S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 752–758 (2014) УДК 519.48
MSC 08A05

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ С ИДЕНТИЧНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ОБЪЕКТАМИ (КОНГРУЭНЦИЯМИ, АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОЖЕСТВАМИ)

А.Г. ПИНУС

Abstract. We described the algebras with common basic sets which have the same congruences or algebraic sets.

Keywords: universal algebras, derived structures, conqruences, algebraic sets.

1. Введение

Цель настоящей работы - выяснение взаимосвязей между универсальными алгебрами $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0 \rangle$ и $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ с одним и тем же основным множеством имеющими одни и те же конгруэнции или алгебраические множества. Точнее, как при этом сигнатурные функции одной из них должны быть представимы, определимы в рамках другой. Подобным вопросам, но связанным с иными производными структурами алгебр, к примеру, с решетками их подалгебр, группами автоморфизмов, полугруппами эндоморфизмов, внутренних изоморфизмов и т.д. посвящены работы автора [1]–[5].

1

Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_0 \rangle$ через Con$\mathfrak{A}$ обозначим совокупность (решетку) конгруэнций этой алгебры, т.е. совокупность отношений θ эквивалентностей на множестве A стабильных относительно сигнатурных функций этой алгебры, т.е. таких, что для любой $f(x_1, \ldots, x_n) \in \sigma$ и любых

Pinus, A.G., On the universal algebras with identical derived objects (congruences, algebraic sets).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию № 2014/138, проект 1052.

Поступила 26 июня 2014 г., опубликована 9 октября 2014 г.

$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ отношения $\theta(a_i, b_i)$ (для $1 \le i \le n$) влекут отношение $\theta(f(a_1, \dots, a_n), f(b_1, \dots, b_n))$. Совокупность всех функций на множестве A относительно которых стабильны все конгруэнции алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим как StabCon$\mathfrak{A}$ Очевидным образом совокупность StabCon$\mathfrak{A}$ является Галуа-замкнутым функциональным клоном на множестве A. Подробнее об этом см., к примеру, [6]. Таким образом, все сигнатурные функции алгебры $\mathfrak{A}$ входят в StabCon$\mathfrak{A}$ и, тем самым, для алгебр $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0 \rangle$ и $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ равенство Con$\mathfrak{A}_0 =$ Con$\mathfrak{A}_1$ имеет место тогда и только тогда, когда сигнатурные функции алгебры $\mathfrak{A}_i$ входят в совокупность StabCon$\mathfrak{A}_{1-i}$ для $i = 0, 1$. То есть проблема взаимосвязи подобных алгебр сводится к описанию функций входящих в StabCon$\mathfrak{A}$ (для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A}$).

В основе подобного описания лежит известная лемма Мальцева [7] о строении главных конгруэнций $\theta^{\mathfrak{A}}_{a,b}$ универсальных алгебр (наименьших конгруэнции алгебры $\mathfrak{A}$, включающей в себя пару элементов a, b из A). Напомним, предварительно, необходимые определения. Под $\mathfrak{A}$-0-*трансляцией* алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ будем понимать любое константное, либо тождественное отображение на множестве A. $\mathfrak{A}$-1-*трансляции* суть $\mathfrak{A}$-0-трансляции, либо отображения множества A в себя, получаемые с помощью сигнатурных функций $f(x_1, \dots, x_n)$ алгебры $\mathfrak{A}$ при замене всех ее переменных, кроме некоторой одной, на какие-либо фиксированные элементы из A (подобные отображения для функции f будем называть f-1-трансляциями). Для любого натурального $n > 1$, $\mathfrak{A}$-n-*трансляции* суть суперпозиции n штук некоторых $\mathfrak{A}$-1-трансляций. Отображение множества A в себя называется $\mathfrak{A}$-трансляцией, если оно является $\mathfrak{A}$-n-трансляцией для некоторого натурального n. Для любых $a, b \in A$ через $\Gamma(a, b)$ обозначим совокупность $\{\langle c, d \rangle | \, c = g(a), d = g(b)$ для некоторой $\mathfrak{A}$-трансляции $g(x)\}$. Через $\Gamma^*(a, b)$-совокупность $\{\langle d, c \rangle | \, \langle c, d \rangle \in \Gamma(a, b)\}$.

ЛЕММА МАЛЬЦЕВА [7]. Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и любых $a, b \in A$ отношение $\theta^{\mathfrak{A}}_{a,b}$ совпадает с транзитивным замыканием отношения $\Gamma(a, b) \cup \Gamma^*(a, b)$.

Функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ на основном множестве алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ назовем Con-*связной* $\mathfrak{A}$-*трансляциями*, если для любых $a, b \in A$ и любой f-1-трансляции $g(x)$ существуют натуральное n и $\mathfrak{A}$-трансляции $h_1(x), \dots, h_n(x)$ такие, что $g(a) = h_1(e^1_1), \dots, \, h_i(e^2_i) = h_{i+1}(e^1_{i+1}), \dots, h_n(e^2_n) = g(b)$ для некоторых $e^1_1, \dots, e^1_n, e^2_1, \dots, e^2_n$ из A таких, что $\{e^1_i, e^2_i\} = \{a, b\}$ для $i = 1, \dots, n$.

Непосредственно замечается, что совокупность функций Con -связных $\mathfrak{A}$-трансляциями образует Галуа-замкнутый функциональный клон на множестве A обозначаемый далее как Contr$\mathfrak{A}$.

Для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ определенной на основном множестве A алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ через $\mathfrak{A}_f$ обозначим обогащение алгебры $\mathfrak{A}$ путем добавления функции f в ее сигнатуру.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ на основном множестве универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ следующие условия равносильны:*

1) $f(x_1, \dots, x_n) \in$ StabCon$\mathfrak{A}$,

2) для любых $a, b \in A$ имеет место равенство $\theta^{\mathfrak{A}}_{a,b} = \theta^{\mathfrak{A}_f}_{a,b}$,

3) $f \in$ Contr$\mathfrak{A}$.

Равносильность условий 1) и 2) следует из того, что любая конгруэнция алгебры является объединением входящих в нее главных конгруэнций и, тем самым, $f \in \mathrm{StabCon}\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда любые главные конгруэнции алгебры $\mathfrak{A}$ стабильны относительно функции f. Равносильность условий 2) и 3) непосредственно следует из леммы Мальцева.

Из леммы 1 столь же непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любых универсальных алгебр* $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0\rangle$ *и* $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1\rangle$ *с общим основным множеством равенство* $\mathrm{Con}\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Con}\mathfrak{A}_1$ *равносильно включениям: для любой* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \sigma_i$ *имеет место включение* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Contr}\mathfrak{A}_{1-i}$ *для* $i = 0, 1$.

Отметим, что включение $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Contr}\mathfrak{A}_{1-i}$ для $f(x_1, \ldots, x_n) \in \sigma_i$ выразимо $L_{\omega_1\omega}$-формулой сигнатуры $\sigma_0 \cup \sigma_1$.

Под *квазипорядком на алгебре* $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ понимается любое отношение квазипорядка $Q(x, y)$ на A стабильное относительно сигнатурных функций алгебры $\mathfrak{A}$. Совокупность $\mathrm{Qord}\mathfrak{A}$ всех квазипорядков на алгебре $\mathfrak{A}$ образует решетку относительно теоретико-множественного включения. При этом наименьший квазипорядок на алгебре $\mathfrak{A}$ для которого $Q(a, b)$ (для любых a, b из A) называется *главным квазипорядком порожденным парой* $\langle a, b\rangle$ и будем обозначать его как $Q^{\mathfrak{A}}_{a,b}$. Любой квазипорядок Q на $\mathfrak{A}$ является объединением главных квазипорядков алгебры $\mathfrak{A}$ входящих в Q. Более подробно о квазипорядках на универсальных алгебрах см.. к примеру, [8]. Для главных квазипорядков имеет место аналог леммы Мальцева [8]:

для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ и любых $a, b \in A$ отношение $Q^{\mathfrak{A}}_{a,b}$ совпадает с транзитивным замыканием отношения

$\Gamma_1(a, b) = \{\langle c, d\rangle \in A^2|$ существует натуральное число n и $\mathfrak{A}$-трансляции $h_1(x), \ldots, h_n(x)$ такие, что $c = h_1(x), \ldots, h_i(b) = h_{i+1}(a), \ldots, h(b) = d\}$.

Совокупность всех функций на множестве A относительно которых стабильны все квазипорядки на алгебре $\mathfrak{A}$ обозначим как $\mathrm{StabQord}\mathfrak{A}$.

Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ на основном множестве A алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ назовем Qord-*связной* $\mathfrak{A}$-*трансляциями*, если для любых $a, b \in A$ и любой f-1-трансляции $g(x)$ существует натуральное n и $\mathfrak{A}$-трансляции $h_1(x), \ldots, h_n(x)$ такие, что $g(a) = h_1(a), \ldots, h_i(b) = h_{i+1}(a), \ldots h_n(b) = g(b)$.

Галуа-замкнутый функциональный клон Qord-связных A-трансляциями функций на множестве A обозначим как $\mathrm{Qordtr}\mathfrak{A}$.

Аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 2. *Для любой функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *на основном множестве универсальной алгебры* $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ *следующие условия равносильны:*

1) $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{StabQord}\mathfrak{A}$,

2) для любых $a, b \in A$ $Q^{\mathfrak{A}}_{a,b} = Q^{\mathfrak{A}_f}_{a,b}$,

3) $f \in \mathrm{Qordtr}\mathfrak{A}$.

Из которой непосредственно вытекает следующее утверждение

Теорема 2. *Для любых универсальных алгебр* $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0\rangle$ *и* $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1\rangle$ *с общим основным множеством равенство* $\mathrm{Qord}\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Qord}\mathfrak{A}_1$ *равносильно включениям: для любых* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \sigma_i$ *имеет место включение* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Qordtr}\mathfrak{A}_{1-i}$ *для* $i = 0, 1$.

Основы алгебраической геометрии универсальных алгебр заложены в работах Б. И. Плоткина (см. к примеру [9]). Одним из основных изучаемых при этом объектов является последовательность $\langle \mathrm{Alg_n}\mathfrak{A} | \mathrm{n} \in \omega \rangle$ совокупностей n-мерных алгебраических множеств алгебры $\mathfrak{A}$. Эта последовательность может рассматриваться как некая производная структура изучаемой алгебры $\mathfrak{A}$ наряду с такими традиционными как решетки подалгебр ($\mathrm{Sub}\mathfrak{A}$), решетки конгруэнций ($\mathrm{Con}\mathfrak{A}$), группы автоморфизмов ($\mathrm{Aut}\mathfrak{A}$) полугруппы эндоморфизмов ($\mathrm{End}\mathfrak{A}$) и другие.

В рамках этого подхода возникают все традиционные для универсальной алгебры вопросы связанные с производными структурами такие как: абстрактное и конкретное описания этих последовательностей как последовательностей решеток $\langle \mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}; \subseteq \rangle$ для произвольных универсальных алгебр, а так же вопрос в какой мере последовательность $\langle \mathrm{Alg_n}\mathfrak{A} | \mathrm{n} \in \omega \rangle$ определяет саму алгебру $\mathfrak{A}$. В связи с первым вопросом отметим работы автора [10], [11] где доказано, что для любой полной решетки L существует алгебра $\mathfrak{A}$ такая, что $L \cong \langle \mathrm{Alg_n}\mathfrak{A}; \subseteq \rangle$. Вопрос же об определимости алгебры $\mathfrak{A}$ последовательностью$\langle \mathrm{Alg}_n\mathfrak{A} | n \in \omega \rangle$ есть вопрос о взаимосвязи алгебр $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0 \rangle$ и $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ с общим основным множеством A имеющих одни и те же совокупности алгебраических множеств $\mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}_1$ $(n \in \omega)$.

Прежде всего напомним, что для универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ подмножество $B \subseteq A^n$ называется алгебраическим, если $B = \{\bar{a} \in A^n | \, \mathfrak{A} \models \mathcal{T}(\bar{a})\}$ для некоторой системы $\mathcal{T}(\bar{x}) = \{t_i^1(\bar{x}) = t_i^2(\bar{x}) | \, i \in I\}$ термальных уравнений. Здесь $t_j^i(\bar{x})$ – термы сигнатуры σ зависящие от переменных $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Очевидным образом алгебраические множества алгебры $\mathfrak{A}$ замкнуты относительно эндоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$, т.е. для любого $B \in \mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}$ и любого $\varphi \in \mathrm{End}\mathfrak{A}$ имеет место

$$\varphi(B) = \{\langle \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n) \rangle | \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in B\} \subseteq B.$$

Для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ модель $\mathfrak{A}^{\mathrm{mod}} = \langle A; \sigma^{\mathrm{mod}} \rangle$ сигнатуры состоящей из предикатов $P_B^n(x_1, \dots, x_n)$ для каждого $B \in \mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}$ и $n \in \omega$ назовем *геометризацией универсальной алгебры* $\mathfrak{A}$, если для $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in A^n$

$$P_B^n(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in B.$$

Таким образом вопрос об определимости алгебры $\mathfrak{A}$ последовательностью совокупностей ее алгебраических множеств есть вопрос о взаимосвязи алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_0 \rangle$ и $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$, имеющих одну и ту же геометризацию, т.е. таких, что $\mathfrak{A}_0^{\mathrm{mod}} = \mathfrak{A}_1^{\mathrm{mod}}$.

Прежде всего заметим справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Для любой универсальной алгебры* $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ *имеет место равенство* $\mathrm{End}\mathfrak{A} = \mathrm{End}\mathfrak{A}^{\mathrm{mod}}$.

Доказательство. Включение $\mathrm{End}\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{End}\mathfrak{A}^{\mathrm{mod}}$ было отмечено выше. Покажем обратное. Пусть $\varphi \in \mathrm{End}\mathfrak{A}^{\mathrm{mod}}$ и $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in A^n$. Тогда для любого $B \in \mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}$ $P_B^n(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow P_B^n(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$. Тем самым, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in B \Rightarrow \langle \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n) \rangle \in B$, то есть для любого термального уравнения $t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры σ $\mathfrak{A} \models t_1(a_1, \dots, a_n) = t_2(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{A} \models t_1(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = t_2(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$. Таким образом, φ является эндоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ и утверждение леммы доказано. □

Отсюда непосредственно вытекает

Теорема 3. *Если универсальные алгебры* $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0 \rangle$ *и* $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ *с общим основным множеством имеют одни и те же алгебраические множества, то у них совпадают и полугруппы эндоморфизмов.*

Заметим, что обратное неверно, т.е. совпадение полугрупп эндоморфизмов для алгебр не достаточно для совпадения их алгебраических множеств. Рассмотрим сигнатуру $\sigma = \langle f(x), g(x), h(x) \rangle$ состоящую из трех одноместных функций. Пусть $\mathfrak{A} = \langle Z; f(x) = x + 1, g(x) \rangle$, где $g(n) = 0$ для любого $n \in Z$. Непосредственно замечается, что $\mathfrak{A}$ имеет единственный эндоморфизм – тождественное отображение. Пусть алгебра $\mathfrak{A}_1$ является h-обогащением алгебры $\mathfrak{A}$ таким образом, что на $\mathfrak{A}_1$ $h(n) = n$ для любого $n \in Z$, а алгебра $\mathfrak{A}_2$ является h-обогащением алгебры $\mathfrak{A}$ таким образом, что на $\mathfrak{A}_2$ $h(n) = n$ для $n \leqslant 0$ и $h(n) = n + 1$ для $n > 0$. В силу замеченного выше о $End\mathfrak{A}$ имеет место равенство $End\mathfrak{A}_1 = End\mathfrak{A}_2$. Очевидно так же, что для любого терма $t(x)$ сигнатуры σ на алгебре $\mathfrak{A}_1$ истинно одно из тождеств: $t(x) = f^n(g(x))$ для некоторого положительного n, или $t(x) = g(x)$, или $t(x) = f^m(x)$ для некоторого натурального положительного m, либо $t(x) = x$. Исходя из этого, анализируя совокупности решений термальных уравнений $t_1(x) = t_2(x)$ на алгебре $\mathfrak{A}_1$, убеждаемся в том, что эти совокупности либо пусты, либо одноэлементны, либо совпадают с Z. Тем самым, $Alg_1\mathfrak{A}_1 = \{\varnothing, \{n\}, Z | n \in Z\}$. С другой стороны $\{n \in Z | n < 0\} = \{n \in Z | h(n) = n\} \in Alg_1\mathfrak{A}_2$ и, значит, $Alg_1\mathfrak{A}_1 \neq Alg_1\mathfrak{A}_2$.

Взаимосвязь не более чем счетных алгебр с не более чем счетными сигнатурами имеющих одни и те же алгебраические множества может быть выражена и в более явной форме.

Напомним, что для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и любого логического языка L функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ на множестве A называется L-определимой, если существует L-формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ такая, что для любых $a_1, \ldots, a_n, b \in A$

$$f(a_1, \ldots, a_n) = b \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_n, b).$$

Пусть, как обычно, $L_{\omega_1\omega}$ есть язык расширения языка $L_{\omega\omega}$ логики первого порядка допускающий счетные конъюнкции и дизъюнкции совокупностей формул зависящих от фиксированного конечного числа переменных. Через $L^+_{\omega_1\omega}$ обозначим фрагмент языка $L_{\omega_1\omega}$ состоящий из формул не включающих в себя связки импликации и отрицания.

Через $\mathrm{Epi}\mathfrak{A}$ обозначим полугруппу эндоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$ на себя. В работе [2] доказано, что для любых не более чем счетных алгебр $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma_0 \rangle$, $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ с общим основным множеством и не более чем счетных сигнатур равенство $\mathrm{Epi}\mathfrak{A}_0 = \mathrm{Epi}\mathfrak{A}_1$ равносильно $L_{\omega_1\omega}$-определимости σ_i-функций на алгебрах $\mathfrak{A}_{1-i}$ (для $i = 0, 1$) Непосредственно из этого утверждения и утверждения теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *Если любые не более чем счетные алгебры* $\mathfrak{A}_0 = \langle A; \sigma \rangle$, $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ *с общим основным множеством и не более чем счетных сигнатур имеют одни и те же алгебраические множества, то* σ_i*-функции* $L^+_{\omega_1\omega}$*-определимы на алгебрах* $\mathfrak{A}_{1-i}$ *(для* $i = 0, 1$*).*

Под *явной* $L^+_{\omega_1\omega}$*-схемой сигнатуры* σ *для алгебры* $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ имеется ввиду $L_{\omega_1\omega}$-формула вида

$$\forall x_1, \ldots, x_n \mathop{\&}_{i \in I} (\Phi_i(x_1, \ldots, x_n) \to y = t_i(x_1, \ldots, x_n)),$$

где t_i – термы, а $\Phi_i(x_1,\ldots,x_n)$ — $L_{\omega_1\omega}$-формулы сигнатуры σ, если на $\mathfrak{A}$ истинны формула

$$\forall x_1,\ldots,x_n(\bigvee_{i\in I}\Phi_i(x_1,\ldots,x_n))$$

и формулы

$$\forall x_1,\ldots,x_n(\Phi_i(x_1,\ldots,x_n)\&\Phi_j(x_1,\ldots,x_n)\to t_i(x_1,\ldots,x_n)=t_j(x_1,\ldots,x_n))$$

для любых $i\neq j$ из I.

Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ на основном множестве алгебры $\mathfrak{A}$ называется *явно $L_{\omega_1\omega}$-определимой*, если она определима на $\mathfrak{A}$ с помощью некоторой явной $L_{\omega_1\omega}$-схемы.

В работе [2] доказано, что для не более чем счетных алгебр $\mathfrak{A}_0=\langle A;\sigma_0\rangle$, $\mathfrak{A}_1=\langle A;\sigma_1\rangle$ с общим основным множеством и не более чем счетных сигнатур равенства $\mathrm{Epi}\mathfrak{A}_0=\mathrm{Epi}\mathfrak{A}_1$ и $\mathrm{Sub}\mathfrak{A}_0=\mathrm{Sub}\mathfrak{A}_1$ равносильны явной $L^+_{\omega_1\omega}$-определимости σ_i-функций на алгебрах $\mathfrak{A}_{1-i}$ (для $i=0,1$).

В силу чего имеет место

Следствие 2. *Если не более чем счетные алгебры $\mathfrak{A}_0=\langle A;\sigma_0\rangle$, $\mathfrak{A}_1=\langle A;\sigma_1\rangle$ с общим основным множеством и не более чем счетных сигнатур имеют одни и те же алгебраические множества и подалгебры, то σ_i-функции явно $L^+_{\omega_1\omega}$-определимы на алгебрах $\mathfrak{A}_{1-i}$ (для $i=0,1$).*

Открытым остается вопрос подобного, в рамках определимости сигнатурных функций одной алгебры в другой, полного описания (нахождения необходимых и достаточных условий) пар счетных универсальных алгебр с общим основным множеством и одними и теми же алгебраическими множествами.

В связи с утверждениями следствий 1 и 2 представляет интерес утверждение следствия 1 из работы [12] о равносильности геометрической и синтаксической неявной эквивалентностей любых универсальных алгебр одной и той же сигнатуры.

Список литературы

[1] Пинус А.Г., *Рациональная эквивалентность алгебр, ее «клоновые» обобщения и «клоновая» категоричность*, Сибирский математический журнал, **54**:3 (2013), 673–688. MR3112623

[2] Пинус А.Г., *Определимые функции универсальных алгебр и определимые эквивалентности алгебр*, Алгебра и логика,**53** (2014), 256–270.

[3] Пинус А.Г., *Точечно термально полные клоны функций и решетки решеток всех подалгебр алгебр с фиксированным основным множеством*, Известия ИрГУ, сер. Математика, **5**:3 (2012), 94–103. Zbl 1279.08002

[4] Пинус А.Г., *Некоторые применения языка логики второго порядка в универсальной алгебре*, Известия ПрГУ, сер. Математика, **7** (2014), 73–84.

[5] Пинус А.Г., *Характеризация условно термальных функций*, Сибирский математический журнал, **38**:1 (1997), 161–165. MR1446682

[6] Пинус А.Г., *Производные структуры универсальных алгебр*, Новосибирск: Из-во НГТУ, 2007. Zbl 1152.08001

[7] Мальцев А.И., *К общей теории алгебраических систем*, Матем. сб. (Новая серия), **35**(77) (1954), 3–20. MR0065533

[8] Пинус А.Г., Хайда И., *О квазипорядках на универсальных алгебрах*, Алгебра и логика, **32**:3 (1993), 308–325. MR1286557

[9] Плоткин Б.И., *Некоторые понятия алгебраической геометрии в универсальной алгебре*, Алгебра и анализ, **9**:4 (1997), 224–248. MR1604318

[10] Пинус А.Г., *О геометрически близких алгебрах*, Алгебра и теория моделей 7, Новосибирск: Изд-во НГТУ, (2009), 85–95. Zbl 1210.08002

[11] Пинус А.Г., *О решетках алгебраических подмножеств универсальных алгебр*, Алгебра и теория моделей 8, Новосибирск: Изд-во НГТУ, (2011), 67–72. Zbl pre06304227

[12] Пинус А.Г., *Неявно эквивалентные универсальные алгебры*, Сибирский математический журнал, **53**:5 (2012), 1077–1090. MR1286557

Александр Георгиевич Пинус
Новосибирский Государственный Технический Университет,
Проспект Карла Маркса 20,
630072, Новосибирск, Россия
E-mail address: ag.pinus@gmail.com