.: Гостехиздат, 1953. MR0060629
- [19] В.И. Арнольд, В.И. Козлов, А.И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, Итоги науки и техники (ВИНИТИ). Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы - 3. 1985. Т. 3. С. 5–290. MR0833508
- [20] В.С. Белоносов, *Спектральные свойства обобщенных функций и асимптотические методы теории возмущений*, Матем. сб., **203:3** (2012), 3–22. MR2961490
- [21] С.В. Macdonald, *Constructing High-Order Runge-Kutta Methods with Embedded Strong-Stability Preserving Pairs*, MSc Thesis, Simon Fraser Univ., 2003.
- [22] S. Gottlieb, C.-W. Shu, E. Tadmor, *Strong Stability-Preserving High-Order Time Discretization Methods*, SIAM Review, **43** (2001), 89–112. MR1854647

Наталия Альбертовна Люлько
 Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
 пр. Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Россия
 Новосибирский государственный университет,
 ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: natlyl@mail.ru

Наталия Анатольевна Кудрявцева
 Новосибирский государственный университет,
 ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: nkudr@itam.nsc.ru

Алексей Николаевич Кудрявцев
 Институт теоретической и прикладной механики
 им. С.А.Христиановича СО РАН,
 ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск, Россия
 Новосибирский государственный университет,
 ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: alex@itam.nsc.ru