S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 695–708 (2014) УДК 512.54
MSC 20C20, 20D06, 20D08, 20D60, 05C25

О КОНЕЧНЫХ НЕПРОСТЫХ 4-ПРИМАРНЫХ ГРУППАХ

И.В. ХРАМЦОВ

Abstract. Let G be a finite 4-primary group with disconnected prime graph, $\pi_1(G) = \{2, 3, r\}$ for $r \in \{5, 7\}$, $G/F(G)$ is a nonsimple almost simple group non isomorphic to $S_4(9).2$. In this paper, all chief factors of G are described.

Keywords: finite group, prime graph, 4-primary group, chief factor.

1. Введение

Пусть G — конечная группа. Множество простых делителей числа $|G|$ будем называть *простым спектром* группы G и обозначать через $\pi(G)$. *Спектром* группы G называется множество $\omega(G)$ порядков ее элементов. Спектр $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел (граф Грюнберга—Кегеля)* $\Gamma(G)$ группы G, в котором множество вершин есть $\pi(G)$ и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \le i \le s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Группа G называется n-примарной, если $|\pi(G)| = n$. Группа G называется почти простой, если существует простая неабелева группа P такая, что $Inn(P) \le G \le Aut(P)$.

Мы рассматриваем только группы с несвязным графом простых чисел. Интерес к этому классу групп объясняется тем, что группы с несвязным графом простых чисел широко обобщают класс групп Фробениуса, что видно из структурной теоремы Грюнберга—Кегеля (см. лемму 2). Также класс групп с

Khramtsov, I.V., On finite non-simple 4-primary groups.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), гранта Уро РАН для молодых ученых (проект 14-1-НП-27).

Поступила 15 августа 2014 г., опубликована 2 сентября 2014 г.

несвязным графом простых чисел совпадает с классом групп, обладающих собственной подгруппой, содержащей централизатор любого своего неединичного элемента. Этот класс групп также изучался многими авторами.

Задача изучения групп с несвязным графом простых чисел во многом сводится к изучению неприводимых модулей, на которых элемент некоторого простого порядка почти простой группы действует без неподвижных точек. Действительно, пусть G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, не изоморфная ни группе Фробениуса, ни двойной группе Фробениуса. Обозначим через $F(G)$ подгруппу Фиттинга группы G. Тогда по теореме Грюнберга — Кегеля (см. лемму 2) группа $\overline{G} = G/F(G)$ почти проста. Предположим, что $F(G) \neq 1$. Каждой связной компоненте $\pi_i(G)$ графа $\Gamma(G)$ для $i > 1$ соответствует нильпотентная изолированная $\pi_i(G)$-холлова подгруппа $X_i(G)$ группы G. Любой неединичный элемент из $X_i(G)$ $(i > 1)$ действует без неподвижных точек на $F(G)$. Пусть K и L — два соседних члена главного ряда группы G $(K < L)$, содержащиеся в $F(G)$. Тогда (главный) фактор $V = L/K$ является элементарной абелевой p -группой для некоторого простого числа p, называется *p-главным фактором* группы G, и его можно рассматривать как неприводимый $GF(p)\overline{G}$-модуль (так как $C_{G/K}(V) = F(G)/K$), причем каждый неединичный элемент из $X_i(G)$ $(i > 1)$ действует без неподвижных точек на V. Поэтому задача изучения строения группы G во многом сводится к имеющей самостоятельный интерес проблеме описания неприводимых $GF(p)\overline{G}$- модулей, на которые некоторый элемент простого порядка (отличного от p) из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек.

Ранее в работах [3, 5] были описаны p-главные факторы неразрешимой 3-примарной группы G с несвязным графом простых чисел для $p \in \pi(F(G))$. В работе [4] были описаны p-главные факторы коммутанта конечной неразрешимой 4-примарной группы G, граф простых чисел которой несвязен, где $p \in \pi(F(G))$.

В теоремах 1-8 работы [4] была дана классификация конечных 4-примарных групп с несвязным графом простых чисел. Приведем теорему 1 из этой работы с поправкой формулировки.

Лемма 1 ([4], теорема 1). *Пусть G — конечная четырепримарная группа с несвязным графом простых чисел и $\overline{G} = G/F(G)$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) G *— группа Фробениуса*;

(2) G *— 2-фробениусова группа, т. е. в G существуют такие подгруппы A, B и C, что $G = ABC$, A и AB — нормальные подгруппы в G, AB и BC — группы Фробениуса с ядрами A и B и дополнениями B и C соответственно*;

(3) $\overline{G}$ *— почти простая трипримарная группа*;

(4) $\overline{G} \cong L_2(2^m)$, *где $m \geq 5$, $2^m - 1$ и $(2^m + 1)/3$ — простые числа*;

(5) $\overline{G} \cong L_2(3^m)$ *или* $PGL_2(3^m)$, *где m и $(3^m + 1)/4$ — нечетные простые числа, а $(3^m - 1)/2$ равно либо простому числу, либо 11^2 (при $m = 5$)*;

(6) $\overline{G} \cong L_2(r)$ *или* $PGL_2(r)$, *где r — простое число, $17 \neq r \geq 11$, $r^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$, $s > 3$ — простое число, $a, b \in \mathbb{N}$ и c равно либо 1, либо 2 при $r \in \{97, 577\}$*;

(7) $\overline{G} \cong A_7$, S_7, A_8, S_8, A_9, $L_2(16)$, $L_2(16){:}\,2$, $Aut(L_2(16))$, $L_2(25)$, $L_2(25){:}\,2$, $L_2(27){:}\,3$, $L_2(49)$, $L_2(49){:}\,2_1$, $L_2(49){:}\,2_3$, $L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2$, $L_2(81){:}\,4$, $L_3(4)$, $L_3(4){:}\,2_1$, $L_3(4){:}\,2_3$, $L_3(5)$, $Aut(L_3(5))$, $L_3(7)$, $L_3(7){:}\,2$, $L_3(8)$, $L_3(8){:}\,2$, $L_3(8){:}\,3$,

$Aut(L_3(8))$, $L_3(17)$, $L_3(17).2$, $L_4(3)$, $L_4(3)\colon 2_2$, $L_4(3)\colon 2_3$, $U_3(4)$, $U_3(4)\colon 2$, $Aut(U_3(4))$, $U_3(5)$, $U_3(5)\colon 2$, $U_3(7)$, $Aut(U_3(7))$, $U_3(8)$, $U_3(8)\colon 2$, $U_3(8)\colon 3_1$, $U_3(8)\colon 3_3$, $U_3(8)\colon 6$, $U_3(9)$, $U_3(9)\colon 2$, $Aut(U_3(9))$, $U_4(3)$, $U_4(3)\colon 2_2$, $U_4(3)\colon 2_3$, $U_5(2)$, $Aut(U_5(2))$, $S_4(4)$, $S_4(4)\colon 2$, $Aut(S_4(4))$, $S_4(5)$, $S_4(7)$, $S_4(9)$, $S_4(9)\colon 2_1$, $S_4(9)\colon 2_3$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, $G_2(3)$, $Aut(G_2(3))$, ${}^3D_4(2)$, $Aut({}^3D_4(2))$, $Sz(8)$, $Sz(32)$, $Aut(Sz(32))$, ${}^2F_4(2)'$, ${}^2F_4(2)$, M_{11}, M_{12}, $Aut(M_{12})$, J_2.

В настоящей работе исследуются конечные 4-примарные группы G с несвязным графом простых чисел из пункта (7) леммы 1 такие, что $F(G) \neq 1$ и $\overline{G}$ — непростая группа. Для большинства таких групп описаны p-главные факторы, где p — простой делитель порядка радикала Фиттинга группы. Таким образом, продолжается исследование 4-примарных групп, начатое в работе [4]. Также в работе устраняются некоторые пробелы и ошибки, допущенные в [4].

Основные результаты работы представлены в виде таблиц 1 и 2 (см. приложение). В первом столбце таблицы приведена группа $\overline{G}$, во втором столбце — граф $\Gamma(\overline{G})$, в третьем столбце — простой делитель p порядка $F(G)$, в четвертом столбце — размерность d неприводимого $GF(p)\overline{G}$-модуля V, на котором элемент из $\pi(G)\backslash\pi_1(G)$ действует без неподвижных точек. В пятом столбце указано количество неизоморфных $GF(p)\overline{G}$-модулей размерности d. В последнем столбце указано поле определения F абсолютно неприводимого $\overline{G}$-модуля, из которого строится модуль V (см. лемму 4). Каждую строчку таблицы следует читать следующим образом: каждый p-главный фактор группы G как $GF(p)\overline{G}$-модуль изоморфен одному из n неприводимых $GF(p)\overline{G}$-модулей размерности d.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — конечная 4-примарная группа с несвязным графом простых чисел из п. (7) леммы 1, $F(G) \neq 1$, $G/F(G)$ — непростая почти простая группа, не изоморфная $S_4(9).2$ и $\pi_1(G) = \{2, 3, 5\}$. Тогда главные факторы группы G, входящие в $F(G)$, описаны в таблице 1.*

Теорема 2. *Пусть G — конечная 4-примарная группа с несвязным графом простых чисел из п. (7) леммы 1, $F(G) \neq 1$, $G/F(G)$ — непростая почти простая группа и $\pi_1(G) = \{2, 3, 7\}$. Тогда главные факторы группы G, входящие в $F(G)$, описаны в таблице 2.*

2. Обозначения и предварительные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [7, 8, 9, 11].

Если группа G действует на группе H, то будем говорить, что неединичный элемент $g \in G$ действует на H *свободно* (или *без неподвижных точек*), если $C_H(g) = 1$.

Пусть G — конечная группа. Всюду в работе $\overline{G}$ обозначает группу $G/F(G)$.

Пусть $\varphi\colon G \to GL_n(F)$ — неприводимое представление конечной группы G над алгебраически замкнутым полем F простой характеристики p и β — брауэров характер представления φ. *Полем определения* представления φ называется наименьшее подполе из F, над которым φ может быть реализовано. Хорошо известно (см., например, [8, введение]), что поле определения представления φ равно $GF(p)(\beta(x_i)^\mu \mid 1 \leq i \leq r)$, где $x_1, \dots, x_r$ — множество представителей классов сопряженных p'-элементов группы G и $\mu\colon \mathbb{Z}[U] \to F$ — некоторый кольцевой гомоморфизм, где U — множество комплексных корней из 1 порядка, взаимно простого с p. Обычно при записи поля определения представления в этой формуле μ опускают.

Приведем некоторые результаты, которые используются в доказательстве теорем.

Лемма 2 (теорема Грюнберга — Кегеля, [14], теорема A)**.** *Если G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *G — группа Фробениуса*;

(2) *G — двойная группа Фробениуса*;

(3) *G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством группы A, где $Inn(P) \leq A \leq Aut(P)$, P — простая неабелева группа с $s(G) \leq s(P)$, и $A/Inn(P)$ — $\pi_1(G)$-группа.*

Для доказательства теорем, нам потребуется следующий хорошо известный результат (см., например, [2, лемма 4]).

Лемма 3. *Пусть G — конечная простая группа, F — поле характеристики $p > 0$, V — абсолютно неприводимый FG-модуль и β — характер Брауэра модуля V. Если g — элемент простого порядка, отличного от p, из G, то*

$$dim\ C_V(g) = (\beta|_{\langle g\rangle}, 1|_{\langle g\rangle}) = \frac{1}{|g|}\sum_{x\in\langle g\rangle}\beta(x).$$

Зная таблицу p-модулярных характеров Брауэра конечной простой группы, с помощью леммы 2 мы можем найти характеры Брауэра ее абсолютно неприводимых модулей, на которые элемент некоторого простого порядка этой группы действует без неподвижных точек.

Нам понадобится также следующая

Лемма 4 ([11], теорема VII.1.16)**.** *Пусть G — конечная группа, $F = GF(p^m)$ — поле определения характеристики $p > 0$ для абсолютно неприводимого FG-модуля V, $\langle\sigma\rangle = Aut(F)$, V_0 обозначает модуль V, рассматриваемый как $GF(p)G$-модуль, и $W = V_0 \otimes_{GF(p)} F$. Тогда*

(1) *$W = \bigoplus_{i=1}^{m} V^{\sigma^i}$, где V^{σ^i} — модуль, алгебраически сопряженный с V посредством σ^i*;

(2) *V_0 является неприводимым $GF(p)G$-модулем и, в частности, W реализуется как неприводимый $GF(p)G$-модуль V_0*;

(3) *с точностью до изоморфизма модулей неприводимые $GF(p)G$-модули находятся во взаимно однозначном соответствии с классами алгебраической сопряженности неприводимых $\overline{GF(p)}G$-модулей.*

Пусть G — конечная группа, $\overline{G}' \cong L_2(81)$ и $\pi_1(G) = \{2,3,5\}$. В пункте (18) теоремы 6 из [4] было доказано, что 3-главный фактор группы G' может быть изоморфен 4-мерному неприводимому $GF(9)L_2(81)$-модулю. Следующая лемма уточняет этот пункт.

Лемма 5. *Пусть G — конечная 4-примарная группа, $\pi_1(G) = \{2,3,5\}$ и G имеет композиционный фактор, изоморфный группе $L_2(81)$. Тогда $\overline{G} =$*

$G/F(G) \cong L_2(81)$, $L_2(81).2_1$, $L_2(81).2_3$, $L_2(81).4_1$ или $L_2(81).4_2$. Каждый 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен либо единственному неприводимому $GF(3)\overline{G}'$-модулю размерности 16, либо неприводимому $GF(9)\overline{G}'$-модулю размерности 4 или 36, либо неприводимому $GF(81)\overline{G}'$-модулю размерности 4, 12 (три модуля) или 36.

Доказательство. В работе [10, раздел 9] был указан алгоритм для нахождения таблицы p-модулярных характеров Брауэра группы $L_2(p^n)$. Этот алгоритм был реализован нами в системе компьютерной алгебры GAP [13] для случая $p^n = 81$. Применяя этот алгоритм и лемму 3 получаем заключение леммы.

3. Вычисление поля определения представления

Для вычисление полей определения неприводимых представлений мы применяем многочлены Конвея. Напомним их определение.

Пусть $q = p^n$, где p — простое число и n — натуральное число. Поле $GF(q)$ можно рассматривать как фактор-кольцо $GF(p)[x]/(f_n)$, где f_n — неприводимый над $GF(p)$ многочлен степени n. Известно, что для p и n многочлен f_n определяется неоднозначно. Для избежания этой неоднозначности Р. Паркером был введен специальный многочлен $f_{p,n}$, названный им *многочленом Конвея*. Многочлен Конвея неприводим над $GF(p)$, лежит в кольце $GF(p)[x]$ и, следовательно, $GF(q) \cong GF(p)[x]/(f_{p,n})$. Чтобы определить многочлен Конвея $f_{p,n}$, зададим линейный порядок $\preceq$ на множестве многочленов степени n из кольца $GF(p)[x]$. Пусть $g(x) = g_n x^n + g_{n-1}x^{n-1} + \cdots + g_0$ и $h(x) = h_n x^n + h_{n-1}x^{n-1} + \cdots + h_0$, где $g_i, h_i \in GF(p)$ и $g_i \cdot h_i \neq 0$. Положим $g \preceq h$ тогда и только тогда, когда существует индекс k, такой, что $0 \leq k \leq n$, $g_i = h_i$ для всех $i > k$ и $(-1)^{n-k} g_k \leq (-1)^{n-k} h_k$. Многочлен $f_{p,n}$ строится по следующим правилам. Старший коэффициент $f_{p,n}$ равен единице; элемент $z_n = x + (f_{p,n})$ является примитивным элементом поля $GF(q)$; если d является собственным делителем числа n и $\alpha = (p^n-1)/(p^d-1)$, то z_n^α является корнем многочлена f_d; многочлен $f_{p,n}$ является наименьшим относительно введенного выше порядка.

Известно, что для любой фиксированной пары p и n многочлен Конвея существует и единствен [12]. Это позволяет использовать многочлен Конвея в различных системах компьютерной алгебры, например, в GAP [13] для унифицированного представления элементов расширений конечных полей.

Для нахождения полей определения представлений нужно вычислять числа $(GF(p)(k) : GF(p))$, где p — простое число и k — элемент из некоторого конечного расширения поля $GF(p)$. В системе компьютерной алгебры GAP реализован алгоритм (функция SizeOfFieldOfDefinition) вычисления степени n многочлена Конвея $f_{p,n}$ для поля $GF(p)(k)$, следовательно, $GF(p)(k) \cong GF(p^n)$. Таким образом, для вычисления поля определения представления группы G с неприводимым p-модулярным характером Брауэра β, нужно вычислить степени n_i многочленов Конвея для полей $GF(p)(\beta(x_i))$, где $1 \leq i \leq r$. Если $m = \max\limits_{1\leq i\leq r} n_i$, то $GF(p^m)$ будет полем определения рассматриваемого представления.

4. Доказательство теорем 1 и 2

Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда по [4, теорема 6] получаем, что $\overline{G}$ изоморфна одной из групп S_7, S_8, $L_3(4){:}\,2_1$, $L_3(4){:}\,2_3$, $Aut(M_{12})$, $Aut(U_5(2))$,

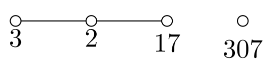
$L_2(25){:}\ 2_2$, $L_2(25){:}\ 2_3$, $U_3(4){:}\ 2$, $U_3(4){:}\ 4$, $L_4(3){:}\ 2_2$, $L_4(3){:}\ 2_3$, $L_2(16){:}\ 2$, $L_2(16){:}\ 4$, $L_3(5){:}\ 2$, $U_3(9){:}\ 2$, $U_3(9){:}\ 4$, $L_2(81){:}\ 2_1$, $L_2(81){:}\ 2_3$, $L_2(81){:}\ 4_1$, $L_2(81){:}\ 4_2$, $S_4(9){:}\ 2_1$, $S_4(9){:}\ 2_3$.

В случае, если $\overline{G}$ изоморфна S_7, S_8, $L_3(4){:}\ 2_1$, $L_3(4){:}\ 2_3$, $Aut(M_{12})$, $Aut(U_5(2))$, $L_2(25){:}\ 2_2$, $L_2(25){:}\ 2_3$, $U_3(4){:}\ 2$, $U_3(4){:}\ 4$, $L_4(3){:}\ 2_2$, $L_4(3){:}\ 2_3$, $L_2(16){:}\ 2$, $L_2(16){:}\ 4$, $L_3(5){:}\ 2$, $U_3(9){:}\ 2$, $U_3(9){:}\ 4$, применим следующий алгоритм. С помощью библиотеки таблиц p-модулярных характеров почти простых групп из [13], найдем неприводимые p-модулярные представления группы $\overline{G}$ для $p \in \pi_1(\overline{G})$. С помощью леммы 2 оставим только те представления, которым соответствуют модули V, для которых $dim\ C_V(g) = 0$, для элемента $g \in \overline{G}$ такого, что $|g| \in \pi_2(G)$. Поле определения таких представлений найдем, используя вычисления в системе GAP, по схеме описанной разделе 3. Если $\overline{G}$ изоморфна $L_2(81){:}\ 2_1$, $L_2(81){:}\ 2_3$, $L_2(81){:}\ 4_1$ или $L_2(81){:}\ 4_2$, то результат следует из леммы 5. Результаты вычислений представлены в таблице 1.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда по [4, теорема 7] получаем, что $\overline{G}$ изоморфна одной из групп $L_2(27).3$, ${}^3D_4(2).3$, $U_3(8).2$, $U_3(8).3_1$, $U_3(8).3_3$, $U_3(7).2$, $L_3(8).2$, $L_3(8).3$, $L_3(8).6$. Для этих групп применим описанный только что алгоритм. Результаты вычислений представлены в таблице 2.

5. Замечания к работе [4]

В работе [4] было допущено несколько неточностей. В частности, в пункте (7) теоремы 1 были пропущены группы $L_3(17)$ и $Aut(L_3(17))$. Также они отсутствовали в таблице 1 из леммы 1.10 в [4]. Группы $L_3(17)$ и $Aut(L_3(17))$ нераспознаваемы по графу простых чисел, поскольку имеют одинаковый граф простых чисел следующего вида



.

В работе [6] анонсирован следующий результат.

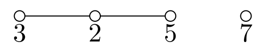
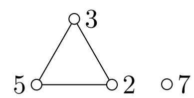
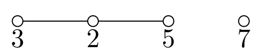
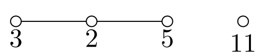
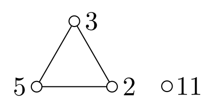
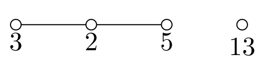
Предложение 1 ([6], теорема 1)**.** *Если G — конечная группа с несвязным графом простых чисел и G имеет композиционный фактор, изоморфный группе $L_3(17)$, то $\overline{G} := G/F(G) \cong L_3(17)$ или $Aut(L_3(17))$, $\pi(F(G)) \subseteq \{2,3,17\}$ и p-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль может быть изоморфен 306-мерному абсолютно неприводимому $GF(p)\overline{G}$-модулю для каждого $p \in \{2,3,17\}$.*

Пусть G — конечная группа, $\overline{G}' \cong L_2(49)$, $3 \in \pi_1(G)$ и $5 \in \pi(G) \setminus \pi_1(G)$. В пункте (2) теоремы 5 из [4] было доказано, что 7-главный фактор группы G' может быть изоморфен 4-мерному неприводимому $GF(7)L_2(49)$-модулю. В работе [1] было доказано, что этот случай единствен. Следующее утверждение уточняет пункт (2) теоремы 5 из [4] и является прямым следствием результатов из работы [1].

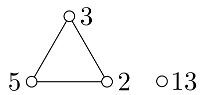
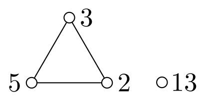
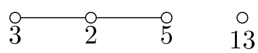
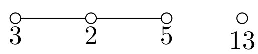
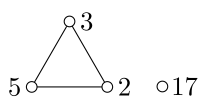
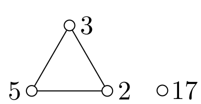
Предложение 2 ([1], леммы 4.2—4.4)**.** *Пусть G — конечная 4-примарная группа, $\overline{G} = G/F(G) \in \{L_2(49), L_2(49).2_2, L_2(49).2_3\}$, $3 \in \pi_1(G)$ и $5 \in \pi(G) \setminus \pi_1(G)$. Тогда $F(G)$ — элементарная абелева 7-группа, изоморфная прямому произведению минимальных нормальных подгрупп группы G', каждая из которых как $\overline{G}'$-модуль изоморфна единственному 4-мерному неприводимому $GF(7)\overline{G}'$-модулю.*

6. Приложение

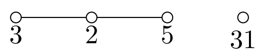
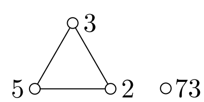
Таблица 1

<table>
<tr><th>$\overline{G}$</th><th>$\Gamma(\overline{G})$</th><th>p</th><th>d</th><th>n</th><th>F</th></tr>
<tr><td rowspan="3">S_7</td><td rowspan="3"></td><td>2</td><td>6</td><td>1</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>2</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>$GF(5)$</td></tr>
<tr><td>S_8</td><td></td><td>2</td><td>6</td><td>1</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td>$L_3(4).2_1$</td><td></td><td>2</td><td>18</td><td>1</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td>$L_3(4).2_3$</td><td></td><td>2</td><td>18</td><td>1</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$M_{12}.2$</td><td rowspan="3"></td><td>2</td><td>10</td><td>1</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>20</td><td>1</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>30</td><td>1</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$U_5(2).2$</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">2</td><td>10</td><td>1</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td>20</td><td>1</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>10</td><td>2</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>20</td><td>1</td><td>$GF(25)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$L_2(25).2_2$</td><td rowspan="3"></td><td>2</td><td>12</td><td>2</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>4</td><td>2</td><td>$GF(5)$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>3</td><td>$GF(5)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$L_2(25).2_3$</td><td rowspan="4"></td><td>2</td><td>24</td><td>1</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">5</td><td>8</td><td>1</td><td>$GF(25)$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>1</td><td>$GF(5)$</td></tr>
<tr><td>32</td><td>1</td><td>$GF(25)$</td></tr>
</table>

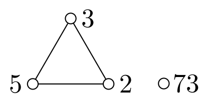
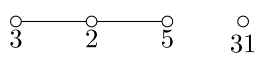
Продолжение табл. 1

<table>
<tr><th>$\overline{G}$</th><th>$\Gamma(\overline{G})$</th><th>p</th><th>d</th><th>n</th><th>F</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$U_3(4).2$</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">2</td><td>12</td><td>1</td><td>$GF(4)$</td></tr>
<tr><td>36</td><td>1</td><td>$GF(4)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>24</td><td>1</td><td>$GF(9)$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>12</td><td>2</td><td>$GF(5)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$U_3(4).4$</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">2</td><td>12</td><td>1</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td>36</td><td>1</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>24</td><td>2</td><td>$GF(9)$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>12</td><td>4</td><td>$GF(5)$</td></tr>
<tr><td>$L_4(3).2_2$</td><td></td><td>3</td><td>6</td><td>2</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>$L_4(3).2_3$</td><td></td><td>3</td><td>12</td><td>1</td><td>$GF(9)$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$L_2(16).2$</td><td rowspan="6"></td><td rowspan="4">2</td><td>8</td><td>2</td><td>$GF(4)$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>1</td><td>$GF(4)$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>1</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td>32</td><td>1</td><td>$GF(4)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>16</td><td>2</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>16</td><td>2</td><td>$GF(5)$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$L_2(16).4$</td><td rowspan="5"></td><td rowspan="3">2</td><td>8</td><td>2</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>2</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td>32</td><td>1</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>16</td><td>2</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>32</td><td>1</td><td>$GF(9)$</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 1

$\overline{G}$	$\Gamma(\overline{G})$	p	d	n	F
		5	16	4	$GF(5)$
$L_3(5).2$		2	30	1	$GF(2)$
		3	60	1	$GF(9)$
		5	6	1	$GF(5)$
			12	1	$GF(5)$
			30	2	$GF(5)$
			36	1	$GF(5)$
			78	1	$GF(5)$
			120	1	$GF(5)$
$U_3(9).2$		2	72	1	$GF(2)$
		3	12	1	$GF(9)$
			24	1	$GF(9)$
			36	1	$GF(9)$
			60	1	$GF(9)$
			72	2	$GF(9)$
			84	1	$GF(9)$
			144	1	$GF(9)$
			168	1	$GF(9)$
			180	2	$GF(9)$
			360	1	$GF(9)$
			420	1	$GF(9)$
		5	72	2	$GF(5)$

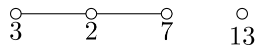
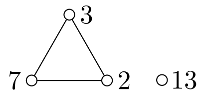
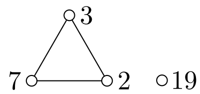
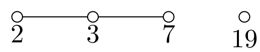
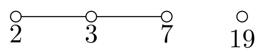
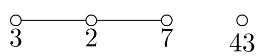
Продолжение табл. 1

$\overline{G}$	$\Gamma(\overline{G})$	p	d	n	F
$U_3(9).4$		2	72	1	$GF(2)$
		3	12	1	$GF(3)$
			24	1	$GF(3)$
			36	1	$GF(3)$
			60	1	$GF(3)$
			72	2	$GF(3)$
			84	1	$GF(3)$
			144	1	$GF(3)$
			168	1	$GF(3)$
			180	2	$GF(3)$
			360	1	$GF(3)$
			420	1	$GF(3)$
		5	72	4	$GF(5)$
$L_2(81).2_1$		2	40	2	$GF(2)$
		3	8	1	$GF(9)$
			16	1	$GF(9)$
			16	1	$GF(3)$
			48	3	$GF(9)$
			72	1	$GF(9)$
			144	1	$GF(9)$

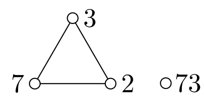
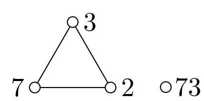
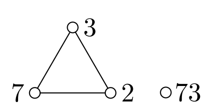
Продолжение табл. 1

<table>
<tr><th>$\overline{G}$</th><th>$\Gamma(\overline{G})$</th><th>p</th><th>d</th><th>n</th><th>F</th></tr>
<tr><td rowspan="6">$L_2(81).4_1$</td><td rowspan="6">3 — 2 — 5   31</td><td>2</td><td>40</td><td>2</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">3</td><td>8</td><td>1</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>2</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>48</td><td>3</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>72</td><td>1</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>144</td><td>1</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td rowspan="7">$L_2(81).2_3$</td><td rowspan="7">2 — 5   3   31</td><td>2</td><td>80</td><td>1</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">3</td><td>8</td><td>1</td><td>$GF(9)$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>1</td><td>$GF(9)$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>1</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>48</td><td>3</td><td>$GF(9)$</td></tr>
<tr><td>72</td><td>1</td><td>$GF(9)$</td></tr>
<tr><td>144</td><td>1</td><td>$GF(9)$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$L_2(81).4_2$</td><td rowspan="6">3 — 2 — 5   31</td><td>2</td><td>80</td><td>1</td><td>$GF(2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">3</td><td>8</td><td>1</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>2</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>48</td><td>3</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>72</td><td>1</td><td>$GF(3)$</td></tr>
<tr><td>144</td><td>1</td><td>$GF(3)$</td></tr>
</table>

Таблица 2

$\overline{G}$	$\Gamma(\overline{G})$	p	d	n	F
$L_2(27).3$		2	12	1	$GF(3)$
			36	1	$GF(3)$
${}^3D_4(2).3$		2	24	1	$GF(2)$
$U_3(8).2$		2	54	1	$GF(8)$
			54	1	$GF(2)$
$U_3(8).3_1$		2	54	4	$GF(4)$
$U_3(8).3_3$		2	54	1	$GF(4)$
			162	1	$GF(64)$
$U_3(7).2$		2	42	1	$GF(2)$
		3	84	1	$GF(9)$
		7	6	1	$GF(7)$
			12	1	$GF(7)$
			30	2	$GF(7)$
			42	1	$GF(7)$
			48	1	$GF(7)$
			66	1	$GF(7)$
			72	1	$GF(7)$
			84	1	$GF(7)$
			150	1	$GF(7)$
			210	1	$GF(7)$

Продолжение табл. 2

$\overline{G}$	$\Gamma(\overline{G})$	p	d	n	F
$L_3(8).2$		2	18	1	$GF(8)$
			54	2	$GF(8)$
			54	1	$GF(2)$
			144	2	$GF(8)$
			162	1	$GF(8)$
			432	2	$GF(8)$
		3	144	1	$GF(9)$
		7	72	2	$GF(7)$
$L_3(8).3$		2	9	2	$GF(2)$
			27	6	$GF(2)$
			54	2	$GF(4)$
			72	4	$GF(2)$
			81	2	$GF(2)$
			216	4	$GF(2)$
		3	72	1	$GF(3)$
		7	72	3	$GF(7)$
$L_3(8).6$		2	18	1	$GF(2)$
			54	3	$GF(2)$
			108	1	$GF(4)$
			144	2	$GF(2)$
			162	1	$GF(2)$
			432	2	$GF(2)$
		3	144	1	$GF(9)$

Продолжение табл. 2

$\overline{G}$	$\Gamma(\overline{G})$	p	d	n	F
		7	72	6	$GF(7)$

Список литературы

[1] С. Астилл, К. Паркер , Р. Валдекер, *О группах, в которых централизаторы элементов порядка* 5 *являются* 5*-группами*, Сиб. мат. журн. 2012. **53**:3. С. 967–977. MR3057679

[2] С. Дольфи, Э. Джабара, М.С. Лючидо, C55*-группы* , Сиб. мат. журн. 2004. **45**:6. С. 1285–1298. MR2123292

[3] А.С. Кондратьев, И.В. Храмцов, *О конечных трипримарных группах*, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. **16**:3. С. 150–158.

[4] А.С. Кондратьев, И.В. Храмцов, *О конечных четырепримарных группах*, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. **17**:4. С. 142–159.

[5] А.С. Кондратьев, И.В. Храмцов, *О конечных непростых трипримарных группах*, Сиб. электрон. матем. изв. 2012. **9**, С. 472–477.

[6] А.С. Кондратьев, И.В. Храмцов, *О конечных группах, которые имеют несвязный граф простых чисел и композиционный фактор, изоморфный группе* $L_3(17)$, Материалы конф. "Алгебра и математическая логика: теория и приложения". Казань. Изд-во Казан. ун-та, 2014. С. 81–82.

[7] Ч. Кэртис, И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*, М.: Наука, 1969. 668 с.

[8] C. Jansen, K. Lux, R. Parker, R. Wilson, *An atlas of Brauer characters*, Oxford: Clarendon Press, 1995. MR1367961

[9] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985. MR0827219

[10] R. Burkhardt *Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen* $PSL(2,p^f)$*-groups*, J. Algebra. 1976. **40**:1. P. 75–96. MR0480710

[11] B. Huppert, N. Blackburn, *Finite groups II*, Berlin: Springer-Verlag, 1982. MR0650245

[12] W. Nickel, *Endliche Körper in dem gruppentheoretischen Programmsystem GAP*, Diploma thesis, RWTH, Aachen, 1988.

[13] *The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming*, Ver. 4.7.4. 2014. URL: http://www.gap-system.org .

[14] J. S. Williams, *Prime graph components of finite groups*, J. Algebra, **69**:2 (1981), 487–513. MR0617092

Игорь Владимирович Храмцов
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской 16,
620990, Екатеринбург, Россия
E-mail address: ihramtsov@gmail.com