S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 11, стр. 777–799 (2014)* УДК 517.956
MSC 12H20

# О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

С.Г. ПЯТКОВ, Е.И. САФОНОВ

Abstract. In the present article we examine well-posedness questions of some linear inverse problems for parabolic equations and systems. A solution and a right-hand side of a system are recovered under.

**Keywords:** parabolic system, inverse problem, control problem, boundary value problem, well-posedness.

## 1. Введение

Мы рассматриваем вопрос об определении вместе с решением также правой части специального вида и коэффициентов в параболических уравнениях и системах. Пусть $G$ – область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\Gamma$ класса $C^{2m}$ и $Q = G \times (0,T)$. Параболическое уравнение имеет вид

$$u_t + A(t,x,D)u = f_c,\ (t,x) \in Q. \tag{1}$$

где $A$ – матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размерности $h \times h$, представимый в виде

$$A(t,x,D) = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(t,x) D^\alpha,\ D = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}).$$

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\beta| \le m_j} b_{j\beta}(t,x) D^\beta u|_S = g_j(t,x), \tag{2}$$

где $m_j < 2m$, $j = 1,2,\dots,m$ и $S = (0,T) \times \Gamma$.

Pyatkov, S.G., Safonov, E.I., On some classes of linear inverse problems for parabolic systems of equations.



Работа подержана грантом РФФИ № 12-01-00260а.

*Поступила 20 июня 2014 г., опубликована 16 октября 2014 г.*

Правая часть в (1) имеет вид:

$$f_c = \sum_{i=1}^{r_0} b_i(t,x)q_i(t) + f. \tag{3}$$

Оператор $A$ - представим в виде:

$$A = \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i A_i(x,t) + A_{r+1}(x,t),\ A_i u = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha^i D^\alpha u. \tag{4}$$

Неизвестными в (1), (2) являются решение $u$ и функции $q_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, входящие в правую часть (1) и оператор $A$. Мы рассматриваем 2 вида условий переопределения. В первом случае условия переопределения имеют вид

$$\int\limits_{G_i} u\varphi_i(x)dx = \psi_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, s, \tag{5}$$

где $\varphi_i(x), \psi_i(t)$ - некоторые гладкие функции, условия на которые мы уточним ниже, и $G_i \subset G$ некоторые области. Во втором случае рассматриваем условия вида

$$u(x_i, t) = \psi_i(t),\ x_i \in G,\ i = 1, 2 \ldots, s. \tag{6}$$

Параметры $s, r$ связаны равенством $r = sh$. Задача о нахождении функций $u, q_i$ с использованием краевых условий и условий переопределения может быть сформулирована и как некоторая задача управления. Обратные задачи подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях ([1]-[4]). Одной из моделей, возникающей при описании процессов тепломассопереноса, является система уравнений Навье-Стокса, дополненная уравнениями для температуры и концентраций переносимых веществ. По данным измерений на сечениях канала или некоторым другим характеристикам определяются те или иные параметры в задаче. Это или коэффициенты уравнений или плотности источников (правая часть) (см., например, [1],[4]-[9]). Во многих случаях при описании процессов тепломассопереноса используются параболические уравнения и системы. В литературе рассматривались как условия переопределения вида (5) так и условия переопределения (6). В частности, обратные задачи об определении коэффициентов уравнения (1), зависящих от переменной $t$, с условием переопределения (5), где $r = 1$ и $G_i = G$, рассматривались в [10]-[16]. Соответственно линейные обратные задачи об определении правой части исследовались в [9, 17]. Аналогично, как линейные так и коэффициентные обратные задачи с условием переопределения (6) рассматривались в [8, 18] и в ([19]-[21]) соответственно. Большое количество физических постановок и численные методы решения обратных коэффициентных задач и задач об определении функции источника с условями переопределения вида (6) приведены в [22], [23]. Задачи определения функции источника вида (3) с условиями переопределения вида (6) рассмотрены в [24, гл. 3], где основное внимание уделено численным методам решения обратных задач. В этой монографии рассматривается задача определения произвольной функции источника $G(x,t)$, исходя из произвольного количества измерений вида (6). При этом функция источника заменяется его приближением вида (3), которое и подлежит определению. Однако, отметим, что большинство работ посвящено модельным уравнениям и случаю $n = 1$. Можно отметить работы [25, 26] одного из авторов, где были рассмотрены задачи вида (1), (2), (6) в общей постановке. Мы также сошлемся на монографии [2, 10, 18, 27, 28], где имеется большое количество постановок обратных задач для параболических уравнений и систем, и ряд результатов.

В данной работе, при определенных естественных условиях на данные задачи мы показываем, что задача (1)-(5) имеет единственное решение. Далее, выбирая подходящим образом функции $\varphi_i = \varphi_i(x, \varepsilon)$, зависящее от параметра $\varepsilon > 0$ (фактически мы строим приближение $\delta$-функции Дирака, см. ниже), мы показываем, что решение $u_\varepsilon$ задачи (1)-(5) сходится к решению задачи (1)-(4), (6) при $\varepsilon \to 0$. Теоремы подобного рода важны при построении численных алгоритмов построения решений задач вида (1)-(4), (6). С одной стороны, для этих задач приходится вычислять производные высокого порядка для приближенных решений, что является некорректной задачей, и по этим причинам иногда возникают и излишние условия на коэффициенты уравнения (см., например, [8]). С другой стороны, стоит однако отметить, что чаще всего для численного решения задач (1)-(4), (6) использовались методы, основанные на минимизации некоторого функционала (который вообще говоря не являлся выпуклым) (см. например, [24] или [22]). Алгоритмы, основанные на идее приближения решений задачи (1)-(4), (6) решениями некоторых задач вида (1)-(5), позволяют построить решение довольно простым способом и с небольшим количеством расчетов, что подтверждается и численными экспериментами. В следующем параграфе мы приводим вспомогательные утверждения и условия на данные. В параграфе 3 мы формулируем и доказываем наши основные утверждения – теоремы 4, 5, 7.

## 2. Определения и вспомогательные результаты.

Пусть $E$ — банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ ($G$ — область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство сильно измеримых функций, определенных на $G$ со значениями в $E$ и конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ [29]. Мы также используем пространства $C^k(\overline{G})$, состоящие из функций, имеющих в $G$ все производные до порядка $k$ включительно, непрерывные в $G$ и допускающие непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G; E)$, $W_p^s(Q; E)$ и т.д. стандартные (см. [29, 30]). Если $E = \mathbb{C}$ или $E = \mathbb{C}^n$, то вместо $W_p^s(G; E)$ или $C^k(\overline{G}; E)$ используем обозначения $W_p^s(G)$ или $C^k(\overline{G})$. Таким образом, включение $u \in W_p^s(G)$ (или $u \in C^k(\overline{G})$) для данной вектор-функции $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ означает, что каждая из компонент $u_i$ принадлежит пространству $W_p^s(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). В этом случае под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Будем считать, что аналогичное соглашение справедливо и для матриц, т.е. включение $a \in W_p^s(G)$ для данной матрицы-функции $a = \{a_{ij}\}_{j,i=1}^k$ означает, что $a_{ij}(x) \in W_p^s(G)$ для всех $i, j$. Для данного интервала $J = (0, T)$, положим $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$, Соответственно, $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$. Через $\rho(x, M)$ обозначаем расстояние от точки $x$ до множества $M$. Символом $\nabla u$ далее обозначаем вектор $(u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n})$, т.е. градиент функции $u$ по пространственным переменным. Условие $\Gamma \in C^\alpha$ ($\alpha \geq 1$) означает, что для любой точки $x_0 \in \Gamma$ найдется окрестность $U$ (координатная окрестность) и система координат $y$ (локальная система координат), полученная путем поворота и переноса начала координат из исходной, в которой

$$\overline{U} \cap G = \{y \in \mathbb{R}^n : y' \in \overline{B_r}, \omega(y') < y_n \le \omega(y') + \delta\},$$
$$\overline{U} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}) = \{y \in \mathbb{R}^n : \omega(y') - \delta \le y_n < \omega(y')\},$$
$$\Gamma \cap \overline{U} = \{y \in \mathbb{R}^n : y' \in \overline{B_r},\ y_n = \omega(y')\},$$

где $y' = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, $B_r = \{y' :\ |y'| < r\}$, $\delta > 0$ – некоторая постоянная и $\omega \in C^\alpha(\overline{B_r})$. Без ограничения общности, считаем, что для локальной системы координат ось $y_n$ направлена по нормали к $\Gamma$ в точке $x_0$.

**Условия согласования и гладкости.** Фиксируем $p > n + 2m$. Приведем используемые ниже условия на данные задачи.

$$f \in L_p(Q),\ u_0(x) \in W_p^{2m-2m/p}(G),\ \ g_j(x,t) \in W_p^{k_j, 2mk_j}(S), \tag{7}$$

где $j = 1, 2, \dots, m$ и $k_j = 1 - \frac{m_j}{2m} - \frac{1}{2pm}$.

$$g_j(x, 0) = B_j(x, 0) u_0(x)|_{\partial G},\ j = 1, 2, \dots, m. \tag{8}$$

$$\psi_i(t) \in C^1([0, T]),\ \psi_i(0) = \int\limits_{G_i} u_0(x)\varphi_i(x)dx,\ i = 1, 2, \dots, s, \tag{9}$$

$$\psi_i(t) \in C^1([0, T]),\ \psi_i(0) = u_0(x_i),\ i = 1, 2, \dots, s. \tag{10}$$

Условия на коэффициенты операторов $A, B_j$ более или менее стандартные. Более того, для простоты выкладок мы будем использовать не самые точные условия на коэффициенты. Мы считаем, что

$$\begin{gathered} a^i_\alpha(t,x) \in L_\infty(Q)\ \ (|\alpha| < 2m),\ \ a^i_\alpha \in C(\overline{Q})\ (|\alpha| = 2m), \\ b_{j\beta} \in C^{2m-m_j}(\overline{S})\ \ (j = 1, \dots, m,\ |\beta| \le m_j). \end{gathered} \tag{11}$$

Считаем всюду далее, что граница областей $\{G_j\}$ $(j = 1, 2, \dots, s)$ из условия (5) принадлежит классу $C^1$. Мы будем использовать два вида условий на весовые функции $\{\varphi_j(x)\}$:

$$\mathit{supp}\ \varphi_j \subset \overline{G_j},\ \ \varphi_j \in W_q^1(G_j)\ (\tfrac{1}{q} + \tfrac{1}{p} = 1),\ j = 1, 2, \dots, s, \tag{12}$$

$$\mathit{supp}\ \varphi_j \subset G_j,\ \varphi_j \in L_1(G),\ j = 1, 2, \dots, s. \tag{13}$$

Пусть $G_0 = \cup_{j=1}^s G_j$, $Q_0 = G_0 \times (0, T)$. При выполнении (12) мы потребуем, чтобы:

$$b_j, f \in C([0, T]; L_p(G_0))\ (j = 1, 2, \dots, r_0), \tag{14}$$

$$a^i_\alpha \in C([0, T], W_p^1(G_0)) \text{ при } |\alpha| = 2m, \tag{15}$$

$$a^i_\alpha \in C([0, T], L_p(G_0))\ \ (i = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r + 1)\ \text{ при } |\alpha| \le 2m - 1. \tag{16}$$

Если условие (12) ослаблено и заменено на (13), то мы будем требовать выполнение условий:

$$\nabla b_k, \nabla f \in L_p(Q_0)\ \ (k = 1, 2, \dots, r_0), \tag{17}$$

$$\nabla u_0 \in W_p^{2m - \frac{2m}{p}}(G_0),\ \nabla a^i_\alpha(x,t) \in L_\infty(Q_0)\ (|\alpha| \le 2m), \tag{18}$$

$$a^i_\alpha \in C([0, T], L_\infty(G_0))\ \ (|\alpha| \le 2m - 1), \tag{19}$$

$$b_k,\ f \in C([0, T]; L_\infty(G_0))\ \ (k = 1, 2, \dots, r_0), \tag{20}$$

$$b_k(x_j,t),\ f(x_j,t),\ a^i_\alpha(x_j,t)\in C([0,T])\ \ (k=1,2,\dots,r_0,\ |\alpha|\le 2m), \tag{21}$$

где $i=r_0+1,r_0+2,\dots,r,\ j=1,2,\dots,s$.

В случае задачи (1)-(5) определим матрицу $B$ размера $r\times r$, строки которой с номерами $(k-1)h+1,\ kh,\ (k=1,2,...,s)$ занимают матрицы размера $h\times r$ со столбцами:

$$\int_G b_1(x,0)\varphi_k dx,...,\int_G b_{r_0}(x,0)\varphi_k dx,$$

$$-\int_G A_{r_0+1}(x,0)u_0\varphi_k dx,\dots,-\int_G A_r(x,0)u_0\varphi_k dx.$$

В случае задачи (1)-(4), (6) в качестве матрицы $B$ возьмем матрицу, строки которой с номерами $(k-1)h+1,\ kh,\ (k=1,2,...,s)$ занимают матрицы размера $h\times r$ со столбцами:

$$b_1(x_k,0),...,b_r(x_k,0),-A_{r_0+1}u_0(x_k,0),\dots,-A_ru_0(x_k,0).$$

В обоих случаях мы требуем, чтобы выполнялось неравенство

$$\det\, B\neq 0. \tag{22}$$

Говорим, что оператор $\partial_t+A$, $(A=\sum_{|\alpha|\le 2m}a_\alpha(x,t)D^\alpha u)$ параболичен, если найдется постоянная $\delta_1>0$ такая, что любой корень $p$ многочлена

$$\det\left(A_0(t,x,i\xi)+pE\right)=0,\ \ (A_0=\sum_{|\alpha|=2m}a_\alpha D^\alpha u)$$

($E$ – единичная матрица) удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{Re}\, p\le -\delta_1|\xi|^{2m},\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall(x,t)\in Q.$$

и выполнено условие Лопатинского, т.е. для любой точки $(t_0,x_0)\in S$ система

$$\big(\lambda E+A_0(i\xi',\partial_{y_n})\big)v(z)=0,\quad B_{j0}(i\xi',\partial_{y_n})v(0)=h_j, \tag{23}$$

$(\xi'=(\xi_1,\dots,\xi_{n-1}),\ y_n\in\mathbb{R}^+,\ j=1,2,\dots,m)$ имеет единственное решение из $C(\overline{\mathbb{R}^+})$ убывающее на бесконечности для всех $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg\lambda|\le\pi/2$ и $h_j\in E$ таких что $|\xi'|+|\lambda|\neq 0$.

Здесь $A_0(i\xi',\partial_{y_n}),B_{j0}(i\xi',\partial_{y_n})$ это есть операторы $A_0(t_0,x_0,D)$, $B_{j0}(t_0,x_0,D)$ $(B_{j0}=\sum_{|\beta|=m_j}b_{j\beta}D^\beta)$, записанные в локальной системе координат $y$. Алгебраические условия, гарантирующие выполнение (23) могут быть найдены, например, в [33]. Положим $G_{\delta,i}=\{x\in G_i:\rho(x,\partial G_i)>\delta\}$, $Q^\gamma_{\delta,i}=G_{\delta,i}\times(0,\gamma)$, $G_\delta=\cup_{i=1}^s G_{\delta,i}$ и $Q_\delta=G_\delta\times(0,T)$, $Q^\gamma_\delta=G_\delta\times(0,\gamma)$ $(\delta\ge 0)$, $Q^\gamma=G\times(0,\gamma)$. Справедлива следующая теорема

**Теорема 1.** *Пусть $G$ – ограниченная область с границей класса $C^{2m}$, выполнены условия (7), (8), коэффициенты операторов $\{B_j\}_{j=1}^m$, $A=\sum_{|\alpha|\le 2m}a_\alpha D^\alpha$ удовлетворяет условию*

$$\begin{gathered}a_\alpha(t,x)\in L_\infty(Q)\ (|\alpha|<2m),\ a_\alpha\in C(\overline{Q})\ (|\alpha|=2m),\\ b_{j\beta}\in C^{2m-m_j}(\overline{S}),\ (j=1,\dots,m,\ |\beta|\le m_j),\end{gathered} \tag{24}$$

*оператор $\partial_t+A$ параболичен и $k_j\neq 1/p$ для всех $j=1,2,\dots,m$. Тогда если $g\in L_p(Q)$, то существует единственное решение $u\in W^{1,2m}_p(Q)$ задачи*

$$u_t+A(t,x,D_x)u=g,\quad u|_{t=0}=u_0(x),\ B_ju|_S=g_j, \tag{25}$$

*удовлетворяющее оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} \le c\Big[\|g\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{W_p^{k_j,2mk_j}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)}\Big], \tag{26}$$

*где $c$ – постоянная, не зависящая от данных задачи $g, g_j, u_0$ и решения $u$. Если дополнительно выполнено условие*

$$\nabla u_0 \in W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G_0),\ \nabla a_\alpha(x,t) \in W_\infty^1(Q_0),\ |\alpha| \le 2m, \tag{27}$$

*и $\nabla g \in L_p(Q_0)$, то решение $u$ обладает свойством $\nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta)$ при всех $\delta > 0$ и при любом фиксированном $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\|\nabla u\|_{W_p^{1,2m}(Q_\delta)} + \|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} \le c\Big[\|g\|_{L_p(Q)} + \|\nabla g\|_{L_p(Q_0)} + \\ \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{W_p^{k_j,2mk_j}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|\nabla u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G_0)}\Big].\end{gathered} \tag{28}$$

*Доказательство.* Первое утверждение – следствие из теоремы 10.4 в [33]. Получим второе утверждение. Покажем, что полученное решение обладает большей гладкостью в областях $Q_{\delta,j}$. Фиксируем $\delta_2 > \delta_1 > \delta$ (считаем, что $\delta_2$ достаточно мало и таким образом $G_{\delta_2,j} \neq \emptyset$). Построим функцию $\psi_0(x) \in C_0^\infty(R^n)$; $\psi_0 \equiv 1$ в $G_{\delta_2,j}$ и $\psi_0 \equiv 0$ в $G \setminus G_{\delta_1,j}$. Положим $\Delta_i u = (u(x+e_i\eta) - u(x))/\eta$ ($e_i$ – $i$-й координатный вектор), где $|\eta| < \delta - \delta_1$. Тогда функция $\tilde v = \psi_0(x)\Delta_i u$ есть решение задачи

$$\begin{gathered}\tilde v_t + A_0(t,x,D)\tilde v = \psi_0[A_0,\Delta_i]u + \psi_0\Delta_i g + [A_0,\psi_0]\Delta_i u + \\ +\psi_0\Delta_i((A_0 - A)(u+\Phi)), \\ B_r\tilde v|_S = 0\ (r = 1,2,\dots,m),\ \tilde v|_{t=0} = \psi_0(x)\Delta_i u_0.\end{gathered} \tag{29}$$

где $[A_0,\Delta_i] = A_0\Delta_i - \Delta_i A_0$, $[A_0,\psi] = A_0\psi - \psi A_0$ и т.д. (т.е. квадратные скобки обозначают соответствующий коммутатор). Тогда функция $\tilde v$ удовлетворяет оценке (26), где правая часть, граничные функции $g_j$ и функция $u_0$ заменяются на выражения, входящие в правые части в (29), соответствующие нормы которых оцениваются постоянной не зависящей от параметра $h$. Используя лемму 4.6 главы 2 в [34], получим, что обобщенная производная $u_{x_i}$ принадлежит $W_p^{1,2m}(Q_{\delta_2,j})$ и удовлетворяет оценке

$$\|u_{x_i}\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_2,j})} \le c_0\Big[\|\nabla g\|_{L_p(Q_0)} + \|\nabla u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G_0)} + \|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)}\Big]. \tag{30}$$

В силу произвольности $\delta_2, \delta_1$ и $i, j$ заключаем, что $\nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1})$ для всех $\delta_1 > 0$. Используя (30) и (26) получим (28). □

Как следствие теоремы 1, мы имеем

**Теорема 2.** *Пусть $G$ – ограниченная область с границей класса $C^{2m}$, коэффициенты операторов $A = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha D^\alpha$, $\{B_j\}_{j=1}^m$ удовлетворяют условию (24), оператор $\partial_t + A$ параболичен, $k_j \neq 1/p$ для всех $j = 1,2,\dots,m$ и $g \in L_p(Q^\gamma)$ ($\gamma \in (0,T]$). Тогда существует единственное решение $u \in W_p^{1,2m}(Q^\gamma)$ задачи*

$$u_t + A(t,x,D_x)u = g,\quad u|_{t=0} = 0,\quad B_j u|_S = 0\ (j = 1,2,\dots,m), \tag{31}$$

*удовлетворяющее оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q^\gamma)} \le c\|g\|_{L_p(Q^\gamma)}, \tag{32}$$

*где c –постоянная, не зависящая от $\gamma$.*

*Доказательство.* Искомое решение на промежутке $[0,\gamma]$ совпадает с решением $u_\gamma$ задачи (25) с правой частью $g_\gamma = \begin{cases} g, & t \in [0,\gamma] \\ 0, & t \in (\gamma, T] \end{cases} \in L_p(Q)$ и однородными начальными и краевыми условиями. По теореме 1 имеем оценку $\|u_\gamma\|_{W_p^{2,1}(Q)} \le c\|g_\gamma\|_{L_p(Q)} \le c\|g\|_{L_p(Q^\gamma)}$ из которой и вытекает оценка (32). □

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и условия* (27) *на коэффициенты $a_\alpha$. Тогда решение u задачи* (31) *при фиксированном $\delta_1 > 0$ удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q^\gamma)} + \|\nabla u\|_{W_p^{1,2m}(Q^\gamma_{\delta_1})} \le c(\|g\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|\nabla g\|_{L_p(Q_0^\gamma)}), \tag{33}$$

*где постоянная c не зависит от $\gamma$.*

*Доказательство.* Как и ранее, искомое решение на промежутке $[0,\gamma]$ совпадает с решением $u_\gamma$ задачи (25) с правой частью $g_\gamma$ и однородными начальными и краевыми условиями. Следовательно, справедлива оценка вида (32), из которых и вытекает нужная оценка (33). □

**Замечание 1.** Фактически, чтобы получить оценку (33) нам необходимо чтобы было справедливо утверждение теоремы 2 для всех $\gamma \in (0,T]$ и условия гладкости (24), (27) на коэффициенты.

## 3. Основные результаты.

Определим постоянные $q_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ исходя из решений системы

$$\begin{gathered} \psi_{jt}(0) + \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^0 \int_G A_i u_0 \varphi_j \, dx + \int_G A_{r+1} u_0 \varphi_j \, dx = \\ \sum_{i=1}^{r_0} q_i^0 \int_G b_i(x,0) \varphi_j \, dx + \int_G f \varphi_j \, dx, \quad j = 1, 2, \ldots, s. \end{gathered} \tag{34}$$

В следующей теореме мы считаем, что

$$\text{оператор } \partial_t + A^0 \text{параболичен, } (A^0 = \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^0 A_i + A_{r+1}). \tag{35}$$

**Теорема 4.** *Пусть выполнены условия* (7)-(9), (11), (12), (14)-(16), (22), (35). *Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что на промежутке $t \in [0,\gamma_0]$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ $(\vec{q} = (q_1, .., q_r))$ задачи* (1)-(5) *такое, что*

$$u \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_0}), \; q_i(t) \in C([0,\gamma_0]), \; i = 1, 2, ..., r.$$

*Решение непрерывно зависит от данных задачи, т.е. для любых двух решений $(u^i, q_1^i, \ldots, q_r^i)$ $(i = 1, 2)$ задачи* (1)-(5) *из класса*

$$u^i \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_0}), \; q_j^i \in C([0,\gamma_0]), \; (i = 1, 2, \; j = 1, 2, \ldots, r),$$

*отвечающих двум различным наборам данных* $f^i$, $\psi_j^i$, $u_0^i$, $g_\eta^i$ $(j = 1, 2, \ldots, s,$ $i = 1, 2,$ $\eta = 1, 2, \ldots, m)$ *удовлетворяющих* (7)-(9), (11)-(12), (14)-(16) *и таким, что выполнены условия корректности* (22) *и условие*

$$||f^i||_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^{s} ||\psi_j^i||_{C^1([0,T])} + ||f^i||_{C([0,T];L_p(G_0))} +$$
$$||u_0^i||_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^{m} ||g_j^i||_{W_p^{k_j,2mk_j}(S)} \le R, \quad i = 1, 2,$$

*найдется* $\gamma_1 = \gamma_1(R)$ *такое, что справедлива оценка устойчивости*

$$||u^1 - u^2||_{W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^{r} ||q_j^1 - q_j^2||_{C([0,\gamma_1])} \le$$
$$C(||f^1 - f^2||_{L_p(Q^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^{r} ||\psi_j^1 - \psi_j^2||_{C^1([0,\gamma_1])} + ||f^1 - f^2||_{C([0,T];L_p(G_0))} +$$
$$||u_0^1 - u_0^2||_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^{m} ||g_j^1 - g_j^2||_{W_p^{k_j,2mk_j}(S^{\gamma_1})}),$$

*где постоянная* $C$ *– не зависит от* $R$, $\gamma_1$ *и* $S^{\gamma_1} = \partial G \times (0, \gamma_1)$.

*Доказательство.* Построим функцию $\Phi$ как решение задачи

$$\Phi_t + (\sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^0 A_i + A_{r+1})\Phi = f + \sum_{i=1}^{r_0} q_i^0 b_i(x,t), \tag{36}$$

$$\Phi|_{t=0} = u_0(x), \; B_j\Phi|_S = g_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{37}$$

Решение этой задачи существует и обладает свой свойствами, указанными в теореме 1. Делаем замену $V = u - \Phi$, $\vec{q} = \vec{q^1} + \vec{q^0}$ $(\vec{q^i} = (q_1^i, \ldots, q_r^i),\ i = 0, 1)$. Тогда $V$ есть решение задачи

$$\begin{gathered} V_t + A^0 V + \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^1 A_i V = \sum_{i=1}^{r_0} b_i q_i^1 - \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^1 A_i \Phi, \\ V|_{t=0} = 0, \; B_j V|_S = 0 \; (j = 1, 2, \ldots, m). \end{gathered} \tag{38}$$

Так как оператор $\partial_t + A^0$ параболичен, в силу теоремы 2 для любого $g \in L_p(Q^\tau)$ задача

$$V_t + A^0 V = g, \; V|_{t=0} = 0, \; B_j V|_S = 0 \; (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{39}$$

имеет единственное решение и справедлива оценка

$$||V||_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \le c||g||_{L_p(Q^\tau)}, \tag{40}$$

где постоянная $c$ не зависит от $\tau \in [0, T]$, $Q^\tau = G \times (0, \tau)$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$V_t + A^0 V + \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^1 A_i V = g(x,t), \tag{41}$$

$$V|_{t=0} = 0, \; B_j V|_S = 0 \; (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{42}$$

Считаем, что $\vec{q^1} \in B_{\mu,\tau} = \{\vec{q^1} \in C([0,\tau]) : \; ||\vec{q^1}||_{C([0,\tau])} \le \mu\}$, где $\tau \le T$ фиксировано. Имеем в силу теоремы 2:

$$V + (\partial_t + A^0)^{-1} \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^1 A_i V = (\partial_t + A^0)^{-1} g(x,t). \tag{43}$$

В силу оценки (40) имеем

$$\|(\partial_t + A^0)^{-1} \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^1 A_i V\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \le c\|\sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^1 A_i V\|_{L_p(Q^\tau)} \le \|\vec{q^1}\|_{C([0,\tau])} cc_1 \|V\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \le \mu cc_1 \|V\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)}. \tag{44}$$

Далее считаем, что $\mu \le \mu_0 = \frac{1}{2cc_1}$. В этом случае

$$||(\partial_t + A^0)^{-1}(\sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^1 A_i V)||_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \le \frac{1}{2}||V||_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)}.$$

и следовательно, уравнение (43) имеет единственное решение $V \in W_p^{1,2m}(Q)$ удовлетворяющее однородным краевым условиям (42) и оценке

$$\|V\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \le 2\|(\partial_t + A^0)^{-1} g\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \le 2c\|g\|_{L_p(Q^\tau)},\ \forall \vec{q^1} \in B_{\mu,\tau}. \tag{45}$$

Составим систему уравнений для нахождения $\vec{q^1}$. Интегрируем уравнение (38) с весом $\varphi_i$ по области $G$ получим

$$\int\limits_G V_t \varphi_i\, dx = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_G V\varphi_i\, dx = \tilde{\psi}_{it}(t), \quad \tilde{\psi}_i(t) = \psi_i - \int\limits_G \Phi\varphi_i\, dx,$$

и значит

$$\tilde{\psi}_{it} + \int\limits_G A^0 V\varphi_j dx + \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^1 \int\limits_G A_i V\varphi_j dx = \sum_{i=1}^{r_0} q_i^1 \int\limits_G b_i\varphi_j dx - \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^1 \int\limits_G A_i\Phi\varphi_j dx, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{46}$$

Рассмотрим матрицу $B(t)$ размера $r \times r$, строки которой с номерами $(k-1)h+1,\ kh,\ (k = 1, 2, ..., s)$ занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами

$$\int_G b_1\varphi_k dx, ..., \int_G b_{r_0}\varphi_k dx, -\int\limits_G A_{r_0+1}\Phi\varphi_k dx, \ldots, -\int\limits_G A_r\Phi\varphi_k dx.$$

Отметим, что $B(0) = B$, где матрица $B$ была определена перед (22). Покажем, что элементы матрицы $B(t)$ непрерывны по $t$. Непрерывность элементов первых $r_0$ столбцов вытекает из (11). Рассмотрим последние $r - r_0$ столбцов. Поскольку $\Phi \in W_p^{1,2m}(Q)$, в силу теорем вложения

$$\Phi \in C([0, T]; W_p^\alpha(G)), \quad \alpha \le 2m(1 - 1/p). \tag{47}$$

Это следствие, например, теоремы 1.8.3 в [29], где в качестве абстрактных банаховых пространств $A_0, A_1$ рассматриваются пространства Соболева $W_p^{2m}(G)$ и $L_p(G)$. В силу условий на $p$, $2m(1-1/p) > n/p+2m-1$ и значит, в частности, $W_p^{2m(1-1/p)}(G) \subset C^\beta(\overline{G})$ с $\beta \le 2m - 2m/p - n/p$ [29]. Таким образом,

$$W_p^{1,2m}(Q) \subset C([0, T]; W_p^{2m(1-\frac{1}{p})}(G)) \subset C([0, T]; C^\beta(\overline{G}))\ \ \beta \le 2m - \frac{2m}{p} - \frac{n}{p}. \tag{48}$$

В частности, после может быть изменения функции $\Phi$ на множестве меры 0 функции $D_x^\alpha\Phi$ при $|\alpha| \le 2m - 1$ непрерывны. Имеем $A_j\Phi = A_{j0}\Phi + A_{j1}\Phi$ ($j > r_0$, где $A_{j0}\Phi = \sum\limits_{|\alpha|=2m} a_\alpha^j D^\alpha\Phi$ и $A_{j1}\Phi = \sum\limits_{|\alpha|<2m} a_\alpha^j D^\alpha\Phi$. В силу условий (16) и указанных выше свойств функций $\Phi$ при $|\alpha| \leq 2m-1$, функции $\int_G a_\alpha^j D^\alpha \Phi \varphi_i \, dx$ непрерывны по $t$. Рассмотрим случай $|\alpha| = 2m$. Имеем

$$\int_G a_\alpha^j(x,t) D^\alpha \Phi \varphi_i dxdt = \int_{\Gamma_i} a_\alpha(x,t) D^{\alpha'} \Phi \varphi_i n_k d\Gamma - \int_{G_i} (a_\alpha \varphi_i)_{x_k} D^{\alpha'} \Phi \, dx,$$

где $D^\alpha \Phi = \frac{\partial}{\partial x_k} D^{\alpha'} \Phi$, $n_k$ – координаты единичной внешней нормали к $\Gamma_i = \partial G_i$. По тем же самым причинам (условия (16), (15) и указанные выше свойства функций $\Phi$) полученные интегралы непрерывны по $t$.

В силу непрерывности элементов матрицы $B(t)$, существует $\tau_0 > 0$ и постоянная $\tilde{\delta} > 0$ такие, что $|detB(t)| > \tilde{\delta}$, $\forall t \in [0, \tau_0]$. Равенства (46) могут быть переписаны в виде

$$B(t)\vec{q^1} = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{1t} + (A^0 V, \varphi_1) + \sum\limits_{i=r_0+1}^{r} q_i^1 (A_i V, \varphi_1) \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_{st} + (A^0 V, \varphi_s) + \sum\limits_{i=r_0+1}^{r} q_i^1 (A_i V, \varphi_s) \end{bmatrix}, \ (u,v) = \int\limits_G u\bar{v} dG.$$

Таким образом

$$\vec{q^1} = g_0 + R(\vec{q^1}), \tag{49}$$

где $g_0 = B(t)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{1t} \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_{st} \end{bmatrix}$, $R(\vec{q^1}) = B(t)^{-1} \begin{bmatrix} (A^0 V, \varphi_1) + \sum\limits_{i=r_0+1}^{r} q_i^1 (A_i V, \varphi_1) \\ \vdots \\ (A^0 V, \varphi_s) + \sum\limits_{i=r_0+1}^{r} q_i^1 (A_i V, \varphi_s) \end{bmatrix}$ и $V$ решение задачи (38), которое существует, если $\vec{q^1} \in B_{\mu,\tau}$, с $\mu \leq \mu_0$ и $\tau \leq T$.

Рассмотрим вектор

$$g_0 = B(t)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{1t} \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_{st} \end{bmatrix}.$$

Возьмем $\tau \leq \tau_0$. Имеем $\|g_0\|_{C([0,\tau])} \leq c \max\limits_{1 \leq i \leq s} \|\tilde{\psi}_{it}\|_{C([0,\tau])}$.

В силу равенств (34), $\tilde{\psi}_{it}(0) = 0$. В силу непрерывности функции $\tilde{\psi}_{it}$, $\exists \tau_1 \leq \tau_0$:

$$||g_0||_{C([0,\tau])} \leq \frac{\mu_0}{2}, \ \forall \tau_0 \leq \tau_1.$$

Покажем, что найдется $\tau_2 \leq \tau_1$ такое, что уравнение (49) имеет единственное решение в шаре $B_{\mu_0,\tau_2} = \{\vec{q^1} : \ ||\vec{q^1}||_{C([0,\tau_2])} \leq \mu_0\}$.

Получим оценки для оператора $R(\vec{q^1})$.

Пусть $\vec{q^1}, \ \vec{q^2} \in B_{\mu_0,\tau}, \ (\tau \leq \tau_1)$, и $V^1, V^2$ – решения задачи (38), где в правой части участвуют функции $\vec{q^1}$, $\vec{q^2}$, соответственно, удовлетворяющие краевым условиям $V^j|_{t=0} = 0$, $B_i V^j|_S = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2)$.

Имеем

$$V_t^j + A^0 V^j + \sum_{j=r_0+1}^{r} q_i^j A_i V^j = \sum_{i=1}^{r_0} q_i^j b_i - \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^j A_i \Phi, \tag{50}$$

$$V^j|_{t=0} = 0,\ B_i V^j|_S = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2).$$

Оценим $||R(\vec{q^1}) - R(\vec{q^2})||_{C([0,\tau])}$, имеем

(51)
$$||R(\vec{q^1}) - R(\vec{q^2})||_{C([0,\tau])} \le c \max_{1\le j\le s} ||(A^0(V^1 - V^2), \varphi_j) + \sum_{i=r_0+1}^{r} (q_i^1(A_i V^1, \varphi_j) - q_i^2(A_i V^2, \varphi_j))||_{C([0,\tau])}.$$

Вычтем уравнения (50) при $j = 1, 2$.

(52)
$$(V^1 - V^2)_t + A^0(V^1 - V^2) + \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^2(A_i V^1 - A_i V^2) = \sum_{i=1}^{r_0}(q_i^1 - q_i^2)b_i - \sum_{i=r_0+1}^{r}(q_i^1 - q_i^2)A_i V^1 - \sum_{i=1}^{r_0}(q_i^1 - q_i^2)A_i\Phi.$$

Отметим, что в силу оценки (45) функции $V^j$ удовлетворяет оценке

(53)
$$||V^j||_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \le 2C||\sum_{i=1}^{r_0} q_i^j b_i - \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^j A_i \Phi||_{L_p(Q^\tau)} \le C_1||\vec{q^j}||_{C([0,\tau])} \le C_1\mu_0,$$

где $C_1$ не зависит от $x$ и $\tau$. В силу оценки (45) и равенств (52) имеем

(54)
$$\begin{gathered} ||V^1 - V^2||_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \le \\ C_2||\vec{q^1} - \vec{q^2}||_{C([0,\tau])} + \max_i ||A_i V^1||_{L_p(Q^\tau)} C_3||\vec{q^1} - \vec{q^2}||_{C([0,\tau])} \le \\ ||\vec{q^1} - \vec{q^2}||_{C([0,\tau])}(C_2 + C_3||V^1||_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)}) \le \\ ||\vec{q^1} - \vec{q^2}||_{C([0,\tau])}(C_2 + C_3C_1\mu_0). \end{gathered}$$

Оценим правую часть в (51) используя включение $\varphi_j \in W_q^1(G_j)$. Рассмотрим $|(A^0 v, \varphi_j)|$ для $v = V^1 - V^2$. Имеем $A^0 v = A_0 v + A_1 v$, где $A_0 v = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha v$ и $A_1 v = \sum_{|\alpha|<2m} a_\alpha D^\alpha v$. При $|\alpha| \le 2m-1$, получим

$$|\int_G a_\alpha D^\alpha v \varphi_i dx| \le \|D^\alpha v\|_{L_\infty(G_0)} \le c\|v\|_{W_\infty^{2m-1}(G_0)},$$

$$c = M\max_i(\int_G |\varphi_i|^q dx)^{\frac{1}{q}},\ M = \max_{t\in[0,T],|\alpha|<2m} \|a_\alpha(x,t)\|_{L_\infty(G_0)}.$$

Таким образом,

(55)
$$|\int_G A_1 v \varphi_i dx| \le c_1\|v\|_{W_\infty^{2m-1}(G)}.$$

Рассмотрим выражение $\int_G A_0 v\varphi_i dx$. Сюда входят слагаемые

$$\int_G a_\alpha(x,t) D^\alpha v \varphi_i dx dt = \int_{\Gamma_i} a_\alpha(x,t) D^{\alpha'} v \varphi_i n_k d\Gamma - \int_{G_i} (a_\alpha \varphi_i)_{x_k} D^{\alpha'} v dx,$$

где $D^\alpha v = \frac{\partial}{\partial x_k} D^{\alpha'} v$, $n_k$ – координаты единичной внешней нормали к $\Gamma_i = \partial G_i$. Второй интеграл оценивается через

$$\int_{G_i} |a_\alpha\|D^{\alpha'} v|\cdot|\varphi_{ix_k}|dx + \int_{G_0} |a_{\alpha x_k}|\cdot|D^{\alpha'} v|\cdot|\varphi_i|dx \le$$

$$\le M\|D^{\alpha'} v\|_{L_\infty(G_0)}\Big(\int_{G_i} |\varphi_{ix_k}|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} + M_1\|D^{\alpha'} v\|_{L_\infty(G_0)}\Big(\int_{G_i} \varphi_i^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, второй интеграл оценивается через $c_1\|v\|_{W_\infty^{2m-1}(G)}$. Оцениваем первый интеграл с использованием теорем о следах (см., например, [29, 33, 34]). В силу (48) можем считать, что $v \in C([0,T];C^{2m-1}(\overline{G}))$, а в силу наших условий, что $a_\alpha \in C(\overline{Q_0})$ и значит

$$|\int\limits_{\Gamma_i} a_\alpha D^{\alpha'} v\varphi_i n_k d\Gamma| \le \|v\|_{W_\infty^{2m-1}(G)}\|a_\alpha\|_{L_\infty(G_0)}\|\varphi_i\|_{L_q(\Gamma_i)} \le c_2\|v\|_{W_\infty^{2m-1}(G)}.$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\varphi_i \in W_q^{1-1/q}(\Gamma_i)$ в силу теорем вложения. Из последних двух неравенств вытекает, что найдется постоянная $c_3$ такая, что

$$|\int_G A_0 v\varphi_i dx| \le c_3\|v\|_{W_\infty^{2m-1}(G)}. \tag{56}$$

В силу теорем вложения и интерполяционных неравенств (см. (48), [29]) имеем

$$\begin{gathered}\|v\|_{W_\infty^{2m-1}(G)} \le c_4\|v\|_{W_p^{2m-1+\frac{n}{p}}(G)} \le c_5\|v\|^\theta_{W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G)}\|v\|^{1-\theta}_{L_p(G)},\\ \theta(2m-\tfrac{2m}{p}) = 2m-1+\tfrac{n}{p}.\end{gathered} \tag{57}$$

Тогда из (55), (56), (57) следует, что

$$\max_{1\le j\le s}\|(A^0(V^1-V^2),\varphi_j)\|_{C([0,\tau])} \le C_6\|v\|^\theta_{C([0,\tau];W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G))}\|v\|^{1-\theta}_{C([0,T];L_p(G))}. \tag{58}$$

Как мы уже отмечали, $v \in C([0,\tau];W_p^{2m-2m/p}(G))$ после может быть изменения на множестве меры 0. Далее $v = \int_0^t v_\tau(x,\tau)d\tau$. Отсюда

$$||v||_{C([0,\tau];L_p(G))} \le \tau^{\frac{1}{q}}||v_t||_{L_p([0,\tau];L_p(G))}, \quad (1/p+1/q=1). \tag{59}$$

Следовательно $||(Av,\varphi_j)||_{C([0,\tau])} \le C\tau^{\frac{1-\theta}{q}}||v||_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)}$. Таким образом

$$||(A^0(V^1-V^2),\varphi_j)||_{C([0,\tau])} \le c_7\tau^{\frac{1-\theta}{q}}||V^1-V^2||_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)}, \tag{60}$$

где $C_1$ не зависит от $\tau$. Используя (54), получим

$$||(A^0(V^1-V^2),\varphi_j)||_{C([0,\tau])} \le c_8\tau^{\frac{1-\theta}{q}}\|\vec{q^1}-\vec{q^2}\|_{C([0,\tau])}, \tag{61}$$

Рассмотрим второе слагаемое в (51):

$$\begin{gathered}\sum_{i=r_0+1}^r(q_i^1(A_iV^1,\varphi_j)-q_i^2(A_iV^2,\varphi_j)) =\\ \sum_{i=r_0+1}^r(q_i^1-q_i^2)(A_iV^1,\varphi_j) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^2(A_iV^1-A_iV^2,\varphi_j).\end{gathered}$$

Слагаемые $(A_iV^1,\varphi_j)$, $(A_i(V^1-V^2),\varphi_j)$ оцениваются так же как и выражение $(A^0(V^1-V^2),\varphi_j)$ (см. (60)). Имеем

$$\begin{gathered}\|\sum_{i=r_0+1}^r(q_i^1-q_i^2)(A_iV^1,\varphi_j)\|_{C[0,\tau]} \le \|\vec{q^1}-\vec{q^2}\|_{C[0,\tau]}\tau^{\frac{1-\theta}{q}}c_9\|V^1\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \le\\ \tau^{\frac{1-\theta}{q}}C(\mu_0)\|\vec{q^1}-\vec{q^2}\|_{C([0,\tau])}.\end{gathered} \tag{62}$$

Аналогично в силу (54)

$$\begin{gathered}||\sum_{i=r_0+1}^r q_i^2(A_i(V^1-V^2),\varphi_j)|| \le \mu_0\tau^{\frac{1-\theta}{q}}C\|V^1-V^2||_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \le\\ c_{10}\tau^{\frac{1-\theta}{q}}||\vec{q^1}-\vec{q^2}||_{C([0,\tau])}.\end{gathered} \tag{63}$$

Имеем из (61)-(63), что

$$||R(\vec{q^1}) - R(\vec{q^2})||_{C[0,\tau]} \leq c_{11}\tau^{\frac{1-\theta}{q}}||\vec{q^1} - \vec{q^2}||_{C([0,\tau])}, \ \forall q^i \in B_{\mu_0,\tau}.$$

Найдем $\tau_2 \leq \tau_1$: $c_{11}\tau_2^{\frac{1-\theta}{q}} \leq \frac{1}{2}$. Тогда

$$||R(\vec{q^1}) - R(\vec{q^2})||_{C([0,\tau_2])} \leq \frac{1}{2}||\vec{q^1} - \vec{q^2}||_{C([0,\tau_2])}. \tag{64}$$

Поскольку при $\vec{q^2} = 0$ имеем $R(\vec{q^2}) = 0$, то имеем

$$\|R(\vec{q^1})\|_{C([0,\tau_2])} \leq \frac{1}{2}\|\vec{q^1}\|_{C([0,\tau_2])}. \tag{65}$$

Тогда оператор $R_0(\vec{q^1}) = g_0 + R(\vec{q^1})$ переводит шар $B_{\mu_0,\tau_2}$ в себя. Действительно,

$$||R_0(q)||_{C([0,\tau_2])} \leq ||g_0||_{C([0,\tau_2])} + ||R(\vec{q^1})||_{C([0,\tau_2])} \leq \frac{\mu_0}{2} + \frac{\mu_0}{2} = \mu_0,$$

и является в нем сжимающим. По теореме о неподвижной точке уравнения (49) имеет в этом шаре единственное решение $\vec{q^1}$. По построению, функция $V$ есть решение задачи (38). Возьмем $\gamma_0 = \tau_2$. Покажем, что $V$ удовлетворяет условию $\int\limits_G V\varphi_j dx = \tilde{\psi}_i(t)$. Интегрируем уравнение в (38) по $G$ с весом $\varphi_i$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_G \varphi_i V dx + \int\limits_G A^0 V\varphi_i dx + \sum_{j=r_0+1}^{r} q_j^1 \int\limits_G A_j V\varphi_i dx = \\ \sum_{j=1}^{r_0} q_j^1 \int\limits_G b_j\varphi_i dx - \sum_{j=r_0+1}^{r} q_j^1 \int\limits_G A_j \Phi\varphi_i dx.$$

Функции $q_j$ удовлетворяют системе (46), вычитая $i$-е уравнение которой из предыдущего равенства получим, что $\left(\int\limits_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i\right)_t = 0$ или $\int_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i = (\int\limits_G \varphi_i v dx - \tilde{\psi}_i)|_{t=0} = 0$ в силу условий согласования. Таким образом функция $v$ есть решение нашей задачи. Оценка устойчивости из утверждения теоремы фактически была получена в процессе доказательства разрешимости обратной задачи. Поэтому приведем только схему доказательства. Пусть $(u^i, \vec{q^i})$ $(\vec{q^i} = (q_1^i, \ldots, q_r^i))$ $(i = 1, 2)$ два решения задачи (1)-(5) из класса

$$u^i \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_0}), \ q_j^i \in C([0,\gamma_0]), \ (i = 1, 2, \ j = 1, 2, \ldots, r),$$

отвечающих двум различным наборам данных $f^i$, $\psi_j^i$, $u_0^i$, $g_\eta^i$ $(j = 1, 2, \ldots, s$, $i = 1, 2$, $\eta = 1, 2, \ldots, m)$ удовлетворяющих (7)-(9), (11)-(12), (14)-(16), (22) и принадлежащих шару

$$B_R = \{(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, \{g_j\}_{j=1}^m) : \ \|f\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^{s} \|\psi_j\|_{C^1([0,T])} + \\ \|f\|_{C([0,T];L_p(G_0))} + \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^{m} \|g_j\|_{W_p^{k_j,2mk_j}(S)} \leq R\}. \tag{66}$$

Для любого такого набора данных из шара $B_R$ можем построить функцию $\Phi$ как решение соответствующей задачи (36), (37) и числа $q_{0j}$ как решение системы вида (34). Условия переопределения запишутся в виде

$$\tilde{\psi}_j(t) = \psi_j - \int\limits_G \Phi\varphi_j \, dx, \ j = 1, 2, \ldots, s, i = 1, 2.$$

Каждому набору построенных функций отвечает своя матрица $B(t)$ и своя функция $g_0$, входящая в правую часть системы (49). Параметр $\mu_0$ определенный в процессе доказательства имеет одно тоже значение для всех наборов, поскольку его величина фактически определяется коэффициентами уравнения и областью $G$. Далее, легко доказать, следующее утверждение.

Пусть $\tilde{B}_R = \{u(t) \in C[0,T] : \|u\|_{C([0,T])} \le R, u(0) = 0\}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется промежуток $[0,\tau]$ такой, что $|u(t)| \le \varepsilon$ для всех $t \in [0,\tau]$ и $u \in \tilde{B}_R$.

Из этого утверждения вытекает, что найдется промежуток $[0,\tau_1]$ и число $\tilde{\delta} > 0$ такие, что

$$\|g_0\|_{C([0,\tau_1])} \le \mu_0/2, \quad |\det B(t)| \ge \tilde{\delta} \quad \forall t \in [0,\tau_1]$$

для всех наборов данных из $B_R$, и, в частности, для наших двух наборов. Далее, повторяя доказательство, мы делаем замены $q_j = q_{1j} + q_{0j}$ $(j = 1,\dots,r)$ и $V = u - \Phi$. Уравнение (49) для нахождения вектор-функции $\vec{q^1}$, $\vec{q^1} = (q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1r})$, имеет вид

$$\vec{q^1} = g_0 + R(\vec{q^1}). \tag{67}$$

Повторяя рассуждения из доказательства, приведенные выше, мы находим число $\tau_2 \le \tau_1$ такое, что уравнение (67) имеет единственное решение из $B_{\mu_0,\tau_2}$. Величина $\tau_2$, построенная в процессе доказательства определяется только нормами данных и в конечном счете величиной $R$. Теперь рассмотрим наши данные и обозначим через $\Phi_i$ решения соответствующих задач (36), (37), где $u_0$, $g_\eta$ $(\eta = 1,\dots,m)$ заменены на $u_0^i$, $g_\eta^i$, $i = 1,2$. Далее найдем соответствующие числа $q_{0j}^i$ как решения систем вида (34), отвечающих уже новым данным $\psi_j^i$ и $u_0^i$. и сделаем замену $\vec{q^i} = \vec{q_1^i} + \vec{q_0^i}$, или покоординатно $q_j^i = q_{1j}^i + q_{0j}^i$ $(j = 1,\dots,r$, $i = 1,2)$. Сделаем также замены $V^i = u^i - \Phi_i$. Тогда функции $V^i$ есть решения задач

$$\begin{gathered} V_t^i + A^0 V^i + \sum_{j=r_0+1}^{r} q_{1j}^i A_i V = \sum_{j=1}^{r_0} b_j q_{1j}^i - \sum_{j=r_0+1}^{r} q_{1j}^i A_j \Phi_i, \\ V^i|_{t=0} = 0, \ B_j V^i|_S = 0, \quad j = 1,2,\dots,m, \quad i = 1,2. \end{gathered} \tag{68}$$

а условия переопределения запишутся в виде

$$\int_G V^i \varphi_j \, dx = \tilde{\psi}_j^i(t), \quad \tilde{\psi}_j^i(t) = \psi_j - \int_G \Phi_i \varphi_j \, dx, \ j = 1,2,\dots,s, i = 1,2.$$

Уравнения (49) для вектор-функций $\vec{q^i}$ имеет вид

$$\vec{q_1^i} = g_0^i + R_i(\vec{q_1^i}), \ i = 1,2. \tag{69}$$

Далее мы применяем схему рассуждений используемую при получении оценок (64) и оцениваем $\|R_1(\vec{q_1^1}) - R_2(\vec{q_1^2})\|$. Мы получим оценку вида

$$\|R_1(\vec{q_1^1}) - R_2(\vec{q_1^2})\| \le c_1 \tau^{\frac{1-\theta}{q}} \|\vec{q^1} - \vec{q^2}\|_{C([0,\tau])} + c_2 \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)}, \quad \tau \le \tau_2.$$

Затем выбирая $\tau_3 \le \tau_2$ так чтобы $c_1 \tau_3^{\frac{1-\theta}{q}} \le 1/2$, вычитая уравнения (69) при $i = 1,2$ и используя полученное выше неравенство, придем к оценке устойчивости из утверждения теоремы для разности $\|\vec{q_1^1} - \vec{q_1^2}\|_{C([0,\tau_3])}$. Используя эту оценку уже легко получить оценку и для нормы $\|V^1 - V^2\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\tau_3})}$. $\square$

**Теорема 5.** *Пусть выполнены условия* (7)-(9), (11), (13), (22), (17)-(20), (35). *Тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что на промежутке* $t \in [0, \gamma_0]$ *существует единственное решение* $(u, q_1, .., q_r)$ *задачи* (1)-(5) *такое, что*

$$u \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_0}),\ q_i(t) \in C([0, \gamma_0]),\ i = 1, 2, ..., r.$$

*Решение непрерывно зависит от данных задачи, т.е. для любого фиксированного* $\delta_1 > 0$ *и для любых двух решений* $(u^i, q_1^i, \dots, q_r^i)$ $(i = 1, 2)$ *задачи* (1)-(5) *из класса*

$$u^i \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_0}),\ q_j^i \in C([0, \gamma_0]),\ (i = 1, 2,\ j = 1, 2, \dots, r),$$

*отвечающих двум различным наборам данных* $f^i$, $\psi_j^i$, $u_0^i$, $g_\eta^i$ $(j = 1, 2, \dots, s,$ $i = 1, 2,\ \eta = 1, 2, \dots, m)$ *таким, что выполнены условия* (7)-(9), (11), (13), (17)-(20), (35), *условие корректности* (22) *и условие*

$$\|f^i\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^{s} ||\psi_j^i\|_{C^1([0,T])} + ||f^i\|_{C([0,T];L_\infty(G_0))} + \|\nabla f^i\|_{L_p(Q_0)}$$
$$\|u_0^i\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|\nabla u_0^i\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^{m} ||g_j^i||_{W_p^{k_j,2mk_j}(S)} \le R, \quad i = 1, 2,$$

*найдется* $\gamma_1 = \gamma_1(R)$ *такое, что справедлива оценка устойчивости*

(70)
$$\begin{gathered}\|u^1 - u^2\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1})} + \|\nabla(u^1 - u^2)\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^{r} ||q_j^1 - q_j^2||_{C([0,\gamma_1])} \le \\ C(\|f^1 - f^2\|_{L_p(Q^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^{r} ||\psi_j^1 - \psi_j^2||_{C^1([0,\gamma_1])} + ||f^1 - f^2||_{C([0,T];L_\infty(G_0))} + \\ \|\nabla(f^1 - f^2)\|_{L_p(Q_0)} + \|u_0^1 - u_0^2\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \\ \|\nabla(u_0^1 - u_0^2)\|_{W_p^{2m-2m/p}(G_0)} + \sum_{j=1}^{m} ||g_j^1 - g_j^2||_{W_p^{k_j,2mk_j}(S^{\gamma_1})}),\end{gathered}$$

*где постоянная* $C$ *– не зависит от* $R$, $\gamma_1$ *и* $S^{\gamma_1} = \partial G \times (0, \gamma_1)$.

*Доказательство.* Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство предыдущей теоремы. Как и ранее утверждение сводится к исследованию вопроса о разрешимости уравнения (49). Единственное отличие в доказательстве – способ получения оценок для оператора $R$. Приведем его. Пусть $\vec{q^1},\ \vec{q^2} \in B_{\mu_0,\tau},\ (\tau \le \tau_2)$ (параметры $\mu_0, \tau_2$ определены в доказательстве предыдущей теоремы), и $V^1, V^2$ – решения задачи (38), где в правой части участвуют функции $\vec{q^1}, \vec{q^2}$, соответственно, удовлетворяющие краевым условиям $V^j|_{t=0} = 0$, $B_i V^j|_S = 0$ $(i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2)$. Имеем

(71)
$$\begin{gathered}V_t^j + A^0 V^j + \sum_{j=r_0+1}^{r} q_i^j A_i V^j = \sum_{i=1}^{r_0} q_i^j b_i - \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^j A_i \Phi, \\ V^j|_{t=0} = 0,\ B_i V^j|_S = 0,\ (i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2).\end{gathered}$$

Поскольку $\vec{q^j} \in B_{\mu_0,\tau}$, задача (71) (задача (41), (42)) разрешима и справедлива оценка (см. (45))

(72)
$$\|V^j\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \le 2c\|\sum_{i=1}^{r_0} q_i^j b_i - \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^j A_i \Phi\|_{L_p(Q^\tau)} \le c_1 \|\vec{q^j}\|_{C([0,\tau])} \le c_1 \mu_0,$$

где $c_1$ не зависит от $x$ и $t$. Найдется $\delta_1 > 0$ такое, что $\operatorname{supp} \varphi_j \subset G_{\delta_1,j} \subset G_{\delta_1}$ для всех $j$.

Используя оценку (45) и оценку из теоремы 3 (см. замечание 1.1) получим, что функции $V^j$ также удовлетворяют оценке

$$\|\nabla V^j\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^\tau)} \le c_2\|\vec{q^j}\|_{C([0,\tau])} \le c_2\mu_0. \tag{73}$$

Вычитая уравнения (71) при $j = 1, 2$, получим

$$\begin{gathered}(V^1 - V^2)_t + A^0(V^1 - V^2) + \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i^2(A_iV^1 - A_iV^2) = \\ \sum_{i=1}^{r_0}(q_i^1 - q_i^2)b_i - \sum_{i=r_0+1}^{r}(q_i^1 - q_i^2)A_iV^1 - \sum_{i=1}^{r_0}(q_i^1 - q_i^2)A_i\Phi.\end{gathered} \tag{74}$$

Опять в силу оценки (45), равенств (74) имеем

$$\|V^1 - V^2\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \le c_3\|\vec{q^1} - \vec{q^2}\|_{C([0,\tau])}, \tag{75}$$

$$\|\nabla(V^1 - V^2)\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^\tau)} \le c_4\|\vec{q^1} - \vec{q^2}\|_{C([0,\tau])}. \tag{76}$$

Оценим $||R(\vec{q^1}) - R(\vec{q^2})||_{C([0,\tau])}$. Имеем

$$\begin{gathered}\|R(\vec{q^1}) - R(\vec{q^2})\|_{C([0,\tau])} \le c \max_{1\le j\le s} \|(A^0(V^1 - V^2), \varphi_j) + \\ \sum_{i=r_0+1}^{r}(q_i^1(A_iV^1, \varphi_j) - q_i^2(A_iV^2, \varphi_j))\|_{C([0,\tau])}.\end{gathered} \tag{77}$$

Оценим правую часть в (77), используя включение $\varphi_j \in L_1(G_j)$. Рассмотрим $|(A^0v, \varphi_j)|$ для $v = V^1 - V^2$. В силу условий на коэффициенты и теорем вложения [29, 32]

$$|\int\limits_G Av\varphi_j dx| = |\int\limits_{G_{\delta_1,j}} Av\varphi_j dx| \le M \sum_{|\alpha|\le 2m} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(G_{\delta_1,j})}\|\varphi_j\|_{L_1(G)} \le$$

$$M_1\|v\|_{W_\infty^{2m}(G_{\delta_1,j})} \le M_2\|v\|_{W_p^{2m+\beta}(G_{\delta_1,j})}, \quad \beta \in (n/p, 1 - 2m/p). \tag{78}$$

Далее используя интерполяционные неравенства [29] получим оценку для последней нормы

$$\|v\|_{W_p^{2m+\beta}(G_{\delta_1,j})} \le M_3(\|\nabla v\|_{W_p^{2m-2m/p}(G_{\delta_1,j})} + \|v\|_{L_p(G_{\delta_1,j})})^\theta\|v\|_{L_p(G)}^{1-\theta}, \tag{79}$$

где $\theta(2m - 2m/p + 1) = 2m + \beta$. Неравенство справедливо для всех $j$. Следовательно, имеем (см. (48), (59))

$$\begin{gathered}\sup_{t\in(0,\tau)} |\int\limits_G Av\varphi_j dx| \le \\ M_4(\|\nabla v\|_{C([0,\tau];W_p^{2m-2m/p}(G_{\delta_1,j}))} + \|v\|_{C([0,\tau];L_p(G_{\delta_1,j}))})^\theta\|v\|_{C([0,\tau];L_p(G))}^{1-\theta} \le \\ M_5(||\nabla v||_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^\tau)} + ||v_t||_{L_p(Q_{\delta_1}^\tau)})||v_t||_{L_p(0,\tau;L_p(G))}^{1-\theta}\tau^{(1-\theta)/q},\end{gathered} \tag{80}$$

Используя неравенства (75), (76) получим

$$\sup_{t\in[0,\tau]} |\int\limits_G Av\varphi_j dx| \le M_6\|\vec{q^1} - \vec{q^2}\|_{C([0,\tau])}\tau^{(1-\theta)/q}, \tag{81}$$

где постоянная $M_6$ не зависит от $\tau$. Оценим второе слагаемое в (77). Как и в предыдущих оценках мы используем (72), (73), (75), (76). Имеем

$$\|q_i^1(A_iV^1, \varphi_j) - q_i^2(A_iV^2, \varphi_j))\|_{C([0,\tau])} \le$$

$$\|(q_i^1 - q_i^2)(A_iV^1, \varphi_j)\|_{C([0,\tau])} + \|q_i^2(A_iV^1 - A_iV^2, \varphi_j))\|_{C([0,\tau])}.$$

Как и в предыдущих оценках мы получим

$$\|(q_i^1 - q_i^2)(A_iV^1, \varphi_j)\|_{C([0,\tau])} + \|q_i^2(A_iV^1 - A_iV^2, \varphi_j)\|_{C([0,\tau])} \leq c\tau^{(1-\theta)/q}\|\vec{q^1} - \vec{q^2}\|. \tag{82}$$

Из (81), (82) вытекает оценка

$$||R(\vec{q^1}) - R(\vec{q^2})||_{C([0,\tau])} \leq c\tau^{(1-\theta)/q}\|\vec{q^1} - \vec{q^2}\|_{C([0,\tau])}. \tag{83}$$

В частности,

$$||R(\vec{q^1})|| \leq c\tau^{(1-\theta)/q}||\vec{q^1}||_{C([0,\tau])}. \tag{84}$$

Выберем параметр $\tau_2 \leq \tau_1$ (см. доказательство теоремы 4) такой, что $c\tau_2^{\frac{1-\theta}{q}} = \frac{1}{2}$. Тогда $\forall \tau \in [0, \tau_2]$. Имеем $\|R(\vec{q^1}) - R(\vec{q^2})\|\|_{C[0,\tau]} \leq \frac{1}{2}\|\vec{q^1} - \vec{q^2}\|_{C[0,\tau]}$ и $\|g_0 + R(q)\|_{C[0,\tau]} \leq \mu_0$.

Таким образом оператор $g_0 + R(q)$ переводит шар $B_{\mu_0,\tau_2}$ в себя и является в нем сжимающим. Следовательно уравнение (49) имеет единственное решение в этом шаре и это решение удовлетворяет оценке

$$\|\vec{q}\|_{C[0,\tau_2]} \leq 2\|g_0\|_{C([0,\tau_2])}. \tag{85}$$

Остальные рассуждения совпадают с рассуждениями из предыдущей теоремы.

Рассмотрим задачу (1)—(4), (6). Определим постоянные $q_{0i}$ исходя из решений системы

$$\psi_{jt}(0) + \sum_{i=r_0+1}^{r} q_{0i}A_iu_0(x_j, 0) + A_{r+1}u_0(x_j, 0) = \sum_{i=1}^{r_0} q_{0i}b_i(x_j, 0) + f(x_j, 0). \tag{86}$$

Заменим условие (35) на условие

$$\text{оператор } \partial_t + A^0 \text{ параболичен, } \; A^0 = \sum_{i=r_0+1}^{r} q_{0i}A_i(x, 0, D) + A_{r+1}(x, 0, D). \tag{87}$$

Положим $B_\delta(x_0) = \{x : |x - x_0| < \delta\}$ – шар радиуса $\delta$ с центром в точке $x_0$. Фиксируем $\delta_0 > 0$ такое, что $B_{\delta_0}(x_j) \subset G$ и $B_{\delta_0}(x_j) \cap B_{\delta_0}(x_i) = \emptyset$ при $i \neq j$. Здесь $\{x_j\}$ – точки из условия (6). В качестве областей $G_j$ мы возьмем области $B_{\delta_0}(x_j)$. Соответственно, $G_0 = G_0(\delta_0) = \cup_{j=1}^{s} G_j$. Таким образом, в нашем случае области $G_0, Q_0$ зависит от параметра $\delta_0 > 0$. □

Мы воспользуемся теоремой 1 из [25] в соответствии с которой:

**Теорема 6.** *При выполнении условий* (7)-(8), (10), (11), (22), (21), (87) *и условий* (17), (18) *для некоторого* $\delta_0 > 0$, *найдется такое* $\tau_2 > 0$, *что на* $[0, \tau_2]$ *существует единственное решение задачи* (1)-(4), (6) *такое, что* $\vec{q} \in C([0, \tau_2])$, $u \in W_p^{1,2m}(Q^{\tau_2}), \nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\tau_2})$ *для всех* $\delta \in (0, \delta_0)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(B_1)$ ($B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$) такую, что $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$ и $\varphi(x) \geq 0$ для всех $x$. Определим $\varphi_{j\varepsilon}(x) = \varphi(\frac{x-x_j}{\varepsilon})\frac{1}{\varepsilon^n}$. Имеем $\|\varphi_{j\varepsilon}\|_{L_1(G)} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{j\varepsilon}(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\frac{x-x_j}{\varepsilon})dx = 1$. Введем $r_{j\varepsilon} = \int_G \varphi_{j\varepsilon}(x)u_0(x)\,dx - u_0(x_j)$. В силу теорем вложения и условий на функцию $u_0$ легко увидеть, что найдется постоянная $M > 0$ такая, что $|r_{j\varepsilon}| \leq M\varepsilon$ для всех $j$. Рассмотрим задачу (1)-(5), где $\varphi_j = \varphi_{j\varepsilon}$, $\varepsilon < \delta_0$, $G_j = B_{\delta_0}(x_j)$, а в качестве функций $\psi_j$ возьмем функции $\psi_{j\varepsilon} = \psi_j(t) + r_{j\varepsilon}$. По построению и в силу условий (10),

$$\psi_{j\varepsilon}(0) = \int_G \varphi_{j\varepsilon} u_0(x)\,dx.$$

Решение этой задачи (1)-(5) (оно существует локально по времени по теореме 5) обозначим через $u_\varepsilon$, $\vec{q}_\varepsilon$ ($\vec{q}_\varepsilon = (q_1^\varepsilon, ..., q_r^\varepsilon)$), а решение задачи (1)–(4), (6) через $u, \vec{q}$ ($\vec{q} = (q_1, ..., q_r)$).

**Теорема 7.** *Пусть выполнены условия* (7)-(8), (10), (11), (87), (22) *и для некоторого* $\delta_0 > 0$ *условия* (17)-(21) , $b_j \in C(\overline{Q_0})$ $(j = 1, 2, \dots, r_0)$, $f \in C(\overline{Q_0})$. *Тогда найдется промежуток* $[0, \tau_0]$, *не зависящий от* $\varepsilon$ *такой, что*

1) *на* $[0, \tau_0]$ *существует единственное решение задачи* (1)-(4), (6) *такое, что* $\vec{q} \in C([0, \tau_0]), u \in W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0}), \nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\tau_0}),\ \forall \delta \in (0, \delta_0)$.

2) *при всех* $\varepsilon \le \varepsilon_0$ *и некоторого* $\varepsilon_0 > 0$ *на* $[0, \tau_0]$ *существует единственное решение* $(u_\varepsilon, \vec{q_\varepsilon})$ *задачи* (1)–(5) *такое, что* $\vec{q_\varepsilon} \in C([0, \tau_0]), u_\varepsilon \in W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0})$, $\nabla u_\varepsilon \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\tau_0})$ *при всех* $\delta \in (0, \delta_0)$.

3) *при фиксированном* $\delta_1 < \delta_0$ *имеем*

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0})} + \|\nabla(u_\varepsilon - u)\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^{\tau_0})} + \sum_{j=1}^{r} \|q_i^\varepsilon - q_i\|_{C([0,\tau_0])} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

*Если дополнительно предположить, что* $b_j \in C([0, T]; C^\alpha(\overline{G_0}))$, $(j = 1, \dots, r_0)$, $f \in C([0, T]; C^\alpha(\overline{G_0}))$ *для некоторого* $\alpha \le 1-(n+2m)/p$, *то справедлива оценка*

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0})} + \|\nabla(u_\varepsilon - u)\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^{\tau_0})} + \sum_{j=1}^{r} \|q_i^\varepsilon - q_i\|_{C([0,\tau_0])} \le c\varepsilon^\alpha,$$

*где постоянная* $c$ *не зависит от* $\varepsilon$.

*Доказательство.* Пусть $u$, есть решение задачи (1)–(4), (6), которое существует по теореме 6 на некотором промежутке $[0, \tau_1]$. Рассмотрим задачу (1)-(5), где $\varphi_j = \varphi_{j\varepsilon}$, $\varepsilon < \delta_0$, а в качестве функций $\psi_j$ взяты функции $\psi_{j\varepsilon} = \psi_j(t) + r_{j\varepsilon}$. Покажем ее разрешимость. У нас выполнены все условия теоремы 5 за исключением может быть условия (22). Соответствующую матрицу $B$ ($B(t)$ см. обозначение в доказательстве теоремы 4) обозначим через $B_\varepsilon$ ($B_\varepsilon(t)$). Строки матрицы $B_\varepsilon$ с номерами от $(k-1)h+1$ до $kh$, $(k = 1, 2, ..., s)$ занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами:

$$\int_G b_1(x, 0)\varphi_{k\varepsilon} dx, ..., \int_G b_{r_0}(x, 0)\varphi_{k\varepsilon} dx,$$

$$-\int_G A_{r_0+1}(x, 0)u_0\varphi_{k\varepsilon} dx, \dots, -\int_G A_r(x, 0)u_0\varphi_{k\varepsilon} dx.$$

Соответственно, строки матрицы $B_\varepsilon(t)$ с номерами $(k-1)h+1,\ kh$, $(k = 1, 2, ..., s)$ занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами:

$$\int_G b_1(x, t)\varphi_{k\varepsilon} dx, ..., \int_G b_{r_0}(x, t)\varphi_{k\varepsilon} dx,$$

$$-\int_G A_{r_0+1}\Phi(x, t)\varphi_{k\varepsilon} dx, \dots, -\int_G A_r\Phi(x, t)\varphi_{k\varepsilon} dx.$$

Через $B(t)$ обозначим матрицу строки которой с номерами $(k-1)h+1,\ kh$, $(k=1,2,...,s)$ занимают матрицы размера $h\times r$ со столбцами:

$$b_1(x_k,t),...,b_r(x_k,t),-A_{r_0+1}\Phi(x_k,t),\dots,-A_r\Phi(x_k,t).$$

По условию и в силу непрерывности элементов матрицы $B(t)$ по $t$ найдется $\tau_2>0$ и $\delta_2>0$ такие, что

$$|\det B(t)|\geq\delta_2 \ \text{ для всех } t\in[0,\tau_2].$$

Фиксируем $\delta_1<\delta_0$. Покажем что найдется $\varepsilon_0\in(0,\delta_1)$ такое, что

$$|\det B_\varepsilon(t)|\geq\delta_2/3 \ \text{ для всех } t\in[0,\tau_2],\varepsilon\in(0,\varepsilon_0].$$

Достаточно доказать сходимость элементов матрицы $B_\varepsilon(t)$ к элементам $B(t)$ при $\varepsilon\to0$ откуда будет вытекать, что начиная с некоторого $\varepsilon_0$ первая матрица также будет невырожденной и справедливо вышеприведенное неравенство. Действительно, имеем

(88)
$$\left|\int_G b_j(x,t)\varphi_{k\varepsilon}dx-b_j(x_j,t)\right|=\left|\int_{B_1(0)}(b_j(x_j+\eta\varepsilon,t)-b_j(x_j,t))\varphi(\eta)d\eta\right|\to0$$

в силу равномерной непрерывности $b_j$ на $Q_0$. Аналогичная сходимость имеет место и для столбцов $\int_G A_j\Phi\varphi_\varepsilon\,dx$. Таким образом, величина $\tau_2$ со свойствами указанными выше действительно существует. Тогда как легко увидеть из доказательств (см. доказательства теорем 4, 5) найдется промежуток $[0,\tau_3]$ $(\tau_3\leq\tau_2)$, на котором решение задачи $u_\varepsilon$ (1)-(5) существует и удовлетворяет оценке (70), где $u^1=u_\varepsilon$ и $u^2\equiv0$. Более того, величина $\tau_3$ будет зависеть норм данных задачи и не будет зависеть от $\varepsilon\leq\varepsilon_0$. Таким образом, имеет место равномерная по $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\tau_3})}+\|\nabla_x u_\varepsilon\|_{W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\tau_3})}+\sum_{i=1}^{r}\|q_i^\varepsilon(t)\|_{C([0,\tau_3])}\leq M. \tag{89}$$

Функции $u$ и $u_\varepsilon$ есть решение задач

$$\begin{gathered}u_{\varepsilon t}+A_{r+1}u_\varepsilon+\sum_{i=r_0+1}^{r}q_i^\varepsilon A_iu_\varepsilon=\sum_{i=0}^{r_0}b_iq_i^\varepsilon,\\ u_\varepsilon|_{t=0}=u_0,\ B_ju_\varepsilon|_S=g_j,\ j=1,2,...,m,\end{gathered}\tag{90}$$

$$\begin{gathered}u_t+A_{r+1}u+\sum_{i=r_0+1}^{r}q_iA_iu=\sum_{i=0}^{r_0}b_iq_i\\ u|_{t=0}=u_0,\ B_ju|_S=g_j,\ j=1,2,...,m.\end{gathered}\tag{91}$$

Выполнены условия

$$u(x_i,t)=\psi_i,\ i=1,...,r \tag{92}$$

$$\int_G u_\varepsilon\varphi_{i\varepsilon}dx=\psi_{i\varepsilon},\ i=1,...,r \tag{93}$$

В силу теоремы 1, $\nabla u,\nabla u_\varepsilon\in W_q^{1,2m}(Q_\delta)$, $\forall\delta>0$. Фиксируем $\delta\in(0,\delta_1)$ и считаем, что $\varepsilon<\delta_1-\delta$. Обозначим $\omega_\varepsilon=u_\varepsilon-u$ и $a_i^\varepsilon=q_i^\varepsilon-q_i$. Вычитая (90) и (91) а также (92), (93), получим

$$\omega_{\varepsilon t}+A_{r+1}\omega_\varepsilon+\sum_{i=r_0+1}^{r}(q_i^\varepsilon A_iu_\varepsilon-q_iA_iu)=\sum_{i=0}^{r_0}b_ia_i^\varepsilon,$$

$$\int_G \omega_\varepsilon \varphi_{j\varepsilon} dx = \int_G (u(x,t) - u(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon} dx + r_{j\varepsilon}.$$

Или имеем

$$\omega_{\varepsilon t} + A_0\omega_\varepsilon = \sum_{i=0}^{r_0} b_i a_i^\varepsilon - \sum_{i=r_0+1}^{r} a_i^\varepsilon A_i u_\varepsilon, \quad A_0\omega_\varepsilon = A_{r+1}\omega_\varepsilon + \sum_{i=r_0+1}^{r} q_i A_i \omega_\varepsilon. \tag{94}$$

$$\begin{gathered} \omega_\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad B_j\omega_\varepsilon|_S = 0, \\ \int_G \omega_\varepsilon \varphi_{j\varepsilon} dx = \int_G (u(x,t) - u(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon} dx + r_{j\varepsilon}, \ j = 1,2,...,m. \end{gathered} \tag{95}$$

Рассмотрим оператор $A_0$. Отметим, что величины $q_i(0)$ совпадают с величинами $q_{0i}$, построенными перед теоремой 6. Чтобы в этом убедиться достаточно положить $t = 0$, $x = x_j$ в (91). Тогда в силу условия (87) оператор $\partial_t + A_0(x,0,D) = A^0$ параболичен. И значит найдется такое $\tau_4 \le \tau_3$, что оператор $\partial_t + A_0(x,t,D)$ параболичен на $[0,\tau_4]$. Этот результат может быть найден в известной литературе по параболическим задачам. Однако, нам на самом деле нужен менее общий результат о справедливости теоремы 1 (соответственно теорем 2 и 3) в том случае, если оператор $A$ в теореме 1 заменяется на оператор $A_0(x,t,D)$ а $T$ на некоторый малый параметр $\tau_4 > 0$. Это утверждение легко вытекает из теоремы о неподвижной точке в силу непрерывности старших коэффициентов. Рассмотрим матрицы $\tilde{B}_\varepsilon(t)$, $B$; строки которых с номерами от $(k-1)h+1$ до $kh$, $(k = 1,2,...,s)$ занимают матрицы размера $h\times r$ со столбцами:

$$\begin{gathered} \int_G b_1(x,t)\varphi_{k\varepsilon}dx, ..., \int_G b_{r_0}(x,t)\varphi_{k\varepsilon}dx, \\ -\int_G A_{r_0+1}u_\varepsilon(x,t)\varphi_{k\varepsilon}dx, \dots, -\int_G A_r u_\varepsilon(x,t)\varphi_{k\varepsilon}dx \\ b_1(x_k,t), ..., b_{r_0}(x_k,t), -A_{r_0+1}u_0(x_k,0), \dots, -A_r u_0(x_k,0). \end{gathered}$$

Имеем, что $|\det B| \ge \delta_0 > 0$. Как и выше мы покажем, что найдутся постоянные $\tau_5 \le \tau_4$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что $|\det B_\varepsilon(t)| \ge \delta_0/3 > 0$ для всех $t \in [0,\tau_5]$ и всех $\varepsilon \le \varepsilon_0$. В силу непрерывности функций $\{b_j\}$ имеем, что

$$\Big\| \int_G b_j(x,t)\varphi_{k\varepsilon}dx - b_j(x_j,t) \Big\|_{C([0,\tau_4])} \to 0 \tag{96}$$

при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, для любого $\delta_0 > 0$ найдутся $\tau > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что

$$\Big\| \int_G b_j(x,t)\varphi_{k\varepsilon}dx - b_j(x_j,0) \Big\|_{C([0,\tau_4])} < \delta_0 \tag{97}$$

для всех $t \in [0,\tau]$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$. Рассмотрим разность

$$\begin{gathered} \int_G A_k u_\varepsilon(x,t)\varphi_{k\varepsilon}dx - A_k(x_j,0)u_0(x_j) = \\ \int_G A_k(x,t)u_\varepsilon(x,t)\varphi_{k\varepsilon} - A_k(x_j,0)u_\varepsilon(x_j,0)\varphi_{k\varepsilon}\, dx = I. \end{gathered} \tag{98}$$

Последний интеграл может быть переписан в виде

$$\begin{gathered} I = \int_G (A_k(x,t)u_\varepsilon(x,t) - A_k(x_j,t)u_\varepsilon(x_j,t))\varphi_{k\varepsilon}\, dx + \\ \int_G (A_k(x_j,t)u_\varepsilon(x_j,t) - A_k(x_j,0)u_\varepsilon(x_j,t))\varphi_{k\varepsilon}\, dx + \\ \int_G (A_k(x_j,0)u_\varepsilon(x_j,t)) - A_k(x_j,0)u_\varepsilon(x_j,0)))\varphi_{k\varepsilon}\, dx = I_1 + I_2 + I_3. \end{gathered}$$

Мы имеем, что $u \in L_p(0,T;W_p^{2m+1}(G_{\delta_1}))$, $u_t \in L_p(0,T;W_p^1(G_{\delta_1}))$. Как следствие теоремы 1.8.3 в [29], $u \in C([0,T];W_p^{2m+1-2m/p}(G_{\delta_1}))$ и значит в силу теорем вложения $u \in C([0,T];C^{\beta}(\overline{G_{\delta_1}}))$, $\beta = 2m+1-(2m+n)/p$. В силу условий на коэффициенты операторов $A_i$ имеем, что $A_i u \in ([0,T];C^{1-(2m+n)/p}(\overline{G_{\delta_1}}))$.

В силу оценки (89) имеем следующую оценку для $I_1$:

$$\begin{gathered}\left|\int_G (A_k(x,t)u_\varepsilon(x,t) - A_k(x_j,t)u_\varepsilon(x_j,t))\varphi_{k\varepsilon}\,dx\right| \leq \\ c\varepsilon^{\alpha}\|A_k(x,t)u_\varepsilon(x,t)\|_{C^{\alpha}(\overline{B_{\delta_1}(x_j)})} \leq \\ c\|A_k(x,t)u_\varepsilon(x,t)\|_{W_p^1(B_{\delta_1}(x_j))}\varepsilon^{\alpha} \leq c_1\varepsilon^{\alpha}, \quad t\in[0,\tau_4].\end{gathered} \tag{99}$$

Фиксируем $\delta_0 > 0$ и найдем $\tau_6$ такое, что $\|a_\alpha^j(x,t) - a_\alpha^j(x,0)\|_{C([0,\tau_6];L_\infty(G_0))} \leq \delta_0$ для всех $|\alpha| \leq 2m$ и $j = r_0+1,\dots,r$. Тогда как легко увидеть из доказательства оценки (80), найдется $\tau_7$ такое, что

$$\begin{gathered}\sup_{t\in(0,\tau_7)} I_2(t) \leq \\ c_1\delta_0(\|\nabla u_\varepsilon\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^{\tau})} + ||u_\varepsilon||_{L_p(Q_{\delta_1}^{\tau})})||u_{\varepsilon t}||^{1-\theta}_{L_p(0,\tau;L_p(G))} \leq c_3\delta_0,\end{gathered} \tag{100}$$

для всех $\tau \leq \tau_7$. где при получении последнего неравенства мы также использовали (89). В силу оценок (80) и (89) найдется $\tau_8$ такое, что при $\tau \leq \tau_8$ $(v = u_\varepsilon(x_j,t) - u_\varepsilon(x_j,0))$, имеем

$$\begin{gathered}\sup_{t\in(0,\tau)} I_3(t) \leq \\ c(||\nabla v||_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^{\tau})} + ||v_t||_{L_p(Q_{\delta_1}^{\tau})})||v_t||^{1-\theta}_{L_p(0,\tau;L_p(G))}\tau^{(1-\theta)/q} \leq c_2\tau^{(1-\theta)/q},\end{gathered} \tag{101}$$

где постоянная $c_2$ не зависит от $\varepsilon$ и $\tau \leq \tau_8$. Из (99)–(101), (97) вытекает, что найдется $\tau_5, \varepsilon_0 > 0$ такие, что при $\tau \leq \tau_5$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполнено $|\det B_\varepsilon(t)| \geq \delta_0/3 > 0$ для всех $t \in [0,\tau_5]$ и всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Таким образом определитель матрицы $\tilde{B}_\varepsilon(t)$ равномерно по $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $t \in [0,\tau_5]$ отделен от 0. Это обстоятельство позволяет сослаться на оценку устойчивости из теоремы 5, где одно из решений есть функция $u_1 = \omega_\varepsilon$ а второе $u_2 \equiv 0$. Роль вектор-функции $\vec{q^1}$ играет вектор-функция $\vec{a^\varepsilon} = (a_1^\varepsilon,\dots,a_r^\varepsilon)$ а роль вектор-функции $q^2$ вектор-функция равная нулю. Эта оценка имеет вид ($\delta_1 > 0$ – фиксированное число)

$$\begin{gathered}\|\omega_\varepsilon\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1})} + \|\nabla\omega_\varepsilon\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^{r}\|a_j^\varepsilon\|_{C([0,\gamma_1])} \leq \\ c_1\Big(\sum_{j=1}^{s}|r_{j\varepsilon}| + \sum_{j=1}^{s}\|\int_G (u(x,t)-u(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}\,dx\|_{C^1([0,\gamma_1])}\Big),\end{gathered} \tag{102}$$

где $\gamma_1 \leq \tau_5$ – фиксированное число, не зависящее от параметра $\varepsilon > 0$. Правая часть здесь стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Действительно, оценим, например, наиболее сложное выражение

$$\|\int_G (u_t(x,t) - u_t(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}\,dx\|_{C([0,\gamma_1])}.$$

Из (91) имеем, что

$$u_t = -A_{r+1}u - \sum_{i=r_0+1}^{r} q_iA_iu + \sum_{i=0}^{r_0} b_iq_i.$$

Оценим, например,

$$|\int_G (q_iA_iu(x,t) - q_iA_iu(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}\,dx| \le$$

$$M\varepsilon^\beta \|A_iu(x,t)\|_{C^\beta(\overline{G_{\delta_1}})} \le$$

$$M_1\varepsilon^\beta \|A_iu(x,t)\|_{C([0,T];C^\beta(\overline{G_{\delta_1}}))},\ \beta = 1-(n+2m)/p.$$

Таким образом, правая часть действительно стремится к нулю. Покажем нужную оценку. Как мы уже показали

$$|\int_G (q_iA_iu(x,t) - q_iA_iu(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}\,dx| \le c\varepsilon^\beta,$$

где постоянная $c$ не зависит от $\varepsilon$. Аналогично,

$$|\int_G (q_ib_i(x,t) - q_ib_i(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}\,dx| \le c\varepsilon^\alpha \|b_i\|_{C([0,T];C^\alpha(\overline{G_{\delta_1}}))},$$

$$|\int_G (f(x,t) - f(x_j,t))\varphi_{j\varepsilon}\,dx| \le c\varepsilon^\alpha \|f\|_{C([0,T];C^\alpha(\overline{G_{\delta_1}}))}.$$

Из этих неравенств и вытекает требуемое. □

## Список литературы


[1] Г.В. Алексеев, *Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики*, М.: Научный мир, 2010.

[2] Yu.Ya. Belov, *Inverse problems for parabolic equations*, VSP, Utrecht, 2002.

[3] M. Levandowsky, W.S. Childress, S.H. Hunter, E.A. Spiegel, *A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms*, J. Protozoology. **22** (1975), 296–309.

[4] A. Capatina, R. Stavre, *A control problem in biconvective flow*, J. Math. Kyoto Univ. **37**:4 (1997), 585–595. MR1625968

[5] Г.В. Алексеев, Е.А. Калинина, *Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции*, Сиб. жур. индустриальной математики. **10** (2007), 3–16. MR2411993

[6] G.V. Alekseev, *Coefficient Inverse Extremum Problems for Stationary Heat and Mass Transfer Equations*, Comp. Math. and Math. Phys. **47**:6 (2007), 1007–1028. MR2743069

[7] O.M. Babeshko, O.V. Evdokimova, S.M. Evdokimov, *On taking into account the types of sources and settling zones of pollutants*, Dokl. Math. **61**:2 (2000), 283–285. MR1773347

[8] Е.А. Калинина, *Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии*, Дальневосточный матем. жур. **5**:1 (2004), 89–99.

[9] Ю.А. Криксин, С.Н. Плющев, Е.А. Самарская, В.Ф. Тишкин, *Обратная задача восстановления плотности источника для уравнения конвекции-диффузии*, Матем. моделирование. **7**:11 (1995), 95–108. MR1601532

[10] A.D. Iskenderov, A.Ya. Akhundov, *Inverse problem for a linear system of parabolic equations*, Doklady Mathematics. **79**:1 (2009), 73–75. MR2513143

[11] M.I. Ismailov, F. Kanca, *Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data*, Inverse Problems In Science and Engineering. **20**:4 (2012), 463–476.

[12] M.I. Ivanchov, *Inverse problem of simulataneous determination of two coefficients in a parabolic equation*, Ukrainian Math. J. **52**:3 (2000), 379–387. MR1800382

[13] Li Jing, Xu Youjun, *An inverse coefficient problem with nonlinear parabolic equation*, J. Appl. Math. Comput. **34**:1–2 (2010), 195–206. MR2718781

[14] V.L. Kamynin, E. Franchini, *An inverse problem for a higher-order parabolic equation*, Mathematical Notes. **64**:5–6 (1998), 590–599. MR1691210

[15] N.B. Kerimov, M.I. Ismailov, *An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **396**:2 (2012), 546–554. MR2961248

[16] А.И. Кожанов, *Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени*, Ж. Вычисл. Матем. и матем. физ. **45**:12 (2005), 2168–2184. MR2203665

[17] I.A. Vasin, V.L. Kamynin, *On the asymptotic behavior of solutions to inverse problems for parabolic equations*, Siberian Mathematical Journal. **38**:4 (1997), 647–662. MR1474910

[18] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I. A. Vasin I. A., *Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics*, Marcel Dekker, Inc., New-York, 1999.

[19] A.P. Tryanin, *Determination of heat-transfer coefficients at the inlet into a porous body and inside it by solving the inverse problem*, Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal, **52**:3 (1987), 469–475.

[20] M. Dehghan, F. Shakeri, *Method of lines solutions of the parabolic inverse problem with an overspecification at a points*, Numer Algor., **50**:4 (2009), 417–437. MR2496646

[21] M. Dehghan, *Numerical computation of a control function in a partial differential equation*, Applied mathematics and computation, **147**:2 (2004), 397–408. MR2012580

[22] О.М. Алифанов, Е.А. Артюхов, А.В. Ненароком, *Обратные задачи сложного теплообмена*, Янус-К, Москва, 2009.

[23] O.M. Alifanov, *Inverse Heat Transfer Problems*, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 1994. Zbl 0979.80003

[24] M.N. Ozisik, H.A.B. Orlando, *Inverse heat transfer*, Taylor & Francis, New-York, 2000.

[25] S.G. Pyatkov, M.L. Samkov, *On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations*, Sib. Adv. in Math., **22**:4 (2012), 287–302.

[26] S.G. Pyatkov, *On some classes of inverse problems for parabolic equations*, J. Inv. Ill-Posed problems, **18**:8 (2011), 917–934.

[27] M. Ivanchov, *Inverse problems for equations of parabolic type*, Math. Studies. Monograph Series, **10** (2003). MR2406459

[28] С.И. Кабанихин, *Обратные и некоректные задачи*, Сибирское научное издательство, Новосибирск, 2009.

[29] Х. Трибель, *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы*, М.: Мир, 1980. MR2284819

[30] H. Amann, *Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces*, Glasnik matematicki, **35(55)**:1 (2000), 161–177. MR1783238

[31] H. Amann, *Operator-valued Foutier multipliers, vector-valued Besov spaces and applications*, Mathem. Nachr., **186**:1 (1997), 5–56. MR1461211

[32] H. Amann, *Linear and Quasilinear Parabolic Problems. V.I.*, Birkhauser Verlag. Basel, Boston, Berlin, 1995. MR1345385

[33] О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: Наука, 1967. Zbl 0164.12302

[34] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, М.: Наука, 1973. MR0509265

[35] S.G. Pyatkov, B.N. Tsybikov, *On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations*, J. Evol. Equat., **11**:1 (2011), 155–186. MR2780577

Сергей Григорьевич Пятков
Югорский Государственный Университет,
ул. Чехова 16,
628012, Ханты-Мансийск, Россия
*E-mail address*: s_pyatkov@ugrasu.ru

Сафонов Егор Иванович
Югорский Государственный Университет,
ул. Чехова 16,
628012, Ханты-Мансийск, Россия
*E-mail address*: dc.gerz.hd@gmail.com