S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 76–86 (2014) УДК 517.521.5+517.55
MSC 30B50

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРИЗНАКЕ СХОДИМОСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

Е.В. ЗУБЧЕНКОВА

Abstract. We consider Dirichlet series associated with a set of m polynomials in n variables. Such series depend on m complex parameters. They were studed by B.Lichtin and others in the case of hypoelliptic polynomials. We consider a more general class of polynomials so called quasielliptic polynomials in the sence of T.Ermolaeva and A.Tsikh. Using the toric geometry we discribe the domain of convergence in terms of Newton polytopes of polynomials defining the series. As an auxiliary statement we give a criterion for convergence of some integrals over $\mathbb{R}^n$.

Keywords: multidimensional Dirichlet series, quasi-elliptic polinomial, Newton polytope, toric variaty.

1. Введение

Рассматривается кратный ряд Дирихле

$$Z(P;s) = Z(P_0, P_1, ..., P_m, s_1, ..., s_m) = \sum_{k\in K\subset\mathbb{Z}^n} \frac{P_0(k)}{P_1(k)^{s_1}...P_m(k)^{s_m}}, \tag{1.1}$$

ассоциированный с набором полиномов $P_0, P_1, ..., P_m$ от n переменных. В качестве множества суммирования K естественно брать многогранные конусы; мы ограничимся случаем, когда $K = \mathbb{Z}^n$, либо $K = \mathbb{Z}^n_+$. В случае $n = m = 1$ такие ряды обобщают классическую дзета-функцию Римана

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s},$$

Zubchenkova, E.V., On the integral criteria for a convergence of multidimensional Dirichlet series.

Работа поддержана Минобрнауки РФ (грант 201310220100410293).

Поступила 11 января 2014 г., опубликована 5 февраля 2014 г.

с которой связан ряд математических проблем, возникающих в таких областях, как теория чисел, алгебраическая геометрия, теория групп, теория графов, в динамических системах, дифференциальных уравнениях в частных производных и т.д.

Изучение кратного ряда (1.1) при $m = 1$ было положено Меллином [1]. Видимо, для произвольных n, m они впервые встречаются в работах [2],[3], в которых доказано мероморфное продолжение в $\mathbb{C}^m$ функции $Z(P; s)$, ассоциированной с набором гипоэллиптических полиномов $P_1, ..., P_m$. Однако в его работах не описывается область сходимости такого ряда.

В настоящей статье исследуется ряд $Z(P; s)$ для более общих полиномов $P_1, ..., P_m$ – квазиэллиптических полиномов. Данное понятие было введено в статье [4].

Во втором параграфе статьи содержатся предварительные сведения, а также доказывается обобщение теоремы Ермолаевой Т.О и Циха А.К. [4] о сходимости интегралов рациональных функций по пространству $\mathbb{R}^n$ (Теорема 3). Это обобщение используется для доказательства теоремы об области сходимости ряда (1.1), приведенной в третьем параграфе. Полученный результат можно интерпретировать как интегральный признак сходимости для многомерных рядов Дирихле. Применительно к рациональным функциям такой признак был получен в [5]. Доказательство Теоремы 3 основано на идеях торической геометрии. Отметим, что интегральный признак сходимости многомерных рядов востребован в исследовании проблемы устойчивости многомерных цифровых фильтров (см. [6]).

2. Теорема Ермолаевой-Циха и ее следствия

Пусть дан полином

$$P(x) = P(x_1, ..., x_n) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n} c_\gamma x^\gamma$$

с вещественными или комплексными коэффициентами и множество supp $P = \{\gamma \in \mathbb{N}^n : c_\gamma \neq 0\}$ – носитель полинома P. Напомним, что *многогранником Ньютона* $\Delta = \Delta(P)$ полинома P называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ для supp P, а *срезкой* полинома P в направлении $q \in \mathbb{R}^{n*}$ (здесь $\mathbb{R}^{n*}$– сопряженное пространство к $\mathbb{R}^n$) называется полином

$$P_q(x) = \sum_{\gamma \in \Delta^q} c_\gamma x^\gamma,$$

где

$$\Delta^q = \{k \in \Delta : \langle q, k\rangle = \min_{l \in \Delta} \langle q, l\rangle\}$$

– грань в направлении q.

Определение 1. *(см. [4]) Полином P называется квазиэллиптическим, если для любого ненулевого направления $q \in \mathbb{R}^{n*}$ срезка $P_q \neq 0$ в $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$.*

Поскольку многогранник Δ имеет лишь конечное число граней, то условие квазиэллиптичности достаточно проверять также лишь для конечного числа срезок P_q.

В качестве примеров можно указать следующие два класса квазиэллиптических полиномов.

Пример 1. Если все коэффициенты c_γ при мономах $x^\gamma = x_1^{\gamma_1}...x_n^{\gamma_n}$ полинома P положительные и степени γ_i по каждой переменной x_i четные, то $P-$ квазиэллиптический полином.

Пример 2 (см. [4]). Если P – эллиптический полином степени d и $P \neq 0$ в $\mathbb{R}^n$, то $P-$квазиэллиптический полином, причем $\Delta(P)$ - это симплекс с вершинами в начале координат и в точках $\gamma^i = (0, ..., \underbrace{d}_{i}, ..., 0)$, $i = 1, ..., n$.

Сформулируем необходимое и достаточное условие сходимости интеграла с квазиэллиптическим знаменателем, полученное в работе [4]. Для $x = (x_1, ..., x_n)$ через dx обозначим $dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$.

Теорема 1. *(Ермолаева – Цих.) Если P – квазиэллиптический полином, не обращающийся в нуль на $\mathbb{R}^n$, то интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{P_0(x)}{P(x)} dx \tag{2.1}$$

абсолютно сходится тогда и только тогда, когда

$$I + \Delta(P_0) \subset \Delta^\circ(P),$$

где $\Delta(P_0)$ – многогранник Ньютона полинома P_0, $\Delta^\circ(P)$ – внутренность многогранника Ньютона полинома P.

Сделаем некоторые пояснения к сформулированной теореме, которые позволят нам расширить рамки ее применения.

Доказательство этой теоремы основано на том, что для квазиэллиптического знаменателя P интеграл (2.1) является собственным в подходящей вещественной торической компактификации $X \supset \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$I + \Delta(P_0) \subset \Delta^\circ(P). \tag{2.2}$$

Нарушение условия (2.2) происходит лишь тогда, когда подынтегральное выражение в (2.1) имеет полюс порядка > 1 хотя бы на одной гиперповерхности $D \subset X$, приклеиваемой к $\mathbb{R}^n$ на "бесконечности". В подходящих координатах $y = (y_1, ..., y_n)$ гиперповерхность D задается уравнением $y_j = 0$, а подынтегральное выражение имеет вид

$$\frac{g(y)}{y_j^\kappa} dy,$$

где $g(y)-$ рациональная функция, не равная нулю при $y_j = 0$. Нарушение условия (2.2) происходит лишь при $\kappa \geq 1$, что очевидным образом ведет к расходимости интеграла.

На самом деле, положительный ортант $\mathbb{R}^n_+$ примыкает ко всем приклеиваемым гиперповерхностям $D \subset X$ по $(n-1)-$мерному куску, поэтому мы приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Если P – квазиэллиптический полином, не обращающийся в нуль на $\mathbb{R}^n_+$, то интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{P_0(x)}{P(x)} dx$$

абсолютно сходится тогда и только тогда, когда

$$I + \Delta(P_0) \subset \Delta^\circ(P).$$

Второй наш комментарий касается возможности замены полинома P в знаменателе на выражение вида $P_1^{s_1}...P_m^{s_m}$, где P_j – положительные полиномы на $\mathbb{R}^n$, а $s_i \in \mathbb{C}$. В этом случае модуль

$$|P_1^{s_1}...P_m^{s_m}| = P_1^{\mathrm{Re}(s_1)}...P_m^{\mathrm{Re}(s_m)}.$$

Пусть Δ_i- многогранники Ньютона $\Delta(P_i)$ полиномов P_i. Для $s = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{C}^m$ введем многогранник

$$\Delta(P^s) := \mathrm{Re}(s_1)\Delta_1 + ... + \mathrm{Re}(s_m)\Delta_m,$$

равный линейной комбинации по Минковскому набора многогранников $\Delta_1, ..., \Delta_m$. Пусть $\Delta^\circ(P^s)$ – внутренность многогранника $\Delta(P^s)$.

Теорема 3. *Если $P_1, ..., P_m$ – квазиэллиптические полиномы, не обращающиеся в нуль на $\mathbb{R}^n$, то интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{P_0(x)}{P_1^{s_1}(x)...P_m^{s_m}(x)} dx \tag{2.3}$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$I + \Delta(P_0) \subset \Delta^\circ(P^s). \tag{2.4}$$

Для доказательства нам потребуется понятие конического полиэдра (веера) K_Δ, двойственного к выпуклому многограннику Δ. Кратко опишем конструкцию K_Δ, подробности см., например, в [7].

С каждым ковектором $a \in \mathbb{R}^{n*}$ связана грань Δ^a многогранника Δ, на которой скалярное произведение $\langle a, l\rangle$ минимально на Δ. Два ковектора $a, b \in \mathbb{R}^{n*}$ называются *эквивалентными*, если связанные с ними грани Δ^a и Δ^b совпадают. Замыкание класса эквивалентности ковекторов, связанных с гранью Δ^a многогранника Δ, образует конус в $\mathbb{R}^{n*}$, порожденный элементами решетки $\mathbb{Z}^{n*}$. Этот конус называется *двойственным к грани* Δ^a. Совокупность конусов, двойственных всем граням многогранника Δ, образует конический полиэдр K_Δ, называемый *двойственным к многограннику* Δ.

В нашем предположении о том, что полиномы $P_i \neq 0$ на $\mathbb{R}^n$, многогранник $\Delta(P^s)$ содержит начало координат. Поэтому, поскольку $\Delta = \Delta(P^s)$ расположен в положительном ортанте $\mathbb{R}^n_{\geq 0} = \{u : u_j \geq 0, j = 1, ..., n\}$, весь этот ортант лежит в некотором $n-$мерном конусе τ двойственного конического полиэдра K_Δ. Рассечем этот конус семейством координатных плоскостей. Получим подразбиение конуса τ, в котором $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ является одним из конусов. Затем к вееру K_Δ с подразбитым конусом τ применим теорему о существовании примитивного подразбиения [7]. Получим примитивное подразбиение K веера K_Δ, т.е. все $n-$конусы из K примитивные (эти конусы симплициальные, их образующие целочисленные и они порождают решетку в $\mathbb{Z}^n$), причем:

(а) каждый из конусов веера K вписан в один из $n-$мерных конусов двойственного веера K_Δ;

(б) ортант $\mathbb{R}^{n*}_{\geq 0}$ является конусом в K.

С веером K ассоциируется торическое многообразие X_K [7]. Обычно это многообразие комплексное, мы же под ним будем понимать его вещественную часть. Следуя работе [4], опишем координатные окрестности и отношения соседства многообразия X_K.

Пусть семейство $\{a^j\}$ одномерных образующих веера K пронумеровано так, что первые n векторов $a^1, ..., a^n$ являются образующими конуса $\mathbb{R}^{n*}_+$, т.е. ортами $e^j = (0, ..., 1, ..., 0)$. Пусть $\{\tau_J = \langle a^{j_1}, ..., a^{j_n}\rangle\}_J-$ семейство всех $n-$мерных конусов в K. Обозначим через $U_J \simeq \mathbb{R}^n$ соответствующую конусу τ_J карту вещественного торического многобразия X_K, и выделим специальным обозначением U_I карту, соответствующую конусу $\tau_I = \tau_{1...n} = \mathbb{R}^{n*}_{\geq 0}$. Локальные координаты для U_J обозначим $y^J = (y^J_1, ..., y^J_n)$.

Пространство $\mathbb{R}^n$ переменных x отождествим с U_I, т.е. y^I обозначим через x. Так как соотношения соседства для пары карт U_I, U_J выражаются равенством $(y^I)^{A_I} = (y^J)^{A_J}$, а A_I- единичная матрица, получаем, что переход от координат $y^I = x$ пространства $\mathbb{R}^n \subset X_K$ к координатам $y^J = y$ другой карты осуществляется по формуле

$$x = y^{A_J} \tag{2.5}$$

с унимодулярной матрицей $A_J = (a^{j_1}, ..., a^{j_n})$ (напомним, что целочисленная матрица называется унимодулярной, если ее определитель равен ± 1).

Доказательство Теоремы 3. Заметим, что для квазиэллиптических полиномов $P_1, ..., P_m$ сходимость интеграла (2.3) по $\mathbb{R}^n$ имеет место тогда и только тогда, когда сходится соответствующий интеграл по компактификации X_K. Обозначим через ω подынтегральную форму в (2.3) и представим ее в виде

$$\omega = \frac{x_1...x_n \cdot P_0}{P_1^{s_1}...P_m^{s_m}} \cdot \frac{dx_1}{x_1} \wedge ... \wedge \frac{dx_n}{x_n}.$$

Ее задание в любой из координатных окрестностей $U_J \subset X_K$ осуществляется заменой (2.5):

$$\omega = \left[\frac{x_1...x_n \cdot P_0}{P^s}\right]\Bigg|_{x=y^{A_J}} \cdot det(A_J) \cdot \frac{dy_1}{y_1} \wedge ... \wedge \frac{dy_n}{y_n}. \tag{2.6}$$

Здесь для краткости мы пишем P^s вместо $P_1^{s_1}...P_m^{s_m}$.

Поскольку $det(A_J) = \pm 1$ – величина, не зависящая от y, достаточно показать, что сужение выражения в квадратных скобках делится на $|y_1...y_n|^\delta$, $\delta > 0$, лишь при условии (2.4).

Переобозначим столбцы a^{j_ν} матрицы A_J через b^ν. Тогда для монома $x^l = x_1^{l_1}...x_n^{l_n}$ имеем

$$x^l\Big|_{x=y^{A_J}} = y_1^{\langle b^1, l\rangle}...y_n^{\langle b^n, l\rangle}. \tag{2.7}$$

По свойству (a) конус τ_J, порожденный вектор-столбцами матрицы A_J, вписан в один из $n-$ мерных конусов двойственного веера $K_\Delta = K_{\Delta(P^s)}$ (здесь и далее, для краткости письма, $\Delta(P^s)$ обозначаем Δ). Поэтому опорные грани Δ^{b^ν} пересекаются по вершине $\gamma \in \Delta$; иными словами, на Δ точкой одновременного минимума для линейных функционалов $\langle b^1, l\rangle, ..., \langle b^n, l\rangle$ является лишь значение $l = \gamma$.

Каждая грань Δ^{b^ν} представляется суммой

$$\Delta_s^{b^\nu} = \sum_{i=1}^m s_i \Delta_i^{b^\nu},$$

где $\Delta_i^{b^\nu}$ – опорные грани вдоль вектора b^ν к многогранникам Ньютона $\Delta_i = \Delta(P_i)$.

Обозначим

$$k_\nu := \min_{l\in\Delta} \langle b^\nu, l\rangle = \langle b^\nu, \gamma\rangle.$$

Но $\gamma = s_1\gamma^1 + ... + s_m\gamma^m$, где γ^i– вершина Δ_i, поэтому

$$k_\nu = \left\langle b^\nu, \sum_{i=1}^m s_i\gamma^i \right\rangle = \sum_{i=1}^m s_i \langle b^\nu, \gamma^i\rangle. \tag{2.8}$$

Учитывая (2.7), имеем

$$\left|P^s(y^{A_J})\right| = \left|P_1^{s_1}(y^{A_J})...P_m^{s_m}(y^{A_J})\right| = \prod_{i=1}^m \left| \sum_{l\in suppP_i} c_l^{(i)} y_1^{\langle b^1, l\rangle} ... y_n^{\langle b^n, l\rangle} \right|^{s_i}.$$

Согласно (2.8), справедливо равенство

$$|P^s(y^{A_J})| = |y_1^{k_1}...y_n^{k_n}|\tilde{P}(y,s), \tag{2.9}$$

где

$$\tilde{P}(y,s) = \prod_{i=1}^m \left(c_{\gamma^i}^{(i)} + \tilde{P}_i(y) \right)^{s_i}$$

с полиномиальными функциями $\tilde{P}_i(y)$, обращающимися в нуль при $y = 0$.

Условие (2.4) равносильно тому, что для каждой одномерной образующей $a^j \in \mathbb{Z}^{n*}$ веера K выполняется неравенство

$$\min_{l\in I+\Delta(P_0)} \langle a^j, l\rangle \geq \min_{l\in\Delta} \langle a^j, l\rangle + \delta_j$$

с некоторой положительной величиной δ_j. Иначе говоря, для каждой матрицы A_J и любого монома x^l из $x_1...x_n \cdot P_0$ имеют место неравенства

$$\langle a^j, l\rangle \geq k_j + \delta_j$$

(напомним, что a^j– это столбцы матрицы A_J). Ввиду (2.7) последнее эквивалентно тому, что форма (2.6) в каждой гиперплоскости $y_j = 0$ имеет порядок полярности меньше 1. А это равносильно интегрируемости формы ω вблизи $y_1...y_n = 0$.

Осталось показать, что $\tilde{P}(y,s)$ не равен нулю в $\mathbb{R}^n_y$. Во-первых, $\tilde{P}(y,s)$ не равен нулю в торе $\mathbb{T}^n$, поскольку уравнения $P^s(y^{A_J}) = 0$ и $\tilde{P}(y,s) = 0$ равносильны в торе (напомним, что $P^s(x)$ не равно нулю в $\mathbb{R}^n$, так как там не равны нулю полиномы $P_1, ..., P_m$). Объясним почему $\tilde{P}(y,s)$ не может иметь нулей в координатных гиперплоскостях. По симметрийным соображениям относительно порядка переменных $y_1, ..., y_n$ достаточно установить, что $\tilde{P}(y,s)$ не имеет нулей в торе

$$\mathbb{T}^{n-t} = \{y_1 = ... = y_t = 0, y_{t+1} \neq 0, ..., y_n \neq 0\}, 1 \leq t \leq n.$$

Обозначим через τ грань Δ, на которой одновременно достигают своего минимального значения линейные функционалы $\langle b^1, l\rangle, ..., \langle b^t, l\rangle$. Грань τ представляется суммой

$$\tau = \sum_{i=1}^{m} s_i \tau^i,$$

где τ^i– грань многогранника Нютона Δ_i. Определим функцию

$$P_\tau^s(x) = (P_{1\tau^1}(x))^{s_1} ... (P_{m\tau^m}(x))^{s_m},$$

где $P_{i\tau^i}(x)$– срезка P_i на грань τ^i (условно можно ее назвать срезкой $P^s(x)$ на τ). Поскольку для всех $l \in \Delta \setminus \tau$ выполняется хотя бы одно из неравенств $\langle a^j, l\rangle < k_j + \delta_j, i = 1, ..., l$, из (2.9) получаем

$$\left| P_\tau^s(y^{A_J}) \right| = |y_1^{k_1} ... y_n^{k_n}| \tilde{P}(0, ..., 0, y_{t+1}, ..., y_n, s).$$

Ввиду квазиэллиптичности полиномов P_i срезки $P_{i\tau^i}(x)$ не обращаются в нуль в торе $\mathbb{T}^n$. Следовательно, P_τ^s также не имеет нулей в торе $\mathbb{T}^n$. Поэтому из последнего равенства вытекает, что $\tilde{P}(y, s)$ не имеет нулей в $\mathbb{T}^{n-t}$.

Резюмируя вышесказанное, можно утверждать, что если в (2.3) полиномы $P_1, ..., P_m$ квазиэллиптические, то:

(i) при наличии условия (2.4) интеграл (2.3) абсолютно сходится;
(ii) при нарушении условия (2.4) существует координатная окрестность $U_J \subset M_\Delta$, в локальных координатах которой подынтегральная форма ω имеет порядок полярности ≥ 1 на некоторых координатных гиперплоскостях, и потому ω неинтергируема.

Теорема доказана.

Замечание. Достаточное условие сходимости интеграла (2.3) также можно получить с помощью результатов статьи [8].

3. Сходимость ряда $Z(P; s)$

В данном параграфе будет исследован вопрос о сходимости ряда

$$Z(P; s) = Z(P_1, ..., P_m, s_1, ..., s_m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{P_0}{P_1(k)^{s_1} ... P_m(k)^{s_m}},$$

где P_i – квазиэллиптические полиномы, не обращающиеся в нуль на $\mathbb{R}^n$, $s_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, ..., m$. Будем предполагать, что многогранники Ньютона Δ_i *полные*, содержат в качестве граней все свои проекции на координатные гиперплоскости.

Теорема 4. *Ряд $Z(P; s)$ абсолютно сходится в трубчатой области*

$$\{s \in \mathbb{C}^m : I + \Delta(P_0) \subset \Delta_s^\circ\}, \tag{3.1}$$

где $\Delta_s^\circ = \mathrm{Re}(s_1)\Delta_1^\circ + ... + \mathrm{Re}(s_m)\Delta_m^\circ$, а I – это вектор $(1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, функция $Z(P; s)$ голоморфна в указанной трубчатой области.

Доказательство. Рассмотрим в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ область (полосу) (Рис.1)

$$\Pi := \{t \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, t| < \varepsilon\},$$

где ε будем брать достаточно малым, но фиксированным.

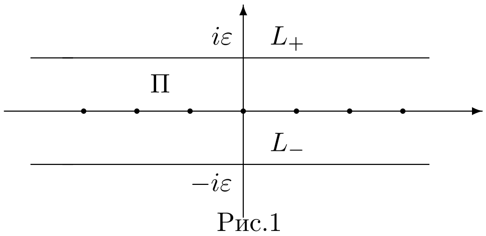

Рис.1

Зафиксируем переменные $z_2, ..., z_n$ и в каждом целочисленном значении $z_1 = k_1$ представим дробь

$$\frac{P_0(z)}{P_1^{s_1}(z)...P_n^{s_n}(z)} = \frac{P_0(z)}{P^s(z)}$$

в виде вычета

$$\frac{P_0(k_1, z_2, ..., z_n)}{P^s(k_1, z_2, ..., z_n)} = 2\pi i \underset{z_1=k_1}{res} \frac{P_0(z)}{P^s(z)(e(z_1)-1)},$$

где $e(t) = e^{2\pi i t}$.

По теореме о вычетах для любой ограниченной области

$$\Pi_\alpha = \{t \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, t| < \alpha, |\mathrm{Im}\, t| < \varepsilon\} \subset \Pi,$$

где α - полуцелое положительное число, при фиксированных переменных $z_2, ..., z_n$ имеем

$$\sum_{k_1=-[\alpha]}^{[\alpha]} \frac{P_0(k_1, z_2, ..., z_n)}{P^s(k_1, z_2, ..., z_n)(e(z_1)-1)} = \int\limits_{\partial\Pi_\alpha} \frac{P_0(k_1, z_2, ..., z_n)}{P^s(k_1, z_2, ..., z_n)(e(z_1)-1)} dz_1. \quad (3.2)$$

Отметим, что функция $e(t) - 1$ ограничена и отделена от нуля на границе области Π_α, причем независимо от α. Действительно, согласно равенству

$$|e(x+iy) - 1| = (e^{-4\pi y} - 2e^{-2\pi y} cos 2\pi x + 1)^{\frac{1}{2}},$$

на вертикальных отрезках $x = \pm\alpha$ границы $\partial\Pi_\alpha$ ее модуль принимает свои значения из промежутка

$$[1 + e^{-2\pi\varepsilon}; 1 + e^{2\pi\varepsilon}],$$

а на горизонтальных отрезках $t = x \pm i\varepsilon$ – из промежутка

$$[1 - e^{-2\pi\varepsilon}; 1 + e^{-2\pi\varepsilon}].$$

Покажем, что при условии (3.1) для фиксированных переменных $z' = (z_2, ..., , z_n)$ дробь $\frac{P_0(z)}{P^s(z)}$ как функция переменного z_1 убывает при $z_1 \to \infty$ не медленнее, чем $|z_1|^{-1-\delta}$, где $\delta > 0-$ некоторая постоянная. В самом деле, в силу полноты Δ_i в каждом полиноме P_i есть моном вида $c_i z_1^{p_i}$, то есть не зависящий от z'. Тогда имеет место следующая оценка:

$$|P_1^{s_1}...P_m^{s_m}| = |P_1^{s_1}|...|P_m^{s_m}| \geqslant |z_1|^{p_1 \mathrm{Re} s_1 + ... + p_m \mathrm{Re} s_m},$$

где $p_i = deg_{z_1} P_i$. Согласно условию (3.1), для каждого $\beta \in \mathrm{supp}\ P_0$ в Δ_s° лежит точка $\beta + I$. В силу открытости Δ_s°, ему принадлежит и некоторая точка вида

$(\beta_1+1+\delta, \beta_2+1, ..., \beta_n+1)$, где $\delta>0$. Таким образом,

$$\left|\frac{P_0(z)}{P^s(z)}\right| \le \left|\frac{P_0(z)}{C|z_1|^{p_1 \mathrm{Re} s_1+...+p_m \mathrm{Re} s_m}}\right| \le \frac{1}{\tilde{C}|z_1|^{1+\delta}}.$$

При указанной оценке интегралы (3.2) по вертикальным отрезкам границы $\partial\Pi_\alpha$ стремятся к нулю. Тогда

$$\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \frac{P_0(k_1,z_2,...,z_n)}{P^s(k_1,z_2,...,z_n)} = \int\limits_{\partial\Pi} \frac{P_0(k_1,z_2,...,z_n)}{P^s(k_1,z_2,...,z_n)(e(z_1)-1)} dz_1.$$

Фиксируя поочередно оставшиеся переменные и проводя аналогичные рассуждения, получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{P_0(k)}{P^s(k)} = \int\limits_{(\partial\Pi)^n} \frac{P_0(z_1,...,z_n)}{P^s(z_1,...,z_n)\prod\limits_{j=1}^{n}(e(z_j)-1)} dz_1...dz_n.$$

При этом декартова степень $(\partial\Pi)^n$ представляется в виде суммы

$$(\partial\Pi)^n = \sum_{(J,K)} \pm(L_+^J \times L_-^K)$$

ориентированных декартовых произведений $L_+^J \times L_-^K$, где суммирование ведется по всем разбиениям J, K множества $[n]=\{1,2,...,n\}$ (т.е. $J\cup K=[n]$, $J\cap K=\emptyset$).

Обозначим через ε_{JK} вектор с n координатами, у которого на местах с номерами из J стоят значения ε, а на местах с номерами из K – значения $-\varepsilon$. Тогда интеграл

$$\int\limits_{(\partial\Pi)^n} \frac{P_0(z)}{P^s(z)\prod\limits_{j=1}^{n}(e(z_j)-1)} dz$$

представится суммой 2^n интегралов вида

$$\int\limits_{L_+^J\times L_-^K} \frac{P_0(z)}{P^s(z)\prod\limits_{j=1}^{n}(e(z_j)-1)} dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{P_0(x+i\varepsilon_{JK})}{P^s(x+i\varepsilon_{JK})g(x,\varepsilon_{JK})} dx, \tag{3.3}$$

где $g(x,\varepsilon_{JK}) = \prod\limits_{j=1}^{n}(e(x_j+i\varepsilon_{JK})-1)$. Функция g ограничена и отделена от нуля на $\mathbb{R}^n$, поскольку, как отмечалось выше, каждый ее множитель принимает свои значения из отрезка

$$[1-e^{-2\pi\varepsilon_{JK}}; 1+e^{-2\pi\varepsilon_{JK}}],$$

ограниченного и отделенного от нуля при малых $\varepsilon_{JK}=\pm\varepsilon$.

Таким образом, каждый из интегралов (3.3) сходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{P_0(x+i\varepsilon_{JK})}{P^s(x+i\varepsilon_{JK})} dx. \tag{3.4}$$

Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $P(x)-$квазиэллиптический полином с полным многогранником Ньютона $\Delta(P)$ и $P(x) \neq 0$ на $\mathbb{R}^n$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n$ полином*

$$P_\varepsilon(x) = P(x + i\varepsilon) = P(x_1 + i\varepsilon_1, ..., x_n + i\varepsilon_n)$$

также квазиэллиптический, причем не обращающийся в нуль на $\mathbb{R}^n$.

Доказательство леммы 1. Заметим, что для любого монома x^α полином

$$(x + i\varepsilon)^\alpha = (x_1 + i\varepsilon_1)^{\alpha_1} ... (x_n + i\varepsilon_n)^{\alpha_n}$$

имеет вид

$$x^\alpha + \sum_{0 \leq \beta < \alpha} c_\beta(\varepsilon) x^\beta, \tag{3.5}$$

где все $c_\beta(0) = 0$ и $\beta < \alpha$ означает, что все $\beta_j \leq \alpha_j$, причем хотя бы одно из неравенств строгое. В силу полноты многогранника $\Delta(P)$ отсюда следует, что при достаточно малых ε многогранники Ньютона полиномов $P_\varepsilon(x)$ не меняются и они совпадают с $\Delta(P)$. Более того, условие квазиэллиптичности заведомо сохраняется для всех граней Δ^q, не лежащих в координатных плоскостях размерности, равной $\dim \Delta^q$: ввиду (3.5) срезки полинома $P_\varepsilon(x)$ на такие грани не зависят от ε. Если же k-мерная грань Δ^q лежит в $k-$мерной координатной плоскости $\alpha_{i_1} = ... = \alpha_{i_{n-k}} = 0$, то срезка P_{Δ^q} совпадает с сужением полинома P на координатную плоскость $L = \{x_{j_1} = ... = x_{j_k} = 0\}$, где $J = (j_1, ..., j_k)-$дополнительный мультииндекс к $I = (i_1, ..., i_{n-k})$. Но поскольку $P \neq 0$ на $\mathbb{R}^n$, то и $P_{\Delta^q} = P\,|_L \neq 0$.

Первоначальный полином не равен нулю на сооответствующей торической компактификации $X \supset \mathbb{R}^n$. Поэтому, ввиду компактности X, полином P отделен от нуля на X. При малых возмущениях он остается таким же. Лемма 1 доказана.

Доказанная лемма позволяет применить теорему Ермолаевой и Циха для интеграла (3.4), на основании которой мы заключаем абсолютную сходимость интеграла

$$\int\limits_{(\partial\Pi)^n} \frac{P_0(z)}{P^s(z) \prod\limits_{j=1}^{n} (e(z_j) - 1)} dz$$

как суммы 2^n абсолютно сходящихся интегралов (3.3), когда выполнено условие (3.1).

Список литературы

[1] H. Mellin, *Die Dirichlet'schen Reihen, die zahlentheoretischen Funktionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht*, Acta Math., **28** (1904), 37–64. MR1554997

[2] B. Lichtin, *The asymptotics of a lattice point problem associated to a finite number of polynomials I*, Duke Math. J. **63**:1 (1991), 139–192. MR1106941

[3] B. Lichtin, *The asymptotics of a lattice point problem associated to a finite number of polynomials II*, Duke Math. J. **77**:3 (1995), 699–751. MR1324639

[4] Т.О. Ермолаева, А.К. Цих, *Интегрирование рациональных функций по $\mathbb{R}^n$ с помощью торических компактификаций и многомерных вычетов*, Матем. сборник, **187**:9 (1996), 45–64. MR1422382

[5] Е.В. Зубченкова, *Интегральный признак сходимости некоторых кратных рядов*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics&Physics, **4**:3 (2011), 344–349.

[6] А.К. Цих, *Условия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора мероморфных функций двух переменных*, Матем. сборник, **182**:11 (1991), 1588–1622. MR1137864
[7] А.Г. Хованский, *Многогранники Ньютона (разрешение особенностей)*, Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем., **22** (1983), 207–239. MR0735444
[8] C. Berkesch, J. Forsgard, M. Passare, *Euler-Mellin integrals and A-hypergeometric functions*, arXiv:1103.6273v2 [math.CV] 1 Feb 2013.

Елена Васильевна Зубченкова
Сибирский Федеральный Университет,
пр. Свободный 79,
660041, Красноярск, Россия
E-mail address: elenazubchenkova@rambler.ru