S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 734–744 (2014) УДК 512.54
MSC 20K01

О ГРУППЕ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННОЙ $GL_2(p^n)$

А.А. ШЛЕПКИН, И.В. САБОДАХ

Abstract. We prove, that the periodic Shunkov group, saturated by full linear groups of dimension two over finite fields of the fixed characteristic, is isomorphic to full linear group of dimension two over locally finite field.

Keywords: Group saturated with a set of groups.

1. Введение

Группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X [8].

Пусть группа G насыщена группами из множества групп X, и K — конечная подгруппа из G. Через $X(K)$ обозначим множество всех подгрупп из G, содержащих K и изоморфных группам из X. В частности, если 1 – единичная подгруппа G, то $X(1)$ – множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из X [5].

Под символом e в данной работе будет пониматься единица группы G.

В [6] доказано, что произвольная периодическая группа, насыщенная группами из множества групп $\{L_2(p^n)\}$, где p и n не фиксируются, изоморфна $L_2(Q)$, где Q – локально-конечное поле. Там же этот результат удалось обобщить на случай, когда группа насыщенна группами из множества групп $\{SL_2(p^n)\}$. Естественно рассмотреть случай, когда периодическая группа насыщенна группами из множества групп $\{GL_2(p^n)\}$.

Гипотеза. Пусть периодическая группа G насыщена множеством групп $\{GL_2(p^n)\}$, где p, n не фиксируются. Тогда $G \simeq GL_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

Shlyopkin, A.A., Sabodakh, I.V., On Shunkov group saturated with $GL_2(p^n)$.

Поступила 19 июня 2014 г., опубликована 16 сентября 2014 г.

Следующий пример показывает, что указанная гипотеза в классе периодических групп неверна. Рассмотрим группу

$$G = L_2(2^n) \times B(m,p),$$

где $m > 1$, $p = 2^n - 1$ – простое фиксированное число большее 665, и $B(m,p)$ – свободная Берсайдова группа с m образующими и периода p. Так как

$$GL_2(2^n) = L_2(2^n) \times Z(GL_2(2^n)),$$

$|Z(GL_2(2^n))| = 2^n - 1 = p$ и порядок любой нетривиальной конечной подргуппы из $B(m,p)$, как показано в [1], (стр. 296), равен p, то G насыщена множеством $X = \{GL_2(2^n)\}$, состоящим из одной группы. Как показано в [1], (стр. 262) $B(m,p)$ для указанных m и p не является группой Шункова, и в частности, не является локально-конечной группой. Следвательно, G — не группа Шункова и не локально конечная группа.

Таким образом, возникает задача выделения в периодических группах классов групп, в которых данная гипотеза имеет место. Одним из таких классов, в котором эта гипотеза может оказаться верной, является класс групп Шункова.

В [7] данная гипотеза доказана в классе локально-конечных групп. Для доказательства гипотезы в классе групп Шункова предлагается следующая схема:

1. Доказать, что центр $Z(G)$ нетривиален и является локально-циклической группой.

2. Доказать, что $\overline{G} = G/Z(G)$ является группой Шункова и насыщена группами из множества $\{PGL_2(p^n)\}$, и как следствие вывести отсюда, что $\overline{G}$ изоморфна $PGL_2(Q)$ для некотрого локально-конечного поля Q.

3. Используя верность гипотезы для локально-конечных групп, показать, что G изоморфна $GL_2(Q)$.

В данной работе указанная схема реализуется при дополнительном ограничении: p – фиксированное простое число.

Пусть $\mathfrak{I}$=$\{GL_2(p^n)\}$ и $\mathfrak{M} = \{PGL_2(p^n)\}$, где p – простое фиксированное число, а натуральное n не фиксируется.

Доказаны следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть периодическая группа Шункова G насыщена группами из множества $\mathfrak{I}$, и $K \in \mathfrak{I}(1)$. Тогда $Z(K) \subseteq Z(G)$ и $Z(G)$ – локально циклическая группа.*

Теорема 2. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна $PGL_2(Q)$, где Q – локально-конечное поле характеристики p.*

Теорема 3. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{I}$, изоморфна $GL_2(Q)$, где Q – локально-конечное поле характеристики p.*

2. Известные факты и определения

Определение 1. *Группа G называется группой Шункова (сопряженно-бипримитивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу* [9].

Предложение 1 (Теорема О.Ю. Шмидта). *Расширение локально конечной группы при помощи локально конечной группы есть локально конечная группа.* [3, теорема 23.1.1]

Предложение 2 (В.П. Шунков). *В бесконечной 2-группе T любая конечная подгруппа отлична от своего нормализатора. В частности, T содержит бесконечную локально конечную подгруппу* [4].

Предложение 3 (В.П. Шунков). *Периодическая группа, содержащая инволюцию, централизатор которой конечен, локально конечна* [10].

Предложение 4 (В.П. Шунков). *Если в периодической группе G некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы из G конечны и сопряжены* [4].

Предложение 5 (Теорема Бендера). *Пусть конечная группа G обладает сильно вложенной подгруппой. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:*

1. *Силовская 2-подгруппа из G – циклическая или группа кватернионов.*
2. *$O^2(G/O(G))$ изоморфна одной из следующих групп $L_2(2^n)$, $Sz(2^{2n+1})$, $U_3(2^{2n})$* [13].

Предложение 6. *Пусть I означает множество индексов, K_α – конечное поле для любого $\alpha \in I$ и $\mathfrak{R} = \{L_2(K_\alpha) | \alpha \in I\}$. Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{R}$, изоморфна простой группе $L_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P* [6].

Предложение 7. *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, состоящего из конечных групп диэдра, имеет вид $G = A \leftthreetimes t$, где A – локально циклическая группа, t – инволюция и $a^t = a^{-1}$ для любого $a \in A$* [11].

Предложение 8. *Пусть G – локально конечная группа, насыщенная группами из множества $\{GL_2(p^n)\}$, где p – нефиксированное простое число, n – нефиксированное натуральное число. Тогда $G \simeq GL_2(P)$, где P – локально конечное поле* [7].

Предложение 9. *Пусть $L = GL_2(2^n)$. Тогда*

1. *$L = L_2(2^n) \times Z$, где $Z = \langle \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right) \rangle$ – центр группы L, $\alpha \in GF(q)$.*
2. *$PGL_2(p^n) = L/Z(L) = L_2(2^n)$.*

Доказательство. Непосредственные вычисления.

Предложение 10. *Пусть $L = GL_2(p^n)$ и p – нечетно. Тогда*

1. *$|GL_2(p^n)| = (p^n - 1)^2 p^n (p^n + 1)$.*
2. *$R = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \alpha \in GF(q)\}$ – силовская p–подгруппа группы L, $N_L(R) = R \leftthreetimes (Z \times T)$, где $Z = \langle \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right) \rangle$ – центр группы $L, T = \langle \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $|Z| = |T| = q - 1$.*
3. *Все силовские p–подгруппы группы L сопряжены и любые две из них пересекаются тривиально.*
4. *Пусть $M = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, где $|a| = |b| = k > 2$, подгруппа L. Тогда k делит $q-1$ и для некоторого $g \in L$, $M^g \subseteq (Z \times T)$ и $N_L(M^g) = N_L(Z \times T) = (Z \times T) \leftthreetimes \langle \omega \rangle$, где $\omega = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.*
5. *$L = SL_2(p^n) \leftthreetimes T$, где $T = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ и $\alpha \in GF(p^k)$.*
6. *$L = (SL_2(p^n) \cdot Z) \cdot \langle \upsilon \rangle$, где $\upsilon = \left(\begin{smallmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \upsilon^2 = \left(\begin{smallmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{smallmatrix}\right) \in Z$ и h – элемент поля $GF(p^n)$, из которого не извлекается корень квадратный.*

7. *Если $q \equiv 1(mod\ 4)$, 2^s – это 2-часть числа $q-1, \xi$ – примитивный корень степени 2^s из 1 в $GF(q)$, то её силовская 2-подгруппа S порядка 2^{s+1} является сплетением групп Z_{2^s} и $Z_2, S = \langle \left(\begin{smallmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\rangle$.*

8. *Если $q \equiv -1(mod\ 4)$, 2^s – это 2-часть числа $q+1$, ξ – примитивный корень степени 2^{s+1} из 1 в $GF(q^2)$, то её силовская 2-подгруппа S – является полудиэдральной группой порядка 2^{s+2} и $S = \langle \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi+\xi^q \end{pmatrix}, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\rangle$* [14].

Пусть $\mathfrak{N}$ – некоторое множество циклических групп нечётного порядка, а $\mathfrak{F}$ – некоторое множество групп $L_2(2^m)$. Положим $\mathfrak{X}$=$\{X \times Y\}$, где X принадлежит $\mathfrak{F}$, а Y принадлежит $\mathfrak{N}$.

Предложение 11. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{X}$, локально конечна и изоморфна прямому произведению $L \times V$, где $L \simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики два, а V – локально циклическая группа без инволюций* [2].

Предложение 12. *Пусть $G = L_2(p^n)$, где p – нечётное число. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Пусть z, v — две различные инволюции из G, и $|C_G(z) > 8|$. Тогда $G = \langle C_G(v), C_G(z)\rangle$.*
2. *Силовская 2-подгруппа группы G является группой диэдра.*
3. *Если a – инволюция из G, то $C_G(a)$ – группа диэдра.*
4. *Все инволюции из G сопряжены.*

Доказательство перечисленных выше свойств вытекает из подгруппового описания $L_2(p^n)$, которое можно найти в [12], (стр. 9).

3. Доказательство теоремы 1

Если $p = 2$, то по предложениям 11, 9 (п. 1) $G \simeq GL_2(Q) \times V$, где Q – локально конечное поле характеристики 2, а V – локально циклическая группа без инволюций, и теорема 1 доказана. В дальнейшем будет предполагаться, что $p \neq 2$.

Лемма 1. *Пусть a – произвольный элемент порядка p из G. Тогда 2-элементы группы $C_G(a)$ порождают локально циклическую 2-подгруппу.*

Доказательство. По условию теоремы 1 $a \in L_1 \in \Im(1)$. Поэтому $Z(L_1)$, а стало быть, и $C_G(a)$ содержит инволюцию. Пусть z и w – инволюции из $C_G(a)$. Фактор-группа $\langle a, z, w\rangle/\langle a\rangle$ конечна, так как порождена двумя инволюциями. Значит, группа $\langle a, z, \omega\rangle$ конечна и, по условиям теоремы 1, вложима в некоторую конечную подгруппу $L_2 \in \Im(\langle a, z, \omega\rangle)$. Так как элемент a содержится в некоторой силовской p-подгруппе группы L_2, то $C_{L_2}(\langle a\rangle)$ содержит только одну инволюцию (предложение 10 пп. 2, 3). Итак, $z = \omega$, и если 2-элементы группы $C_G(\langle a\rangle)$ имеют порядок 2, то лемма доказана.

Пусть $C_G(\langle a\rangle)$ содержит 2-элементы порядка больше 2. Сделаем следующее индуктивное предположение, если в $C_G(\langle a\rangle)$ существует циклическая подгруппа $\langle b_0\rangle$, $|b_0| = 2^k$ и $k \geq 1$, то она единственна. Пусть в $C_G(\langle a\rangle)$ существует циклическая подгруппа $\langle b\rangle$ и $|b| = 2^{k+1}$. Предположим, что существует другая циклическая подгруппа $\langle c\rangle$, лежащая в $C_G(\langle a\rangle)$, $\langle c\rangle \neq \langle b\rangle$, $|c| = 2^{k+1}$. Рассмотрим подгруппу $\langle a, b, c\rangle$. В ней конечная абелевая подгруппа $\langle a, b^2\rangle = \langle a, c^2\rangle$ является нормальной (равенство $\langle b^2\rangle = \langle c^2\rangle = \langle d\rangle$ следует из индуктивного предположения). Тогда фактор-группа $\langle a,b,c\rangle/\langle a,d\rangle$ является конечной, поскольку порождена двумя инволюциями. Следовательно, конечной является и группа $\langle a,b,c\rangle$. По условиям теоремы 1 $\langle a,b,c\rangle \subseteq L_3 \in \Im(\langle a,b,c\rangle)$. Но в L_3 существует только одна циклическая группа порядка 2^{k+1}, лежащая в $C_G(\langle a\rangle)$, и она лежит в центре группы L_3. Противоречие с выбором $\langle c\rangle$. Следовательно, $\langle b\rangle = \langle c\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $K \in \Im(1)$. Тогда все 2-элементы из $Z(K)$ лежат в центре группы G и порождают в нём единственную локально циклическую 2-подгруппу.*

Доказательство. Все 2-элементы центра группы K порождают циклическую 2-подгруппу. Обозначим через z инволюцию из этой 2-подгруппы.

Пусть z не лежит в центре группы G. Тогда существует элемент $g \in G$ такой, что $z^g = \upsilon$ и $\upsilon \neq z$. Пусть a – элемент порядка p из K. Группа $\langle a, a^\upsilon\rangle$ конечна по определению 1. Так как $\langle a, a^\upsilon\rangle^\upsilon = \langle a^\upsilon, a\rangle = \langle a, a^\upsilon\rangle$, то $\upsilon \in N_G(\langle a, a^\upsilon\rangle)$.

Последнее означает, что группа $\langle a^\upsilon, a, \upsilon\rangle$ конечна. По условию насыщенности

$$\langle a^\upsilon, a, \upsilon\rangle \subseteq L_1 \in \Im(\langle a^\upsilon, a, \upsilon\rangle).$$

По лемме 1 $z \in Z(L_1)$, значит, $z\upsilon = \upsilon z$, то есть $z^G = \langle z^g | g \in G\rangle$ – абелева нормальная подгруппа в G. Следовательно, $\langle z, \upsilon\rangle \subseteq z^G \cap L_1$ — нормальная элементарная абелева 2-подгруппа в L_2. Поскольку нормальные абелевы подгруппы из L_1 циклические, (предложение 10, пункты 2, 6) то $z = \upsilon$. Противоречие с выбором υ. Предположим теперь, что $Z(K)$ содержит 2-элементы порядка больше 2. Сделаем следующее индуктивное предположение: если в $Z(K)$ существует циклическая подгруппа $\langle d\rangle$ порядка $2^k (k \geqslant 1)$, то она также содержится в $Z(G)$. Пусть в $Z(K)$ существует циклическая подгруппа $\langle b\rangle$ порядка 2^{k+1}. Предположим, что существует $g \in G$ такой, что $b^g = c \neq b$. В силу индуктивного предположения можно считать, что $b^2 = c^2 = d \in Z(G)$. Следовательно, $\langle a, c\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle a, c\rangle \subseteq L_2 \in \Im(\langle a, c\rangle)$.

Если $|c|$ делит $|Z(L_2)|$, то по лемме 1 и предложению 10 п. 7 $b \in Z(L_2)$. Следовательно, $b^G = \langle b^g | g \in G\rangle$ – абелева нормальная подгруппа в G. Следовательно, $\langle b, b^g\rangle \subseteq b^G \cap L_2$ — нормальная абелева подгруппа в L_2. Поскольку все нормальные абелевы подгруппы из L_2 циклические (предложение 10, пункты 2,6), то $\langle b\rangle = \langle b^g\rangle$ и $b^G = \langle b\rangle$ номальная подгруппа в G. Отсюда вытекает, что $\langle b, g\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle b, g\rangle \subseteq L_3 \in \mathfrak{F}(\langle b, g\rangle)$, и $\langle b\rangle$ нормальная подгруппа в L_3 Поскольку $\langle b\rangle$ циклическая 2-группа, то $\langle b\rangle \subset Z(L_3)$ (предложение 10, пункты 2,6). Но тогда $b^g = b$, что противоречит выбору g. Итак, $b = c$.

Если $|c|$ не делит $Z(L_2)$, то $N_{L_2}(\langle c\rangle)$ содержит инволюцию t нетривиально действующую на $\langle c\rangle$ (предложение 10 пп. 7, 8). Так как $c = b^g$, то $N_G\langle b\rangle$ содержит инволюцию $t^{g^{-1}}$ нетривиально действующую на $\langle b\rangle$. По условию насыщенности конечная группа $\langle b, t^{g^{-1}}, a\rangle \subseteq L_3$ и $b \in C_{L_3}(a)$. Следовательно, $b \in Z(L_3)$ (лемма 1) и инволюция $t^{g^{-1}}$ перестановочна с b. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть b — элемент нечётного порядка из G, $b \in Z(K)$, где $K \in \Im(1)$. Тогда в G не существует элемета x такого, что $b^x = b^{-1}$ и $x^2 \in Z(G)$.*

Доказательство. Предположим обратное. И пусть элемент x такой. Так как G – группа Шункова, то $\langle b, x, d\rangle$ конечная группа. Здесь d — элемент порядка p из K. По условию насыщенности $\langle b, x, d\rangle \subseteq L$, где $L \in \Im(1)$. Из предложения 10 пп. 2, 3, 6 вытекает, что $b \in Z(L)$, следовательно, $b^x = b$, что противоречит выбору элемента x. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $b \in Z(K)$, где $K \in \Im(1)$, и $|b| = r$ – простое нечётное число. Тогда $b \in Z(G)$.*

Доказательство. Предположим обратное, пусть $b \neq b^g$ для некоторого $g \in G$. По условию насыщенности конечная группа $\langle b, b^g\rangle \subseteq K_g \in \Im(\langle b, b^g\rangle)$.

1. Существует такой g, что b не принадлежит $Z(K_g)$.

Действительно, если для любого $g \in G$, $b \in Z(K_g)$, то $b^G = \langle b^g | g \in G\rangle$ – абелева нормальная подгруппа в G. Следовательно, $\langle b, g\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности $\langle b, g\rangle \subseteq K_2 \in \Im(\langle b, g\rangle)$. Следовательно, $b^{K_2} = \langle b^x | x \in K_2\rangle$ – нормальная r-подгруппа в K_2. По предложению 10 п. 6 $b^{K_2} \subset Z(K_2)$, в частности, $b \in Z(K_2)$, значит, $b^g = b$. Противоречие с выбором g. Зафиксируем группу $Z(K_g)$.

2. В $Z(K_g)$ есть элемент порядка r.

По предложению 10 п. 6

$$\overline{Z(K_g)} = Z(K_g)/Z(Z(K_g)) = L_2 \leftthreetimes \langle \upsilon\rangle,$$

где $L_2 \simeq L_2(p^{n_1})$ и $|\upsilon| = 2$. Так как все элементы нечётных порядков из $\overline{Z(K_g)}$ попадают в подгруппу L_2, то для некоторой инволюции $\overline{t} \in \overline{Z(K_g)}$, $\overline{b}^{\overline{t}} = \overline{b}^{-1}$. Здесь $\overline{b}$ – образ b при естественном гомоморфизме $Z(K_g)$ на $\overline{Z(K_g)}$. Это означает, что для некоторого 2-элемента $t \in Z(K_g)$, $b^t = b^{-1}z$, и $t^2 \in Z(G)$. То, что $e \neq z \in Z(Z(K_g))$ вытекает из леммы 3. Так как $r = |b| = |b^t| = |b^{-1}z|$, то $e = (b^{-1}z)^r = (b^r)^{-1}z^r = ez^r = z^r$. Положим $z = a$, зафиксируем t и подгруппу $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$ из $Z(K_g)$. Ясно, что $t \in N(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$, $a^t = a$ и $b^t = b^{-1}a$.

3. В K найдется инволюция υ такая, что конечная группа $\langle a, b, \upsilon\rangle \subseteq K_2 \in \Im(\langle a, b, \upsilon\rangle)$ и $a \notin Z(K_2)$.

Так как $b \in Z(\langle a, b, \upsilon\rangle)$, то для любой инволюции $\upsilon \in K$, $\langle a, b, \upsilon\rangle$ – конечная группа, и по условию насыщенности

$$\langle a, b, \upsilon\rangle \subseteq K_2 \in \Im(\langle a, b, \upsilon\rangle).$$

Предположим теперь, что для любой инволюции $\upsilon \in K$, $a \in Z(K_2)$. Тогда $K^* = \langle \upsilon | \upsilon \in K, \upsilon^2 = e\rangle$ – характеристическая подгруппа в K и $a \in C_G(K^*)$. Здесь могут быть две взаимно исключающие возможности: либо $a \in K$, либо $a \notin K$. В первом случае $a \in Z(K)$ и по предложению 10 п. 2 $\langle a\rangle = \langle b\rangle$, что невозможно. Во втором случае мы имеем конечную подгруппу $\langle a\rangle \times (\langle b\rangle \times K^*)$ и по условию насыщенности

$$\langle a\rangle \times (\langle b\rangle \times K^*) \subset K_3 \in \Im(\langle a\rangle \times (\langle b\rangle \times K^*)).$$

Но в K_3 нет элементарно абелевых подгрупп порядка r^3 (предложение 10 пп. 1, 4). Итак, требуемая инволюция υ найдется.

Завершим доказательство леммы. Так как $\langle a\rangle \times \langle b\rangle \subseteq K_2$ и $|\langle a\rangle \times \langle b\rangle| = r^2$, то по предложению 10 п. 4 $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \cap Z(K_2) = \langle w\rangle \neq e$. Ясно, что $\langle a\rangle \times \langle b\rangle = \langle a\rangle \times \langle w\rangle$. Так как $a \notin Z(K_2)$, то в фактор-группе $\overline{K_2} = K_2/Z(K_2)$ найдется такая инволюция $\overline{t_1}$, что $\overline{a}^{\overline{t_1}} = \overline{a}^{-1}$.

Следовательно, в K_2 найдется 2-элемент t_1, такой что $a^{t_1} = a^{-1}z_1$ По лемме 2 $t_1^2 \in Z(G)$ и по лемме 3 $z_1 \neq e$. Ясно так же, что $z_1 \in \langle w \rangle$. Следовательно, $t_1 \in N(\langle a \rangle \times \langle w \rangle)$. Поскольку $(\langle a \rangle \times \langle w \rangle) = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$, то $t_1 \in N(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$. Итак, мы имеем 2-элементы t и t_1 из $N(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$ нетривиально действующие на $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$ такие, что $a^t = a$, $a^{t_1} = a^{-1}z_1 \neq a$ и t^2, $t_1^2 \in Z(G)$. Так как фактор-группа $\langle (\langle a \rangle \times \langle b \rangle), t_1, t \rangle / \langle (\langle a \rangle \times \langle b \rangle),\ t_1^2, t^2 \rangle = \langle \overline{t_1}, \overline{t} \rangle$ порождается двумя инволюциями $\overline{t_1}$ и $\overline{t}$, то она конечна.

Следовательно, $\langle (\langle a \rangle \times \langle b \rangle), t_1, t \rangle = M$ – также конечная группа. По условию насыщенности $M \subseteq K_4 \in \Im(M)$. Из предложения 10 п. 4 получаем $N_{K_4}(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) = (D \times R) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где D, R – циклические группы порядка $p^{n_4} - 1$, $v^2 = e$ и $(D \times R) = C_{K_4}(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$. Так как $t_1, t_2 \in \{N_{K_4}(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \backslash C_{K_4}(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)\}$, то для некоторого $x \in (D \times R), xt = t_1$ и $a \neq a^{-1}z_1 = a^{t_1} = a^{xt} = a^t = a$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $b \in Z(K)$, где $K \in \Im(1)$, и $|b|$ – нечётное число, тогда $b \in Z(G)$.*

Доказательство. В силу леммы 4 и индукции будем считать, что $|b| = r^n$, где r – простое число, $n > 1$ и $b^{n-1} \in Z(G)$. В этом случае, для любого $g \in G$, группа $\langle b, b^g \rangle$ конечна (определение 1). Затем пп. 1 – 3 леммы 4 и её окончание переносятся на рассматриваемый случай со следующими замечаниями – вместо группы $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ рассматривается группа $\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$, где $|a| = |b| = r^n$. Затем находим две инволюции t_1 и $t \in \{N(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle) \backslash C(\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle)\}$ различным образом действующих на $\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ и приходим к противоречию с предложением 10 (пункт 4). Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 1. Первое утверждение теоремы 1 вытекает из лемм 2, 5. Докажем второе утверждение теоремы 1. Пусть $\langle z_1, ..., z_n \rangle$ — подгруппа из $Z(G)$, порожденная конечным набором элементов. Возьмем p-элемент $b \in G$. По условию насыщенности $\langle z_1, ..., z_n, b \rangle \subseteq L \in \Im(1)$. По предложению 10 п. 6 $\langle z_1, ..., z_n \rangle$ циклическая группа из $Z(L)$. Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

1. $p = 2$.

В этом случае (предложение 9 п. 2) $PGL_2(2^n) = L_2(2^n)$ и по предложению 6 $G \simeq L_2(Q) = PGL_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2, и теорема 2 доказана.

2. $p \neq 2$.

Пусть G — контрпример к теореме 2, S – силовская 2-подгруппа группы G.

Лемма 6. *$S = A \leftthreetimes \langle t \rangle$, где A – локально-циклическая группа, t – инволюция, $a^t = a^{-1}$ для любого элемента $a \in A$.*

Доказательство. Если S – конечная группа, то из предложения 10 пп. 6, 7, 8 вытекает, что S – конечная группа диэдра, а так как в этом случае все силовские 2-подгруппы сопряжены (предложение 4), то всё доказано. Пусть S – бесконечная группа. Покажем, что S насыщена группами диэдра. Возьмем в S конечную подгруппу K_1. Из предложения 2 вытекает, что в S существует бесконечная цепочка $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$ конечных подгрупп. Из условия насыщенности вытекает, что любая K_n изоморфна подгруппе некоторой конечной группы диэдра из G. Положим $K = \cup K_n$. Если хотя бы одна из K_n является группой диэдра, то всё доказано.

Пусть все K_n – циклические группы. Тогда K – локально циклическая 2-группа. Пусть z — инволюция из K. По условию насыщенности для любого n выполнено $K_n \subset M_n \simeq PGL_2(p^{m_n})$, и в M_n есть инволюция v такая, что для любого $x \in K_n$ справедливо $x^v = x^{-1}$. Пусть $y \in K_{n+1}$ и $y^2 = t$, где $\langle t\rangle = K_n$. Очевидно, группа $\langle y, v\rangle$ – конечна. По условию насыщенности $\langle y, v\rangle \subseteq M_1 \simeq PGL_2(p^{k_n})$ и, следовательно, $\langle y, v\rangle$ лежит в $C_{M_1}(z)$. Так как $C_{M_1}(z)$ — группа диэдра, то $y^v = y^{-1}$. Рассуждая по индукции, получим, что для любого $x \in K$ $x^v = x^{-1}$, значит, $K \leftthreetimes \langle v\rangle$ – 2-группа. Следовательно, $K \neq S$, и в $S\backslash K$ найдется некоторый элемент w. Без ограничения общности можно считать, что w – инволюция и $wz = zw$. Отсюда несложно получить, что $x^w = x^{-1}$ для любого $x \in K$. В частности, $K_1 \leftthreetimes \langle w\rangle$ – группа диэдра. Таким образом, S насыщена группами диэдра и по предложению 7 $S = A \leftthreetimes \langle t\rangle$, где A – локально циклическая 2-группа и для любого $x \in A$ выполняется $x^t = x^{-1}$.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть a – инволюция из S. Тогда $C_G(a) = C \leftthreetimes \langle t\rangle$, где C – бесконечная локально циклическая группа, t – инволюция и $c^t = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$.*

Доказательство. Бесконечность группы $C_G(a)$ следует из предложения 3. Пусть R – произвольная конечная подгруппа из $C_G(a)$, и $D = \langle a, R\rangle$. Имеем $D \subseteq M \subset G$, где $M \simeq PGL_2(p_n^m)$. При этом $D \subseteq C_M(a) \subset C_G(a)$. Как отмечалось выше, $C_M(a)$ – группа диэдра. Таким образом, $C_G(a)$ насыщена группами диэдра. В силу предложения 7 имеем $C_G(a) = C \leftthreetimes \langle t\rangle$, где C – локально циклическая группа, $t^2 = e$ и $c^t = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$. Лемма доказана.

Лемма 8. *В G есть бесконечная локально конечная подгруппа L, насыщенная группами из множества $\{PGL_2(p^n)\}$.*

Доказательство. Пусть z – инволюция из центра S (лемма 6). Как следует из леммы 7, $C_G(z) = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$, где

$$D_1 \subset \ldots \subset D_n \ldots, \tag{1}$$

$D_n = C_n \leftthreetimes \langle t\rangle$, $C_n = \langle c_n\rangle$ и для любого $c \in C_n$ справедливо $c^t = c^{-1}$.

В силу условия насыщенности можно считать, что $D_n \subset L_n \simeq PGL_2(p^{m_n})$ и $D_n = C_{L_n}(z)$.

Таким образом, цепочке (1) поставлена в соответствие последовательность

$$L_1, \ldots, L_n, \ldots \tag{2}$$

подгрупп из G, определенных выше.

Так как $L_n = R \leftthreetimes \langle a\rangle$, где $R \simeq L_2(p^n)$ и $|a| = 2$, то инволюция z лежит в подгруппе R. Поскольку $C_R(z)$ – группа диэдра, то можно считать, что инволюция t лежит в R и значит, сопряжена с инволюцией z (предложение 12 п. 4).

Следовательно, $C_G(t) = \cup_{n=1}^{\infty} T_n$, где

$$T_1 \subset \ldots \subset T_n \subset \ldots, \tag{3}$$

$T_n = V_n \leftthreetimes \langle z\rangle$, $V_n = \langle v_n\rangle$ и для любого $v \in V_n$ выполняется $v^z = v^{-1}$.

По предложению 12 п. 1 $L_n = \langle T_n, D_n \rangle$, то из (1), (3) следует, что последовательность (2) образует цепочку

$$L_1 \subset \ldots \subset L_n \subset \ldots . \qquad (4)$$

Пусть $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, K — произвольная конечная подгруппа из L. Так как $K \subseteq L_n$ для некоторого n и $L_n \simeq PGL_2(p^{m_n})$, то лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть L – подгруппа из формулировки предыдущей леммы. Тогда $L \simeq PGL_2(P)$, где P – локально конечное поле характеристики p.*

Доказательство. Рассмотрим в L подгруппу L^*, порожденную всеми подгруппами K из L такими, что $K \simeq L_2(p^{n_i})$.

1. $L^* \simeq L_2(P)$, *где P – подходящее локально конечное поле характеристики p.*

Покажем, что группа L^* насыщена множеством $\{L_2(p^{n_i})\}$. Возьмем в L^* конечную подгруппу M. По определению группы L^*, $M \subseteq \langle L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_m \rangle$ для некоторого набора конечных подгрупп $L_i \subset L$ таких, что $L_i \simeq L_2(p^{n_i})$ и $i \in \{1, ..., m\}$.

По условию насыщенности $\langle L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_m \rangle \subseteq N \subset L$ и $PGL_2(p^{n_{m+1}}) \simeq N = L_{m+1} \leftthreetimes \langle t \rangle$, где $L_{m+1} \simeq L_2(p^{n_{m+1}})$, а t – инволюция.

Так как все L_i – конечные простые неабелевы группы, а $L_i \cap L_{m+1} \lhd L_i$ (заметим, что $L_{m+1} \lhd N$), то либо $L_i \cap L_{m+1} = 1$, либо $L_i \cap L_{m+1} = L_i$. Первый случай невозможен, поскольку тогда $|N : L_{m+1}| \geq |L_i| > 2$, с другой стороны, $|N : L_{m+1}| = |(L_{m+1} \times (v)) : L_{m+1}| = 2$. Противоречие. Следовательно, остается второй случай. Но тогда все L_i лежат в L_{m+1}, а значит, и M лежит в L_{m+1}. Итак, насыщенность L^* группами из множества $\{L_2(p^{n_i})\}$ доказана. По предложению 6 $L^* \simeq L_2(P)$ для некоторого локально конечного поля P характеристики p. Пункт 1 доказан.

Завершим доказательство леммы. Возьмем в L конечную подгруппу $G_k \simeq PGL_2(p^{m_k})$. Тогда $G_k = L_k \leftthreetimes \langle t_k \rangle$, где $L_k \simeq L_2(p^{m_k})$, а t_k – инволюция. Если t_k принадлежит L^* для любой G_k, то $G_k \subset L^*$, поскольку L_k лежит в L^*. Следовательно, $L^* = L$. Пусть для некоторой G_k из L инволюция t_k не принадлежит L^*. Покажем, что $L \subseteq L^* \leftthreetimes \langle t_k \rangle$, так как обратное включение очевидно. Действительно, пусть g принадлежит L. По лемме 8 $\langle t_k, g \rangle \subseteq G_{(k,g)} = L_{(k,g)} \leftthreetimes \langle t_{(k,g)} \rangle \subset L^* \leftthreetimes \langle t_k \rangle$, где $L_{(k,g)} \simeq L_2(p^{n_k})$, а $t_{(k,g)}$ – инволюция. В силу произвольности выбора g получаем $L \subseteq L^* \leftthreetimes \langle t_k \rangle$ и $L \simeq PGL_2(P)$, где P локально конечное поле из пункта 1.

Лемма 10. $G = L$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда S – бесконечная группа. В этом случае $L \simeq L_2(P)$. Предположим, что $L \neq G$. Покажем, что L – сильно вложенная подгруппа в G. Для этого достаточно показать, что для любого g, принадлежащего $G \backslash L$, подгруппа $L \cap L^g$ не содержит инволюций.

Пусть w – инволюция из $L \cap L^g$, где $w = v^g$, причём v принадлежит L. Все инволюции в L сопряжены (предложение 12), поэтому $v^{gb} = v$ для некоторого элемента b принадлежит L. Тогда gb принадлежит $C_G(v)$, и, как показано в лемме 8, $C_G(v) \subset L$, следовательно, g принадлежит L вопреки выбору элемента g. Значит, для любого элемента g, принадлежащего $G \backslash L$, подгруппа $L \cap L^g$ не содержит инволюций, т. е. $N_G(L) = L$, и L сильно вложена в G.

Так как G порождается инволюциями, то в $G \setminus L$ найдется инволюция v. Пусть w – произвольная инволюция из L. Так как G – периодическая группа, то группа $K = \langle v, w\rangle$ конечна и по условию насыщенности $K \subset M \subset G$ и $M \simeq PGL_2(p^{n_1}) = L_2(p^{n_1}) \leftthreetimes \langle x\rangle$, где x – инволюция. Положим $H = M \cap L$. Так как L сильно вложена в G, то подгруппа H сильно вложена в M, что невозможно по предложению 5. Таким образом, $G \setminus L$ не содержит инволюций и $G = L$.

Теперь рассмотрим случай, когда S – конечная группа. Тогда $L = L^* \leftthreetimes < t_k >$, где L^* и t_k из леммы 9. Пусть $G \neq L$. В этом случае $\pi(C_G(t_k)) \cap \pi(C_G(z)) = \{2\}$, (здесь $\pi(C_G(t_k))$ — множество простых делителей порядков элементов из $C_G(t_k)$, а $\pi(C_G(z))$ — множество простых делителей порядков элементов из $C_G(z)$), z — инволюция из $Z(S)$, и инволюции z и t_k не сопряжены в G. Возьмем инволюцию x сопряженную с t_k и лежащую в $G \setminus L$. Рассмотрим конечную группу $D = \langle x, t_k\rangle$. Так как x и t_k не сопряжены, то в D найдется элемент b порядка 4. Следовательно, $b^2 \in C_G(z) \subset L$. Но тогда и $C_G(b^2) \subset L$. Поскольку $x \in C_G(b^2)$, то $x \in L$. Противоречие с выбором x. Лемма доказана.

Утверждение леммы 10 противоречит, тому что G контрпример к теореме 2. Указанное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

5. Доказательство теоремы 3

По теореме 1 $Z(G)$ – локально-циклическая группа. Покажем, что фактор-группа $\overline{G} = G/Z(G)$ насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$. Пусть $\overline{K}$ — конечная подгруппа из $\overline{G}$ и K — некоторый её конечный прообраз в G. По условию теоремы 3 $K \subseteq K_1 \subset G$ и K_1 принадлежит $\Im(1)$. Переходя к $\overline{G}$, получим $\overline{K} \subseteq \overline{K_1} \simeq K_1/Z(K_1) \simeq PGL_2(p^n)$. По теореме 2 $\overline{G} \simeq PGL_2(Q)$. По теореме Шмидта (предложение 1) G – локально конечная группа и по предложению 8 $G \simeq GL_2(P)$. Теорема 3 доказана.

Список литературы

[1] С.И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, (1975). MR0432770

[2] А.А. Дуж, А.А Шлепкин, *О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп*, Владикавказский математический журнал, **12**(2012), 123–126. MR3057628

[3] М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков, *Основы теории групп*, Наука, Москва, (1977). MR0444747

[4] А.А. Кузнецов, Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов, *Группы с условием насыщенности*, КрасГАУ, Красноярск, (2010), 254.

[5] А.А. Кузнецов, К.А. Филиппов, *Группы, насыщенные заданным множеством групп*, Сибирские электронные математические известия, **8** (2011), 230–246. MR2876557

[6] А.Г. Рубашкин, К.А. Филиппов, *О периодических группах, насыщенных группами* $L_2(p^n)$, Сиб. матем. журн., **46**:6 (2005), 1388—1392. MR2195037

[7] А.А. Шлепкин, *О группах, насыщенных* $GL_2(p^n)$, Вестник СибГАУ, **1**(2013), 100–108.

[8] А.К. Шлепкин, *Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы*, Сб. тезисов 3-й междунар. конф. по алгебре, Красноярск, (1993), 363.

[9] В.П. Шунков, *Об одном классе p-групп*, Алгебра и Логика, **9**:4 (1970), 484–496.

[10] В.П. Шунков, *О периодических группах с почти регулярной инволюцией*, Алгебра и Логика, **11**:4 (1972), 470–493.

[11] B. Amberg, L.S. Kazarin, *On periodic groups saturated by dihedral subgroups*, Proceedings Ischia Group Theory Conference, (2010).

[12] В.М. Бусаркин, Ю.М. Горчаков *Конечные расщепляемые группы,* М. Наука, (1968). MR0254136

[13] R.W. Carter, *Simple groups of Lie type*, London: John Wiley & Sons, (1972). MR0407163

[14] K. Harada, Mong Lung Lang, *Indecompsable Sylow 2-subgroups of Simple Groups*, Acta Applicandae Mathematicae, **85**:1–3 (2005), 161–194. MR2128910

Шлепкин Алексей Анатольевич
Сибирский Федеральный Университет,
пр. Свободный 79,
660041, Красноярск, Россия
E-mail address: shlyopkin@gmail.com

Сабодах Ирина Валерьевна
Сибирский Государственный Аэрокосмический Университет,
пр. Имени газеты Красноярский Рабочий 31,
660037, Красноярск, Россия
E-mail address: sabodax@mail.ru