S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 70–75 (2014) УДК 519.21
MSC 60E15

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ V-СТАТИСТИК

П.С. РУЗАНКИН

Abstract. We offer a new proof for the known exponential inequalities (see Borisov (1991)) for the distributions of canonical V-statistics with kernels allowing factorizable majorants. The requirement for observations to be independent and identically distributed was weakened.

Keywords: von Mises' statistic, exponential inequality.

Пусть $Y_1,\dots\ ,Y_n$ есть набор случайных величин, $h(y_1,...,y_r)$ — функция r аргументов. Величина

$$M_n = \sum_{1 \le i_1,\dots,i_r \le n} h(Y_{i_1},...,Y_{i_r}) \tag{1}$$

называется *V-статистикой* (статистикой фон Мизеса).

Если для любых чисел $y_1,...,y_r$ и индексов $j_1,...,j_r$

$$\mathbf{E}h(Y_{j_1},y_2,...,y_r) = \mathbf{E}h(y_1,Y_{j_2},y_3,...,y_r) = \ldots = \mathbf{E}h(y_1,...,y_{r-1},Y_{j_r}) = 0, \tag{2}$$

то M_n называется *канонической* (или *вырожденной*) V-статистикой.

В работе И. С. Борисова [1] рассматривались вырожденные V-статистики, построенные по независимым одинаково распределенным наблюдениям $Y_1,\dots\ ,Y_n$ с ядрами h, для которых существует функция g такая, что

$$|h(y_1,...,y_n)| \le g(y_1)\cdots g(y_n). \tag{3}$$

Причем предполагалось, что для всех $k \ge 2$ выполняется условие Бернштейна:

$$\mathbf{E}(g(Y_1))^k \le \frac{\sigma^2 L^{k-2} k!}{2} \tag{4}$$

с некоторыми постоянными $\sigma > 0$ и $L > 0$.

Ruzankin, P.S., On exponential inequalities for canonical V-statistics.

Работа поддержана РФФИ (гранты 13-01-12415 офи-м и 13-01-00511).

Поступила 28 ноября 2013 г., опубликована 1 февраля 2014 г.

Теорема A. (И. С. Борисов, [1]) *Если $Y_1, \ldots, Y_n$ независимы и одинаково распределены и выполняются условия* (2), (3) *и* (4), *то*

$$\mathbf{P}(\max_{l\le n}|M_l|>y)\le C(r)\exp\left\{-\frac{C_0(r)y^{2/r}}{n\sigma^2+Ly^{1/r}}\right\}, \tag{5}$$

где постоянные $C(r)$ и $C_0(r)$ зависят только от r.

Одной из первых работ, где рассматривались неравенства такого типа, является статья В. Хёфдинга [8]. В этой работе неравенства получались для сумм независимых центрированных случайных величин (частного случая вырожденных V-статистик). Из этой работы, в частности следует то, что неравенство (5) в известном смысле неулучшаемо, так как в случае расщепляющихся ядер ($h(y_1,...,y_r)=g(y_1)\cdots g(y_r)$) это неравенство совпадает с неравенством Хёфдинга для уклонений порядка $y^{1/r}$. Подобные (5) неравенства для случая независимых наблюдений получались, в частности, в работах [3–6]. В работе [2] изучались неравенства такого типа для U- и V-статистик с ограниченными ядрами h в случае зависимых наблюдений, удовлетворяющих некоторым условиям перемешивания.

В настоящей работе условие каноничности V-статистики заменяется следующим условием: для каждого k, для любых индексов $j_1,...,j_r$, таких что $j_i\ne j_k$ при $i\ne k$, выполняется

$$\mathbf{E}(h(Y_{j_1},...,Y_{j_r})|Y_1,...,Y_{j_k-1},Y_{j_k+1},...,Y_n)=0. \tag{6}$$

Следует отметить, для независимых одинаково распределенных случайных величин это условие и есть условие каноничности V-статистик.

Условия же (3) и (4) в настоящей работе и требование независимости и одинаковой распределенности $Y_1, \ldots, Y_n$ заменяются чуть более слабым ограничением: мы будем требовать, чтобы для всех четных $k\ge 2$ выполнялось неравенство

$$\mathbf{E}h(Y_{i_1},...,Y_{i_r})\cdots h(Y_{i_{rk-r+1}},...,Y_{i_{rk}})\le\frac{m_1!\cdots m_j!\sigma^{2j}L^{rk-2j}}{2^j}, \tag{7}$$

где через m_1,...,m_j обозначены кратности случайных величин $Y_{i_1},...,Y_{i_{rk}}$ в этом математическом ожидании, другими словами, в этом выражении участвует всего j различных случайных величин, причем первая из них входит в это выражение m_1 раз, вторая – m_2 раз, последняя – m_j раз, $m_1+...+m_j=rk$; $m_1\ge 2,...,m_j\ge 2$; $\sigma>0$ и $L>0$ — постоянные.

Очевидно, что условие (7) выполнено, если выполнены (3) и (4). Но пока автору не ясно, влечет ли за собой условие (7) условия (3) и (4) для независимых одинаково распределенных $Y_1,...,Y_n$. Впрочем, условие (7) может выполняться и для зависимых наблюдений, как показывается в примере 2 и замечании 1 после теоремы 1.

Пример 1. Пусть $Y_1, Y_2,...$ — последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин, а $h(y_1,...,y_r)$ — функция вида

$$h(y_1,...,y_r)=\sum_{j=1}^{N}c_j|y_1|^{\alpha_{j,1}}\cdots|y_r|^{\alpha_{j,r}}\mathrm{sign}y_1\cdots\mathrm{sign}y_r, \tag{8}$$

где $\alpha_{j,k} \in (0,2]$. В этом случае выполняются условия (6) и (7), поскольку

$$\mathbf{E}|h(Y_{i_1},...,Y_{i_r})\cdots h(Y_{i_{rk-r+1}},...,Y_{i_{rk}})| \le \left(\sum_{j=1}^{N}|c_j|\right)^k 2^{rk} m_1!\cdots m_j!\,. \tag{9}$$

Однако для этого примера выполняются и условия теоремы A, так как

$$h(y_1,...,y_r) \le N \max_j |c_j| \prod_{k=1}^{r} \max\{1, y_k^2\}.$$

Пример 2. Пусть $X_1, X_2, ...$ — независимые стандартные нормальные случайные величины, $Y_j = X_j X_{j+1}$, функция $h(y_1,...,y_r)$ задается соотношением (8), причем все $\alpha_{j,k} \in (0,1/2]$. Тогда выполняется (6) и имеет место оценка (9), а значит, выполняется и условие (7), но случайные величины Y_1, Y_2, ... уже оказываются зависимыми. Этот пример показывает, что условия (6) и (7) является более общими, чем условия теоремы A.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (6) *и* (7). *Тогда для всех* $y \ge (2c_0Lr)^r$

$$\mathbf{P}(|M_n|>y) \le \sqrt{2}e^{2r}\exp\left(-\frac{y^{1/r}}{c_0L} + \frac{1}{2}\ln\frac{y^{1/r}}{c_0L} + n\ln(1+\sigma^2/2L^2)\right), \tag{10}$$

где $c_0 = (\sqrt{5}+1)/2 < 1.62$.

Если, кроме того,

$$y \le \left(\frac{2e^{1/2}\sigma^2 n}{L}\right)^r,$$

то

$$\mathbf{P}(|M_n|>y) \le e^r \exp\left(-\frac{y^{2/r}}{4e\sigma^2 n} + \max\left\{0,\ \frac{1}{2}\ln\frac{y^{2/r}}{4e\sigma^2 n}\right\}\right), \tag{11}$$

Замечание 1. Если в теореме 1 ядро h есть ограниченная функция

$$h(y_1,...,y_r) \le B,$$

то условие (7) очевидно выполняется с постоянными $L = B^{1/r}$, $\sigma^2 = L^2$. Таким образом, в этом случае для $y \le Bn^r$ (иначе $\mathbf{P}(M_n > y) = 0$) неравенство (11) можно записать в виде

$$\mathbf{P}(|M_n|>y) \le e^r \exp\left(-\frac{y^{2/r}}{4eB^{2/r}n} + \max\left\{0,\ \frac{1}{2}\ln\frac{y^{2/r}}{4eB^{2/r}n}\right\}\right).$$

Доказательство теоремы 1.

Имеем

$$\mathbf{E}\left(\sum_{1\le i_1,\dots,i_r\le n} h(Y_{i_1},...,Y_{i_r})\right)^{2k} =$$

$$\sum_{1\le i_1,\dots,i_{2rk}\le n} \mathbf{E}h(Y_{i_1},...,Y_{i_r})\cdots h(Y_{i_{2rk-r+1}},...,Y_{i_{2rk}}) \le$$

$$\sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}} C_n^j \sum_{m_1,\dots,m_j\ge 2;\ m_1+\dots+m_j=2rk} \frac{m_1!\cdots m_j!\sigma^{2j}L^{2rk-2j}}{2^j}\frac{(2rk)!}{m_1!\cdots m_j!} = \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j L^{2rk}(2rk)!C_n^j \sum_{m_1,\ldots,m_j\geq 2;\; m_1+\cdots+m_j=2rk} 1 =$$

$$L^{2rk}(2rk)! \sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_n^j C_{2rk-j-1}^{j-1} \leq L^{2rk}(2rk)! \sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_n^j C_{2rk-j}^j,$$

где, как и выше, $m_1,\ldots,m_j$ — кратности различных случайных величин среди $Y_{i_1},\ldots,Y_{i_{2rk}}$ в этих математических ожиданиях. В формуле (12) коэффициент C_n^j — число возможных вариантов выбора j различных случайных величин из $Y_1,\ldots,Y_n$, а $\frac{(2rk)!}{m_1!\cdots m_j!}$ — число возможных вариантов расстановки этих случайных величин (с соответствующими кратностями) в математическом ожидании $\mathbf{E}h(Y_{i_1},\ldots,Y_{i_r})\cdots h(Y_{i_{2rk-r+1}},\ldots,Y_{i_{2rk}})$.

Используя формулу Стирлинга

$$\sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^{1/(12n+1)} < n! < \sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^{1/(12n)},$$

получим для $1 \leq j \leq rk-1$:

$$(2rk)!C_{2rk-j}^j < e^{-2rk}(2rk)^{2rk}\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha(1-2\alpha)}}\left(\frac{(1-\alpha)^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha(1-2\alpha)^{1-2\alpha}}\right)^{2rk}.$$

где $\alpha = j/(2rk)$. Несложно посчитать, что $\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha(1-2\alpha)}}$ убывает при $0 < \alpha < 1/2 - 1/\sqrt{12}$ и возрастает при $1/2 - 1/\sqrt{12} < \alpha < 1/2$.

Также несложно установить, что максимум c_0 функции $\frac{(1-\alpha)^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha(1-2\alpha)^{1-2\alpha}}$ на интервале $(0,1/2)$ достигается в точке $\alpha_0 = 1/2 - 1/(2\sqrt{5})$, причем

$$c_0 = (\sqrt{5}+1)/2 < 1.62.$$

Значит, при $1 \leq j \leq rk-1$

$$(2rk)!C_{2rk-j}^j < 2\sqrt{rk}(c_0e^{-1})^{2rk}(2rk)^{2rk}. \tag{13}$$

Понятно, что это неравенство выполняется и для $j = rk$. Кроме того,

$$\sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_n^j \leq \left(1+\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^n - 1,$$

следовательно,

$$\mathbf{E}\left(\sum_{1\leq i_1,\ldots,i_r\leq n} h(Y_{i_1},\ldots,Y_{i_r})\right)^{2k} < 2\sqrt{rk}(2c_0e^{-1}Lrk)^{2rk}\left(\left(1+\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^n - 1\right).$$

Подставив сюда $k = \lfloor y^{1/r}/(2c_0Lr)\rfloor$ и воспользовавшись неравенством для положительных чисел c и a

$$\frac{(c\lfloor a\rfloor)^{\lfloor a\rfloor}}{(ca)^a} \leq (ca)^{-(a-\lfloor a\rfloor)} \leq \max\{1,(ca)^{-1}\}, \tag{14}$$

из неравенства Чебышева при $k \geq 1$ получим (10).

Если же $rk \leq \sigma^2 n/(L^2)$, то

$$\sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_n^j C_{2rk-j}^j \leq$$

$$\sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2 nrk}{L^2}\right)^j \frac{1}{(j!)^2} \le rk \max_{j=1,...,rk} \left\{ \left(\frac{\sigma^2 nrk}{L^2}\right)^j \frac{1}{(j!)^2} \right\} =$$

$$= \frac{rk}{((rk)!)^2} \left(\frac{\sigma^2 nrk}{L^2}\right)^{rk}$$

и

$$\mathbf{E}\left(\sum_{1\le i_1,...,i_r\le n} h(Y_{i_1},...,Y_{i_r})\right)^{2k} \le \sqrt{\frac{rk}{\pi}}\,(4\sigma^2 nrk)^{rk}.$$

Подставив $k = \lfloor y^{2/r}/(4e\sigma^2 nr)\rfloor$, из неравенства Чебышева и соотношения (14) получим (при $k \ge 1$)

$$\mathbf{P}(M_n > y) \le e^r \exp\left(-\frac{y^{2/r}}{4e\sigma^2 n} + \frac{1}{2}\ln\frac{y^{2/r}}{4e\sigma^2 n}\right), \tag{15}$$

если

$$(4e\sigma^2 nr)^{r/2} \le y \le \left(\frac{2e^{1/2}\sigma^2 n}{L}\right)^r,$$

Неравенство же (11) очевидным образом выполняется и при $y^{2/r} < (4e\sigma^2 nr)$.

Теорема доказана.

Замечание 2. Если M_n представляет собой U-статистику, то есть

$$M_n = r! \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_r\le n} h(Y_{i_1},...,Y_{i_r}),$$

то при выполнении условия (6) последовательность M_n, $n = 1,2,...$, будет мартингалом. Тогда по неравенству Дуба

$$\mathbf{P}(\max_{l\le n}|M_l| > y) \le y^{-p}\mathbf{E}|M_n|^p$$

для всех $p \ge 1$ (см. теорему 15.3.4 в [3]). Следовательно, для U-статистик в утверждении теоремы 1 можно заменить $\mathbf{P}(|M_n| > y)$ на $\mathbf{P}(\max_{l\le n}|M_l| > y)$.

Замечание 3. В случае, когда $Y_1, Y_2, ...$ — независимые случайные величины, для получения из теоремы 1 неравенств для $\mathbf{P}(\max_{l\le n}|M_l| > y)$ можно использовать мартингальный подход из работы [1]. Однако пока не ясно, применим ли этот метод в случае, когда выполняется лишь условие (6).

Замечание 4. В условиях теоремы 1, используя тривиальное неравенство

$$\mathbf{P}(\max_{l\le n}|M_l| > y) \le \sum_{l=1}^{n}\mathbf{P}(|M_l| > y),$$

можно получить следующую оценку для $y \ge (2c_0 Lr)^r$:

$$\mathbf{P}(\max_{l\le n}|M_l| > y) \le$$

$$\sqrt{2}e^{2r}\exp\left(-\frac{y^{1/r}}{c_0 L} + \frac{1}{2}\ln\frac{y^{1/r}}{c_0 L} + n\ln\left(1+\frac{\sigma^2}{2L^2}\right) + \ln\left(1+\frac{2L^2}{\sigma^2}\right)\right), \tag{16}$$

где, как и выше, $c_0 = (\sqrt{5}+1)/2$.

Действительно, как мы уже знаем,

$$\mathbf{E}\left(\sum_{1\le i_1,...,i_r\le n} h(Y_{i_1},...,Y_{i_r})\right)^{2k} \le L^{2rk}(2rk)! \sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_n^j C_{2rk-j-1}^{j-1}.$$

Обозначим

$$S(2k) := \sum_{l=1}^{n} \mathbf{E} \left(\sum_{1 \le i_1, ..., i_r \le n} h(Y_{i_1}, ..., Y_{i_r}) \right)^{2k}.$$

Тогда

$$S(2k) \le L^{2rk}(2rk)! \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{\min\{rk,l\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_l^j C_{2rk-j-1}^{j-1} =$$

$$L^{2rk}(2rk)! \sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_{2rk-j-1}^{j-1} \sum_{l=j}^{n} C_l^j =$$

$$L^{2rk}(2rk)! \sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_{2rk-j-1}^{j-1} C_{n+1}^{j+1}.$$

Аналогично рассуждениям выше получим для $1 \le j \le rk$

$$(2rk)! C_{2rk-j-1}^{j-1} \le (2rk)! C_{2rk-j}^{j} < 2\sqrt{rk}(c_0 e^{-1})^{2rk}(2rk)^{2rk}. \tag{17}$$

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^{\min\{rk,n\}} \left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^j C_{n+1}^{j+1} \le \left(\left(1 + \frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^n - 1\right)\left(1 + \frac{2L^2}{\sigma^2}\right),$$

следовательно,

$$S(2k) < 2\sqrt{rk}(2c_0 e^{-1} L r k)^{2rk} \left(\left(1 + \frac{\sigma^2}{2L^2}\right)^n - 1\right)\left(1 + \frac{2L^2}{\sigma^2}\right).$$

Подставив сюда $k = \lfloor y^{1/r}/(2c_0 L r) \rfloor$ и воспользовавшись неравенством (14), из неравенства Чебышева при $k \ge 1$ получим (16).

Список литературы

[1] Борисов И.С. Аппроксимация распределений статистик Мизеса с многомерными ядрами // Сиб. мат. журн., **32**:4 (1991), 20–35. MR1142066

[2] Борисов И.С., Володько Н.В. Экспоненциальные неравенства для распределений U- и V-статистик от зависимых наблюдений // Матем. тр., **11**:2 (2008), 3–19. MR2655277

[3] Боровков А.А. *Теория вероятностей.* М.:Либроком, 2009.

[4] Adamczak R. Moment inequalities for U-statistics // Ann. Probab., **34**:6 (2006), 2288–2314. MR2294982

[5] Arcones M. A. and Giné E. Limit theorems for U-processes // Ann. Probab., **21**:3 (1993), 1494–1542. MR1235426

[6] Giné E., Latala R., and Zinn J. Exponential and moment inequalities for U-statistics // High Dimensional Probability, II (Seattle, WA, 1999), Progr. Probab., Boston: Birkhäuser, **47** (2000), 13–38. MR1857312

[7] Giné E., Mason D. M. On local U-statistic processes and the estimation of densities of functions of several sample variables // Ann. Stat., **35**:3 (2007), 1105–1145. MR2341700

[8] Hoeffding W. Probability inequalities for sums of bounded random variables // J. Amer. Statist. Assoc. **58** (1963), 13–30. MR0144363

Рузанкин Павел Сергеевич
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН и
Новосибирский государственный университет,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: ruzankin@math.nsc.ru