S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 833–856 (2014) УДК 514.8, 517.983, 519.6
MSC 44A30

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЛУЧЕВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В РЕФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

Е.Ю. ДЕРЕВЦОВ, С.В. МАЛЬЦЕВА, И.Е. СВЕТОВ

Abstract. We suggest an approach to an approximate inversion of the ray transform operator acting on functions given in Riemannian domain. We construct an inversion algorithm with usage of ray and beam transforms, back-projection operator and Fourier transform. The algorithm is investigated by numerical experiments. The results of simulation are compared with results of the other algorithm constructed on the base of least square method by means of B-splines.

Keywords: tomography, refraction, ray transform, back-projection operator, inversion formula, Fourier transform, least square method, B-splines.

1. Вводные замечания и предварительные сведения

Один из широко известных способов решения задачи вычислительной томографии, состоящей в определении функции по ее известному преобразованию Радона, основан на использовании так называемых формул обращения [1-4], которые, в различных сочетаниях и последовательностях, включают в себя такие операторы, как обратная проекция, потенциал Рисса, преобразования Фурье и Гильберта.

Разновидность томографии, характеризуемая термином “рефракционная”, подразумевает, что в соответствующих математических моделях учитывается эффект искривления луча, с необходимостью возникающий в неоднородных

Derevtsov, E.Yu., Maltseva, S.V., Svetov, I.E., A numerical inversion of the ray transform operator in refraction tomography.

© 2014 Деревцов Е.Ю., Мальцева С.В., Светов И.Е.

Работа осуществлена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 14-01-31491-мол_а, 12-01-00074-а), СО РАН (проект совместных фундаментальных исследований СО РАН - УрО РАН 2012-32) .

Поступила 16 июня 2014 г., опубликована 20 ноября 2014 г.

средах. Заметим, что этот эффект в подавляющем большинстве постановок "классической" томографии пренебрежимо мал, поэтому в модель не включается. Но, например, в рамках постановок сейсмической томографии рефракция представляет собой важнейший элемент модели, и пренебречь им уже невозможно. Отметим также, что явление рефракции можно ввести не только в модель скалярной томографии, но также и в модели, соответствующие векторной и тензорной томографии. Задача восстановления функции или векторного поля в случае, если рефракция (даже значительная) в среде известна, была успешно решена алгоритмами, построенными на основе метода наименьших квадратов с использованием многочленов или B-сплайнов в качестве базисов [5-7]. Влияние степени рефракции на точность восстановления функции МНК-алгоритмом и методом приближенного обращения [8] исследовалось в [9]. В приближении эйконала и малой степени рефракции, задача исследовалась, например, в [10,11]. Формулы обращения получены для преобразований, представляющих собой интегралы вдоль некоторых семейств регулярных кривых, обладающих свойствами инвариантности относительно определенных геометрических преобразований, см., например, [12-14].

Насколько известно авторам, в настоящее время для лучевого преобразования, задаваемого интегралами вдоль геодезических произвольной римановой метрики, не существует строго обоснованных формул обращения, — по форме аналогичным используемым в "классической" томографии, — которые в результате давали бы искомую функцию. Возникает вопрос, можно ли для восстановления функций, заданных в римановой области, метрика которой моделирует рефракцию, воспользоваться известными формулами обращения, заменив в них известные операторы другими, построенными с учетом искривления лучей? Мы предлагаем, основываясь на экспериментальном подходе, модификации известных формул обращения и их всестороннее численное исследование на тестовом материале (в [15] проведена апробация для сред с малой рефракцией). Для сравнения использовались результаты восстановления, полученные уже апробированным и неплохо себя зарекомендовавшим в задаче рефракционной томографии алгоритмом [6], построенным на основе метода наименьших квадратов (МНК) с использованием B-сплайнов в качестве базиса.

Далее во введении приводятся определения основных множеств, пространств и операторов, на которых основаны формулы обращения. Особое внимание обращено на те из них, в которых использованы преобразование Фурье и оператор обратной проекции. В следующем параграфе описывается одна из математических моделей среды с рефракцией, а именно риманова область. Приведены обобщения операторов, необходимых для приближенного обращения лучевого преобразования, действующего в римановой области. В параграфе 3 описываются алгоритмы МНК, с использованием B-сплайнов, и Фурье-алгоритм приближенного обращения. В последнем параграфе приводятся результаты численных экспериментов, тестирования и сравнения результатов, полученных на основе предлагаемого подхода и подхода на основе МНК.

Предварительные сведения. Введем обозначения для следующих множеств: B для единичного круга, $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x^1)^2 + (x^2)^2 < 1\}$; ∂B для единичной окружности; $\xi^\perp$ для подпространства $\{y \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \xi, y\rangle = 0\}$, ортогонального вектору $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in \partial B$; Z для цилиндра $\partial B \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$; T для

касательного расслоения сферы $\partial B \times \xi^{\perp} = \{(\xi, x) \mid \xi \in \partial B, \langle x, \xi\rangle = 0\} \subset \mathbb{R}^4$. Для любого $\xi \in \partial B$ существует такое $\alpha \in [0\,;\,2\pi)$, что $\xi = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Для вектора $(-\sin\alpha, \cos\alpha) \in \partial B$ введем обозначение η, $\langle \eta, \xi\rangle = 0$. Вектор ξ является нормальным, а η — направляющим вектором прямой $L_{\xi,s}$, вдоль которой осуществляется интегрирование.

Пусть функция $\varphi(x)$, $x = (x^1, x^2)$, задана в B. *Преобразование Радона* $\mathcal{R}\varphi$ функции φ,

$$(\mathcal{R}\varphi)(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s\xi + t\eta)dt, \tag{1}$$

задается интегралами по прямым $L_{\xi,s} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \xi\,,\, x\rangle - s = 0\}$ и отображает функции (например, из $C_0^\infty(B)$), заданные в B, в функции (например, из $C_0^\infty(Z)$), заданные в цилиндре Z.

Лучевое преобразование $\mathcal{P}$ отображает функцию $\varphi(x)$, заданную в B, в множество значений ее интегралов вдоль всех прямых из $\mathbb{R}^2$, т.е. в множество функций, определенных в T,

$$(\mathcal{P}\varphi)(\eta, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + t\eta)dt; \tag{2}$$

прямая проходит через точку $x \in \mathbb{R}^2$ в направлении вектора $\eta \in \partial B$.

Отметим, что преобразования Радона и лучевое совпадают, с точностью до способа задания прямых интегрирования. Лучевое преобразование инвариантно относительно выбора точки x, если она принадлежит прямой, вдоль которой производится интегрирование, $x \in L_{\xi,s}$. Если же выбор точки осуществлять по удобному правилу $x = s\xi$, то формулы (1) и (2) идентичны.

Веерное преобразование задается формулой

$$(\mathcal{I}\varphi)(x, \eta) = \int_{0}^{\infty} \varphi(x + t\eta)dt, \tag{3}$$

и представляет собой интеграл от функции φ вдоль луча с началом в точке $x \in \mathbb{R}^2$ и направляющим вектором $\eta \in \partial B$.

Оператор обратной проекции (для преобразования Радона) $\mathcal{R}^{\#}$ задается формулой

$$(\mathcal{R}^{\#}g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} g(\xi, \langle x, \xi\rangle)\, d\alpha, \tag{4}$$

где $g(\xi, s)$ определена в Z и, в частности, функция g может совпадать с $\mathcal{R}\varphi$ для некоторой φ, заданной в B.

Оператор обратной проекции (для лучевого преобразования) $\mathcal{P}^{\#}$ задается следующим образом,

$$(\mathcal{P}^{\#}g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} g(\xi, E_\xi x)\, d\alpha, \tag{5}$$

где $g(\xi, y)$ определена в T, E_ξ — оператор ортогональной проекции на подпространство $\xi^{\perp}$. В частности, g может быть равной $\mathcal{P}f$ для некоторой функции φ.

Операторы обратной проекции представляют собой усреднение значений преобразования Радона или лучевого (примененных к функции φ), вычисленных вдоль всех прямых, проходящих через точку x, и позволяют “вернуться” из

пространства функций, зависящих от переменных ξ, s (или η, x) в пространство функций, зависящих от исходных переменных $x = (x^1, x^2)$.

Формулы обращения. Для преобразования Радона, как и для лучевого, имеется целое семейство формул обращения, см., например [4], и основанных на них алгоритмов. Указанное семейство формул использует потенциал Рисса, который, при $0 \leqslant a < 2$, можно определить с помощью преобразования Фурье,

$$\widehat{(\mathbf{I}^a\varphi)}\ \ (y) = |y|^{-a}\widehat{\varphi}(y).$$

Когда оператор $\mathbf{I}^a$ применяется к функциям, определенным на Z (или T), он действует по второй переменной (второй группе переменных). Так, если $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, то $\widehat{(\mathbf{I}^a\varphi)} \in L_1(\mathbb{R}^2)$, поэтому $\mathbf{I}^{-a}(\mathbf{I}^a\varphi) = \varphi$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Тогда для любого a, $0 \leqslant a < 2$,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\mathbf{I}^{-a}\mathcal{R}^{\#}\mathbf{I}^{a-1}g, \quad g = \mathcal{R}\varphi, \tag{6}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\mathbf{I}^{-a}\mathcal{P}^{\#}\mathbf{I}^{a-1}g, \quad g = \mathcal{P}\varphi. \tag{7}$$

Сравнивая формулы обращения (6) и (7), мы видим, что они отличаются лишь используемыми в них операторами обратной проекции (4) и (5), которые в нашем случае (размерность пространства равна 2) совпадают с точностью до обозначений переменных.

При $a = 1$ получаем, с использованием оператора обратной проекции и преобразования Фурье, простую формулу обращения. Пусть, для определенности, $g(\xi, s) \in C_0^\infty(Z)$, $g(\xi, s) = (\mathcal{R}\varphi)(\xi, s)$ для некоторой функции $\varphi \in C_0^\infty(B)$. Подставляя в оператор обратной проекции

$$f(x) = (\mathcal{R}^{\#}g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\mathcal{R}\varphi)(\xi(\alpha), x^1\cos\alpha + x^2\sin\alpha)\,d\alpha, \tag{8}$$

выражение (1), получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s\xi + t\xi^{\perp})\,dt\Big)\,d\alpha.$$

Производя замену переменной $y = s\xi + t\xi^{\perp}$, разбивая внутренний интеграл на два, в пределах от $-\infty$ до 0 и от 0 до ∞, и замечая, что $t\,dt\,d\alpha = dy^1\,dy^2 \equiv dy$, а $t = |x - y|$, получим представление

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\varphi(y)}{|x-y|}\,dy \tag{9}$$

для обратной проекции $f(x)$ в виде свертки, $f = \dfrac{1}{\pi}\varphi * |x|^{-1}$. Применяя к обеим частям преобразование Фурье и используя теорему о свертке, приходим к соотношению $\widehat{f} = \widehat{\varphi}\cdot h$, где $h = \big(\widehat{|x|^{-1}}\big)$, откуда $\widehat{\varphi} = \widehat{f}\,/\,h$. Применяя к полученному выражению обратное преобразование Фурье, приходим к формуле обращения

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\widehat{f}(y)}{h(y)}\exp\big(\mathbf{i}\langle x, y\rangle\big)\,dy. \tag{10}$$

С использованием аппарата псевдодифференциальных операторов формулу обращения можно записать в следующем виде,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(-\Delta)^{1/2} f(x) = \frac{1}{2}\big((-\Delta)^{1/2}(\mathcal{R}^{\#} g)\big)(x), \tag{11}$$

для $g = \mathcal{R}\varphi$. Таким образом, (11) представляет собой композицию оператора обратной проекции и нелокального псевдодифференциального оператора $(-\Delta)^{1/2}$ с символом $|y|$.

Алгоритм, основанный на (10), строится следующим образом. Исходя из известного преобразования Радона $g(\xi, s) = \mathcal{R}\varphi$ функции φ, вычисляется его обратная проекция $f(x) = (\mathcal{R}^{\#} g)$, а затем ее двумерное преобразование Фурье $\widehat{f}(y)$. Далее вычисляем преобразование Фурье $h(y)$ функции $|x|^{-1}$ и находим отношение $\widehat{f}\,/\,h$. Наконец, применяя двумерное обратное преобразование Фурье к полученному выражению, получаем искомую функцию φ. Вычисление обратной проекции сводится к однократному интегрированию в пределах от 0 до 2π, и здесь в нашем распоряжении многочисленные квадратурные формулы. Преобразование Фурье, как прямое, так и обратное, заменяется дискретным, а наличие его быстрого варианта (БПФ) существенно уменьшает время расчетов.

К преимуществам описанного алгоритма относится его замечательная простота. Но у него имеются и недостатки. Так, обратная проекция $f(x) = (\mathcal{R}^{\#} g)$, где $g(\xi, s) = \mathcal{R}\varphi$ для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ или $\varphi \in \mathcal{S}$, $(\varphi > 0)$, не только определена на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, но и медленно убывает на бесконечности. Вообще говоря, $f \in \mathcal{S}'$, т.е. является элементом медленно растущих на бесконечности функций и, в частности, $f \notin L_2(\mathbb{R}^2)$. Кроме того, дискретное преобразование Фурье, в отличие от непрерывного, предполагает "замену" как исходной функции, так и ее образа, некоторыми периодическими. При этом такая аппроксимация тем хуже, чем медленнее убывание преобразуемой функции на бесконечности.

2. Элементы модели среды с рефракцией

Пусть в единичном круге B задана риманова метрика g с элементом длины

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j \tag{12}$$

и компонентами $g_{ij}(x)$ метрического тензора — определенными в B достаточно гладкими функциями; матрица g положительно определена и симметрична. В формуле (12) и далее используется правило суммирования, заключающееся в том, что по повторяющимся сверху и снизу в одном мономе индексам подразумевается суммирование от 1 до 2. Пара $(B,\, g)$ является компактным римановым многообразием с атласом, состоящим из одной карты; предполагается, что она удовлетворяет следующим дополнительным условиям: 1) метрика g является *простой*, т.е. обладает тем свойством, что любые две точки области B можно соединить единственной геодезической метрики g конечной длины; 2) область B *выпукла относительно метрики* g, т.е. любая геодезическая, соединяющая две произвольные точки границы ∂B, целиком принадлежит области B. Будем называть такое многообразие *римановой областью.*

Множество $\xi, \eta, \ldots$ векторов единичной, в смысле метрики (12), длины будем обозначать через $S(B)$ или S.

Пусть $x \in B$, $\eta \in S$. Через $\gamma_{x,\eta}(t) : [\tau_-(x,\eta), \tau_+(x,\eta)] \to B$ обозначаем геодезическую, удовлетворяющую начальным условиям $\gamma_{x,\eta}(0) = x$, $\dot{\gamma}_{x,\eta}(0) = \eta$, а

через $\tau_-(x,\eta)$ и $\tau_+(x,\eta)$ — значения параметра (длины дуги), при которых геодезическая пересекает окружность ∂B. В частности, если точка x принадлежит окружности, $x \in \partial B$, геодезическая $\gamma_{x,\eta}(t) : [\tau_-(x,\eta), 0] \to B$ удовлетворяет тем же начальным условиям, 0 — значение параметра, соответствующего точке границы x, а $\tau_-(x,\eta) < 0$ — значение параметра, при котором геодезическая пересекает окружность ∂B во второй раз.

Если в области задана риманова метрика, то роль оператора Лапласа выполняет оператор Лапласа-Бельтрами, уже с зависящими от метрики переменными коэффициентами. Его можно определить следующим образом.

Пусть $\varphi(x)$ — скалярное поле. *Дифференциальным параметром Бельтрами второго рода поля* $\varphi(x)$, см., например, [16], называется дивергенция

$$\widetilde{\Delta}\varphi = g^{ij}(\varphi_{;i})_{;j} = (g^{ij}\varphi_{;i})_{;j}$$

градиента $\varphi_{;i}$ поля φ, которая называется также оператором Лапласа-Бельтрами,

$$\widetilde{\Delta}\varphi = g^{ij}\varphi_{;i;j}.$$

Последний легко может быть приведен к дивергентному виду

$$\widetilde{\Delta}\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\sqrt{g}g^{jk}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\Big) \tag{13}$$

простыми преобразованиями,

$$\begin{aligned}
\varphi^j_{;j} &= \frac{\partial\varphi^j}{\partial x^j} + \Gamma^j_{kj}\varphi^k = \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\Big) + \Gamma^j_{kj}g^{ki}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\Big(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j} + \sqrt{g}\,\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^j}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\Big) + \Gamma^j_{kj}g^{ki}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\Big(\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial x^j}\big(g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\big)\Big) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}g^{ki}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\sqrt{g}g^{jk}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\Big),
\end{aligned}$$

где $\varphi_i = \varphi_{;i} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i}$, $\varphi^j = g^{ji}\varphi_i$ и использовано хорошо известное свойство символов Кристоффеля, $\Gamma^j_{kj} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}$. Через g обозначен определитель матрицы (g_{ij}).

Выделим особо класс конформно-евклидовых метрик,

$$ds^2 = \lambda^2(x)|dx|^2, \tag{14}$$

где $|dx|$ — элемент евклидовой длины. К этому классу, в частности, принадлежат римановы метрики постоянной положительной или отрицательной кривизны. В этом случае вид оператора Лапласа-Бельтрами существенно упрощается,

$$\widetilde{\Delta}\varphi = \frac{1}{\lambda^2(x)}\Delta\varphi, \tag{15}$$

и, как видим, отличается от оператора Лапласа Δ лишь на положительную функцию.

Определение (2) оператора лучевого преобразования носит общий характер, т.е. оно пригодно для задания лучевого преобразования в пространстве любой размерности. Лучевое же преобразование в двумерном пространстве,

особенно удобное для вычислительных целей, можно охарактеризовать посредством задания двух углов. Пусть функция $\varphi(x)$ задана в B. Зафиксируем точку $x = (x^1, x^2) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, принадлежащую окружности ∂B; вектор $\nu(x)$ внешней нормали с началом в точке x; единичный (направляющий) вектор $\eta = \big(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta)\big)$, где β — угол между нормалью $\nu(x)$ и вектором η, $-\pi/2 \leqslant \beta \leqslant \pi/2$. Тогда лучевое преобразование можно задать формулой

$$(\mathcal{P}\varphi)(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+\eta t)dt = \int_{-2\cos\beta}^{0} \varphi(x+\eta t)dt, \tag{16}$$

где $x+\eta t = \big(\cos\alpha + t\cos(\alpha+\beta), \sin\alpha + t\sin(\alpha+\beta)\big)$. Прямая $L_{x,\eta}$, вдоль которой производится интегрирование, проходит через точку $x \in \mathbb{R}^2$ в направлении вектора $\eta \in \partial B$.

Определение лучевого преобразования именно в такой форме естественным образом обобщается на случай римановой области (B, g). Именно, лучевое преобразование $\mathcal{P}$ функции φ, $x \in \partial B$, $\eta \in S$, представляет собой линейный ограниченный оператор, определяемый равенством

$$(\mathcal{P}\varphi)(x,\eta) \equiv (\mathcal{P}\varphi)(\alpha,\beta) = \int_{\tau_-(x,\eta)}^{0} \varphi(\gamma_{x,\eta}(t))dt. \tag{17}$$

Здесь, как и в (16), $x = (\cos\alpha, \sin\alpha) \in \partial B$, но при этом $\eta^1 = \cos(\alpha+\beta)/\Delta(\eta)$, $\eta^2 = \sin(\alpha+\beta)/\Delta(\eta)$, где

$$\Delta^2(\eta) = g_{11}\cos^2(\alpha+\beta) + 2g_{12}\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta) + g_{22}\sin^2(\alpha+\beta), \tag{18}$$

т.е. $\Delta(\eta)$ — риманова длина вектора $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$. Таким образом, интегрирование в (17) ведется по всей геодезической с началом в точке $\gamma_{x,\eta}(\tau_-(x,\eta))$ и концом в точке $\gamma_{x,\eta}(0)$. Для точек $x \in B$ лучевое преобразование можно определить как

$$(\mathcal{P}\varphi)(x,\eta) = \int_{\tau_-(x,\eta)}^{\tau_+(x,\eta)} \varphi(\gamma_{x,\eta}(t))dt; \tag{19}$$

интегрирование ведется вдоль всей геодезической с началом в точке $\gamma_{x,\eta}(\tau_-(x,\eta))$ и концом в точке $\gamma_{x,\eta}(\tau_+(x,\eta))$.

Веерное преобразование задается формулой

$$(\mathcal{I}\varphi)(x,\xi) \equiv (\mathcal{I}\varphi)(x,\alpha) = \int_{\tau_-(x,\xi)}^{0} \varphi(\gamma_{x,\xi}(t))dt, \tag{20}$$

и представляет собой интеграл от функции φ вдоль части геодезической, один конец которой расположен в точке $x \in B$; при этом направляющий вектор $\xi \in S$, $\xi = \big(\cos\alpha/\Delta(\xi), \sin\alpha/\Delta(\xi)\big)$. Другой конец рассматриваемой части геодезической принадлежит ∂B, и он задается значением $\gamma_{x,\xi}(\tau_-(x,\xi))$. Таким образом, интегрирование в веерном преобразовании ведется по отрицательным значениям параметра, задаваемого, напомним, длиной дуги.

Связь между лучевым, заданным формулой (19), и веерным преобразованиями описывается следующим соотношением,

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}\varphi)(x,\xi) &= (\mathcal{I}\varphi)(x,\xi) + (\mathcal{I}\varphi)(x,-\xi)\\ &= \int_{\tau_-(x,\xi)}^{0} \varphi(\gamma_{x,\xi}(t))dt + \int_{-\tau_+(x,\xi)}^{0} \varphi(\gamma_{x,-\xi}(t))dt.\end{aligned} \tag{21}$$

Замечание. В то время как лучевое и веерное преобразования достаточно естественно обобщаются на криволинейный случай, то с обобщением преобразования Радона, образ которого зависит, напомним, от s и ξ, все не так просто. По-видимому, содержательное обобщение, по крайней мере в двумерном случае, возможно лишь для метрик постоянной кривизны.

Оператор обратной проекции также легко поддается обобщению, но лишь для лучевого преобразования, и для точек $x \in B$. Для точек же $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B$ обобщение неоднозначно.

Оператор обратной проекции $\mathcal{P}^{\#}$ задается следующим образом,

$$(\mathcal{P}^{\#}g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\big(\eta, E_{\gamma_{x,\theta}}(x,\eta)\big)\,d\theta, \tag{22}$$

где $\eta = \big(\cos\theta/\Delta(\eta), \sin\theta/\Delta(\eta)\big)$; функция $g(\eta, y)$ определена в $T = S \times \eta^{\perp}$, и в частности g может быть образом лучевого преобразования $\mathcal{P}$, примененного к некоторой функции φ. В дальнейшем именно такая ситуация и будет подразумеваться. Оператор $E_{\gamma_{x,\theta}}$ в (22), $E_{\gamma_{x,\theta}} : B \times S \to \partial B \times S$ представляет собой оператор проекции пары (x, η) в пару $(\tilde{x}, \tilde{\eta})$, $\tilde{x} \in \partial B$ вдоль геодезической $\gamma_{x,\eta}(t)$. Мы проектируем точку x по аналогии с правилом, используемым в определении веерного преобразования, вдоль той части геодезической, которая соответствует отрицательным значениям параметра.

Заметим, что длина геодезической $\gamma_{x,\xi}$ с началом в точке $\gamma_{x,\xi}(\tau_-(x,\xi)) \in \partial B$ и концом в точке $\gamma_{x,\xi}(\tau_+(x,\xi)) \in \partial B$, равна $\tau_+(x,\xi) - \tau_-(x,\xi)$. Следует отметить и то, что значение лучевого преобразования $(\mathcal{P}\varphi)(x,\xi)$, заданного (19), инвариантно относительно переноса точки x вдоль геодезической в любом направлении. Напомним, что вектор $\chi_{x,\xi}(t)$ ортогонален (в смысле римановой метрики) касательному к геодезической $\gamma_{x,\xi}$ вектору $\dot{\gamma}_{x,\xi}(t)$, при одном и том же значении параметра t, если для любого $t \in [\tau_-(x,\xi), 0]$

$$g_{ij}(x)\dot{\gamma}^i_{x,\xi}(t)\chi^j_{x,\xi}(t) = 0.$$

3. Алгоритмы обращения лучевого преобразования

Здесь приведены описания двух алгоритмов решения задачи рефракционной томографии. Первый из них обоснован как теоретически, так и численно, и представляет собой модификацию метода наименьших квадратов (МНК), см., например [5], [9]; в качестве базиса в алгоритме выступают B-сплайны [6]. Второй основан на одной из формул обращения, хорошо известной [3] в случае использования модели среды без рефракции.

3.1. МНК-алгоритм с использованием B-сплайнов. Общая схема МНК-алгоритма.

Пусть вложение $H_1 \subset H_2$ сепарабельных гильбертовых пространств непрерывно и H_1 плотно в H_2, W — третье сепарабельное гильбертово пространство, и $\mathcal{A} : H_1 \to W$ линейный ограниченный оператор, удовлетворяющий оценке $\|f\|_{H_2} \leqslant C\ \|\mathcal{A}f\|_W$. Ставится задача найти приближенное решение f_δ уравнения

$$\mathcal{A}f = g$$

с приближенно заданной правой частью $g_\delta \in W$, т.е. такой, что

$$\|g_\delta - g\|_W = \|g_\delta - \mathcal{A}f\|_W < \delta.$$

Выберем в пространстве H_1 предельно плотную последовательность подпространств (последовательность подпространств называется [17] предельно плотной в пространстве Z, если для любого элемента $z \in Z$ последовательность ортогональных проекций на эти подпространства сходится к z при $n \to \infty$), задаваемых множествами линейно независимых элементов, $Q_n = \{\varphi_{nk}\}_{k=1}^{n^2}$. Так как H_1 плотно в H_2, то последовательность подпространств, задаваемых множествами Q_n, предельно плотна и в H_2. В силу инъективности оператора $\mathcal{A}$ элементы множества $U_n = \{\psi_{nk} = \mathcal{A}\varphi_{nk}\}_{k=1}^{n^2}$ линейно независимы для любого n.

Пусть задан элемент $g_\delta \in W$. Фиксируя некоторое n, положим

$$g_{\delta n} = \sum_{k=1}^{n^2} c_{nk}\psi_{nk}.$$

Предположим, что мы нашли коэффициенты c_{nk}, минимизирующие норму

$$\|g_\delta - g_{\delta n}\|_W. \tag{23}$$

В силу линейности оператора $\mathcal{A}$ и способа образования множеств Q_n и U_n имеем $g_{\delta n} = \sum_{k=1}^{n^2} c_{nk}\psi_{nk} = \sum_{k=1}^{n^2} c_{nk}\mathcal{A}\varphi_{nk} = \mathcal{A}\Big(\sum_{k=1}^{n^2} c_{nk}\varphi_{nk}\Big) = \mathcal{A}f_{\delta n}$, где

$$f_{\delta n} = \sum_{k=1}^{n^2} c_{nk}\varphi_{nk}. \tag{24}$$

Сходимость (безусловная) таким образом полученной аппроксимации к точному решению, т.е. $\|f - f_{\delta n}\|_{H_2} \to 0$ при $\delta \to 0$, $n \to \infty$, показана в [5].

Требование минимизации нормы (23) приводит к системе линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n^2} c_{nk}\langle\psi_{nk}, \psi_{nm}\rangle_W = \langle g_\delta, \psi_{nm}\rangle_W, \qquad m = \overline{1, n^2} \tag{25}$$

с матрицей Грама. Система (25) имеет единственное решение, которое можно получить посредством одного из многочисленных точных или итерационных численных методов.

Укажем функциональные пространства, в рамках которых реализован основанный на МНК алгоритм. В качестве пространства H_1 выбрано пространство Соболева $H^1(B)$. Пространством H_2 является $L_2(B)$. Вложение $H^1(B) \subset L_2(B)$ непрерывно и его образ плотен в $L_2(B)$. В качестве пространства W выбирается пространство Соболева $H^1(\partial B \times S)$. Оператор $\mathcal{A}$, описанный в общей схеме алгоритма, определяется формулой (16).

Опишем подробнее шаги и процедуры дискретизаций, которые, на разных этапах, включает в себя МНК-алгоритм с использованием B-сплайнов.

Дискретизация значений переменных α, β. Задавая натуральные L_1 и L_2, получаем дискретные последовательности α_i, $i = 0, 1, \ldots, 4L_1 - 1$; β_j, $j = -L_2 + 1, \ldots, L_2 - 1$, $\Delta\alpha = \pi/2L_1$, $\Delta\beta = \pi/2L_2$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, углов α, β. Через $N_\alpha = 4L_1$ и $N_\beta = 2L_2$ обозначим количество углов по α и β, соответственно. Натуральные L_1 и L_2 выбирались в соответствии с требованиями, налагаемыми процедурой БПФ. Задание α_i означает фиксацию точки (x_i^1, x_i^2)

$= (\cos\alpha_i, \sin\alpha_i) \in \partial B$, из которой "выпускается" геодезическая в направлении $\xi_{ij} = (-\cos(\alpha_i+\beta_j)/\Delta(\xi_{ij}),\ -\sin(\alpha_i+\beta_j)/\Delta(\xi_{ij}))$, где $\Delta(\xi_{ij})$ — риманова длина вектора $(-\cos(\alpha_i+\beta_j),\ -\sin(\alpha_i+\beta_j))$

Задание двумерных B-сплайнов [18]. Пусть на отрезке $[-1,1]$ задано равномерное разбиение $\Delta_N : -1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ с шагом $h = t_i - t_{i-1} = 2/N$. Одномерный B-сплайн 3-й степени с отрезком-носителем $[t_i, t_{i+4}]$ определяется формулой

$$B_3^i(t) = \begin{cases} (2h + t - t_{i+2})^3/6h^3, & \text{для } t \in [t_i, t_{i+1}), \\ (4h^3 - 6h(t-t_{i+2})^2 - 3(t-t_{i+2})^3)/6h^3, & \text{для } t \in [t_{i+1}, t_{i+2}), \\ (4h^3 - 6h(t-t_{i+2})^2 + 3(t-t_{i+2})^3)/6h^3, & \text{для } t \in [t_{i+2}, t_{i+3}), \\ (2h - t + t_{i+2})^3/6h^3, & \text{для } t \in [t_{i+3}, t_{i+4}], \\ 0, & \text{для } t \notin [t_i, t_{i+4}]. \end{cases}$$

Тензорное произведение одномерных сплайнов $B_3^i(t^1)$ и $B_3^j(t^2)$ есть двумерный B-сплайн $B_3^{ij}(t^1,t^2) = B_3^i(t^1) \times B_3^j(t^2)$ по равномерному разбиению $\Delta_N \times \Delta_N$. Выбор шага равномерного разбиения $\Delta_N \times \Delta_N$ на квадрате $[-1,1]^2$, ячейки которой служат носителями двумерных B-сплайнов, определяет размерность конечномерных подпространств базисных функций. В базис входят только те двумерные B-сплайны, носитель которых полностью лежит внутри круга B; их количество обозначим через p.

Дискретизация процедуры проведения геодезических римановой метрики сводится к приближенному решению системы уравнений первого порядка (обозначение $q_1(s) := x^1(s)$, $q_2(s) := x^2(s)$), которой удовлетворяют геодезические,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_1}{ds} &= q_3, \\ \frac{dq_2}{ds} &= q_4, \\ \frac{dq_3}{ds} &= -\Gamma^1_{11}q_3^2 - \Gamma^1_{12}q_3q_4 - \Gamma^1_{22}q_4^2, \\ \frac{dq_4}{ds} &= -\Gamma^2_{11}q_3^2 - \Gamma^2_{12}q_3q_4 - \Gamma^2_{22}q_4^2, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

с начальными условиями $q_1(0) = \cos\alpha$, $q_2(0) = \sin\alpha$, $q_3(0) = -\cos(\alpha+\beta)/\Delta(q)$, $q_4(0) = -\sin(\alpha+\beta)/\Delta(q)$. Здесь $\Delta(q)$ — риманова длина вектора $(-\cos(\alpha+\beta), -\sin(\alpha+\beta))$. Для численного решения системы (26) использовался один из вариантов метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности по шагу $\triangle s$ — схема Мерсона [19], позволяющая оценивать погрешность вычисления правых частей на каждом шаге и, в случае необходимости, автоматически уменьшать или увеличивать шаг дискретизации $\triangle s$ параметра s (длина дуги геодезической).

Приближенное вычисление интегралов вдоль геодезических. Вычисление значений лучевого преобразования (16) для базисных B-сплайнов и восстанавливаемой функции, заключающееся в интегрировании вдоль геодезической, производилось с помощью квадратурной формулы Боде высокой степени точности. Отметим, что вычисление лучевого преобразования требует контроля нескольких условий: а) выхода геодезической за пределы единичного круга; б) погрешности вычисления правых частей в схеме Мерсона; в) условие

постоянства шага h на текущем промежутке $[s_l, s_{l+4}]$ в квадратурной формуле Боде.

Вычисление скалярных произведений для построения матрицы и правой части системы (25)**.** Для 2π-периодической по каждому аргументу действительной функции $f(\alpha,\beta)$ через

$$c_{l,m}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha,\beta)e^{-i(l\alpha+m\beta)}\,d\alpha\,d\beta, \qquad -\infty < l,\ m < \infty, \tag{27}$$

обозначим ее коэффициенты Фурье. Одним из дискретных аналогов соотношения (27) является дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Скалярное произведение для функций $f, g \in C^\infty(\partial B \times S)$ определим следующим образом,

$$\langle f, g\rangle_{H^1(\partial B\times S)} = \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} (1 + l^2 + m^2)\, c_{l,m}(f)\,\overline{c_{l,m}(g)}. \tag{28}$$

В качестве дискретного аналога скалярного произведения вида (28) был выбран вариант

$$\langle f, g\rangle_{H^1(\partial B\times S)} = \sum_{l,m=0}^{N-1} \left(1 + (l - N/2)^2 + (m - N/2)^2\right) c_{l,m}(f)\,\overline{c_{l,m}(g)},$$

который в сочетании с известными свойствами ДПФ [20] позволяет вдвое сократить размер основного массива, в котором размещены коэффициенты системы уравнений (25). Выбор дискретизации данных в соответствии с требованиями, налагаемыми процедурой БПФ, позволяет существенно сократить время вычисления коэффициентов (27).

Решение системы линейных уравнений. Для решения системы (25) использовался метод Холецкого. Обозначим матрицу Грама через J, ее элементы через $a_{ij} = \langle \psi_{ni}, \psi_{nj}\rangle_{H^1(\partial B\times S)}$, а элементы правой части b через $b_m = \langle g_\delta, \psi_{nm}\rangle_{H^1(\partial B\times S)}$. Применяя алгоритм специального LU-разложения матрицы J, приводим ее к виду $J = LL^T$. Тогда решение системы $Jc_n = b$ сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами: $Lz = b$, $L^T c_n = z$. Коэффициенты матрицы $L = (l_{ij})$ находятся по формулам

$$l_{ii} = \Big(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1}(l_{ik})^2\Big)^{1/2}, \qquad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}}\Big(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}\Big),$$

где $j = 1,\dots,i-1$, $i = 1,\dots,p$. Далее, используя (24), получаем аппроксимацию восстанавливаемой функции.

3.2. **Алгоритм приближенного обращения лучевого преобразования.** За основу алгоритма взята формула (11) обращения лучевого преобразования для случая прямолинейного распространения лучей в среде. Используемая модификация указанной формулы имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2}\left((-\Delta)^{1/2}(\mathcal{P}^{\#}g)\right)(x), \text{ где } g = \mathcal{P}f.$$

Шаги и процедуры дискретизации алгоритма приближенного обращения лучевого преобразования, предлагаемого для решения задачи рефракционной томографии, включают в себя следующие элементы:

1) Дискретизация значений лучевых преобразований восстанавливаемой функции по углам α, β.

2) Дискретизация процедуры проведения геодезических.

3) Приближенное вычисление интеграла (16) для тестовой функции при фиксированных значениях α, β, строго согласованное с процедурой проведения геодезических.

4) Приближенное вычисление оператора обратной проекции (ООП).

5) Применение оператора $(-\Delta)^{1/2}$ к ООП.

Часть этапов реализации алгоритма описано в параграфе 3.1. Опишем подробнее этапы 4 и 5.

Приближенное вычисление оператора обратной проекции. Функция восстанавливалась в единичном круге. При этом квадрат $[-1,1]\times[-1,1]$ вдоль каждой оси координат был разбит на 2^6 отрезков. Шаг дискретизации ООП равен $1/32$ по каждой оси. ООП вычисляется в квадрате $[-A,A]\times[-A,A]$, $A>0$. Сетка для вычисления ООП содержит сетку, на которой восстанавливается функция, и разбивает квадрат $[-A,A]\times[-A,A]$ вдоль каждой координатной оси на 2^n равных отрезков. В численных экспериментах $n=6,7,8,9,10,11$, соответственно $A=1,2,4,8,16,32$. Указанная дискретизация ООП обеспечивает согласованность с процедурой БПФ.

Значение ООП в точке $x\in\mathbb{R}^2$ состоит в усреднении лучевого преобразования по всем геодезическим, проходящим через эту точку. Задавая натуральное число N_γ, получаем последовательность углов $\gamma_i = i\dfrac{2\pi}{N_\gamma}, i=0,...,N_\gamma-1$, по которым проводится численное интегрирование. Возможны два варианта расположения точки x:

1) Пусть $x\in B$. Значение интеграла от искомой функции вдоль луча, определяемого углом γ_i, находится следующим образом. Система (26) с начальными условиями, соответствующими точке $x\in B$ и вектору, определяемому углом γ_i, решается вплоть до границы ∂B с помощью схемы Мерсона, вычисляющей на каждом шаге точку и направление геодезической. Полученной на границе паре точка-вектор соответствует пара углов φ, θ таких, что $\varphi\in[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$, $\theta\in[\beta_j,\beta_{j+1}]$. Искомое значение определяется как билинейная аппроксимация лучевого преобразования по узлам сетки (α_i,β_j). Значение ООП получается суммированием по γ_i аппроксимированных лучевых преобразований. Принимая во внимание, что вклад каждой геодезической учтен дважды, усреднение лучевого преобразования по всем геодезическим, проходящим через точку x, делится на 2.

2) Пусть $x\notin B$. Значение интеграла от искомой функции вдоль луча с направляющим вектором $(\cos\gamma_i,\sin\gamma_i)$ определяется следующим образом. Распространяясь прямолинейно, луч пересекает границу круга в некоторой точке, при этом направление луча сохраняется. Полученной точке и вектору $(-\cos\gamma_i,-\sin\gamma_i)$ соответствует пара углов φ, θ таких, что $\varphi\in[\alpha_k,\alpha_{k+1}]$, $\theta\in[\beta_j,\beta_{j+1}]$. Искомое значение определяется как билинейная аппроксимация лучевого преобразования по узлам сетки (α_k,β_j). Значение ООП представляет собой сумму по γ_i аппроксимированных лучевых преобразований. Результат, в отличие от случая $x\in B$, не делится на 2.

Применение оператора $(-\Delta)^{1/2}$ к оператору обратной проекции. Используя связь оператора $(-\Delta)^{1/2}$ с преобразованием Фурье

$$\left(\widehat{(-\Delta)^{1/2}(\mathcal{P}\#f)}\right)(y) = |y|(\widehat{\mathcal{P}\#f})(y)$$

и применяя преобразование Фурье (используется процедура БПФ) к ООП (умноженному на $1/2$) с последующим умножением на $|y|$, получаем левую часть последнего равенства. Затем, используя БПФ, вычисляем обратное преобразование Фурье.

4. Численные эксперименты

В данном параграфе приводятся описание и результаты численных экспериментов, проведенных для изучения предлагаемого метода восстановления скалярного поля по известному лучевому преобразованию, заданному в области с известной римановой метрикой. Все тесты проводятся на модельных (известных) функциях, определенных в единичном круге B. Зная функцию и риманову метрику, вычисляется лучевое преобразование, которое служит данными для решения задачи восстановления функции. По этим данным вычисляется ООП для лучевого преобразования, причем размер и разбиение области вычисления согласованы с процедурой БПФ.

Численные эксперименты направлены на исследование влияния на относительную погрешность восстановления (в процентах в L_2-норме) таких параметров задачи, как гладкость восстанавливаемой функции, размер области вычисления ООП, кривизна метрики, дискретизация исходных данных, уровень шума в данных. Также проводится сравнение предлагаемого метода (Алгоритм 1) с алгоритмом, основанным на МНК с использованием B-сплайнов (Алгоритм 2).

Тестовые функции. Здесь и в дальнейшем для точки на плоскости будем использовать стандартное обозначение (x, y). Введем следующие множества на плоскости:

$$
\begin{aligned}
D_0 &= \{(x,y) : x^2 + 9(y+0.5)^2 \leqslant 0.25\};\\
D_1 &= \{(x,y) : (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \leqslant 0.04\};\\
D_2 &= \{(x,y) : (x+0.5)^2 + (y-0.5)^2 \leqslant 0.04\};\\
D_3 &= \big(\{(x,y) : -0.5 < x < 0.1;\ -0.3 < y < 0.3\}\big)\\
&\quad \setminus \big(\{(x,y) : -0.3 < x < -0.1;\ -0.2 < y < 0\}\big);\\
D_4 &= \{(x,y) : x > 0.1;\ x + y < 0.5;\ x - y < 0.5\};\\
D_5 &= \big(\{(x,y) : 0.5 < \sqrt{x^2+y^2} < 0.65\}\big) \setminus \big(\{(x,y) : x > 0;\ y < 0\}\big);\\
D_6 &= \big(\{(x,y) : 0.65 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} < 0.8\}\big) \setminus \big(\{(x,y) : x > 0;\ y < 0\}\big);\\
D_7 &= \{(x,y) : x > 0;\ y < 0;\ 3 - 20\sqrt{x^2 + (y+0.65)^2} > 0\};\\
D_8 &= \{(x,y) : x > 0;\ y < 0;\ 3 - 20\sqrt{y^2 + (x-0.65)^2} > 0\};\\
D_9 &= \{(x,y) : (x+0.1)^2 + (y-0.1)^2 < 0.09\}.
\end{aligned}
$$

В качестве модельных функций были выбраны следующие. Функции f_2–f_6 имеют один и тот же носитель и различаются гладкостью.

$f_1(x,y) = \exp(-24(x^2+y^2))$.

$$
f_k(x,y) \quad = \quad \begin{cases}
(4(0.25 - x^2 - 9(y+0.5)^2))^{6-k}, & (x,y) \in D_0,\\
(15(0.04 - (x-0.5)^2 - (y-0.5)^2))^{6-k}/(0.6)^{5-k}, & (x,y) \in D_1,\\
(15(0.04 - (x+0.5)^2 - (y-0.5)^2))^{6-k}/(0.6)^{5-k}, & (x,y) \in D_2,\\
0, & \text{иначе},
\end{cases}
$$

где $k = \overline{2,6}$.

$$
f_7(x,y) = \begin{cases}
x^2y^2(0.25 - x^2 - y^2)^2, & x^2 + y^2 < 0.25,\\
0, & \text{иначе}.
\end{cases}
$$

$$f_8(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in D_3, \\ 1.2, & (x,y) \in D_4, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$f_9(x,y) = \begin{cases} 3 - 20(0.65 - \sqrt{x^2+y^2}), & (x,y) \in D_5, \\ 3 - 20(\sqrt{x^2+y^2} - 0.65), & (x,y) \in D_6, \\ 3 - 20\sqrt{x^2+(y+0.65)^2}, & (x,y) \in D_7, \\ 3 - 20\sqrt{y^2+(x-0.65)^2}, & (x,y) \in D_8, \\ 10^6(x+0.1)^2(y-0.1)^2(0.3^2-(x+0.1)^2-(y-0.1)^2), & (x,y) \in D_9, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для $i = \overline{1,4}$ введем обозначения $x_i = 0.1 + 0.1i,\ y_i = -0.9 + 0.3i$.

$$f_{10}(x,y) = \sum_{i=1}^{4} i \exp\left(-40(y-y_i)^2\right)\left(\exp\left(-40(x-x_i)^2\right) + \exp\left(-40(x+x_i)^2\right)\right).$$

Используемые метрики.

1. Метрика постоянной положительной кривизны, “CCP-метрика”, компоненты фундаментального тензора которой таковы,

$$g_{11}(x,y) = g_{22}(x,y) = \frac{4R^2}{(R^2+a^2r^2)^2}, \quad g_{12}(x,y) = 0, \tag{29}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a^2 < R^2$. Гауссова кривизна постоянна, $K = a^2$.

2. Фундаментальный тензор метрики постоянной отрицательной кривизны, “CCN-метрики”, обладает компонентами

$$g_{11}(x,y) = g_{22}(x,y) = \frac{4R^2}{(R^2-a^2r^2)^2}, \quad g_{12}(x,y) = 0, \tag{30}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a^2 < R^2$. Гауссова кривизна есть $K = -a^2$.

3. Метрика “эллиптического параболоида” задается метрическим тензором с компонентами

$$g_{11}(x,y) = 1 + a^2x^2, \quad g_{12}(x,y) = abxy, \quad g_{22}(x,y) = 1 + b^2y^2, \quad a,b > 0. \tag{31}$$

Гауссова кривизна $K = ab(a^2x^2 + b^2y^2)/g$, где $g = 1 + a^2x^2 + b^2y^2$.

Для метрик постоянной положительной и постоянной отрицательной кривизны параметр $R = 2$ во всех численных экспериментах.

При реализации Алгоритма 1 во всех численных экспериментах количество геодезических, используемых для вычисления обратной проекции $N_\gamma = N_\alpha$. Количество точек на отрезке $[-1,1]$, в которых вычисляется оператор обратной проекции, во всех тестах равно 65.

Во всех тестах при реализации Алгоритма 2 использовались B-сплайны третьей степени. В случае CCN-метрики и метрики эллиптического параболоида сплайны задавались на сетке с шагом $h = 2/43$ по одному измерению, для CCP-метрики и евклидовой метрики — $h = 2/55$.

Тест 1. В первом тесте томографические данные вычислялись для модели с рефракцией, а ООП при реализации Алгоритма 1 был вычислен без ее учета. ООП вычислялся на квадрате $[-4,4]^2$, дискретизация исходных данных 256×128 по углам α, β. Восстанавливалось скалярное поле $f_7(x,y)$. Рефракция в среде моделировалась CCP-метрикой с $a = 1.5$ и CCN-метрикой с $a = 1.2$.

На рисунке 1 показаны геодезические CCP-метрики (слева) и CCN-метрики (справа) с выбранными параметрами.

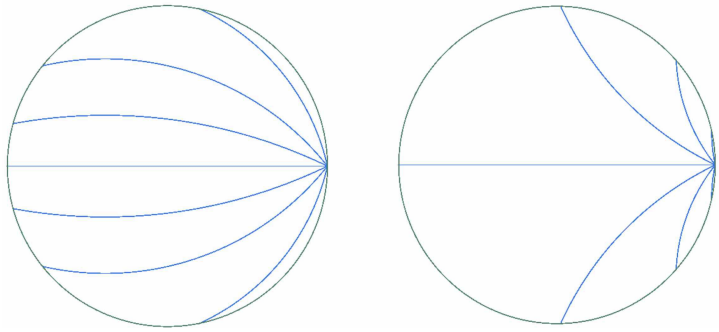

Рис. 1. Геодезические CCP-метрики (слева) и CCN-метрики (справа)

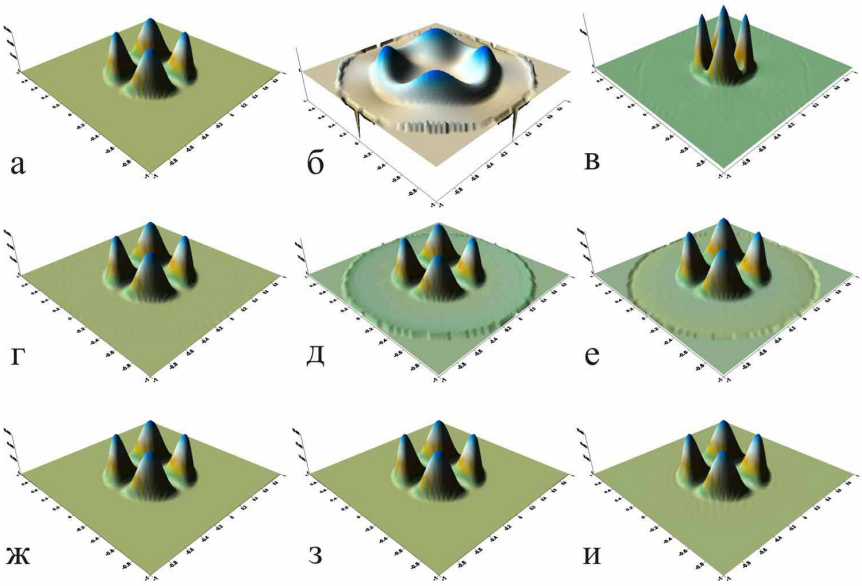

Рис. 2. Функция $f_7(x, y)$ (а) и ее реконструкции: Алгоритмом 1 без учета рефракции (б, в); Алгоритмом 1 (г, д, е) и Алгоритмом 2 (ж, з, и) с учетом рефракции

На рисунке 2 показано тестовое скалярное поле $f_7(x, y)$ (а) и его реконструкции без учета рефракции при реализации Алгортма 1 в области с CCP-метрикой (б) и в области с CCN-метрикой (в). Также приведены результаты реконструкции с учетом рефракции Алгортмом 1 в области с евклидовой метрикой (г) (относительная погрешность восстановления составила 1.22%), в области с CCP-метрикой (д) (погрешность — 14.03%) и в области с CCN-метрикой (е) (погрешность — 9.65%); Алгоритмом 2 в области с евклидовой метрикой (ж) (погрешность — 0.42%), в области с CCP-метрикой (з) (погрешность — 0.43%) и в области с CCN-метрикой (и) (погрешность — 0.82%).

Численный эксперимент наглядно демонстрирует необходимость учета рефракции на этапе вычисления ООП в предлагаемом алгоритме, как, впрочем, и в МНК-алгоритме, см. [6]. Без учета рефракции на этапе вычисления ООП в реконструкции получаем сжатие или растяжение носителя и изменение масштаба.

Тест 2. Следующий тест направлен на изучение влияния размера области вычисления ООП при реализации Алгоритма 1 на относительную погрешность восстановления. Дискретизация исходных данных 256×128 по углам α, β. Для CCP-метрики $a = 1.5$, для CCN-метрики $a = 1.2$. В качестве тестовой функции выбрана гладкая функция $f_1(x, y)$. Значение относительной погрешности восстановления для разных метрик и разных размеров области вычисления оператора обратной проекции приведены в таблице 1.

Таблица 1. Влияние размера области вычисления ООП на ошибку восстановления

Область \ метрика	евклидова	CCP	CCN
$[-1, 1]^2$	20.7501	22.2154	21.8286
$[-2, 2]^2$	4.089	10.1013	7.2263
$[-4, 4]^2$	1.1138	9.2263	6.2524
$[-8, 8]^2$	0.5615	9.2379	6.1645
$[-16, 16]^2$	0.5014	9.2574	6.151
$[-32, 32]^2$	0.4952	9.2159	6.1186

Анализ табличных данных позволяет утверждать, что размеры области, начиная с $[-4, 4]^2$ и более, дают несколько лучшие результаты. Любые из этих размеров приемлемы в дальнейших экспериментах; а размер $[-8, 8]^2$ можно считать “оптимальным”.

Тест 3. В данном тесте исследовалось влияние дискретизации исходных данных по углам α и β на относительную погрешность восстановления Алгоритмом 1. В качестве тестовой функции выбрана $f_4(x, y)$. Для теста взята CCP-метрика с параметром $a = 1.5$, а ООП вычисляется на квадрате $[-8, 8]^2$. В таблице 2 приведены значения относительной ошибки восстановления при разных дискретизациях исходных данных по углам α и β.

Таблица 2. Зависимость относительной ошибки восстановления функции $f_4(x, y)$ от дискретизации исходных данных по углам α, β

$N_\alpha \backslash N_\beta$	64	128	256	512
64	21.4225	20.5966	20.4175	20.3767
128	20.4987	19.7218	19.5499	19.5073
256	20.2592	19.5232	19.3522	19.3105
512	20.2101	19.4733	19.3044	19.2624

Отметим, что увеличение параметра N_β при фиксированном N_α не влияет на время вычислений. Это связано с тем, что N_β влияет только на время решения “прямой задачи” (т.е. задачи получения исходных данных), а время вычисления ООП определяется параметром N_γ, который совпадает с N_α.

Естественным соотношением между N_α и N_β представляется такое, при котором шаги по углам α и β равны. На основании приведенных расчетов в качестве оптимальной дискретизации исходных данных по углам α и β выбираем 256×128. Дальнейшее увеличение дискретизации до 512×256 по α, β приводит к уменьшению ошибки всего лишь на 0.2%, но при этом время вычислений увеличивается в 2 раза.

Тест 4. В тесте исследовалось влияние кривизны заданной римановой метрики на относительную ошибку восстановления скалярных полей Алгоритмом 1. Дискретизация исходных данных 256×128 по углам α, β, размер квадрата для вычисления ООП $[-8, 8]^2$. В качестве тестовых функций выбраны $f_1(x, y)$–$f_6(x, y)$. На рисунке 3 изображена зависимость относительной погрешности восстановления для CCP-метрики (слева) и CCN-метрики (справа). На графиках ось абсцисс соответствует значению параметра кривизны a^2, ось ординат — относительной погрешности восстановления в процентах, поведение погрешности для разных функций показано кривыми разных цветов.

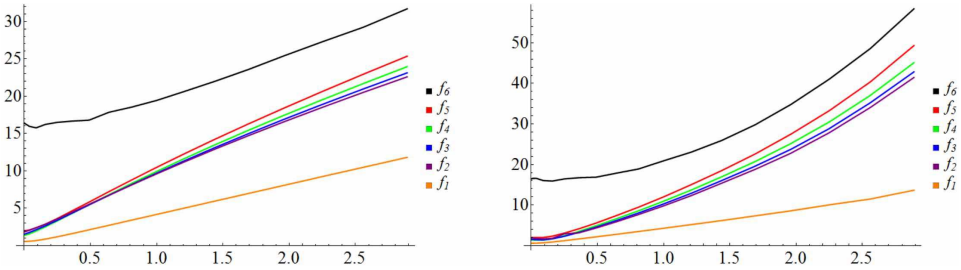

Рис. 3. Зависимость относительной погрешности восстановления от кривизны CCP-метрики (слева) и CCN-метрики (справа)

В случае CCP-метрики зависимость относительной ошибки от a^2 близка к линейной, так что при больших значениях параметра a можно “спрогнозировать” значение ошибки. В случае CCN-метрики зависимость похожа на линейную в меньшей степени.

Проведенные вычисления позволяют сделать следующие выводы. При малых значениях кривизны предложенный Алгоритм 1 на всех функциях, не являющихся разрывными, дает примерно одну и ту же ошибку. При больших значениях a^2 при одной и той же кривизне функции большей гладкости восстанавливаются с меньшей ошибкой. При этом поведение относительной погрешности для функций f_2, f_3, f_4, f_5 близки по сравнению с поведением ошибки для функций f_1 (гладкая) и f_6 (разрывная).

На рисунке 4 показано исходное поле $f_1(x, y)$ (а) и его реконструкции Алгоритмом 1 в областях с евклидовой метрикой (б) (погрешность — 0.56%), с CCP-метрикой с $a = 1.5$ (в) (погрешность — 9.24%) и CCN-метрикой с $a = 1.2$ (г) (погрешность — 6.16%). При восстановлении $f_1(x, y)$ с использованием Алгоритма 2 относительная погрешность восстановления в области с евклидовой метрикой составила 0.001%, в области с CCP-метрикой 0.002%, в области с CCN-метрикой 0.005%. Реконструкции Алгоритмом 2 не приводятся, так как визуально они не отличаются от исходного поля.

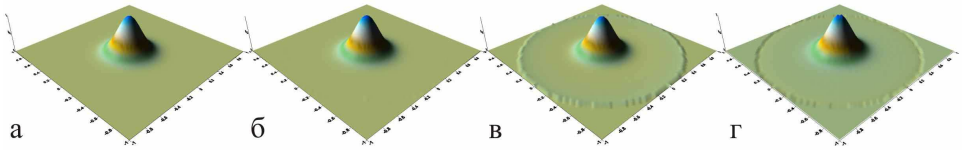

Рис. 4. Исходное поле $f_1(x, y)$ (а) и его реконструкции Алгоритмом 1 (б, в, г)

Отметим некоторые характерные черты результатов, полученных Алгоритмом 1. В случае CCP-метрики в области, где искомое поле близко к нулю, реконструкция имеет "ступеньку вверх", в случае CCN-метрики реконструкция имеет "ступеньку вниз". По-видимому, наличие "ступеньки" обусловлено тем, что внутри единичного круга метрика риманова, а снаружи метрика продолжена евклидовой. Кроме того, наблюдается изменение масштаба. Именно, для метрики постоянной положительной кривизны — сжатие, для метрики постоянной отрицательной кривизны — растяжение. Но при этом общий характер поведения функции сохраняется.

Тест 5. В следующем тесте сравнивались результаты применения ООП при реализации Алгоритма 1 к исходным данным для сред с римановыми метриками с результатами применения ООП при реализации Алгоритма 1 к исходным данным для среды с евклидовой метрикой. На рисунке 5 показаны графики зависимости относительного отличия (в процентах) результата применения ООП, вычисленного для CCP-метрики (слева) и CCN-метрики (справа) от результата применения ООП, вычисленного для евклидовой метрики.

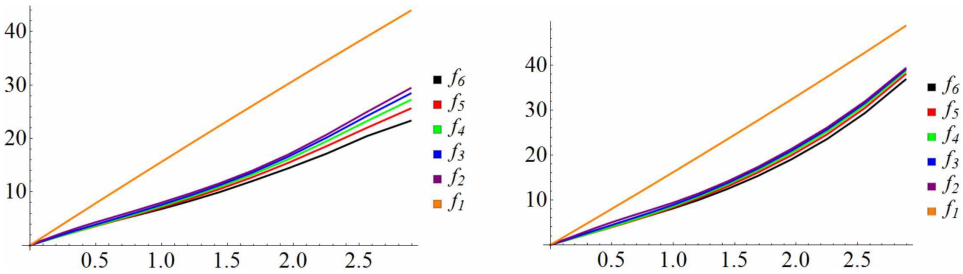

Рис. 5. Зависимость от кривизны отличия ООП, вычисленного для CCP-метрики (слева) и CCN-метрики (справа) от ООП, вычисленного для евклидовой метрики.

Тест показал, что чем выше гладкость тестовой функции, тем больше отличается результат применения ООП, вычисленного для римановой метрики, от результата применения ООП, вычисленного для евклидовой метрики. При этом графики, соответствующие функциям f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, ведут себя примерно одинаково.

Тест 6. В данном численном эксперименте проводилось сравнение результатов восстановления Алгоритмом 1 и Алгоритмом 2 функций различной

гладкости. Выбиралась дискретизация исходных данных 256×128 по углам α, β, размер области вычисления ООП при реализации Алгоритма 1 — $[-8, 8]^2$. В качестве тестовых функций взяты функции $f_8(x, y)$, $f_9(x, y)$, $f_{10}(x, y)$. Восстанавливаемые функции изображены на рисунках 6 (а), 7 (а), 8 (а). Тест проведен для евклидовой метрики, CCP-метрики с $a = 1.5$ и CCN-метрики с $a = 1.2$. В таблице 3 приведены относительные ошибки восстановления функций указанными алгоритмами.

Таблица 3. Сравнение алгоритмов

Алгоритм, метрика \ функция	f_8	f_9	f_{10}
Алгоритм 1, евклидова	19.67	1.46	0.81
Алгоритм 2, евклидова	18.99	2.00	0.48
Алгоритм 1, CCP-метрика	21.71	24.28	22.81
Алгоритм 2, CCP-метрика	17.90	2.11	0.48
Алгоритм 1, CCN-метрика	25.09	25.92	18.98
Алгоритм 2, CCN-метрика	24.92	3.68	0.78

На рисунках 6, 7, 8 буквами обозначены: восстанавливаемая функция (а); реконструкции Алгоритмом 1 для евклидовой метрики (б), CCP-метрики (в), CCN-метрики (г); реконструкции Алгоритмом 2 для евклидовой метрики (д), CCP-метрики (е), CCN-метрики (ж).

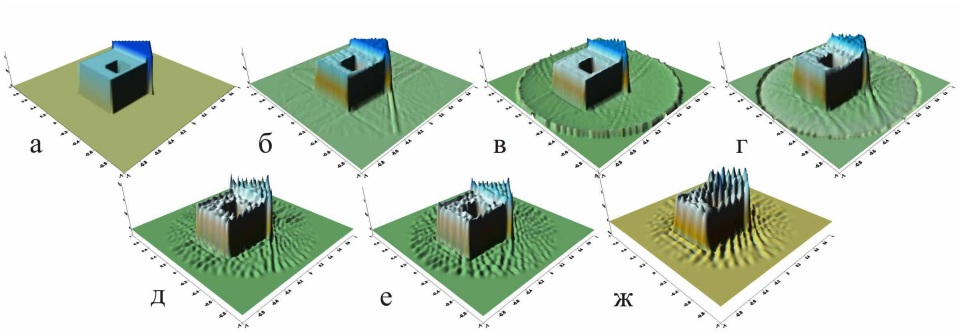

Рис. 6. Поле $f_8(x, y)$ (а) и его реконструкции Алгоритмом 1 (б, в, г) и Алгоритмом 2 (д, е, ж)

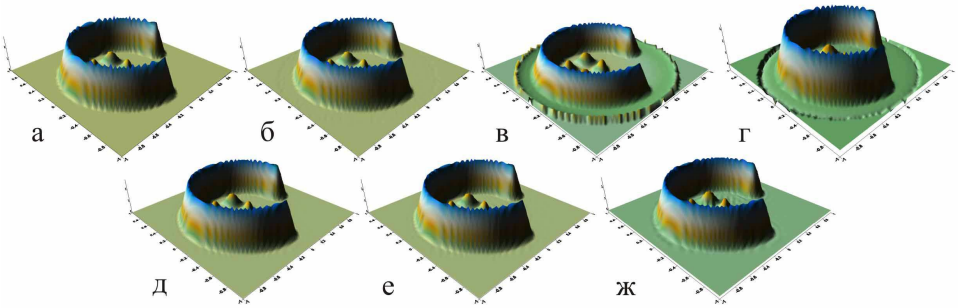

Рис. 7. Поле $f_9(x, y)$ (а) и его реконструкции Алгоритмом 1 (б, в, г) и Алгоритмом 2 (д, е, ж)

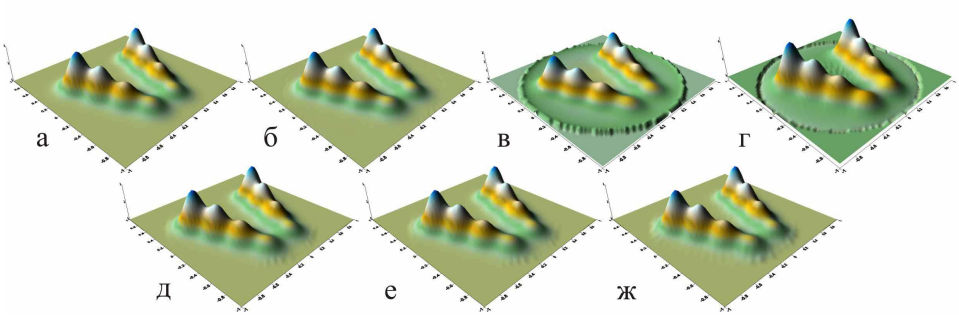

Рис. 8. Поле $f_{10}(x, y)$ (а) и его реконструкции Алгоритмом 1 (б, в, г) и Алгоритмом 2 (д, е, ж)

На всех трех тестовых функциях в областях с римановой метрикой Алгоритм 2 дает существенно меньшую ошибку, чем Алгоритм 1. Как уже отмечалось ранее, в реконструкциях Алгоритмом 1 присутствует ступенька (вверх или вниз) и искажение масштаба по оси z, что, в основном, и является причиной большей погрешности восстановления.

Тест 7. Проводится исследование влияния шума, внесенного в исходные данные, на восстановление функции в римановой области (CCP-метрика с $a = 1.5$, CCN-метрика с $a = 1.2$). Дискретизация исходных данных 256×128 по углам α, β, размер области вычисления ООП при реализации Алгоритма 1 $[-8, 8]^2$. В качестве тестовой функции выбрана $f_3(x, y)$. В лучевое преобразование внесен равномерный шум уровня 5%.

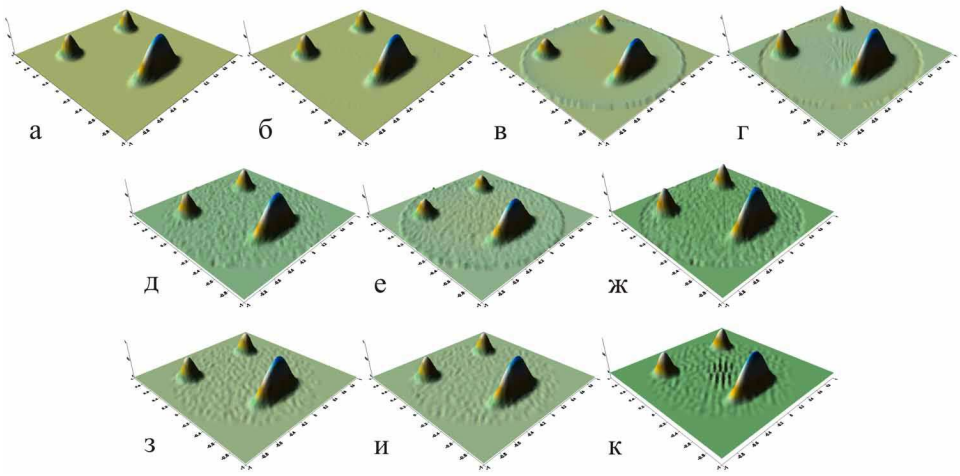

Рис. 9. Поле $f_3(x, y)$ (а), его реконструкции Алгоритмом 1 по данным без шума (б, в, г), реконструкции Алгоритмом 1 по данным с шумом (д, е, ж) и реконструкции Алгоритмом 2 по данным с шумом (з, и, к)

На рисунке 9 приведено восстанавливаемое поле (а); его реконструкции с помощью Алгоритма 1 по данным без шума в областях с евклидовой метрикой (б) (погрешность — 1.53%), CCP-метрикой (в) (погрешность — 18.67%) и CCN-метрикой (г) (погрешность — 16.08%); его реконструкции с помощью Алгоритма 1 по данным с равномерным шумом уровня 5% в областях с евклидовой метрикой (д) (погрешность — 8.62%), CCP-метрикой (е) (погрешность — 20.16%) и CCN-метрикой (ж) (погрешность — 19.0%); его реконструкции с помощью Алгоритма 2 по данным с равномерным шумом уровня 5% в областях с евклидовой метрикой (з) (погрешность — 6.88%), CCP-метрикой (и) (погрешность — 6.14%) и CCN-метрикой (к) (погрешность — 8.7%).

Добавление шума в исходные данные приводит к увеличению погрешности восстановления, уровень которой сравним с уровнем внесенного шума.

Тест 8. В последнем численном эксперименте проведено тестирование Алгоритма 1 для метрики с переменной кривизной. Была использована метрика "эллиптического параболоида", см. (31), с параметрами $a = 2, b = 3$. Геодезические метрики изображены на рисунке 10. В качестве тестовой функции выбрана $f_7(x, y)$. Дискретизация исходных данных 256×128 по углам α, β, размер области вычисления ООП $[-8, 8]^2$.

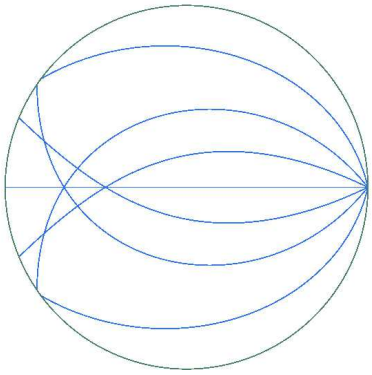

Рис. 10. Геодезические метрики эллиптического параболоида

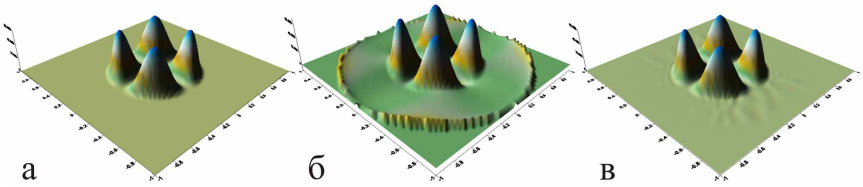

Рис. 11. Функция $f_7(x, y)$ (а) и ее реконструкции Алгоритмом 1 (б) и Алгоритмом 2 (в)

На рисунке 11 приведены восстанавливаемое поле $f_7(x, y)$ (а) и его реконструкции Алгоритмом 1 (б) (погрешность — 36.67%) и Алгоритмом 2 (в) (погрешность — 1.36%). Реконструкция Алгоритмом 1 обладает ступенькой вверх (но уже "переменной высоты"), как и все реконструкции Алгоритмом 1 в области с CCP-метрикой.

5. Заключение

В работе, методами математического моделирования, исследована возможность применения одной из формул обращения для преобразования Радона, определенным образом модифицированной, при решении задачи рефракционной томографии. На основании проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы.

Численные эксперименты наглядно демонстрируют (Тест 1) необходимость учета рефракции на этапе вычисления оператора обратной проекции в предлагаемом алгоритме. Без учета рефракции на этапе вычисления оператора обратной проекции в реконструкции получаем сжатие или растяжение носителя и изменение масштаба. Эти искажения тем существенней, чем больше кривизна заданной в римановой области метрики.

Степень дискретизации исходных данных влияет на точность восстановления функции предсказуемым образом. На основании проведенных расчетов в качестве оптимальной дискретизации исходных данных по углам выбирается 256×128. Дальнейшее увеличение дискретизации до 512×256 приводит к уменьшению ошибки всего лишь на 0.2%, но при этом время вычислений увеличивается в 2 раза.

Кривизна задаваемой римановой метрики существенно влияет на относительную погрешность восстановления функций. При малых значениях кривизны предлагаемый алгоритм на всех функциях, не являющихся разрывными, дает примерно одну и ту же ошибку. При больших значениях a^2 при одной и той же кривизне функции большей гладкости восстанавливаются с меньшей ошибкой. При этом поведения относительной ошибки для функций $f_k, k = \overline{2,5}$, близки по сравнению с поведением ошибки для функций f_1 (гладкая) и f_6 (разрывная).

В тестах проводилось сравнение двух алгоритмов восстановления функций по лучевому преобразованию, вычисленному вдоль геодезических римановой метрики. Это исследуемый в работе алгоритм, основанный на модифицированной формуле обращения, и МНК-алгоритм с базисом из двумерных B-сплайнов. На тестовых функциях разной гладкости второй алгоритм, как и следовало ожидать, дает существенно меньшую ошибку, чем первый. Добавление шума в исходные данные приводит к приблизительно линейному увеличению погрешности восстановления, уровень которой сравним с уровнем внесенного шума. Временные затраты первого алгоритма заметно меньше, чем второго, построенного на основе МНК, поэтому целесообразна дальнейшая модификация предлагаемого в работе алгоритма с целью повышения его точности.

Все тесты показали, что в случае метрики положительной кривизны в области, где искомое поле близко к нулю, реконструкция имеет “ступеньку вверх”, а в случае метрики постоянной отрицательной кривизны реконструкция имеет “ступеньку вниз”. Наличие “ступеньки” отчасти можно объяснить тем, что внутри единичного круга метрика риманова, а снаружи метрика продолжена евклидовой. Кроме того, наблюдается изменение масштаба. Именно, для метрики постоянной положительной кривизны — сжатие, для метрики постоянной отрицательной кривизны — растяжение. Все иллюстрации дают основание утверждать, что основная причина большой ошибки при реконструкции заключается именно в наличии этих “ступенек”. В то же время общий характер поведения функции сохраняется, что позволяет надеяться на осуществимость

дальнейшего повышения точности алгоритма на основе его целенаправленной модификации.

Список литературы

[1] J. Radon, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integrabwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten.* Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften, **69** (1917), 262–277. JFM 46.0436.02

[2] С. Хелгасон, *Преобразование Радона*, Мир, Москва, 1983. MR0741182

[3] S. Deans, *The Radon Transform and Some of its Applications*, Wiley, New York, 1983. MR0709591

[4] Ф. Наттерер, *Математические аспекты компьютерной томографии*, Мир, Москва, 1990. MR1082347

[5] E.Yu. Derevtsov, A.G. Kleshchev, V.A. Sharafutdinov, *Numerical solution of the emission $2D$-tomography problem for a medium with absorption and refraction*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **7**:1 (1999), 83–103. MR1681260

[6] Е.Ю. Деревцов, И.Е. Светов, Ю.С. Волков, *Использование B-сплайнов в задаче эмиссионной $2D$-томографии в рефрагирующей среде*, Сибирский Журнал Индустриальной Математики, **11**:3 (2008), 45–60. MR2535293

[7] I.E. Svetov, E.Yu. Derevtsov, Yu.S. Volkov, T. Schuster, *A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium*, Mathematics and Computers in Simulation, **97** (2014), 207–223. MR3137917

[8] A.K. Louis, *Approximate inverse for linear and some nonlinear problems*, Inverse Problems, **12** (1996), 175–190. MR1382237

[9] E.Yu. Derevtsov, R. Dietz, A.K. Louis, T. Schuster, *Influence of refraction to the accuracy of a solution for the $2D$-emission tomography problem*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **8** (2000), №2, 161–191. MR1769212

[10] В.В. Пикалов, *Восстановление томограммы прозрачной неоднородности методом обращенной волны*, Оптика и Спектроскопия, **65**:4 (1988), 956–962.

[11] A.K. Louis, *Eikonal Approximation in Ultrasound Computerized Tomography Signal Processing II.* Control and Applications, Springer, New York, 1990, 285–291. Herausgeber: F.A. Grunbaum, J.W. Helton, P. Khargonekar. MR1058061

[12] В.Г Романов, *О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых*, Сибирский Математический Журнал, **8**:5 (1967), 1206–1208. MR0221224

[13] A.M. Cormack, *The Radon transform on a family of curves in the plane I*, Proceedings of AMS, **83**:2 (1981), 325–330. MR0624923

[14] A.M. Cormack, *The Radon transform on a family of curves in the plane II*, Proceedings of AMS, **86**:2 (1982), 293–298. MR0667292

[15] Е.Ю. Деревцов, С.В. Мальцева, И.Е. Светов, *Приближенное восстановление функции, заданной в области с малой рефракцией, по ее лучевым интегралам*, Сибирский Журнал Индустриальной Математики, **17**:4 (2014), 48–59.

[16] К. Яно, С. Бохнер, *Кривизна и числа Бетти*, Издательство иностранной литературы, Москва, 1957.

[17] В.А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, Москва, 1980. MR0598629

[18] Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко, *Методы сплайн функций*, Наука, Москва, 1980. MR0614595

[19] Дж.Н. Ланс, *Численные методы для быстродействующих машин*, Издательство иностранной литературы, Москва, 1962.

[20] *Статистические методы для ЭВМ / Под ред. К. Энслейна, Э. Рэлстона, Г.С. Уилфа*, Наука, Москва, 1986.

Евгений Юрьевич Деревцов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: dert@math.nsc.ru

Светлана Васильевна Мальцева
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: sv_maltseva@mail.ru

Иван Евгеньевич Светов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: svetovie@math.nsc.ru