S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 725–733 (2014) УДК 519.23
MSC 62F12

ЯВНЫЕ ОЦЕНКИ НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕПЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Е.Н. САВИНКИНА, А.И. САХАНЕНКО

Abstract. The problem of estimation of an unknown parameter in a special nonlinear regression problem is considered. The problem is given in the E.Z. Demidenko's monograph as a standard example of a nonlinear regression where finding of the classical least squares estimator meets considerable computing difficulties. In the paper explicit estimators of the unknown parameter are constructed which may be represented as a ratio of two linear statistics depending on specially picked up constants. The estimators are proved to be asymptotically normal under wide assumptions. The asymptotic normality of these estimators is proved and the assessment with the minimum asymptotic variance is found. Earlier such explicit estimators were known only for two equations of non-linear regression.

Keywords: power regression, difficulties in the least squares method, explicit estimators of the parameters, asymptotically normal estimators.

1. Введение и основные результаты

1.1. Предположим, что наблюдаются случайные величины $\{Y_i\}$, представимые в виде

$$Y_i = \sqrt{1 + \alpha x_i} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., \tag{1}$$

где $\{\varepsilon_i\}$ — ненаблюдаемые случайные погрешности, а $\{x_i > 0\}$ — некоторая известная числовая последовательность. Наша первая цель — оценить неизвестный параметр $\alpha > 0$. Традиционный путь решения такой задачи (см., например, [1, стр. 21]) состоит в использовании метода наименьших квадратов,

---

Savinkina, E.N., Sakhanenko, A.I., Explicit estimators of an unknown parameter in a power regression problem.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-12415 офи-м).

Поступила 25 июня 2014 г., опубликована 16 сентября 2014 г.

когда в качестве оценки для α берётся точка $\tilde{\alpha}$, в которой достигает минимума сумма квадратов невязок, т.е.

$$\tilde{\alpha} = \arg\min_{\alpha} \sum_{i \le n} (Y_i - \sqrt{1 + \alpha x_i})^2. \tag{2}$$

Однако, как отмечено в монографии Е.З.Демиденко [2, стр. 194], задача поиска точки минимума $\tilde{\alpha}$ в формуле (2) представляет серьёзные вычислительные трудности (связанные с тем, что количество локальных минимумов в правой части формулы (2) может стремиться к бесконечности).

Наше замечание состоит в том, что если погрешности $\{\varepsilon_i\}$ удовлетворяют следующим классическим условиям

$$\mathbb{E}\varepsilon_i = 0, \quad 0 < \mathbb{D}\varepsilon_i = \sigma^2 < \infty, \quad i = 1, 2, ..., \tag{3}$$

то для параметра α удаётся найти достаточно хорошие оценки в явном виде:

$$\alpha_n^* = \sum_{i \le n} c_{ni} Y_i^2 \Big/ \sum_{i \le n} c_{ni} x_i. \tag{4}$$

Подчеркнём (см. лемму 2 в §2), что оценка α_n^* из (4) определена и является несмещённой при $n \ge n_0$ тогда и только тогда, когда постоянные $\{c_{ni}\}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\forall\ n \ge n_0 > 1 \quad \sum_{i \le n} c_{ni} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i \le n} c_{ni} x_i \ne 0. \tag{5}$$

1.2. Приведём основное утверждение работы. Для любой последовательности чисел $c_{n\bullet} = (c_{n1}, \dots, c_{nn})$ ниже будем использовать следующие обозначения:

$$A_n(c_{n\bullet}) = \sum_{i \le n} c_{ni} x_i, \quad B_n^2(c_{n\bullet}) = \sum_{i \le n} c_{ni}^2 \mathbb{D} Y_i^2. \tag{6}$$

Условимся, что далее все пределы берутся при $n \to \infty$, а выражения вида $\eta_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ означают, что случайные величины $\{\eta_n\}$ сходятся по распределению к стандартному нормальному закону.

Теорема 1. *Пусть независимые случайные величины $\{c_{ni} Y_i^2\}$ удовлетворяют условию Линдеберга и выполнены условия (3) и (5). Тогда*

$$\frac{\alpha_n^* - \alpha}{d_n(c_{n\bullet})} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1), \quad \textit{где} \quad d_n(c_{n\bullet}) = \frac{B_n(c_{n\bullet})}{A_n(c_{n\bullet})}. \tag{7}$$

Тем самым использование простых явных оценок из (4) позволяет найти асимптотически нормальную оценку для интересующего нас параметра α, избежав при этом всех вычислительных трудностей, связанных с оценкой из (2). Подчеркнём, что ранее были известны только два примера задач нелинейной регрессии (см. [3, 4]), в которых были построены *явные* асимптотически нормальные оценки для неизвестного параметра.

1.3. Чтобы сформулировать следующее утверждение нам потребуются классические обозначения:

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i \le n} x_i, \quad \overline{Y_n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i \le n} Y_i^2.$$

Теорема 2. *Пусть верны все условия Теоремы 1 и, дополнительно:*

$$\forall i \quad \mathbb{E}\varepsilon_i^3 = 0, \quad \sum_{i\le n} c_{ni}^2(x_i - \bar{x}_n)^2 \Big/ A_n^2(c_{n\bullet}) \to 0, \quad \bar{x}_n/n \to 0. \tag{8}$$

В этом случае имеет место сходимость

$$(\alpha_n^* - \alpha)/\hat{d}_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1), \tag{9}$$

где

$$\hat{d}_n = \left(\sum_{i\le n} c_{ni}^2 \hat{\xi}_{ni}^2\right)^{1/2} \Big/ A_n(c_{n\bullet}) \quad \text{и} \quad \hat{\xi}_{ni} = Y_i^2 - \overline{Y_n^2} - \alpha_n^*(x_i - \bar{x}_n). \tag{10}$$

Подчеркнём, что значение $\hat{d}_n$ в (9) является статистикой, в отличие от значения $d_n(c_{n\bullet})$ в (7). Тем самым сходимость (9) может быть удобнее при построении доверительных интервалов для неизвестного параметра α.

Рассмотрим теперь простой частный случай, когда утверждения обеих теорем справедливы для конкретного набора чисел $\{c_{ni}\}$.

Следствие 1. *Пусть случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — независимы, одинаково распределены и*

$$\mathbb{E}\varepsilon_1 = \mathbb{E}\varepsilon_1^3 = 0, \quad \mathbb{E}\varepsilon_1^4 < \infty, \quad \mathbb{D}\varepsilon_1 > 0. \tag{11}$$

Тогда условие

$$\max_{i\le n} x_i^3 \Big/ \sum_{i\le n}(x_i - \bar{x}_n)^2 \to 0 \tag{12}$$

достаточно для того, чтобы при $\{c_{ni} \equiv x_i - \bar{x}_n\}$ имели место обе сходимости (7) и (9).

Подчеркнём, что условиям (11) удовлетворяют погрешности, имеющие нормальные распределения. Отметим ещё, что

$$\alpha_n^* = \sum_{i\le n}(x_i - \bar{x}_n)(Y_i^2 - \overline{Y_n^2}) \Big/ \sum_{i\le n}(x_i - \bar{x}_n)^2 \quad \text{при} \quad \{c_{ni} \equiv x_i - \bar{x}_n\}.$$

1.4. В следующем §2 мы приведём Теорему 3, в которой будет исследован вопрос о возможности выбора оптимальных величин $\{c_{ni}\}$ в Теореме 1. К сожалению, таких оптимальных *постоянных* не существует.

Кроме того, в §3 мы напомним условие Линдеберга и отметим один важный случай, когда его нетрудно проверить в Теоремах 1 и 2.

Доказательства всех утверждений работы собраны в последнем §3.

2. Некоторые дополнительные замечания

2.1. Прежде всего проанализируем условие (5).

Лемма 1. *Если при некотором n выполнены оба условия в (5), то*

$$n > 1 \quad \text{и} \quad x_i \ne x_j \quad \text{при некоторых} \quad i \ne j,\ i \le n,\ j \le n. \tag{13}$$

Кроме того, для существования чисел $\{c_{ni}\}$, удовлетворяющих (5) при некотором n, необходимо и достаточно, чтобы

$$n \ge n_1 = \{\min i : x_i \ne x_1\}.$$

Действительно, если $x_1 = \dots = x_n$, то $\sum_{i\le n} c_{ni}x_i = x_1\sum_{i\le n} c_{ni}$ и оба условия в (5) не могут выполняться одновременно.

Лемма 2. *Пусть справедливы условия (1) и (3). В этом случае оценка α_n^* из (4) определена тогда и только тогда, когда $\sum_{i\le n} c_{ni}x_i \ne 0$. Если же это условие верно, то для несмещённости оценки α_n^* при всех $n \ge n_0 > 1$ необходимо и достаточно выполнения обоих условий в (5).*

Это утверждение вытекает из равенств

$$\forall\ i \quad \mathbb{E}Y_i^2 = 1+\sigma^2+\alpha x_i, \quad \mathbb{E}\alpha_n^* = \alpha + (1+\sigma^2)\sum_{i\le n} c_{ni}\Big/\sum_{i\le n} c_{ni}x_i,$$

которые справедливы ввиду (1), (3) и (4).

2.2. В доказательствах часто будет использоваться обозначение

$$\xi_i = Y_i^2 - \mathbb{E}Y_i^2 = 2\varepsilon_i\sqrt{1+\alpha x_i} + \varepsilon_i^2 - \sigma^2,$$

благодаря которому имеет место следующее очевидное утверждение.

Лемма 3. *Пусть случайные величины $\{\varepsilon_i\}$ независимы и верны условия (1) и (3). В этом случае величины $\{\xi_i\}$ также независимы и*

$$\forall\ i \quad Y_i^2 = 1+\sigma^2+\alpha x_i+\xi_i, \quad \mathbb{E}\xi_i = 0. \tag{14}$$

Если же, дополнительно, $\mathbb{D}Y_i^2 < \infty$, то $\mathbb{E}\varepsilon_i^4 < \infty$ и

$$\mathbb{D}Y_i^2 = \mathbb{D}\xi_i = \mathbb{E}\xi_i^2 = 4\sigma^2(1+\alpha x_i) + 4\sqrt{1+\alpha x_i}\,\mathbb{E}\varepsilon_i^3 + \mathbb{D}\varepsilon_i^2. \tag{15}$$

2.3. В этом пункте мы попытаемся оптимизировать введённую в (4) оценку: найдём такие $\{c_{ni}\}$, при которых её асимптотическая дисперсия $d_n^2(c_{n\bullet})$ станет минимальной.

Теорема 3. *Пусть при некотором фиксированном n набор чисел $\{c_{ni}\}$ удовлетворяет условиям (5), а случайные величины $\{Y_i^2\}$ обладают ненулевыми дисперсиями при всех i. В этом случае справедливо неравенство*

$$d_n^2(c_{n\bullet}) \ge d_{n,opt}^2, \tag{16}$$

где

$$d_{n,opt}^{-2} = K_2 - K_1^2/K_0 = \sum_{i\le n}(x_i - K_1/K_0)^2/\mathbb{D}Y_i^2 > 0, \tag{17}$$

$$K_0 = \sum_{i\le n}\frac{1}{\mathbb{D}Y_i^2}, \quad K_1 = \sum_{i\le n}\frac{x_i}{\mathbb{D}Y_i^2}, \quad K_2 = \sum_{i\le n}\frac{x_i^2}{\mathbb{D}Y_i^2}.$$

При этом равенство в (16) достигается тогда и только тогда, когда числа $\{c_{ni}\}$ удовлетворяют условию

$$c_{ni} = Kc_{ni,0}, \qquad \text{где} \quad c_{ni,0} = (x_i - K_1/K_0)/\mathbb{D}Y_i^2 \tag{18}$$

при всех $i \le n$ и некоторой константе или функции $K \ne 0$.

Замечание 1. *Как следует из Леммы 1, при выполнении условий Теоремы 3 верны также условия (13). Кроме того, нетрудно убедиться, что формулу (17) можно переписать в виде*

$$d_{n,opt}^{-2} = \frac{1}{2K_0}\sum_{i\le n, j\le n}\frac{(x_i - x_j)^2}{\mathbb{D}Y_i^2\mathbb{D}Y_j^2} > 0,$$

так что справедливость неравенства в (17) можно считать доказанной.

Замечание 2. *Из (15) и (18) следует, что при $x_i \neq x_j$ отношения $\mathbb{D}Y_i^2/\mathbb{D}Y_j^2$ и $c_{ni,0}/c_{nj,0}$ будут зависеть от неизвестного параметра α в случае, когда погрешности $\{\varepsilon_i\}$ имеют одинаковые центрированные нормальные распределения с неизвестной дисперсией, которая не зависит от α. А, значит, в этом случае при любом $K \neq 0$ хотя бы одна из величин $Kc_{ni,0}$ или $Kc_{nj,0}$ зависит от α. А поскольку (13) выполнено в силу предыдущего замечания, то оптимальные $\{c_{ni}\}$ из (18) нельзя использовать в Теоремах 1 и 2 ни при каком $K \neq 0$, за исключением очень частных случаев, когда дисперсии $\mathbb{D}\xi_i$ зависят от α и x_i специальным образом.*

2.4. Поскольку условия Линдеберга в Теореме 1 трудно проверять, будет полезна следующая

Лемма 4. *Пусть случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — независимы, одинаково распределены и выполнены соотношения (11). Тогда следующая сходимость*

$$\rho_n := \frac{\max_{i\le n} c_{ni}^2(1+x_i)}{\sum_{i\le n} c_{ni}^2(1+x_i)} \to 0 \tag{19}$$

достаточна для того, чтобы случайные величины $\{c_{ni}Y^2\}$ удовлетворяли условию Линдеберга.

2.5. Напомним, что выполнение условия Линдеберга для величин $\{c_{ni}Y_i^2\}$ эквивалентно выполнению этого условия для величин $\{c_{ni}\xi_i\}$ и означает справедливость следующего свойства:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad L_n(\varepsilon) = \sum_{i\le n} \sigma_{ni}^2(\varepsilon)\big/B_n^2(c_{n\bullet}) \to 0, \tag{20}$$

где $\sigma_{ni}^2(\varepsilon) = \mathbb{E}\{c_{ni}^2\xi_i^2 : c_{ni}^2\xi_i^2 > \varepsilon B_n^2(c_{n\bullet})\}$. Для удобства дальнейших ссылок в следующем утверждении собраны определение и нужные нам свойства условия Линдеберга.

Лемма 5. *Если случайные величины $\{c_{ni}\xi_i\}$ удовлетворяют условию Линдеберга, то имеют место следующие две сходимости:*

$$\frac{\sum_{i\le n} c_{ni}\xi_i}{B_n(c_{n\bullet})} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad \textit{и} \quad \frac{\sum_{i\le n} c_{ni}^2\xi_i^2}{B_n^2(c_{n\bullet})} \underset{p}{\to} 1. \tag{21}$$

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [5].

3. Доказательства

Доказательство Теоремы 1. Из (14) следует, что при любых постоянных $\{c_{ni}\}$

$$\sum_{i\le n} c_{ni}Y_i^2 = \sum_{i\le n} c_{ni} + \sum_{i\le n} c_{ni}\alpha x_i + \sum_{i\le n} c_{ni}\sigma^2 + \sum_{i\le n} c_{ni}\xi_i. \tag{22}$$

Кроме того, из (4) и (5) имеем:

$$\sum_{i\le n} c_{ni}Y_i^2 = \sum_{i\le n} c_{ni} + \sum_{i\le n} c_{ni}\alpha_n^* x_i + \sum_{i\le n} c_{ni}\sigma^2. \tag{23}$$

Вычитая теперь равенство (22) из (23) и учитывая определения (6) и (7), находим:

$$(\alpha_n^* - \alpha)/d_n(c_{n\bullet}) = \sum_{i\le n} c_{ni}\xi_i\Big/B_n(c_{n\bullet}).$$

Из полученного представления и первой сходимости в (21) следует асимптотическая нормальность (7) оценки α_n^*. □

Доказательство Теоремы 2. Перепишем левую часть утверждения (9) Теоремы 2 в виде

$$\frac{\hat{\alpha}_n - \alpha}{\hat{d}_n} = \frac{\hat{\alpha}_n - \alpha}{d_n(c_{n\bullet})} \cdot \frac{d_n(c_{n\bullet})}{\hat{d}_n},$$

где

$$\frac{\hat{d}_n^2}{d_n^2(c_{n\bullet})} = \frac{\sum_{i\le n} c_{ni}^2 \hat{\xi}_{ni}^2}{B_n^2(c_{n\bullet})} = \frac{\|c_{n\bullet}\hat{\xi}_{n\bullet}\|^2}{B_n^2(c_{n\bullet})} =: \lambda_n^2(\hat{\xi}_{n\bullet}),$$

а $\|c_{n\bullet}x_\bullet\|^2 = \sum_{i\le n} c_{ni}^2 x_i^2$ — квадрат нормы вектора $(c_{n1}x_1, ..., c_{nn}x_n)$. Таким образом, для того, чтобы сходимость (9) Теоремы 2 вытекала из утверждения (7) Теоремы 1, достаточно показать, что $\lambda_n(\hat{\xi}_{n\bullet}) \underset{p}{\to} 1$. Отметим ещё, что $\lambda_n(\xi_\bullet) \underset{p}{\to} 1$ в силу второй сходимости в (21). Значит, достаточно доказать, что $\lambda_n(\hat{\xi}_{n\bullet}) - \lambda_n(\xi_\bullet) \underset{p}{\to} 0$. По свойству нормы

$$\Big|\lambda_n(\hat{\xi}_{n\bullet}) - \lambda_n(\xi_\bullet)\Big| = \frac{\big|\|c_{n\bullet}\hat{\xi}_\bullet\| - \|c_{n\bullet}\xi_\bullet\|\big|}{B_n(c_{n\bullet})} \le \frac{\|c_{n\bullet}(\hat{\xi}_\bullet - \xi_\bullet)\|}{B_n(c_{n\bullet})} \tag{24}$$

и надо показать, что правая часть в выражении (24) стремится к нулю по вероятности.

С учётом (10) и (14), разность $\hat{\xi}_{ni} - \xi_i$ может быть записана в виде:

$$\hat{\xi}_{ni} - \xi_i = (x_i - \bar{x}_n)(\alpha - \hat{\alpha}_n) - \bar{\xi}_n,$$

а потому для правой части в (24) выполнено:

$$\begin{aligned}\frac{\|c_{n\bullet}(\hat{\xi}_\bullet - \xi_\bullet)\|}{B_n(c_{n\bullet})} &= \frac{\|c_{n\bullet}(x_\bullet - \bar{x}_n)(\alpha - \hat{\alpha}_n) - c_{n\bullet}\bar{\xi}_n\|}{B_n(c_{n\bullet})} \le \\ &\le \frac{|\alpha - \hat{\alpha}_n|\|c_{n\bullet}(x_\bullet - \bar{x}_n)\|}{B_n(c_{n\bullet})} + \frac{|\bar{\xi}_n|\|c_{n\bullet}\|}{B_n(c_{n\bullet})}.\end{aligned} \tag{25}$$

Рассмотрим каждое слагаемое из (25) в отдельности. Первое перепишем в виде

$$\frac{|\alpha - \hat{\alpha}_n|\|c_{n\bullet}(x_\bullet - \bar{x}_n)\|}{B_n(c_{n\bullet})} = \frac{\|c_{n\bullet}(x_\bullet - \bar{x}_n)\|}{B_n(c_{n\bullet})} \cdot d_n(c_{n\bullet})\frac{|\hat{\alpha}_n - \alpha|}{d_n(c_{n\bullet})}.$$

Учитывая определение $d_n(c_{n\bullet})$ из (7), получаем, что

$$d_n(c_{n\bullet})\frac{\|c_{n\bullet}(x_\bullet - \bar{x}_n)\|}{B_n(c_{n\bullet})} = \frac{\|c_{n\bullet}(x_\bullet - \bar{x}_n)\|}{A_n(c_{n\bullet})} = \frac{(\sum c_{ni}^2(x_i - \bar{x}_n)^2)^{1/2}}{A_n(c_{n\bullet})} \to 0$$

в силу второго условия из (8). А поскольку ещё $(\hat{\alpha}_n - \alpha)/d_n(c_{n\bullet}) \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$, то первое слагаемое в правой части неравенства (25) сходится к нулю по вероятности.

Заметим теперь, что $\mathbb{D}\xi_i > 4\sigma^2$ при $\mathbb{E}\varepsilon_i^3 = 0$ ввиду (15). А так как

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\bar{\xi}_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i\le n}\mathbb{D}\xi_i = \frac{1}{n^2}[4\sigma^2(n + \alpha\sum_{i\le n} x_i) + n\mathbb{D}\varepsilon_i^2] = \\ = \frac{4\sigma^2 + \mathbb{D}\varepsilon_i^2}{n} + 4\alpha\sigma^2\frac{\bar{x}_n}{n} \to 0\end{aligned}$$

по третьему условию в (8), то $|\bar{\xi}_n| \to 0$ в силу неравенства Чебышёва. Значит, для второго слагаемого в (25) получаем:

$$\frac{\|c_{n\bullet}\bar{\xi}_n\|}{B_n(c_{n\bullet})} = \frac{\big(\sum_{i\le n} c_{ni}^2\bar{\xi}_n^2\big)^{1/2}}{\big(\sum_{i\le n} c_{ni}^2 \mathbb{D}\xi_i\big)^{1/2}} \le \frac{|\bar{\xi}_n|\big(\sum_{i\le n} c_{ni}^2\big)^{1/2}}{2\sigma\big(\sum_{i\le n} c_{ni}^2\big)^{1/2}} = \frac{|\bar{\xi}_n|}{2\sigma} \underset{p}{\to} 0.$$

Таким образом, оба слагаемых в правой части неравенства (25) сходятся к нулю по вероятности. Следовательно, правая часть в выражении (24) также сходится к нулю по вероятности — что мы и хотели показать. □

При выводе Теоремы 3 нам потребуется

Лемма 6. *Пусть набор чисел $\{c_{ni}\}$ удовлетворяет условиям Теоремы 3. Тогда*

$$B_n^2(c_{n\bullet}) - d_{n,opt}^2 A_n^2(c_{n\bullet}) = B_n^2(c_{n\bullet} - \tilde{K}c_{n\bullet,0})$$

при $\tilde{K} = A_n(c_{n\bullet})d_{n,opt}^2$.

Доказательство. В силу определения (6) квадратичной формы $B_n^2(c_{n\bullet})$ величину $B_n^2(c_{n\bullet} - \tilde{K}c_{n\bullet,0})$ можно представить в виде:

$$B_n^2(c_{n\bullet} - \tilde{K}c_{n\bullet,0}) = B_n^2(c_{n\bullet}) - 2\tilde{K}\sum_{i\le n} c_{ni}c_{ni,0}\mathbb{D}Y_i^2 + \tilde{K}^2 B_n^2(c_{n\bullet,0}). \tag{26}$$

Распишем подробно второе и третье слагаемые в (26). Из определения (18) чисел $\{c_{ni,0}\}$ имеем:

$$\sum_{i\le n} c_{ni}c_{ni,0}\mathbb{D}Y_i^2 = \sum_{i\le n} c_{ni}\Big(\frac{x_i}{\mathbb{D}Y_i^2} - \frac{1}{\mathbb{D}\xi_i}\frac{K_1}{K_0}\Big)\mathbb{D}Y_i^2 = \sum_{i\le n} c_{ni}x_i - \frac{K_1}{K_0}\sum_{i\le n} c_{ni} = A_n(c_{n\bullet}),$$

поскольку $\sum_{i\le n} c_{ni} = 0$. Далее, применяя последовательно (6), (18) и (17), получаем:

$$B_n^2(c_{n\bullet,0}) = \sum_{i\le n}\Big(\frac{x_i}{\mathbb{D}Y_i^2} - \frac{1}{\mathbb{D}Y_i^2}\frac{K_1}{K_0}\Big)^2\mathbb{D}Y_i^2 = d_{n,opt}^{-2}.$$

Таким образом, равенство (26) можно переписать следующим образом:

$$B_n^2(c_{n\bullet} - \tilde{K}c_{n\bullet,0}) = B_n^2(c_{n\bullet}) - 2\tilde{K}A_n(c_{n\bullet}) + \tilde{K}^2/d_{n,opt}^2.$$

Подставив в последнее выражение $\tilde{K} = A_n(c_{n\bullet})d_{n,opt}^2$, получим требуемое утверждение леммы. □

Доказательство Теоремы 3. Поскольку квадратичная форма $B_n^2(c_{n\bullet} - Kc_{n\bullet,0})$ неотрицательна, то из Леммы 6 следует, что $B_n^2(c_{n\bullet}) - d_{n,opt}^2 A_n^2(c_{n\bullet}) \ge 0$. И в силу представления для $d_n(c_{n\bullet})$ из (7) это неравенство эквивалентно требуемому неравенству (16).

Далее, из Леммы (6) также вытекает, что равенство в (16) достигается, когда $B_n^2(c_{n\bullet} - \tilde{K}c_{n\bullet,0}) = 0$. В силу явного вида (6) квадратичной формы $B_n^2(c_{n\bullet})$ последнее равенство возможно только когда $(c_{ni} - \tilde{K}c_{ni,0})\mathbb{D}Y_i^2 = 0$ при всех i, не превосходящих n. А поскольку в Теореме 3 предполагается, что $\mathbb{D}Y_i^2 > 0$ при всех i, то равенство в (16) возможно лишь когда $c_{ni} - \tilde{K}c_{ni,0} = 0$ при всех $i \le n$, что доказывает соотношение (17).

Наконец, представление (17) для $d_{n,opt}^2$ получается, если подставить $Kc_{ni,0}$ из (18) в выражение (7) для $d_n^2(c_{n\bullet})$. Таким образом, доказаны все пункты Теоремы 3. □

Доказательство Леммы 4. Нам нужно проверить условие (20). В силу предположений (11)

$$B_n^2(c_{n\bullet}) = \sum_{i\le n} c_{ni}^2\big(4(1+\alpha x_i)\sigma^2 + \mathbb{D}\varepsilon_i^2\big) \ge k\sum_{i\le n} c_{ni}^2(1+\alpha x_i)$$

при $k = 4\sigma^2\min\{1,\alpha\}$. С другой стороны,

$$c_{ni}^2\xi_i^2 = c_{ni}^2(2\varepsilon_i\sqrt{1+\alpha x_i} + \varepsilon_i^2 - \sigma^2)^2 \le c_{ni}^2(1+x_i)\zeta_i \le \rho_n B_n^2(c_{n\bullet})\zeta_i, \tag{27}$$

где

$$\zeta_i = 8(1+\alpha)\varepsilon_i^2 + 2(\varepsilon_i^2-\sigma^2)^2 \quad \text{и} \quad \mathbb{E}\zeta_i < \infty. \tag{28}$$

Последнее неравенство в (28) вытекает из (11).

Подчеркнём, что, в силу (28), все $\{\zeta_i\}$ одинаково распределены, так как $\{\varepsilon_i\}$ одинаково распределены; следовательно, ввиду (26)

$$\sigma_{ni}^2(\varepsilon) \le \mathbb{E}\{c_{ni}^2(1+x_i)\zeta_i : \rho_n B_n^2(c_{n\bullet}\zeta_i > \varepsilon B_n^2(c_{n\bullet})\} = c_{ni}^2(1+x_i)\mathbb{E}\{\zeta_1 : \zeta_1 > \varepsilon/\rho_n\}.$$

Таким образом,

$$L_n(\varepsilon) \le \frac{\sum_{i\le n} c_{ni}^2(1+x_i)\mathbb{E}\{\zeta_1 : \zeta_1 > \varepsilon/\rho_n\}}{k\sum_{i\le n} c_{ni}^2(1+x_i)} = \frac{\mathbb{E}\{\zeta_1 : \zeta_1 > \varepsilon/\rho_n\}}{k} \to 0,$$

так как $\mathbb{E}\zeta_1 < \infty$ и $\varepsilon/\rho_n \to \infty$ для любых $\varepsilon > 0$. □

Доказательство следствия 1. Следует показать, что если $\{c_{ni} \equiv x_i - \bar{x}_n\}$ и выполнены предположения (11), то из условия (12) вытекают как сходимости (19), так и обе сходимости в (8). Отметим прежде всего, что

$$\max_{i\le n}|x_i - \bar{x}_n| \le 2\max_{i\le n} x_i \quad \text{и} \quad 1 \le \max_{i\le n} x_i/x_1. \tag{29}$$

Рассмотрим первую сходимость в (8):

$$\frac{\sum_{i\le n} c_{ni}^2(x_i-\bar{x}_n)^2}{A_n^2(c_{n\bullet})} = \frac{\sum_{i\le n}(x_i-\bar{x}_n)^4}{(\sum_{i\le n}(x_i-\bar{x}_n)^2)^2} \le \frac{\max_{i\le n}(x_i-\bar{x}_n)^2}{\sum_{i\le n}(x_i-\bar{x}_n)^2} \le \frac{4\max_{i\le n} x_i^3/x_1}{\sum_{i\le n}(x_i-\bar{x}_n)^2} \to 0$$

в силу (12) и (28). Обратимся теперь ко второй сходимости из (8):

$$\frac{\bar{x}_n}{n} \le \frac{\max_{i\le n} x_i}{n} \le \frac{\max_{i\le n} x_i^3}{n\max_{i\le n} x_i^2} \le \frac{\max_{i\le n} x_i^3}{\sum_{i\le n} x_i^2} \le \frac{\max_{i\le n} x_i^3}{\sum_{i\le n}(x_i-\bar{x}_n)^2} \to 0$$

ввиду (12). Таким образом, обе сходимости в (8) установлены.

С учётом (29), для числителя в (19) справедлива следующая оценка

$$\max_{i\le n}(x_i-\bar{x}_n)^2(1+x_i) \le 4\max_{i\le n} x_i^3(1/x_1+1).$$

А для знаменателя в (19), в силу положительности x_i, имеем

$$\sum_{i\le n}(x_i-\bar{x}_n)^2(1+x_i) \ge \sum_{i\le n}(x_i-\bar{x}_n)^2.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$\rho_n \le \frac{4\max_{i\le n} x_i^3(1/x_1+1)}{\sum_{i\le n}(x_i-\bar{x}_n)^2} \to 0,$$

если только ещё раз воспользоваться условием (12).

Следствие 1 доказано полностью. □

Список литературы

[1] G.A.F. Seber, C.J. Wild, *Nonlinear Regression*, Hoboken, John Wiley & Sons, Inc., 2003.

[2] Е.З. Демиденко, *Оптимизация и регрессия*, Москва, Наука, 1989. MR1007832

[3] Ю.Ю. Линке, А.И. Саханенко, *Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно-линейной регрессии*, Сибирский математический журнал, **41**:1 (2000), 150–163. MR1756483

[4] К.В. Ермоленко, А.И. Саханенко, *Явные асимптотически нормальные оценки неизвестного параметра частично-линейной регрессии*, Сибирские электронные математические известия, **10** (2013), 719–726.

[5] Ю.Ю. Линке, А.И. Саханенко, *Асимптотически оптимальное оценивание в задаче линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах*, Сибирский математический журнал, **51**:1 (2010), 128–145. MR2654527

Екатерина Николаевна Савинкина
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга, 4,
630090, Новосибирск, Россия;
Новосибирский Государственный Университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: savinkinae@gmail.com

Александр Иванович Саханенко
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга, 4,
630090, Новосибирск, Россия;
Новосибирский Государственный Университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: aisakh@mail.ru