S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 709–724 (2014) УДК 514.763.2

MSC 42B20

ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РИССА

С.Г. КАЗАНЦЕВ

Abstract. In this paper we study symmetric tensor fields via complex coordinate system. The formulas for divergence δ and symmetric gradient d of tensor fields in complex variables are derived thus we get the equations of Beltrami type. We obtain the general representation for the solenoidal tensor fields on the plane, which involves the Riesz transforms, their powers and the one real generating function $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$. We present also the Helmholtz decomposition of the tensor fields in terms of Riesz transforms.

Keywords: solenoidal, potential tensor fields, Helmholtz decomposition, singular integral operators, Riesz transforms, Beltrami systems.

1. Введение: тензорные поля в комплексных координатах

В работе изучаются симметричные тензорные поля на плоскости в комплексных координатах. Получены формулы для операций дивергенции δ и симметризованного градиента d над тензорами в комплексных координатах, которые приводят к системам уравнений типа Бельтрами. Найдено общее представление для соленоидальных тензорных полей, показано, что соленоидальное тензорное поле ранга m порождается одной вещественной скалярной функцией $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ с помощью преобразований Рисса R_1, R_2 ($R_{\mathbb{C}}$) и их степеней. Для описания потенциальных полей получено однородное уравнение интегрального типа. Получено разложение Гельмгольца тензорного поля на соленоидальную и потенциальную части в терминах преобразований Рисса.

Вначале напомним нужные сведения из тензорного анализа и, в частности, рассмотрим тензорные поля в комплексных координатах (см. также [1], [2]).

Kazantsev, S.G., Tensor fields on the plane and Riesz transforms.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00275).

Поступила 3 января 2014 г., опубликована 12 сентября 2014 г.

Симметричные тензорные поля. Обозначим через $\mathbf{T}_m(\mathbb{R}^2)$ пространство ковариантных вещественных тензорных полей $\mathbf{a}(x,y) = (a_{i_1\dots i_m}(x,y))$, $i_1,\dots,i_m = 1,2$ ранга m, заданных на плоскости $\mathbb{R}^2$ в декартовой системе координат $(x,y) \equiv (x^1,x^2)$. Мы будем всегда обозначать тензорные поля, а также другие связанные с ними понятия, такие как функциональные пространства, жирными буквами. Через $\mathbf{S}_m = \mathbf{S}_m(\mathbb{R}^2)$ обозначим пространство симметричных ковариантных тензорных полей ранга m. Если тензор произвольный, то для его симметризации применяется операция *симметрирования* $\sigma : \mathbf{T}_m \to \mathbf{S}_m$, определяемая равенством

$$(\sigma\mathbf{a})_{i_1\dots i_m} = \frac{1}{m!}\sum_{\pi\in\Pi_m} a_{i_{\pi(1)}\dots i_{\pi(m)}}, \tag{1}$$

где суммирование ведется по группе Π_m всех перестановок множества $\{1,\dots,m\}$. Ковариантное симметричное тензорное поле ранга m имеет $m+1$ независимую компоненту, которые обозначим

$$a_k = a_{\underbrace{1\dots1}_{k}\underbrace{2\dots2}_{m-k}},\ k = 0,\dots,m, \tag{2}$$

в связи с чем, симметричный тензор $\mathbf{a}$ ранга m будем задавать псевдовектором размера $m+1$

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m).$$

Компоненты симметричного тензора в комплексных координатах. Отождествим плоскость $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, $z^1 \equiv z = x^1 + \mathrm{i}x^2$, $z^2 \equiv \overline{z} = x^1 - \mathrm{i}x^2$. Формальные частные производные $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ определяются обычным образом

$$\frac{\partial}{\partial z^1} \equiv \frac{\partial}{\partial z} \equiv \partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial z^2} \equiv \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \equiv \overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{3}$$

Имеют место также обратные соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}},\quad \frac{\partial}{\partial y} = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}.$$

Компоненты тензора $\mathbf{a}$ относительно комплексных координат (z^1,z^2) выражаются формально при помощи формул тензорного закона. Условимся в дальнейшем обозначать тензора в исходной вещественной системе координат (x,y) маленькими буквами, а в комплексной системе координат $(z,\overline{z})$ — большими буквами. Пусть $\mathbf{a} = (a_{i_1\dots i_m}(x,y)) \to \mathbf{A} = (A_{i_1\dots i_m}(z,\overline{z}))$, тогда

$$A_{i_1\dots i_m}(z,\overline{z}) = \frac{\partial x^{s_1}}{\partial z^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{s_m}}{\partial z^{i_m}} a_{s_1\dots s_m}(x,y), \tag{4}$$

где матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial z^1} & \frac{\partial x^1}{\partial z^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial z^1} & \frac{\partial x^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Имеют место также и обратные соотношения

$$a_{i_1\dots i_m}(x,y) = \frac{\partial z^{s_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial z^{s_m}}{\partial x^{i_m}} A_{s_1\dots s_m}(z,\overline{z}), \tag{5}$$

где

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial x^1} & \frac{\partial z^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial z^2}{\partial x^1} & \frac{\partial z^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Симметричный тензор $\mathbf{A}$ ранга m, полученный из вещественного симметричного тензора $\mathbf{a}$ переходом к комплексным переменным, также будем задавать псевдовектором $(A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m)$ с компонентами

$$A_k = A_{\underbrace{1\ldots1}_{k}\underbrace{2\ldots2}_{m-k}},\ k = 0, \ldots, m, \tag{6}$$

или

$$\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{m} A_s \mathbf{E}_k^{(m)},$$

где введены единичные псевдовектора

$$\mathbf{E}_0^{(m)} = \underbrace{(1, 0, \ldots, 0)}_{m+1},\ \mathbf{E}_1^{(m)} = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \mathbf{E}_m^{(m)} = (0, \ldots, 0, 1).$$

Учитывая тензорный закон (4), (5), получим формулы, связывающие компоненты псевдовекторов (2) и (6)

$$a_k = (-\mathrm{i})^{m-k} \sum_{p=0}^{m-k} \sum_{q=0}^{k} C_{m-k}^{p} C_k^q (-1)^p A_{p+q},\ k = 0, 1, \ldots, m, \tag{7}$$

$$A_k = \frac{\mathrm{i}^{m-k}}{2^m} \sum_{r=0}^{m-k} \sum_{s=0}^{k} C_{m-k}^{r} C_k^s (-\mathrm{i})^{k+r-s} a_{r+s},\ k = 0, 1, \ldots, m, \tag{8}$$

где C_j^i – биномиальные коэффициенты. Если исходный тензор $\mathbf{a}$ имеет вещественные компоненты, то из формулы (8) следует, что компоненты псевдовектора $\mathbf{A}$ будут удовлетворять условиям вещественности

$$A_k = \overline{A}_{m-k},\ k = 0, \ldots, m. \tag{9}$$

Например, в случае $m = 2$ мы имеем вещественное симметричное ковариантное тензорное поле $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $a_{12} = a_{21}$ и при переходе к комплексным переменным получим

$$\mathbf{A}(z, \overline{z}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ A_{12} = A_{21},$$

где $A_{11} = \frac{1}{4}(a_{11} - a_{22} - 2\mathrm{i}a_{12})$, $A_{12} = \frac{1}{4}(a_{11} + a_{22})$, $A_{22} = \frac{1}{4}(a_{11} - a_{22} + 2\mathrm{i}a_{12})$ Псевдовектор (A_0, A_1, A_2) имеет вид $A_0 = A_{22}$, $A_1 = A_{12}$, $A_2 = A_{11}$. Для вычисления компонент тензора $\mathbf{a}$ в исходной системе координат из (7) получаются формулы

$$a_{11} = 2(A_1 + \Re A_2),\quad a_{12} = -2\Im\, A_2,\quad a_{22} = 2(A_1 - \Re A_2).$$

Метрические тензора (G_{ij}), (G^{ij}) и скалярное произведение тензоров в комплексных координатах. Наряду с ковариантными компонентами тензора используются также и его контравариантные компоненты. Так, скалярное поточечное произведение на $\mathbf{S}_m$ определяется формулой

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^{i_1 i_2 \ldots i_m} b_{i_1 i_2 \ldots i_m}. \tag{10}$$

Так как в декартовой системе координат (x, y) у метрического тензора $\mathbf{g}$ ковариантные и контравариантные компоненты не различаются

$$(g_{ij}) = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

то контравариантные компоненты тензора $\mathbf{a}$ совпадают с ковариантными

$$a^{i_1 i_2 \dots i_m} = g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_m j_m} a_{j_1 j_2 \dots j_m} = a_{i_1 \dots i_m}.$$

Скалярное произведение через координаты псевдовекторов равно

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a_k b_k. \tag{12}$$

В комплексных координатах $(z, \overline{z})$ метрический тензор $\mathbf{G}$ имеет следующие ковариантные

$$(G_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

и контравариантные компоненты

$$(G^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Контравариантные компоненты тензора $\mathbf{A}$ в комплексной системе координат получаются поднятием индексов с помощью контравариантных компонент метрического тензора (14)

$$A^{i_1 i_2 \dots i_m} = G^{i_1 j_1} G^{i_2 j_2} \dots G^{i_m j_m} A_{j_1 j_2 \dots j_m},$$

поэтому контравариантные компоненты соответствующего псевдовектора будут равны

$$A^k = 2^m A_{\underbrace{2 \dots 2}_{k} \underbrace{1 \dots 1}_{m-k}} = 2^m A_{m-k}.$$

Скалярное произведение тензоров является инвариантной величиной, поэтому

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \tag{15}$$

В комплексных координатах скалярное произведение (10) вычисляется по формуле

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^{i_1 i_2 \dots i_m} B_{i_1 i_2 \dots i_m} = A_{i_1 i_2 \dots i_m} B^{i_1 i_2 \dots i_m}. \tag{16}$$

Если тензора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ заданы компонентами A_k и B_k, $k = 0, \dots, m$, то

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 2^m \sum_{k=0}^{m} C_m^k A_k B_{m-k}, \tag{17}$$

где C_m^k — биномиальные коэффициенты. Учитывая условие (9), получим скалярное произведение

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 2^m \sum_{k=0}^{m} C_m^k A_k \overline{B}_k$$

и норму тензора $\mathbf{A}$

$$|\mathbf{A}|^2 = 2^m \sum_{k=0}^{m} C_m^k |A_k|^2.$$

Для скалярного произведения (16) выполняются свойства

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}}.$$

Пространство интегрируемых тензорных полей. Рассмотрим пространство $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2,\mathbf{S}_m)$ — полное гильбертово пространство, состоящее из вещественных симметричных ковариантных тензорных полей $\mathbf{a}(x,y)=(a_{i_1\dots i_m}(x,y))$ на $\mathbb{R}^2$ с конечной нормой $||\mathbf{a}||$

$$||\mathbf{a}||^2\equiv||\mathbf{a}||^2_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2,\mathbf{S}_m)}=(\mathbf{a},\ \mathbf{a})$$

и скалярным произведением

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b})\equiv(\mathbf{a},\ \mathbf{b})_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2,\mathbf{S}_m)}=\iint_{\mathbb{R}^2}\mathbf{a}(x,y)\cdot\mathbf{b}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

В комплексных координатах мы имеем пространство $\mathbf{L}_2(\mathbb{C},\mathbf{S}_m)$ — гильбертово пространство с вещественным скалярным произведением

$$(\mathbf{A},\mathbf{B})_{\mathbf{L}_2(\mathbb{C},\mathbf{S}_m)}=\iint_{\mathbb{C}^2}\mathbf{A}(z,\overline{z})\cdot\mathbf{B}(z,\overline{z})\mathrm{d}\sigma=2^m\sum_{k=0}^{m}C_m^k\Big(A_k,B_k\Big)_{L_2(\mathbb{C})}.$$

Пространство $\mathbf{L}_2(\mathbb{C},\mathbf{S}_m)$ $\mathbb{R}$-линейно. В силу инвариантности по-точечного скалярного произведения (15) для функционального скалярного произведения тензорных полей также выполняются равенства

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{b},\mathbf{a})=(\mathbf{A},\mathbf{B})=(\mathbf{B},\mathbf{A}),\ \ ||\mathbf{a}||=||\mathbf{A}||.$$

Заметим, что при $m=0$ мы имеем пространство $\mathbf{L}_2(\mathbb{C},\mathbf{S}_0)\equiv L_2(\mathbb{R}^2)$ вещественных скалярных функций интегрируемых с квадратом на всей плоскости. Через $L_2(\mathbb{C})$ будем обозначать, как обычно, эрмитово пространство комплекснозначных скалярных функций. При $m\geq1$ компоненты тензора $\mathbf{A}\in\mathbf{L}_2(\mathbb{C},\mathbf{S}_m)$ суть элементы пространства $L_2(\mathbb{C})$.

Алгебраические операторы над тензорами. Приведем некоторые полезные алгебраические операции на тензорами. Обозначим через $\mathfrak{p}$ оператор перестановки

$$\mathfrak{p}:(A_0,\dots,A_m)\to(A_m,\dots,A_0). \tag{18}$$

Тогда условие (9) запишется как

$$\mathbf{A}=\mathfrak{p}\overline{\mathbf{A}}.$$

Через $\mathfrak{i}:\mathbf{S}_m\to\mathbf{S}_{m+2}$ мы обозначим алгебраический оператор симметризированного умножения на метрический тензор

$$\mathfrak{i}\mathbf{A}=\sigma((G_{ij})\otimes\mathbf{A}).$$

Если $\mathbf{A}=\sum_{k=0}^m A_k\mathbf{E}_k^{(m)}$, то

$$\mathfrak{i}\mathbf{A}=\sum_{k=0}^{m+2}\frac{C_m^{k-1}}{C_{m+2}^k}A_{k-1}\mathbf{E}_k^{(m+2)}=\Big(0,\frac{C_m^0}{C_{m+2}^1}A_0,\dots,\frac{C_m^m}{C_{m+2}^{m+1}}A_m,0\Big). \tag{19}$$

Через $\mathfrak{j}:\mathbf{S}_{m+2}\to\mathbf{S}_m$ обозначим дуальный оператор к $\mathfrak{i}$, который в координатах выражается как свертка

$$(\mathfrak{j}\mathbf{B})_{i_1\dots i_m}=G^{jk}B_{jki_1\dots i_m}$$

или, если $\mathbf{B} = \sum_{k=0}^{m+2} B_k \mathbf{E}_k^{(m+2)}$, то

$$\mathfrak{j}\mathbf{B} = 4\sum_{k=0}^{m} B_{k+1}\mathbf{E}_k^{(m)} = 4(B_1, B_2, \ldots, B_{m+1}). \tag{20}$$

Проверим, что операторы $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ дуальны друг к другу в паре пространств $\mathbf{S}_m$ и $\mathbf{S}_{m+2}$. В самом деле, с одной стороны, имеем

$$\mathfrak{i}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 2^{m+2}\sum_{k=1}^{m+1} C_{m+2}^{k}\frac{C_m^{k-1}}{C_{m+2}^{k}}\overline{A}_{k-1}B_k = 2^{m+2}\sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1}\overline{A}_{k-1}B_k,$$

с другой

$$\mathbf{A}\cdot\mathfrak{j}\mathbf{B} = 2^{m+2}\sum_{k=0}^{m} C_m^{k}\overline{A}_k B_{k+1} = 2^{m+2}\sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1}\overline{A}_{k-1}B_k.$$

Таким образом, $\mathfrak{i}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathfrak{j}\mathbf{B}$, в следствии чего имеет место ортогональное разложение $\mathbf{S}_{m+2} = Ker\ \mathfrak{j} \oplus Im\ \mathfrak{i}$.

В тензорном анализе также используются композиции операторов $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$. Непосредственные вычисления дают

$$\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathbf{A} = 4\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{m-2}^{k-1}}{C_m^k}A_k\mathbf{E}_k^{(m)} = 4\Big(0, \frac{C_{m-2}^0}{C_m^1}A_1, \ldots, \frac{C_{m-2}^{m-2}}{C_m^m}A_{m-1}, 0\Big), \tag{21}$$

$$\mathfrak{j}\mathfrak{i}\mathbf{A} = 4\sum_{k=0}^{m}\frac{C_m^k}{C_{m+2}^{k+1}}A_k\mathbf{E}_k^{(m)} = 4\Big(\frac{C_m^0}{C_{m+2}^1}A_0, \frac{C_m^1}{C_{m+2}^2}A_1, \ldots, \frac{C_m^{m-1}}{C_{m+2}^m}A_{m-1}, \frac{C_m^m}{C_{m+2}^{m+1}}A_m\Big). \tag{22}$$

Последний оператор имеет обратный,

$$(\mathfrak{j}\mathfrak{i})^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{m+2}^{k+1}}{C_m^k}A_k\mathbf{E}_k^{(m)}.$$

Также из равенств (21) и (22) получается соотношение

$$\frac{(m+1)(m+2)}{4}\mathfrak{j}\mathfrak{i}\mathbf{A} - \frac{m(m-1)}{4}\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathbf{A} = (m+1)\mathbf{A}.$$

Наконец, определим оператор проектирования

$$\mathfrak{q} = \Big(A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m\Big) \to \Big(0, A_1, \ldots, A_{m-1}, 0\Big),$$

для которого имеет место равенство $\mathfrak{q} = \mathfrak{i}(\mathfrak{j}\mathfrak{i})^{-1}\mathfrak{j}$. В самом деле, вычисления показывают

$$\mathfrak{i}(\mathfrak{j}\mathfrak{i})^{-1}\mathfrak{j}\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{m}\frac{C_{m-2}^{k-1}}{C_m^k}\frac{C_m^k}{C_{m-2}^{k-1}}A_k\mathbf{E}_k^{(m)} = \sum_{k=0}^{m}(1-\delta_k^0)(1-\delta_k^m)\mathbf{E}_k^{(m)} = \mathfrak{q}.$$

2. Дифференциальные операции над симметричными тензорными полями в комплексных координатах

Пусть вещественное тензорное поле $\mathbf{a}(x,y) = (a_{i_1\dots i_m}(x,y)) \in \mathbf{S}_m(\mathbb{R}^2)$, все компоненты которого есть гладкие функции класса $C^k(\mathbb{R}^2),\ 1 \le k \le \infty$. Обозначим такой класс тензорных полей через $\mathbf{C}^k(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m)$. Аналогично определяются пространства $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m)$ и $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m)$.

Оператор ковариантного дифференцирования ∇

$$\nabla : \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m) \to \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_{m+1})$$

в декартовой системе координат (x^1, x^2) определяется равенством

$$\nabla \mathbf{a} = (a_{i_1\dots i_m;j}) = \left(\frac{\partial a_{i_1\dots i_m}}{\partial x^j}\right),\ j = 1,2.$$

В случае комплексных координат имеем

$$\nabla \mathbf{A} = (A_{i_1\dots i_m;j}) = \left(\frac{\partial A_{i_1\dots i_m}}{\partial z^j}\right),$$

где формальные частные производные по переменным z^1 и z^2 определены обычным образом (3).

Оператор дивергенции

$$\delta : \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m) \to \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_{m-1})$$

в декартовой системе координат (x^1, x^2) определяется равенством

$$\delta \mathbf{a} = div\ \mathbf{a} = (a^{j_1 j_2 \dots j_{m-1} s}_{;x^s}).$$

В комплексных переменных дивергенция вычисляется с помощью контравариантных компонент G^{ij} метрического тензора (14)

$$\delta \mathbf{A} = (A_{j_1 j_2 \dots j_m; z^k} G^{j_m k}) = \left(2\frac{\partial}{\partial z} A_{j_1 j_2 \dots j_{m-1} 2} + 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}} A_{j_1 j_2 \dots j_{m-1} 1}\right)$$

или

$$\delta \mathbf{A} = 2\sum_{k=0}^{m-1} \left(\partial A_k + \overline{\partial} A_{k+1}\right) \mathbf{E}_k^{(m-1)}. \tag{23}$$

Легко проверить, что из (20) и (23) следует перестановочность $\mathrm{j}\delta = \delta\mathrm{j}$.

Соленоидальные поля. Гладкое тензорное поле $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^k(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m)$ будет соленоидальным, если его дивергенция равна нулю, $\delta\mathbf{a} = \mathbf{0}$ или $\delta\mathbf{A} = \mathbf{0}$ в комплексных координатах. Пусть $\mathbf{A} = (A_0, \dots, A_m) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbf{S}_m)$ удовлетворяет неоднородному уравнению $\delta\mathbf{A} = \mathbf{B}$ и правая часть $\mathbf{B} = (B_0, \dots, B_{m-1}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{C}, \mathbf{S}_{m-1})$. В координатном виде мы будем иметь недоопределенную систему из m дифференциальных уравнений для $(m+1)$-ой неизвестной функции

$$\begin{aligned} \partial A_0 + \overline{\partial} A_1 &= \frac{B_0}{2} \\ &\dots \\ \partial A_k + \overline{\partial} A_{k+1} &= \frac{B_k}{2} \\ &\dots \\ \partial A_{m-1} + \overline{\partial} A_m &= \frac{B_{m-1}}{2}\ , \end{aligned} \tag{24}$$

где $A_k = \overline{A}_{m-k},\ k = 0, \ldots, m$. Если мы добавим к этой системе тождественное уравнение $\overline{\partial} A_0 = \overline{\partial} A_0$, то получим уравнение типа Бельтрами

$$\overline{\partial}_{\mathcal{U}} \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_{\overline{z}} + \mathcal{U} \mathbf{A}_z = \mathbf{F} \tag{25}$$

с нильпотентным оператором сдвига вправо (вниз) $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_0 \\ \vdots \\ A_{m-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B_{-1} \\ B_0 \\ \vdots \\ B_{m-1} \end{pmatrix}, \quad B_{-1} = 2\overline{\partial} A_0.$$

Таким образом, мы видим, что уравнение $\delta \mathbf{A} = \mathbf{B}$ имеет множество решений, которое возникает из-за неопределенности в выборе, например, нулевой координаты A_0.

Системы уравнений типа Бельтрами изучались в работах Боярского [3], Джураева [4] и других авторов, а бесконечномерная система Бельтрами рассматривалась в работе [5].

Потенциальные поля. Следующая важная дифференциальная операция над симметричными тензорными полями это операция внутреннего дифференцирования

$$d : \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_{m-1}) \to \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m),$$

определяемая равенством

$$d = m\sigma\nabla,$$

где σ есть операция симметрирования (1).

Пусть $\mathbf{V} = \sum_{k=0}^{m-1} V_k \mathbf{E}_k^{(m-1)} \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbf{S}_{m-1})$, тогда

$$d\mathbf{V} = \sum_{k=0}^{m} \Big(k \partial V_{k-1} + (m-k) \overline{\partial} V_k \Big) \mathbf{E}_k^{(m)} \tag{26}$$

или, то же самое,

$$d\mathbf{V} = \sum_{k=0}^{m} \frac{m}{C_m^k} \Big(C_{m-1}^{k-1} \partial V_{k-1} + C_{m-1}^{k} \overline{\partial} V_k \Big) \mathbf{E}_k^{(m)}. \tag{27}$$

Из (19) и (26) также следует коммутативность $\mathrm{i}d = d\mathrm{i}$.

Тензорное поле $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m)$ называется гладким потенциальным полем, если оно представимо в виде $\mathbf{a} = d\mathbf{v}$ для некоторого тензорного поля (потенциала) $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_{m-1})$. В комплексных координатах мы имеем уравнение $\mathbf{A} = d\mathbf{V}$, где d операция внутреннего дифференцирования в комплексных координатах (26). После соответствующей замены переменных это уравнение, как и раньше, приводится к системе уравнений типа Бельтрами

$$\overline{\partial}_{\mathcal{U}} \mathbf{W} \equiv \mathbf{W}_{\overline{z}} + \mathcal{U} \mathbf{W}_z = \mathbf{F}, \tag{28}$$

где $\mathcal{U}$ есть оператор сдвига вправо,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \cdots \\ W_s \\ \cdots \\ W_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{m-1}^0 V_0 \\ C_{m-1}^1 V_1 \\ \cdots \\ C_{m-1}^s V_s \\ \cdots \\ C_{m-1}^{m-1} V_{m-1} \end{pmatrix}, \ \mathbf{F} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} C_m^0 A_0 \\ C_m^1 A_1 \\ \cdots \\ C_m^s A_s \\ \cdots \\ C_m^{m-1} A_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в эту систему не вошло уравнение

$$m\partial V_{m-1} = A_m, \tag{29}$$

которое получается из (26) при $k = m$. Это уравнение может использоваться как условие разрешимости для задачи восстановления потенциала $\mathbf{V}$.

Коммутатор дифференциальных операторов δ и d. Проверим, что и в комплексных координатах коммутатор $\delta d - d\delta$ равен оператору Лапласа-Бельтрами $\triangle$, Пусть $\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{m} A_s \mathbf{E}_k^{(m)} \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbf{S}_m)$. Сначала вычислим дивергенцию по формуле (23)

$$\delta\mathbf{A} = 2\sum_{s=0}^{m-1}\Big(\partial A_s + \overline{\partial} A_{s+1}\Big)\mathbf{E}_s^{(m-1)},$$

а затем — градиент по формуле (26), получим

$$\begin{aligned} d\delta\mathbf{A} &= 2\sum_{k=0}^{m}\Big(k(\partial\partial A_{k-1} + \overline{\partial}\partial A_k) + (m-k)(\overline{\partial}\partial A_k + \overline{\partial}\overline{\partial} A_{k+1})\Big)\mathbf{E}_k^{(m)} \\ &= 2\sum_{k=0}^{m}\Big(k\partial\partial A_{k-1} + m\overline{\partial}\partial A_k + (m-k)\overline{\partial}\overline{\partial} A_{k+1}\Big)\mathbf{E}_k^{(m)}. \end{aligned}$$

Теперь наоборот, сначала вычисляем градиент

$$d\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{m+1}\Big(k\partial A_{k-1} + (m+1-k)\overline{\partial} A_k\Big)\mathbf{E}_k^{(m+1)},$$

а затем дивергенцию

$$\begin{aligned} &\delta d\mathbf{A} \\ &= 2\sum_{k=0}^{m}\Big(k\partial\partial A_{k-1} + (m+1-k)\overline{\partial}\partial A_k + (k+1)\overline{\partial}\partial A_k + (m-k)\overline{\partial}\overline{\partial} A_{k+1}\Big)\mathbf{E}_k^{(m)} \\ &= 2\sum_{k=0}^{m}\Big(k\partial\partial A_{k-1} + (m+2)\overline{\partial}\partial A_k + (m-k)\overline{\partial}\overline{\partial} A_{k+1}\Big)\mathbf{E}_k^{(m)}. \end{aligned}$$

В результате получаем нужное

$$(\delta d - d\delta)\mathbf{A} = 4\sum_{k=0}^{m}\overline{\partial}\partial A_k \mathbf{E}_k^{(m)} = \triangle\sum_{k=0}^{m} A_k\mathbf{E}_k^{(m)} = \triangle\ \mathbf{A}.$$

Покажем, что операторы $-m\delta$ и d формально сопряжены (дуальны) в пространствах $\mathbf{L}_2(\mathbb{C}, \mathbf{S}_{m-1})$ и $\mathbf{L}_2(\mathbb{C}, \mathbf{S}_m)$, т. е. для гладких тензорных полей имеет место равенство

$$(\mathbf{V}, -m\delta\mathbf{A})_{\mathbf{L}_2(\mathbb{C},\mathbf{S}_{m-1})} = (d\mathbf{V}, \mathbf{A})_{\mathbf{L}_2(\mathbb{C},\mathbf{S}_m)}. \tag{30}$$

Имеем $\mathbf{A} \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{C}, \mathbf{S}_m)$, $\delta\mathbf{A} = 2\sum_{s=0}^{m-1}\Big(\partial A_s + \overline{\partial} A_{s+1}\Big)\mathbf{E}_s^{(m-1)}$ и $\mathbf{V} \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{C}, \mathbf{S}_{m-1})$, $d\mathbf{V} = \sum_{k=0}^{m}\Big(k\partial V_{k-1} + (m-k)\overline{\partial} V_k\Big)\mathbf{E}_k^{(m)}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{V}, -m\delta\mathbf{A})_{\mathbf{L}_2(\mathbb{C},\mathbf{S}_{m-1})} &= -m2^m \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k (V_k, \partial A_k + \overline{\partial} A_{k+1})_{L_2(\mathbb{C})} \\
&= -m2^m \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k (V_k, \partial A_k)_{L_2(\mathbb{C})} - m2^m \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k (V_k, \overline{\partial} A_{k+1})_{L_2(\mathbb{C})} \\
&= m2^m \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k (\overline{\partial} V_k, A_k)_{L_2(\mathbb{C})} + m2^m \sum_{k=1}^{m} C_{m-1}^{k-1} (\partial V_{k-1}, A_k)_{L_2(\mathbb{C})} \\
&= 2^m \sum_{k=0}^{m} C_m^k (k\partial V_{k-1} + (m-k)\overline{\partial} V_k, A_k)_{L_2(\mathbb{C})} = (d\mathbf{V}, \mathbf{A})_{\mathbf{L}_2(\mathbb{C},\mathbf{S}_m)}.
\end{aligned}
$$

Как было показано, операторы $-m\delta$ и d формально сопряжены в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{C}, \mathbf{S}_m)$ и для гладких тензорных полей имеет место равенство (30). Этот факт позволяет рассматривать негладкие соленоидальные тензорные поля.

Определение 1. *Слабое решение однородного уравнения* $\delta\mathbf{A} = \mathbf{0}$*, т.е. тензорное поле* $\mathbf{A} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{C}, \mathbf{S}_m)$*, которое удовлетворяют условию*

$$(d\mathbf{V}, \mathbf{A})_{\mathbf{L}_2(\mathbb{C},\mathbf{S}_m)} = \mathbf{0}$$

для всех $\mathbf{V} \in \mathbf{H}^1(\mathbb{C}, \mathbf{S}_{m-1})$*, будем называть соленоидальным тензорным полем.*

3. Соленоидальные и потенциальные тензорные поля

Комплексное преобразование Рисса. Определим сначала вещественные преобразования Рисса R_1 и R_2 как компоненты двумерного преобразования Рисса. Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $p \in (1, \infty)$, тогда

$$\begin{pmatrix} R_1 f(\mathbf{x}) \\ R_2 f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} p.v. \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}.$$

При $p = 2$ операторы R_j кососопряжены в $L_2(\mathbb{R}^2)$

$$(R_j f, g)_{L_2(\mathbb{R}^2)} = -(f, R_j g)_{L_2(\mathbb{R}^2)}$$

и имеют место равенства $R_1R_2 = R_2R_1$, $R_1^2 + R_2^2 = -Id$, где Id — тождественный оператор. Также R_j соответствуют операторам $\partial_j(-\triangle)^{-1/2}$, где $\triangle = \partial_1^2 + \partial_2^2$ оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$.

Кроме преобразований Рисса R_j мы будем использовать комплексное преобразование Рисса (complex Riesz transform) $R_{\mathbb{C}}$ (см. [4], [6], [7], [8])

$$R_{\mathbb{C}} f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \iint_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)|\zeta - z|}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{|\zeta - z|^3} f(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma \tag{31}$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{2\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\Re\zeta - \Re z}{|\zeta - z|^3} f(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma - \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\Im\zeta - \Im z}{|\zeta - z|^3} f(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = \mathrm{i}R_1 + R_2. \tag{32}$$

В пространстве $L_2(\mathbb{C})$ оператор $R_{\mathbb{C}}$ и его степени унитарны, поэтому $R_{\mathbb{C}}^{-1} = R_{\mathbb{C}}^*$, где сопряженный оператор

$$R_{\mathbb{C}}^* = -\overline{R_{\mathbb{C}}} = \mathrm{i}R_1 - R_2.$$

Вторая степень оператора $R_{\mathbb{C}}$ совпадает с сингулярным оператором Альфорса-Берлинга (Ahlfors-Beurling) $S : L_2(\mathbb{C}) \to L_2(\mathbb{C})$ и определяется через главное значение сингулярного интеграла

$$Sf(z) = R_{\mathbb{C}}^2 f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\sigma, \tag{33}$$

так что сопряженный оператор $S^* = \overline{S}$.

Известно, что пространства Соболева $H^k(\mathbb{C})$ будут инвариантными подпространствами для оператора Альфорса-Берлинга $R_{\mathbb{C}}^2$,

$$R_{\mathbb{C}}^2 : H^k(\mathbb{C}) \to H^k(\mathbb{C}).$$

Одно из важных свойств оператора $R_{\mathbb{C}}^2$ следующее

$$\partial = R_{\mathbb{C}}^2\overline{\partial} = \overline{\partial}R_{\mathbb{C}}^2 : H^1(\mathbb{C}) \to L_2(\mathbb{C}).$$

Из него следуют формулы дифференцирования для степеней оператора $R_{\mathbb{C}}^2$

$$\overline{\partial}R_{\mathbb{C}}^{2k} = R_{\mathbb{C}}^{2k}\overline{\partial} : H^1(\mathbb{C}) \to L_2(\mathbb{C}), \quad \partial R_{\mathbb{C}}^{2k} = R_{\mathbb{C}}^{2k+2}\overline{\partial} : H^1(\mathbb{C}) \to L_2(\mathbb{C}), \ k \in N,$$

а также при $k = 0, \ldots, n$ имеют место равенства

$$\partial^k\overline{\partial}^{n-k} = R_{\mathbb{C}}^{2k}\overline{\partial}^n : H^n(\mathbb{C}) \to L_2(\mathbb{C}), \quad \partial^{n-k}\overline{\partial}^k = R_{\mathbb{C}}^{-2k}\partial^n : H^n(\mathbb{C}) \to L_2(\mathbb{C}). \tag{34}$$

Подробные сведения о сингулярных интегральных операторах, в частности, об операторах Рисса на плоскости, операторе Альфорса-Берлинга и его степенях, можно найти в работах [4], [6], [7], [8], [9], [10], [11].

Сформулируем и докажем основную теорему.

Теорема 1. *Соленоидальные тензорные поля* $\mathbf{A} = \sum_{k=0}^m A_k\mathbf{E}_k^{(m)} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{C}, \mathbf{S}_m)$, $\mathbf{a} = \sum_{k=0}^m a_k\mathbf{E}_k^{(m)} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m)$ *определяются (порождаются) одной вещественной функцией* $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ *и имеют вид*

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^m (-1)^k R_{\mathbb{C}}^{2k-m} f\mathbf{E}_k^{(m)}, \tag{35}$$

$$\mathbf{a} = \sum_{k=0}^m (-1)^k R_1^{m-k} R_2^k f\mathbf{E}_k^{(m)}. \tag{36}$$

Доказательство. Покажем, что (35) есть слабое решение однородного уравнения $\delta\mathbf{A} = \mathbf{0}$, для этого рассмотрим скалярное произведение

$$(d\mathbf{V}, \mathbf{A})_{\mathbf{L}_2(\mathbb{C},\mathbf{S}_m)} = 2^m \sum_{k=0}^{m} C_m^k (k\partial V_{k-1} + (m-k)\overline{\partial} V_k, A_k)_{L_2(\mathbb{C})}$$

$$= m2^m \sum_{k=1}^{m} C_{m-1}^{k-1} (\partial V_{k-1}, A_k)_{L_2(\mathbb{C})} + m2^m \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^{k} (\overline{\partial} V_k, A_k)_{L_2(\mathbb{C})}$$

$$= m2^m \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^{k} \Big((\partial V_k, A_{k+1})_{L_2(\mathbb{C})} + (\overline{\partial} V_k, A_k)_{L_2(\mathbb{C})} \Big)$$

$$= -m \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{m-1}^{k} \Big((\partial V_k, R_{\mathbb{C}}^{2k-m+2} f)_{L_2(\mathbb{C})} - (\overline{\partial} V_k, R_{\mathbb{C}}^{2k-m} f)_{L_2(\mathbb{C})} \Big)$$

$$= -m \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{m-1}^{k} \Big((R_{\mathbb{C}}^{-2k+m-2} \partial V_k, f)_{L_2(\mathbb{C})} - (R_{\mathbb{C}}^{-2k+m} \overline{\partial} V_k, f)_{L_2(\mathbb{C})} \Big)$$

$$= -m \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{m-1}^{k} (R_{\mathbb{C}}^{-2k+m-2} \partial V_k - R_{\mathbb{C}}^{-2k+m} \overline{\partial} V_k, f)_{L_2(\mathbb{C})}$$

$$= -m \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{m-1}^{k} (R_{\mathbb{C}}^{-2k+m-2} (\partial V_k - R_{\mathbb{C}}^{2} \overline{\partial} V_k), f)_{L_2(\mathbb{C})} = 0,$$

так как $\partial V_k - R_{\mathbb{C}}^2 \overline{\partial} V_k = \partial V_k - \partial V_k = 0$.

Воспользовавшись формулой перехода к вещественным компонентам (7) и учитывая связь между комплексным и вещественными преобразованиями Рисса, мы получим представление (36). ■

Иногда в комплексных координатах удобно использовать представление соленоидального тензорного поля через первую компоненту

$$\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k R_{\mathbb{C}}^{2k} A_0 \mathbf{E}_k^{(m)}, \tag{37}$$

при этом первая компонента удовлетворяет условию

$$\overline{A_0} - (-1)^m R_{\mathbb{C}}^{2m} A_0 = 0, \ A_0 \in L_2(\mathbb{C}). \tag{38}$$

Несложно убедится, что все решения уравнения (38) имеют вид

$$A_0 = \frac{1}{2^m} R_{\mathbb{C}}^{-m} f,$$

здесь f — произвольная вещественная функция из (35) и (36).

Заметим, что $A_M = \frac{(-1)^M}{2^m} f$ в случае четного $m = 2M$ и $A_M = \frac{(-1)^M}{2^m} R_{\mathbb{C}}^{-1} f$, $A_{M+1} = \frac{(-1)^{M+1}}{2^m} R_{\mathbb{C}} f$ в случае нечетного $m = 2M+1$.

В силу унитарности в пространстве $L_2(\mathbb{C})$ оператора $R_{\mathbb{C}}$ и его степеней, имеет место следующая

Теорема 2. *Скалярное произведение* $(\mathbf{A}, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}_2(\mathbb{C},\mathbf{S}_m)}$ *соленоидальных тензорных полей*

$$\mathbf{A} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k R_{\mathbb{C}}^{2k} A_0 \mathbf{E}_k^{(m)}, \ \mathbf{A}' = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k R_{\mathbb{C}}^{2k} A_0' \mathbf{E}_k^{(m)} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{C}, \mathbf{S}_m).$$

равно скалярному произведению их нулевых компонент (с точностью до константы), а также равно скалярному произведению вещественных порождающих функций

$$(\mathbf{A}, \mathbf{A}')_{\mathbf{L}_2(\mathbb{C},\mathbf{S}_m)} = 4^m (A_0, A_0')_{L_2(\mathbb{C})} = (f, f')_{L_2(\mathbb{R}_{\mathbb{C}}^2)}.$$

Поэтому соленоидальные тензора $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}'$ *будут ортогональны только в том случае, если их нулевые компоненты* A_0 *и* A_0'*, также как и порождающие функции* f *и* f'*, ортогональны.*

Эта теорему можно использовать при построении ортогонального базиса в пространстве соленоидальных полей, используя для этого какой-либо ортогональный базис пространства $L_2(\mathbb{R}^2)$.

В связи с общими формулами представления для соленоидальных полей (35) и (36), рассмотрим ограниченные комплексные операторы $\mathbf{\Pi}_m$ и $\mathbf{\Pi}_m^*$, заданные по формулам

$$\mathbf{\Pi}_m f = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k R_{\mathbb{C}}^{2k-m} f \mathbf{E}_k^{(m)}, \tag{39}$$

$$\mathbf{\Pi}_m^* \mathbf{A} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k R_{\mathbb{C}}^{m-2k} A_k, \tag{40}$$

$$\mathbf{\Pi}_m : L_2(\mathbb{R}^2) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{C}, \mathbf{S}_m), \quad \mathbf{\Pi}_m^* : \mathbf{L}_2(\mathbb{C}, \mathbf{S}_m) \to L_2(\mathbb{R}^2),$$

а также соответствующие им вещественные ограниченные операторы $\boldsymbol{\pi}_m$ и $\boldsymbol{\pi}_m^*$

$$\boldsymbol{\pi}_m f = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k R_1^{m-k} R_2^k f \mathbf{E}_k^{(m)},$$

$$\boldsymbol{\pi}_m^* \mathbf{a} = \sum_{l=0}^{m} (-1)^{m-l} C_m^l R_1^{m-l} R_2^l a_l,$$

$$\boldsymbol{\pi}_m : L_2(\mathbb{R}^2) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m), \quad \boldsymbol{\pi}_m^* : \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m) \to L_2(\mathbb{R}^2).$$

Непосредственная проверка показывает, что выполняются равенства

$$(\mathbf{A}, \mathbf{\Pi}_m f)_{\mathbf{L}_2(\mathbb{C},\mathbf{S}_m)} = (\mathbf{\Pi}_m^* \mathbf{A}, f)_{L_2(\mathbb{R}^2)}, \ (\mathbf{a}, \boldsymbol{\pi}_m f)_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2,\mathbf{S}_m)} = (\boldsymbol{\pi}_m^* \mathbf{a}, f)_{L_2(\mathbb{R}^2)}.$$

Это означает, что пара операторов $\mathbf{\Pi}_m$, $\mathbf{\Pi}_m^*$ сопряжены друг к другу, также как и пара $\boldsymbol{\pi}_m$, $\boldsymbol{\pi}_m^*$. Следовательно, имеет место ортогональное разложение

$$\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m) = Im(\boldsymbol{\pi}_m) \oplus Ker(\boldsymbol{\pi}_m^*).$$

Полученное ортогональное разложение есть в точности разложение Гельмгольца пространства тензорных полей $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m)$, при этом $Im(\boldsymbol{\pi}_m)$ соответствует подпространству соленоидальных тензоров, а $Ker(\boldsymbol{\pi}_m^*) = (Im(\boldsymbol{\pi}_m))^\perp$ — подпространству потенциальных тензорных полей.

Кроме этого, мы можем сказать, что следующие последовательности точны

$$L_2(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\boldsymbol{\pi}_m} \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m) \xrightarrow{\delta} \mathbf{L}_2(\mathbb{C}, \mathbf{S}_{m-1}),$$

$$\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_{m-1}) \xrightarrow{d} \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m) \xrightarrow{\boldsymbol{\pi}_m^*} L_2(\mathbb{R}^2).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Потенциальные тензорное поля* $\mathbf{A} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{C}, \mathbf{S}_m)$ *и* $\mathbf{a} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m)$ *являются решениями уравнений*

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k R_{\mathbb{C}}^{m-2k} A_k = 0, \tag{41}$$

$$\sum_{l=0}^{m}(-1)^{m-l} C_m^l R_1^{m-l} R_2^l a_l = 0 \tag{42}$$

и образуют, соответственно, ядра операторов $\mathbf{\Pi}_m^*$ *и* $\boldsymbol{\pi}_m^*$.

Теперь дадим описание структуры потенциальных полей в комплексных координатах, т.е. решим уравнение (41).

Теорема 4. *Потенциальное тензорное поле* $\mathbf{A} = (A_0, A_1, \dots, A_{2M}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{C}, \mathbf{S}_m)$ *четного ранга* $m = 2M$ *определяется произвольными функциями* $A_k \in L_2(\mathbb{C})$, $k = 0, 1, \dots, M-1$, *при этом оставшиеся компоненты определяются как*

$$A_M = \frac{2(-1)^{M+1}}{C_m^M} \Re \sum_{k=0}^{M-1}(-1)^k C_m^k R_{\mathbb{C}}^{m-2k} A_k,$$
$$A_{M+s} = \overline{A_{M-s}}, \ s = 1, \dots, M.$$

Потенциальное тензорное поле $\mathbf{A} = (A_0, A_1, \dots, A_{2M+1}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{C}, \mathbf{S}_m)$ *нечетного ранга* $m = 2M+1$ *определяется произвольными функциями* $A_k \in L_2(\mathbb{C})$, $k = 0, 1, \dots, M-1$ *и* $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$, *при этом оставшиеся компоненты определяются как*

$$A_M = \mathrm{i} R_{\mathbb{C}}^{-1} f + \frac{(-1)^{M+1}}{C_m^M} \sum_{k=0}^{M-1}(-1)^k C_m^k R_{\mathbb{C}}^{m-2k-1} A_k,$$
$$A_{M+s} = \overline{A_{M+1-s}}, \ s = 1, \dots, M+1.$$

Доказательство. Пусть $m = 2M$. Тогда уравнение (41) можно переписать в виде

$$-(-1)^M C_m^M A_M = \sum_{k=0}^{M-1}(-1)^k C_m^k R_{\mathbb{C}}^{m-2k} A_k + \sum_{k=0}^{M-1}(-1)^k C_m^k R_{\mathbb{C}}^{-m+2k} \overline{A}_k,$$

откуда получаем

$$C_m^M (-1)^{M+1} A_M = 2\Re \sum_{k=0}^{M-1}(-1)^k C_m^k R_{\mathbb{C}}^{m-2k} A_k.$$

В случае, если $m = 2M+1$, то из уравнения (41) получается уравнение

$$\begin{aligned} &-(-1)^M C_m^M (R_{\mathbb{C}}^{-m+1} A_M - R_{\mathbb{C}}^{-m-1} \overline{A}_M) \\ &= \sum_{k=0}^{M-1}(-1)^k C_m^k R_{\mathbb{C}}^{-2k} A_k - \sum_{k=0}^{M-1}(-1)^k C_m^k R_{\mathbb{C}}^{-2m+2k} \overline{A}_k \end{aligned}$$

или

$$(-1)^{M+1}C_m^M(A_M - R_{\mathbb{C}}^{-2}\overline{A}_M) = \sum_{k=0}^{M-1}(-1)^k C_m^k \left(R_{\mathbb{C}}^{m-1-2k}A_k - R_{\mathbb{C}}^{-m-1+2k}\overline{A}_k\right).$$

Будем искать решение в виде

$$A_M = A + \frac{(-1)^{M+1}}{C_m^M}\sum_{k=0}^{M-1}(-1)^k C_m^k R_{\mathbb{C}}^{m-1-2k}A_k.$$

После подстановки получаем для функции A однородное уравнение

$$A - R_{\mathbb{C}}^{-2}\overline{A} = 0 \text{ или } R_{\mathbb{C}}A = -\overline{R_{\mathbb{C}}A}.$$

Таким образом, $R_{\mathbb{C}}A = \mathrm{i}f$, $A = \mathrm{i}R_{\mathbb{C}}^{-1}f$, где $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ произвольная вещественнозначная функция. ■

Разложение Гельмгольца тензорных полей. В заключение рассмотрим задачу разложения тензорного поля $\mathbf{a} = \sum_{k=0}^m a_k\mathbf{E}_k^{(m)} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m)$ на потенциальную и соленоидальную части

$$\mathbf{a} = \mathbf{p} + \mathbf{a}^{sol}.$$

Мы считаем, что поле $\mathbf{a}$ известно, поэтому в разложении Гельмгольца достаточно определить соленоидальную часть $\mathbf{a}^{sol}$, для которой у нас имеется общее представление через неизвестную функцию f

$$\mathbf{a}^{sol} = \sum_{k=0}^m (-1)^k R_1^{m-k}R_2^k f\mathbf{E}_k^{(m)}.$$

Применив условие потенциальности (42) к разности $\mathbf{a} - \mathbf{a}^{sol}$, получим следующее равенство

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^m(-1)^{m-l}C_m^l R_1^{m-l}R_2^l a_l &= \sum_{l=0}^m(-1)^{m-l}C_m^l R_1^{m-l}R_2^l(-1)^l R_1^{m-l}R_2^l f\\ &= (-1)^m\sum_{l=0}^m C_m^l R_1^{2m-2l}R_2^{2l}f = (-R_1^2 - R_2^2)^m f = f.\end{aligned}$$

Отсюда следует формула для нахождения порождающей функции f

$$f = \sum_{l=0}^m(-1)^{m-l}C_m^l R_1^{m-l}R_2^l a_l$$

и формула для определения соленоидальной части

$$\mathbf{a}^{sol} = \sum_{k=0}^m\sum_{l=0}^m(-1)^{m-l-k}C_m^l R_1^{2m-l-k}R_2^{l+k}a_l\mathbf{E}_k^{(m)}.$$

Последняя формула также определяет оператор ортогонального проектирования тензорного поля $\mathbf{a} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, \mathbf{S}_m)$ на подпространство соленоидальных полей.

Список литературы

[1] S. G. Kazantsev and A. A. Bukhgeim, *Singular value decomposition of the 2D fan-beam Radon transform of tensor fields*, J. of Inverse and Ill-Posed Problems, **12**:3 (2004), 245–278. MR2080991

[2] В. А. Шарафутдинов, *Интегральная геометрия тензорных полей*, Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1993. Zbl 0795.53070

[3] Б. В. Боярский, *Теория обобщенного аналитического вектора*, Ann. Pol. Math., **17**:3 (1966), 281—320.

[4] А. Д. Джураев, *Метод сингулярных интегральных уравнений*, М.: Наука, 1987. MR0938094

[5] E. Arbuzov, A. L. Bukhgeim, S. G. Kazantsev, *Two-dimensional tomography problems and the theory of A-analytic functions*, Siberian Adv. Math., **8**:4 (1998), 1–20. MR1666500

[6] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, М.: Наука, 1988. MR0977975

[7] С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, М.: Физматгиз, 1962. Zbl 0105.30301

[8] T. Iwaniec, G. Martin, *Riesz transforms and related singular integrals*, Journal fur die reine und angewandte Mathematik, **473** (1995), 25–58.

[9] H. Begehr, G. N. Hile, *A hierarchy of integral operators*, Rocky Mountain J. Math., **27**:3 (1997), 669–706. MR1490270

[10] A. Calderon, A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math., **88** (1952), 85–139. MR0052553

[11] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, М.: Мир, 1973. MR0348563

Сергей Гаврилович Казанцев
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `kazan@math.nsc.ru`