S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 759–770 (2014) УДК 512.554.3
MSC 17B69

Γ-КОНФОРМНЫЕ АЛГЕБРЫ КОНЕЧНОГО ТИПА ДЛЯ ГРУППЫ Γ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

В.Ю. ГУБАРЕВ, П.С. КОЛЕСНИКОВ

Abstract. We investigate the structure of Γ-conformal algebras which are discrete analogues of conformal algebras in sense of V.G.Kac. Simple and semisimple Lie Γ-conformal algebras of finite type in zero characteristic for torsion-free group Γ are classified.

Keywords: conformal algebra, Γ-conformal algebra, finitary algebra.

1. Введение

Конформные алгебры были введены В. Г. Кацем [1] в начале 1990-х годов при исследовании алгебр вертексных операторов. Последние возникли при описании алгебраических свойств разложения операторного произведения (operator product expansion, OPE) в двумерной конформной теории поля [2]. Математическое изложение соответствующей теории было предложено в [3], см. также [4, 5]. На данный момент теория алгебр вертексных операторов является активно развивающейся областью теории представлений и математической физики. В определенном смысле (см. [1]) структура конформной алгебры описывает сингулярную часть алгебры вертексных операторов. В теории конформных алгебр был получен ряд структурных результатов: в работах [6–8] были описаны простые и полупростые лиевы, ассоциативные и йордановы конформные алгебры конечного типа, в [9] — ассоциативные конформные алгебры линейного роста.

Понятие Γ-конформной алгебры (точнее, Γ-конформной алгебры Ли) было предложено В. Г. Кацем и М. И. Голенищевой-Кутузовой в [10] для аксиоматического описания сингулярной части OPE киральных полей с простыми

Gubarev, V.Yu., Kolesnikov, P.S., Γ-conformal algebras of finite type for torsion-free group Γ.

Работа поддержана РФФИ (грант 12–01–33031).

Поступила 1 сентября 2014 г., опубликована 14 октября 2014 г.

полюсами в конечном числе точек или, что то же самое, как q-деформация классического OPE в теории конформных алгебр. Другой подход к этой же задаче изложен в [11], где было введено понятие Γ-вертексной алгебры.

Конформные и Γ-конформные алгебры являются частными случаями псевдоалгебр [7] над алгебрами Хопфа: конформные алгебры — над алгеброй многочленов $\Bbbk[x]$, Γ-конформные — над групповой алгеброй $\Bbbk\Gamma$. В работе [12] было введено общее понятие конформной алгебры над линейной алгебраической группой G, включающее в себя класс обычных алгебр над полем (при $G = \{e\}$), конформные алгебры (при $G = \mathbb{A}^1 \simeq \langle \Bbbk, + \rangle$, где $\Bbbk$ — поле характеристики 0). Рассматриваемый в данной работе класс Γ-конформных алгебр включает конформные алгебры над линейной алгебраической группой $G_m = \langle \Bbbk^*, \cdot \rangle$: это в точности $\mathbb{Z}$-конформные алгебры над аддитивной группой целых чисел [12]. Таким образом, данная работа завершает структурное описание простых и полупростых конформных алгебр над связными линейными алгебраическими группами размерности один.

В работе [13] обнаруженная в [14] связь между диалгебрами и конформными алгебрами была обобщена на случай триалгебр и Γ-конформных алгебр. В [15] были описаны простые и полупростые ассоциативные Γ-конформные алгебры конечного типа, доказан аналог теоремы Веддербёрна. Там же были описаны свободные ассоциативные, лиевы и альтернативные Γ-конформные алгебры в терминах свободных частично абелевых алгебр, а также показано, что на простых Γ-конформных алгебрах можно каноническим образом построить дифференциально простые алгебры. Доказательство структурной теоремы для ассоциативных Γ-конформных алгебр в [15] содержит ошибочный шаг — предложение 1, справедливость которого не установлена. В этой работе мы приводим новое доказательство, не использующее предложение 1 из [15].

В данной работе единым образом описываются простые и полупростые лиевы и ассоциативные Γ-конформные алгебры конечного типа, причём полупростой лиев случай описан в характеристике нуль.

Отметим, что в работе [7] классифицированы простые и полупростые псевдоалгебры над алгебрами Хопфа вида $H = U(\mathfrak{g})\sharp\Bbbk\Gamma$ (здесь $\sharp$ обозначает смэш-произведение алгебр Хопфа), конечно-порождённые как модули над $U(\mathfrak{g})$, где $U(\mathfrak{g})$ — универсальная обёртывающая алгебра конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\Bbbk$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. При $\mathfrak{g} = \{0\}$ это условие влечёт конечномерность над $\Bbbk$, а в данной работе рассматриваются псевдоалгебры, конечно-порождённые над $\Bbbk\Gamma$. Таким образом, в данной работе продолжается исследование из [7] на случай бесконечных групп.

Замечено, что Γ-конформные алгебры Ли конечного типа являются финитарными (finitary) алгебрами Ли [16], на основе простых финитарных алгебр Ли строятся примеры простых Γ-конформных алгебр Ли бесконечного типа.

2. Основные определения

Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле, Γ — произвольная группа, $\Bbbk\Gamma$ — групповая алгебра группы Γ над $\Bbbk$, e — единица Γ.

Определение 1 ([10]). *Левый $\Bbbk\Gamma$-модуль C, снабжённый множеством билинейных операций $(\cdot_{(\gamma)}\cdot) : C \otimes C \to C$, $\gamma \in \Gamma$, называется Γ-конформной алгеброй, если для любых $a, b \in C$ и $\alpha, \gamma \in \Gamma$ выполнены следующие аксиомы:*

(Γ1) $a_{(\delta)}b = 0$ для почти всех $\delta \in \Gamma$;

($\Gamma 2$*)* $\alpha a_{(\gamma)} b = a_{(\gamma\alpha)} b$*;*
($\Gamma 3$*)* $a_{(\gamma)} \alpha b = \alpha(a_{(\alpha^{-1}\gamma)} b)$.

Аксиому (Г1) будем называть аксиомой локальности.

Операцию $(\cdot_{(\gamma)}\cdot)$ назовём γ-произведением. Произвольную Γ-конформную алгебру C, рассматриваемую как обычную алгебру относительно операции e-произведения $(\cdot_{(e)}\cdot)$, будем обозначать как C_e. Заметим, что из (Г2) и (Г3) следует, что

$$(\alpha a)_{(\gamma)}(\alpha b) = \alpha(a_{(\alpha^{-1}\gamma\alpha)} b), \tag{1}$$

т. е. действие α для каждого $\alpha \in \Gamma$ является автоморфизмом алгебры C_e.

$\mathbb{Z}$-конформной алгеброй назовём Γ-конформную алгебру для группы $\Gamma = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

Определение 2 ([10, 15])**.** *Для псевдоалгебр понятия ассоциативности, коммутативности и т. п. определены естественным образом [7]. Для* Γ*-конформных алгебр как для частного случая псевдоалгебр это общее определение выражается в терминах семейств следующих тождеств:*
ассоциативность $(a_{(\beta^{-1}\alpha)} b)_{(\beta)} c = a_{(\alpha)}(b_{(\beta)} c)$*;*
(анти)коммутативность $a_{(\alpha)} b = \pm\alpha(b_{(\alpha^{-1})} a)$*;*
тождество Якоби $a_{(\alpha)}(b_{(\beta)} c) = (a_{(\beta^{-1}\alpha)} b)_{(\beta)} c + b_{(\beta)}(a_{(\alpha)} c)$.

Следует отметить, что ассоциативные или лиевы Γ-конформные алгебры не образуют многообразий в классическом смысле из-за вида аксиомы локальности. При этом выполнена следующая

Теорема 1 ([10, 15])**.** Γ*-конформная алгебра* C *является ассоциативной (лиевой) тогда и только тогда, когда* C_e *— ассоциативная (лиева) алгебра.*

Пример 1 ([7])**.** *Рассмотрим для произвольной алгебры* A *пространство* $C = \Bbbk\Gamma \otimes A$ *с* γ*-произведениями, заданными по правилу*

$$(1 \otimes a)_{(\gamma)}(1 \otimes b) = \begin{cases} 1 \otimes (ab), & \gamma = e, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Распространяя действие $\gamma \in \Gamma$ *на пространстве* C *по аксиомам (*Г2*), (*Г3*), зададим на нём структуру* Γ*-конформной алгебры. Полученную таким образом алгебру будем называть алгеброй петель (current algebra) и обозначать как* $\operatorname{Cur} A$*. Далее в произвольной алгебре петель элементы* x *и* $e \otimes x$ *будем отождествлять.*

Рассмотрим для двух подмножеств J и K произвольной Γ-конформной алгебры C следующее множество

$$J \circ K = \left\{ \sum_i a_{i\,(\gamma_i)} b_i \mid a_i \in J,\, b_i \in K,\, \gamma_i \in \Gamma \right\}.$$

Подпространство B в Γ-конформной алгебре C будем называть идеалом C, если B является Γ-подмодулем в C и $B \circ C$, $C \circ B \subseteq C$. Γ-конформная алгебра C называется простой, если она не содержит ненулевых собственных идеалов и $C \circ C \neq \{0\}$.

Назовём идеал I в Γ-конформной алгебре C абелевым, если выполнено $I \circ I = \{0\}$. Γ-конформная алгебра C называется полупростой, если она не содержит ненулевых абелевых идеалов. Γ-конформная алгебра C называется алгеброй (бес)конечного типа, если она (бес)конечно-порождена как модуль над $\Bbbk\Gamma$. Заметим, что если A — (полу)простая алгебра, то такова же Γ-конформная алгебра $C = \operatorname{Cur} A$.

3. Простые ассоциативные и лиевы алгебры конечного типа

Пусть A — некоторая алгебра, $x \in A$. Обозначим через $\operatorname{Ann}_A(x)$ множество $\{y \in A \mid xy = yx = 0\}$. Из аксиомы (Г1) следует, что если C — Γ-конформная алгебра конечного типа, то в алгебре $A = C_e$ коразмерность пространства $\operatorname{Ann}_A(x)$ конечна для всех $x \in A$.

Лемма 1. *Пусть R — такая ассоциативная или лиева алгебра, что $\operatorname{Ann}_R(x)$ имеет конечную коразмерность для любого элемента $x \in R$. Тогда R локально конечномерна.*

Доказательство. Пусть D — подалгебра в R, порождённая конечным множеством $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Любой элемент D представим в виде линейной комбинации произведений с левонормированной расстановкой скобок: $u = (((a_1a_2)a_3)\dots)a_n$, $a_i \in X$. Из этого следует, что алгебра D содержится в $X + Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_n$. Пространство Rx_i конечномерно, поскольку $\operatorname{Ann}_R(x_i)$ имеет конечную коразмерность в R. Следовательно, D конечномерна. $\square$

Лемма 2. *Пусть R — алгебра из условия леммы 1, тогда любой конечно-порождённый идеал алгебры R конечномерен.*

Доказательство. Пусть I — идеал в R, порождённый множеством $X=\{x_1, \dots, x_n\}$. Рассмотрим лиев случай. Любой элемент I представим в виде линейной комбинации произведений с левонормированной расстановкой скобок:

$$(\dots((xb_1)b_2)\dots)b_n, \tag{2}$$

где $x \in X$, $b_i \in R$, $i = 1, \dots, n$.

Из условий леммы следует, что для любого $x \in X$ пространство $R/\operatorname{Ann}_R(x)$ конечномерно. Зафиксируем некоторый базис этого пространства и для каждого вектора базиса выберем его произвольный прообраз в R. Из выбранных прообразов составим конечное множество A_x. Пусть u — моном вида (2). Тогда докажем индукцией по n, что $u \in (\dots((xA)A)\dots)A$, где $A = \bigcup\limits_{x\in X} A_x$. При $n = 1$ это очевидно.

Пусть для всех $k < n$ утверждение доказано, докажем его для n. По индукционному предположению для u выполнено $b_1, \dots, b_{n-1} \in A$. По тождеству Якоби имеем

$$\begin{aligned}(\dots((xb_1)\dots)b_{n-1})b_n \\ = (\dots((xb_1)\dots b_{n-2})b_n)b_{n-1} + (\dots((xb_1)\dots)b_{n-2})(b_{n-1}b_n).\end{aligned} \tag{3}$$

К моному $(\dots((xb_1)\dots b_{n-2})b_n)$ применяем предположение индукции, доказывая утверждение для первого слагаемого (3). После вычисления $(b_{n-1}b_n) \in R$ во втором слагаемом (3) получим сумму произведений вида (2) меньшей длины, для них утверждение выполнено по индукционному предположению.

Получаем, что I содержится в алгебре, порождённой конечными множествами X и A. Лемма 1 влечёт конечномерность I.

В ассоциативном случае имеем

$$I \subseteq X + x_1R + \dots + x_nR + Rx_1 + \dots + Rx_n + Rx_1R + \dots + Rx_nR,$$

откуда следует, что I конечномерен. □

Следствие 1. *Пусть R — алгебра из условия леммы 1. Тогда найдётся минимальный ненулевой конечномерный идеал $I \lhd R$.*

Доказательство. Рассмотрим однопорождённый идеал J в R, по лемме 2 он конечномерен. В силу конечномерности J в нём можно выбрать идеал алгебры R минимальной размерности. □

Лемма 3. *Пусть R — алгебра Ли из условия леммы 1, тогда на R корректно определена симметрическая инвариантная билинейная форма (Киллинга) $\langle x, y\rangle_R = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y)$.*

Доказательство. Конечность коразмерности ядер операторов $\mathrm{ad}\, x$, $x \in R$, позволяет корректно определить след любого произведения операторов такого вида на R. Билинейность и симметричность формы $\langle x, y\rangle_R = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y)$ очевидны.

Для доказательства инвариантности этой формы достаточно найти такое конечномерное подпространство $T \le R$, что $\mathrm{ad}(xy)\,\mathrm{ad}\, z$ и $\mathrm{ad}\, x\,\mathrm{ad}(yz)$ действуют из T в T и при этом на некотором дополнении $\bar{T}$ к T в R оба отображения тождественно равны нулю. Это можно сделать из условий леммы. □

Лемма 4. *Пусть R — полупростая алгебра Ли из условия леммы 1,* $\mathrm{char}\, \Bbbk = 0$*, тогда форма $\langle x, y\rangle_R$ невырождена.*

Доказательство. Допустим, найдётся такой $a \in R$, $a \ne 0$, что $\langle a, R\rangle_R = \{0\}$. Рассмотрим идеал I, порождённый элементом a в R. По лемме 2 I конечномерен. Из инвариантности формы следует, что $\langle I, R\rangle_R = \{0\}$. Форма Киллинга $\langle \cdot,\cdot\rangle_I = \langle \cdot,\cdot\rangle_R\big|_{I\times I}$ на алгебре Ли I тождественно равна нулю. Значит, по критерию Картана I разрешим. Это противоречит полупростоте R. □

Лемма 5. *Пусть R — полупростая алгебра Ли из условия леммы 1, I — конечномерный идеал в R,* $\mathrm{char}\, \Bbbk = 0$. *Тогда I полупрост.*

Доказательство. Пусть $I^\perp = \{x \in R \mid \langle x, I\rangle_R = \{0\}\} \lhd R$. Допустим, что $K = I^\perp \cap I \ne \{0\}$, тогда для любых $x, y \in K$ выполнено $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y) = \langle x, y\rangle_R = \langle x, y\rangle_K = \{0\}$, что влечёт разрешимость K. Следовательно, $K = \{0\}$ и форма $\langle \cdot,\cdot\rangle_R$ невырождена на I. Значит, I полупрост. □

Здесь и ниже C — Г-конформная ассоциативная или лиева алгебра конечного типа. Леммы 1–5 и следствие 1 применимы к алгебре $R = C_e$ (где необходимо, $\mathrm{char}\, \Bbbk = 0$). Пусть X — произвольное подмножество в C, тогда аннулятором X в C назовём множество $\mathrm{Ann}_C(X) = \{a \in C \mid a \circ X = X \circ a = \{0\}\}$.

Лемма 6. *Пусть C — Г-конформная алгебра, I — идеал в алгебре C_e, тогда $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} \gamma I$ — идеал в C.*

Доказательство. Рассмотрим $E = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} \gamma I$ — идеал в C_e как сумма идеалов. Пусть $a \in C$, $\delta \in \Gamma$, $E \ni k = \sum \gamma i_\gamma$, тогда

$$a_{(\delta)} k = \delta a_{(e)} \sum \gamma i_\gamma = \sum \gamma(\gamma^{-1}\delta a_{(e)} i_\gamma) \in E,$$

поскольку $\gamma^{-1}\delta a_{(e)} i_\gamma \in I$. Аналогично доказывается, что $k_{(\delta)} a \in E$. Следовательно, E замкнуто относительно действия Γ и E — идеал в C. □

Лемма 7. *Пусть C — (полу)простая Γ-конформная ассоциативная или лиева алгебра конечного типа. Тогда алгебра C_e не содержит ненулевых разрешимых идеалов.*

Доказательство. Достаточно показать, что C_e не содержит ненулевых абелевых идеалов при условии, что таких идеалов нет в Γ-конформной алгебре C.

Предположим, что в C_e содержится ненулевой идеал J такой, что $J^2 = \{0\}$. Аналогично следствию 1 рассмотрим минимальный конечномерный идеал I в C_e, содержащийся в J. По построению он абелев.

Отметим, что для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $a, b \in I$ выполнено $\gamma_1 a_{(e)} \gamma_2 b \in \gamma_1 I \cap \gamma_2 I$, а также $\gamma I \triangleleft_{\min} C_e$ для любого $\gamma \in \Gamma$.

Рассмотрим $E = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} \gamma I$ — идеал в C по лемме 6. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $a, b \in I$. Если $\gamma_1 I \cap \gamma_2 I = \{0\}$, тогда $\gamma_1 a_{(e)} \gamma_2 b = 0$. При $\gamma_1 I \cap \gamma_2 I \neq \{0\}$ из-за минимальности идеалов получим $\gamma_1 I = \gamma_2 I$, поэтому $\gamma_1 a = \gamma_2 a'$ для некоторого $a' \in I$. Тогда

$$\gamma_1 a_{(e)} \gamma_2 b = \gamma_2 a'_{(e)} \gamma_2 b = \gamma_2 (a'_{(e)} b) = 0,$$

так как $I^2 = \{0\}$. Отсюда γ-произведение любых элементов из E для любого $\gamma \in \Gamma$ равно нулю, значит, E — ненулевой абелев идеал в Γ-конформной алгебре C. □

Лемма 8. *Пусть C — (полу)простая Γ-конформная ассоциативная или лиева алгебра конечного типа для группы Γ без кручения и I — минимальный конечномерный идеал алгебры C_e. Тогда сумма идеалов $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} \gamma I$ в C_e прямая.*

Доказательство. Пусть $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq e$, тогда в силу аксиомы локальности и конечномерности I найдётся такое натуральное N, что $\gamma^n I_{(e)} I = \{0\}$ для любого $n \geqslant N$.

Заметим, что $\gamma I_{(e)} I = \{0\}$ для любого $\gamma \neq e$. Действительно, в противном случае из-за минимальности идеалов γI и I в C_e имеем $\gamma I = I$. Умножая на γ это равенство, получим $\gamma^n I = \gamma^{n-1} I = \ldots = I$. Тогда при $n \geq N$ имеем $\{0\} = \gamma^n I_{(e)} I = I_{(e)} I$, что противоречит лемме 7.

Предположим, что сумма $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} \gamma I$ не прямая. Случай $\gamma_1 I \cap \gamma_2 I \neq \{0\}$ при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ приводится к противоречию точно так же, как это было сделано в предыдущем абзаце.

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon I \cap (\varepsilon_1 I + \ldots + \varepsilon_n I) \neq \{0\}$ для некоторых попарно различных $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \Gamma$, $n \geq 2$. Умножая это неравенство на ε^{-1} и используя минимальность I, получим $I \subseteq \gamma_1 I + \ldots + \gamma_n I$, $\gamma_i \neq e$. Из равенств $\gamma I_{(e)} I = \{0\}$ при $\gamma \neq e$ следует

$$I_{(e)} I \subseteq \sum_{i=1}^{n} \gamma_i I_{(e)} I = \{0\},$$

что противоречит лемме 7. □

Теорема 2. *Пусть C — простая Γ-конформная ассоциативная (лиева) алгебра конечного типа для группы Γ без кручения. Тогда $C \cong \mathrm{Cur}(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная ассоциативная (лиева) алгебра над $\Bbbk$.*

Доказательство. По следствию 1 найдём конечномерный минимальный идеал $I \triangleleft C_e$. По лемме 7 $I^2 \neq \{0\}$, а по лемме 8 сумма $J = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} \gamma I$ прямая. Поскольку J — ненулевой идеал в C, из простоты C следует $J = C$.

Покажем, что $C \cong \mathrm{Cur}(I)$. Определим Г-инвариантное линейное отображение $\varphi : \mathrm{Cur}(I) \to C$ следующим образом: $\gamma \otimes a \to \gamma a$ для $\gamma \in \Gamma$, $a \in I$. Биективность φ очевидна. Более того, для любого $\alpha \in \Gamma$

$$\varphi(\gamma_1 \otimes a_{(\alpha)} \gamma_2 \otimes b) = \varphi(\alpha\gamma_1 \otimes a_{(e)} \gamma_2 \otimes b) = \varphi(\delta_{\alpha\gamma_1,\gamma_2} \gamma_2 \otimes (a_{(e)} b)) = \delta_{\alpha\gamma_1,\gamma_2} \gamma_2 (a_{(e)} b).$$

С другой стороны,

$$\varphi(\gamma_1 \otimes a)_{(\alpha)} \varphi(\gamma_2 \otimes b) = (\gamma_1 a)_{(\alpha)} (\gamma_2 b) = (\gamma_1 a)_{(\alpha)} (\gamma_2 b) = \delta_{\alpha\gamma_1,\gamma_2} \gamma_2 (a_{(e)} b).$$

Следовательно, φ является изоморфизмом Г-конформных алгебр.

Пусть K — ненулевой собственный идеал в I. Из $C \cong \mathrm{Cur}(I)$ следует, что $S = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} \gamma K$ — собственный идеал в Г-конформной алгебре C. Следовательно, $S = C$ и $K = I$, — противоречие с выбором K.

Значит, I — простая конечномерная ассоциативная или лиева алгебра над $\Bbbk$, и теорема доказана. □

4. Полупростые ассоциативные и лиевы алгебры конечного типа

Пусть C — Г-конформная алгебра. Семейство отображений $d = (d_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, $d_\gamma : A \to A$, назовём дифференцированием C, если для любых $x, y \in C$, $\alpha \in \Gamma$ выполнено

(D1) $d_\gamma(x) = 0$ для п.в. $\gamma \in \Gamma$,
(D2) $d_\gamma(\alpha x) = \alpha d_{\alpha^{-1}\gamma}(x)$,
(D3) $d_\gamma(x_{(\alpha)} y) = d_{\alpha^{-1}\gamma}(x)_{(\alpha)} y + x_{(\alpha)} d_\gamma(y)$.

Данное определение можно получить из общего определения дифференцирования H-псевдоалгебры [7] для $H = \Bbbk\Gamma$.

Дифференцирование Г-конформной алгебры Ли C назовём внутренним, если найдётся такой $a \in C$, что выполнено $d_\gamma(x) = a_{(\gamma)} x$ для всех $x \in C$, $\gamma \in \Gamma$. Такое дифференцирование будем обозначать как $\mathrm{ad}\, a$.

Лемма 9. *Пусть $C = \mathrm{Cur}(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ — полупростая конечномерная алгебра Ли,* $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$. *Тогда все дифференцирования C внутренние.*

Доказательство. Пусть d — ненулевое дифференцирование C. Из (D2) и (D3) для любых $x, y \in \mathfrak{g}$, $\gamma \in \Gamma$ следует

$$d_e((\gamma x)_{(e)} \gamma y) = d_e(\gamma x)_{(e)} \gamma y + (\gamma x)_{(e)} d_e(\gamma y).$$

Из того, что C является алгеброй петель, получаем $d_e((\gamma x)_{(e)} \gamma y) \in \gamma\mathfrak{g}$. В силу полупростоты имеем $[\gamma\mathfrak{g}, \gamma\mathfrak{g}] = \gamma\mathfrak{g}$ и тем самым d_e — обычное дифференцирование алгебры $\gamma\mathfrak{g}$ для любого $\gamma \in \Gamma$.

Из (D1) и (D2) имеем $d_e(\gamma x) = \gamma d_{\gamma^{-1}}(x) = 0$ для п.в. $\gamma \in \Gamma$. Вместе с конечномерностью алгебры $\mathfrak{g}$ это влечёт $d_e(\gamma\mathfrak{g}) = 0$ для п.в. $\gamma \in \Gamma$. Пусть $M = \{\gamma \in \Gamma | d_e(\gamma\mathfrak{g}) \neq 0\}$, тогда d_e является дифференцированием конечномерной полупростой алгебры $E = \sum\limits_{\gamma\in M} \gamma\mathfrak{g}$. Значит, найдётся такой $a \in E$, что $d_e(x) = a_{(e)} x$ для всех $x \in E$. Ясно, что это равенство будет выполнено и для любого $x \in C$. Используя свойство (D2), получаем для любых $x \in C$, $\gamma \in \Gamma$

$$d_\gamma(x) = \gamma d_e(\gamma^{-1} x) = \gamma(a_{(e)}(\gamma^{-1} x)) = \gamma a_{(e)} x = a_{(\gamma)} x,$$

следовательно, d — внутреннее дифференцирование C. $\square$

Лемма 10. *Пусть C — полупростая ассоциативная или лиева Γ-конформная алгебра конечного типа над группой Γ без кручения. Тогда C не содержит бесконечных прямых сумм собственных идеалов.*

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — порождающие C над $\Bbbk\Gamma$. Допустим, что $C \supseteq C_1 \oplus \dots \oplus C_k \oplus \dots$ для ненулевых идеалов C_i в C. В силу конечномерности идеала (a_1), порождённого в C_e элементом a_1, и включений

$$C_k \circ a_1 \subseteq C_k \cap (a_1) \subseteq (a_1)$$

заключаем, что $C_k \circ a_1 = \{0\}$ для п.в. k. Также имеем $C_k \circ a_i = \{0\}$, $i = 1, \dots, n$, для п.в. k. Поскольку $C_k \circ (\gamma a_i) = \gamma(C_k \circ a_i)$ для любого $\gamma \in \Gamma$, в итоге имеем $C_k \circ C = \{0\}$ для п.в. k. Тем самым, в алгебре C есть ненулевой центр — абелев идеал, что противоречит полупростоте C. $\square$

Теорема 3. *Пусть C — полупростая Γ-конформная алгебра конечного типа над группой Γ без кручения. Тогда C разлагается в конечную прямую сумму простых Γ-конформных алгебр конечного типа, если а) C — ассоциативная Γ-конформная алгебра; б) C — лиева Γ-конформная алгебра и $\operatorname{char} \Bbbk = 0$.*

Доказательство. а) Пусть C ассоциативна, тогда по следствию 1 в C_e найдётся минимальный конечномерный идеал I_1. Из леммы 7 и наследственности радикала Бэра получаем, что I_1 — полупростая алгебра, а из леммы 8 — что сумма идеалов $C_1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma I_1 \cong \operatorname{Cur} I_1$.

Обозначим через E единицу алгебры I_1. Для произвольного $a \in C$ рассмотрим элементы

$$a_0 = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_{(e)} \gamma E, \quad a_1 = a - a_0.$$

Несложно показать, что множество $\{a_0 \mid a \in C\}$ совпадает с C_1. Обозначим через J_2 множество $\{a_1 \mid a \in C\}$. Тогда алгебра C представима в виде $C_1 + J_2$. Докажем, что для всех $x \in C_1$ выполняется

$$x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_{(e)} \gamma E. \tag{4}$$

Действительно, пусть $x \in C_1$, тогда $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma x_\gamma$, где $x_\gamma \in I_1$. Следующая цепочка равенств доказывает (4):

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} x_{(e)} \gamma E = \sum_{\gamma, \alpha \in \Gamma} \alpha x_{\alpha(e)} \gamma E = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(x_{\gamma(e)} E) = x.$$

Докажем, что $C_1 \circ J_2 = \{0\}$. Пусть a, b — произвольные элементы из C, $\delta \in \Gamma$, тогда

$$a_{0(\delta)} b_1 = \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \delta a_{(e)} \delta \gamma E \right)_{(e)} \left(b - \sum_{\alpha \in \Gamma} b_{(e)} \alpha E \right) \\ = \sum_{\gamma' \in \Gamma} a'_{(e)} \left(\gamma' E_{(e)} b - \sum_{\alpha \in \Gamma} (\gamma' E_{(e)} b)_{(e)} \alpha E \right) = 0,$$

где $a' = \delta a \in C_1$, $\gamma' = \delta \gamma$.

Из доказанного выше следует, что $J_2 = \mathrm{Ann}_C(C_1)$ является полупростым идеалом Г-конформной алгебры C, из $J_2 \cong C/C_1$ следует, что J_2 конечного типа. Продолжим указанный процесс далее, лемма 10 гарантирует, что процесс оборвётся спустя конечное число шагов, так как в противном случае найдется бесконечная прямая сумма ненулевых идеалов в C. Значит, $C = \mathrm{Cur}(A_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Cur}(A_k)$ для полупростых конечномерных ассоциативных алгебр A_i, $i = 1, \ldots, k$. Разлагая по теореме Веддербёрна — Артина каждую полупростую алгебру A_i, $i = 1, \ldots, k$, на простые алгебры, получаем искомое разложение.

б) Пусть C лиева. По следствию 1 найдётся минимальный конечномерный идеал $I \triangleleft C_e$, который по лемме 5 будет полупрост, и $J = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} \gamma I \cong \mathrm{Cur}\, I$. Пусть $K = \mathrm{Ann}_C(J)$, покажем, что $C = J \oplus K$. Рассмотрим произвольный $x \in C$ и внутреннее дифференцирование $\mathrm{ad}\, x$ в C. Поскольку J — идеал в C, $\mathrm{ad}\, x$ будет дифференцированием J. По лемме 9 $\mathrm{ad}\, x$ является внутренним дифференцированием J: найдётся такой $a \in J$, что $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, a$ на J, то есть $x - a \in K$. Значит, $C \subseteq J + K$. Предположим, что $J \cap K \neq \{0\}$, тогда в J_e найдётся абелев идеал $J \cap K$, но алгебра J_e полупроста. Значит, $J \circ K = \{0\}$ и $C = J \oplus K$.

Легко видеть, что алгебра K будет полупростой Г-конформной алгеброй конечного типа и к ней применимы те же рассуждения, что и выше. Значит, как и в ассоциативном случае, по лемме 10 получаем разложение исходной алгебры в конечную сумму алгебр петель от простых конечномерных алгебр Ли. □

Замечание 1. *Кручением* Γ*-конформной алгебры* C *называется множество* $\mathrm{Tor}(C) = \{a \in C \mid$ *существует* $0 \neq h \in \Bbbk\Gamma$ *такой, что* $ha = 0\}$. *В работе [15] была допущена ошибка при доказательстве того, что для произвольных группы* Γ *без кручения и* Γ*-конформной алгебры* C *выполнено включение* $\mathrm{Tor}(C) \subseteq \mathrm{Ann}(C)$. *Если это утверждение верно, тогда групповая алгебра* $\Bbbk\Gamma$ *не содержит делителей нуля и верна гипотеза Капланского [17].*

Предложение 1. *Пусть группа* Γ *лево-упорядочена, тогда для произвольной* Γ*-конформной алгебры* C *выполнено* $\mathrm{Tor}(C) \subseteq \mathrm{Ann}(C)$.

Доказательство. Пусть $(0 \neq) c \in \mathrm{Tor}(C)$, $(0 \neq) h = \alpha_1\gamma_1 + \ldots + \alpha_n\gamma_n \in \Bbbk\Gamma$ такой, что $hc = 0$. Будем считать, что $\alpha_1 \neq 0$, $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \ldots \leq \gamma_n$ и все γ_i попарно различны. Заметим, что $n > 1$, иначе $c = 0$.

Пусть $a \in C$ такой, что $c \circ a \neq 0$. Выберем максимальный $\gamma \in \Gamma$ с условием $\gamma c_{(e)} a \neq 0$, это можно сделать по аксиоме локальности и упорядоченности группы Γ. Пусть $\tilde{\gamma}_i = \gamma\gamma_1^{-1}\gamma_i$, тогда $\tilde{\gamma}_i c_{(e)} a = 0$, $i = 2, \ldots, n$, в силу выбора γ и неравенств $\gamma \leq \tilde{\gamma}_i$, $\gamma \neq \tilde{\gamma}_i$. Находим

$$0 = (\gamma\gamma_1^{-1}hc)_{(e)}a = \alpha_1\tilde{\gamma}_1 c_{(e)}a + \ldots + \alpha_n\tilde{\gamma}_n c_{(e)}a = \alpha_1\gamma c_{(e)}a \neq 0,$$

противоречие. Следовательно, $c \circ C = \{0\}$ для любого $c \in \mathrm{Tor}(C)$.

Аналогично доказывается равенство $C \circ c = \{0\}$. Тем самым, $\mathrm{Tor}(C) \subseteq \mathrm{Ann}(C)$. □

Из предложения 1 следует известный факт: гипотеза Капланского верна для лево-упорядоченных групп.

5. Примеры простых лиевых алгебр бесконечного типа

Приведём примеры простых Г-конформных алгебр Ли бесконечного типа, не являющихся алгебрами петель.

Пусть V — линейное пространство над полем $\Bbbk$, элемент $x \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(V) = \mathrm{End}(V)$ назовём финитарным, если $\dim xV < \infty$. Финитарные преобразования V образуют идеал $J(V)$ в алгебре $\mathrm{gl}(V)$. Алгебра Ли называется финитарной, если она изоморфна некоторой подалгебре в $J(V)$.

Ясно, что произвольная Г-конформная алгебра Ли C конечного типа относительно e-произведения является финитарной.

В [16] доказано, что все бесконечномерные простые финитарные алгебры Ли над полем $\mathbb{C}$ изоморфны одной из следующих алгебр:

$$\mathrm{sl}_\infty(\mathbb{C}) = \{X \in M_\infty(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}\, X = 0\}, \quad \mathrm{o}_\infty(\mathbb{C}) = \{X \in M_\infty(\mathbb{C}) \mid X^T + X = 0\},$$
$$\mathrm{sp}_\infty(\mathbb{C}) = \{X \in M_\infty(\mathbb{C}) \mid X^T J + JX = 0\},$$

где $M_\infty(\mathbb{C})$ — алгебра бесконечных матриц с конечным числом ненулевых элементов из $\mathbb{C}$,

$$J = \mathrm{diag}\left\{\dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots\right\}.$$

Определим на $M_\infty(\mathbb{C})$ линейное отображение t следующим образом: $t(E_{ij}) = E_{i+1,j+1}$, где E_{ij}, $i, j \in \mathbb{Z}$,— стандартный базис. Тогда $M_\infty(\mathbb{C})$ относительно действия автоморфизмов $T_n = t^n$, $n \in \mathbb{Z}$, является простой ассоциативной $\mathbb{Z}$-конформной алгеброй. Присоединённая алгебра Ли $M_\infty(\mathbb{C})^{(-)}$ рассматривалась в работе [10].

При помощи действия t лиевы алгебры $\mathrm{sl}_\infty(\mathbb{C})$ и $\mathrm{o}_\infty(\mathbb{C})$ аналогично наделяются структурой $\mathbb{Z}$-конформной алгебры Ли. Относительно действия автоморфизмов $T'_n = t^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$, алгебра $\mathrm{sp}_\infty(\mathbb{C})$ является $\mathbb{Z}$-конформной алгеброй Ли. Все три построенные $\mathbb{Z}$-конформные алгебры Ли просты и бесконечного типа.

Понятие $\mathbb{Z}$-конформной алгебры можно эквивалентным образом определить на языке λ-произведений [1, 15]: это есть $\Bbbk[t, t^{-1}]$-модуль C, снабженный $\Bbbk$-линейным отображением (λ-произведением) $(\cdot_\lambda\cdot) : C \otimes C \to C[\lambda, \lambda^{-1}]$, таким, что для любых $a, b \in C$ выполняются аксиомы

$$(ta)_\lambda b = \lambda^{-1}(a_\lambda b), \quad a_\lambda tb = (\lambda t) a_\lambda b.$$

Следующая формула задаёт λ-произведение на произвольной $\mathbb{Z}$-конформной алгебре и, наоборот, определяет n-произведения с выполнением аксиом (Г1)–(Г3) на произвольном $\Bbbk[t, t^{-1}]$-модуле с определённым на нём λ-произведением:

$$a_\lambda b = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{-n} (a_{(n)} b). \tag{5}$$

Антикоммутативность и тождество Якоби в терминах λ-произведения примут вид

$$a_\lambda b = -b_{(\lambda t)^{-1}} a, \quad a_\lambda (b_\mu c) - b_\mu (a_\lambda c) = (a_\lambda b)_{\lambda\mu} c.$$

Пусть C — произвольная $\mathbb{Z}$-конформная алгебра, через $Z(C)$ обозначим подмножество $\{x \in C \mid x_\lambda x = 0\}$.

В $\mathrm{sl}_\infty(\mathbb{C})$ выберем диагональную Г-конформную подалгебру $D = \{X = \alpha_1 E_{i_1,i_1} + \ldots + \alpha_n E_{i_n,i_n} \mid \mathrm{tr}\, X = 0\}$. Здесь $E_{i,j}$ обозначает матричную единицу в $M_\infty(\mathbb{C})$.

Лемма 11. *Пусть* $C = \mathrm{sl}_\infty(\mathbb{C})$*, тогда* $Z(C) = D$*.*

Доказательство. Вычислим по (5)

$$E_{i,j\,\lambda} E_{k,l} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^{-n} (E_{i,j\,(n)} E_{k,l}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^{-n} (E_{i+n,j+n\,(e)} E_{k,l})$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^{-n} (\delta_{j+n,k} E_{i+n,j+n\,(e)} E_{k,l} - \delta_{i+n,l} E_{k,l\,(e)} E_{i+n,j+n})$$
$$= \lambda^{j-k} E_{i+k-j,l} - \lambda^{i-l} E_{k,j+l-i}.$$

Отсюда при $x = \sum_{i,j} \mu_{ij} E_{i,j} \in Z(C)$ находим

$$x_\lambda x = \sum_{i,j,k,l} \mu_{ij}\mu_{kl} (\lambda^{j-k} E_{i+k-j,l} - \lambda^{i-l} E_{k,j+l-i}). \tag{6}$$

Пусть в разложении x по базису $E_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, найдётся $\mu_{ij} \neq 0$ при $i < j$, тогда выберем минимальный $i_0 \in \mathbb{Z}$ такой, что $\mu_{i_0 j} \neq 0$ для некоторого j, и минимальный $j_0 \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющий условию $\mu_{i_0 j_0} \neq 0$. Пусть среди индексов ненулевых коэффициентов μ_{ij} разность $i-j$ принимает минимальное значение s. Тогда матричный коэффициент E_{i_0+s,j_0} в (6) встречается только среди первых слагаемых разностей в скобках при $i_1 - j_1 = i_2 - j_2 = \ldots = i_t - j_t = s$, $\mu_{i_p j_p} \neq 0$. Но сумма таких слагаемых не может быть равна нулю, поскольку при $j \neq j'$ матричный коэффициент E_{i_0+s,j_0} стоит соответственно при степенях λ $j - j_0 \neq j' - j_0$. Тем самым $x_\lambda x \neq 0$.

В случае, когда в разложении x по E_{ij} найдётся $\mu_{ij} \neq 0$ при $i > j$, аналогично доказывается, что $x_\lambda x \neq 0$.

Следовательно, $Z(C) \subseteq D$. Из (6) легко получить, что $D \subseteq Z(C)$ и, значит, $Z(C) = D$. □

Следствие 2. *Алгебры* $\mathrm{sl}_\infty(\mathbb{C})$*,* $\mathrm{o}_\infty(\mathbb{C})$*,* $\mathrm{sp}_\infty(\mathbb{C})$ *не изоморфны алгебре вида* $\mathrm{Cur}\, L$ *ни для какой алгебры Ли* L*.*

Доказательство. Пусть C — $\mathbb{Z}$-конформная алгебра Ли и $C \cong \mathrm{Cur}\, L$ для некоторой алгебры L, тогда в $1 \otimes L \subseteq Z(C)$, т. е. можно выбрать линейный базис C. Для $\mathrm{sl}_\infty(\mathbb{C})$ из леммы 11 следует, что выбрать её базис из $Z(\mathrm{sl}_\infty(\mathbb{C}))$ нельзя. Для алгебр $\mathrm{o}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{sp}_\infty(\mathbb{C})$ аналогично доказывается, что они не являются алгебрами петель ни от какой алгебры Ли. □

Список литературы

[1] V. G. Kac, *Vertex algebras for beginners*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998. MR1651389

[2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B., **241**:2 (1984), 333–380. MR0757857

[3] R. E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **83**:10 (1986), 3068–3071. MR0843307

[4] C. Dong, J. Lepowski, *Generalized vertex algebras and relative vertex operators*, Birkhauser, Bposton, 1993 (Progress in Math., V. 112).

[5] I. B. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex operator algebras and the Monster*, Academic Press, New York, 1998 (Pure and Applied Math., V. 134).

[6] A. D'Andrea, V. G. Kac, *Structure theory of finite conformal algebras*, Selecta Math. (N.S.), **4**:3 (1998), 377–418. MR1654574

[7] B. Bakalov, A. D'Andrea, V. G. Kac, *Theory of finite pseudoalgebras*, Adv. Math, **162**:1 (2001), 1–140. MR1849687

[8] E. I. Zelmanov, *On the structure of conformal algebras*, in Proceedings of Intern. Conf. on Combinatorial and Computational Algebra, (May 24–29, 1999, Hong Kong), Contemp. Math. 264 (2000), 139–153. MR1800693
[9] P. Kolesnikov, *Simple associative conformal algebras of linear growth*, J. Algebra, **295**:1 (2006), 247–268. MR2188860
[10] M. I. Golenishcheva-Kutuzova, V. G. Kac, Γ-*conformal algebras*, J. Math. Phys, **39**:4 (1998), 2290–2305. Zbl 1031.81527
[11] H. Li, *On certain generalizations of twisted affine Lie algebras and quasimodules for* Γ-*vertex algebras*, J. of Pure and Applied Algebra, **209**:3 (2007), 853–871. MR2298863
[12] P. Kolesnikov, *On irreducible algebras of conformal endomorphisms over a linear algebraic group*, Journal of Mathematical Sciences, **161**:1 (2009), 41–56. MR2676258
[13] V. Gubarev, P. Kolesnikov, *Embedding of dendriform algebras into Rota-Baxter algebras*, Cent. Eur. J. Math., **11**:2 (2013), 226–245. MR3000640
[14] P. Kolesnikov, *Varieties of dialgebras and conformal algebras*, Sib. Math. Jour., **49**:2 (2008), 257–272. MR2419658
[15] В. Ю. Губарев, *Простые ассоциативные* Γ-*конформные алгебры конечного типа для группы* Γ *без кручения*, Алгебра и Логика, **52**:5 (2013), 559–581. MR3184660
[16] A. A. Baranov, *Finitary Simple Lie Algebras*, J. of Algebra, **219**:1 (1999), 299–329. MR1707673
[17] I. Kaplansky, *Bialgebras*, Lecture Notes in Mathematics, Univ. of Chicago, Chicago, 1975. MR0435126

Всеволод Юрьевич Губарев
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `wsewolod89@gmail.com`

Павел Сергеевич Колесников
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `pavelsk77@gmail.com`