

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. 87–118 (2014)

УДК 519.626.1

MSC 49N05

ЗАДАНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И МЕТОД
ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В.М. АЛЕКСАНДРОВ

ABSTRACT. A method of reducing computational cost in the course of the control is considered. It is based on subdividing the whole computational process into the computations performed beforehand and those that are carried on while the control takes place. A method of calculation of initial approximation is proposed. Used here are the quasi-optimal control and subdividing of the range of initial conditions into the attainability domains. The ways for finding the support hyperplane and for computing approximate values of the switching times and the time of translating the system under the time-optimal control are given. It is developed an iterative procedure that allows the integrating to be carried out only over the displacement intervals of the switching times and that of the control completion time. It is proved that the sequence of quasi-optimal controls converges to the optimal control. The radius of the local convergence at the quadratic rate is obtained. The evaluation of computational working time of the method is given. The computational algorithm and the results of numerical calculations are presented.

Keywords: optimal control, quasi-optimal control, speed, switching time, attainability domain, approximation, support hyperplane, edge points, normalized adjoint system, iterative method, initial approximation, variation, computational cost.

ALEKSANDROV, V.M., CONSTRUCTION OF INITIAL APPROXIMATION AND METHOD OF COMPUTING OPTIMAL CONTROL.

© 2014 АЛЕКСАНДРОВ В.М.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00329) и Сибирским отделением РАН (междисциплинарный проект 80).

Поступила 3 сентября 2013 г., опубликована 6 февраля 2014 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптимальное управление по различным критериям качества представляет значительный теоретический и практический интерес [1]-[2]. Однако аналитическое решение задачи в общем случае, кроме линейно-квадратичных задач без ограничений на управление, не представляется возможным. Поэтому отечественными и зарубежными специалистами предложены различные численные методы нахождения оптимального управления, например, [3]-[9]. Каждый из вычислительных методов обладает определенными достоинствами и недостатками, но всем методам присущ один общий недостаток – большой объем вычислений в процессе управления. Это сдерживает широкое применение на практике оптимального управления, а для быстродействующих объектов и быстропротекающих технологических процессов делает невозможным применение методов, так как процесс управления начинается с момента задания начального условия, которое может быть любым из ограниченной области начальных условий. Необходима разработка новых методов вычисления оптимального управления, обладающих в процессе управления малыми вычислительными затратами.

В теории оптимального управления известны два типа вариаций - Лагранжа и Макшейна. Используя линейное программирование и вариации Макшейна, в минской школе оптимального управления (Р. Габасов, Ф.М. Кириллова и их ученики) разработаны конструктивные методы решения задач оптимального управления в реальном времени [10] - [12].

Возможен альтернативный подход к решению задач оптимального управления в реальном времени [13] - [15]. Подход основан на: 1) разделении вычислительных затрат на предварительные вычисления и вычисления в процессе управления; 2) аппроксимации множеств достижимости совокупностью гиперплоскостей; 3) использовании вариаций Лагранжа для интегрирования дифференциальных уравнений на каждой итерации не на всем интервале управления, а лишь на интервалах перемещений конечного момента и моментов переключений управления.

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию такого подхода, модификации методов и алгоритмов вычисления оптимального по быстродействию управления на основе аппроксимации областей достижимости гиперплоскостями и применения квазиоптимального управления. Для увеличения точности задания начального приближения предлагается процедура усреднения моментов переключений управления для граничных точек области достижимости, принадлежащих опорной гиперплоскости. Специфическое нормирование сопряженной системы позволяет проводить опорную гиперплоскость через удаленные граничные точки с различными последовательностями знаков управления, а формирование квазиоптимального управления из начальных условий управляемой системы дает необходимую последовательность управляющих воздействий, быстро сходящуюся к искомому оптимальному управлению.

Работа состоит из 8 разделов. Раздел 2 – постановка задачи. Третий раздел посвящен вычислению начального приближения для итерационного метода нахождения оптимального по быстродействию управления. Область начальных условий делится на области достижимости, которые аппроксимируются совокупностями гиперплоскостей. Даны способы выделения опорной гиперплоскости и вычисления нормированного начального условия сопряженной системы.

Предложен метод вычисления приближенных значений моментов переключений и времени оптимального управления. В четвертом разделе рассмотрен итерационный метод вычисления оптимального управления, основанный на выравнивании величин квазиоптимального управления до предельно-допустимых значений. Пятый раздел – доказательство сходимости последовательности квазиоптимальных управлений к оптимальному по быстродействию управлению. Получен радиус локальной сходимости с квадратичной скоростью сходимости. В шестом разделе обоснован перевод системы в ненулевое конечное состояние путем преобразования фазовых координат начального и конечного состояний системы. Седьмой раздел посвящен вычислительной трудоемкости метода. Предложена процедура с использованием вариаций Лагранжа, позволяющая в процессе управления ограничиться интегрированием систем дифференциальных уравнений только на интервалах перемещений конечного момента и моментов переключений управления. Дана оценка вычислительной трудоемкости метода. В восьмом разделе рассмотрены примеры вычисления оптимального управления для системы четвертого порядка с комплексно-сопряженными собственными значениями.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть управляемая система описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in D, \quad D \subset V, \quad (2.1)$$

где x – n -мерный вектор фазового состояния; $A(t)$ и $B(t)$ – непрерывные матрицы размера $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; u – m -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям

$$|u_j| \leq M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.2)$$

Предполагается, что система (2.1) полностью управляема, т.е.

$$\text{rank} \left[\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_k, \tau) d\tau \right] = n, \quad (2.3)$$

и переводима в начало координат из ограниченной области начальных условий D ; V – область управляемости; $\Phi(t, t_0)$ – фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения; * – знак транспонирования.

Задача. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее за минимальное время $T = t_k - t_0$ систему (2.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_k) = 0$.

Замечание. Перевод системы в ненулевое конечное состояние (принимаемое за новое начало координат) преобразованием координат сводится без потери общности к переводу системы из нового начального состояния в начало координат и рассмотрен в разделе 6.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

3.1. Аппроксимация области достижимости гиперплоскостями.

Определение. Область достижимости за время T – это область фазового пространства X , из точек которого система (2.1) может быть переведена оптимальным по быстрдействию управлением в начало координат за время $\leq T$.

Известно, что области достижимости по форме близки к эллипсоидам [16]-[18]. Приближенное и точное описание множеств достижимости, их верхние и нижние оценки, свойства (выпуклость, ограниченность, замкнутость, гладкость границы и др.) рассматривались в [19]-[24]. Для линейных систем с выпуклым множеством управления U область достижимости является выпуклым ограниченным замкнутым множеством.

Обозначим через $x_{(i)}^*$ – граничные точки на фазовых осях, перевод из которых в начало координат системы (2.1) оптимальным управлением происходит за время T , т.е. $x_{(i)}^*$ – точки пересечения с осями фазового пространства границы области достижимости за время T . Задача нахождения $x_{(i)}^*$ является обратной задачей оптимального быстрдействия и решается предварительно до начала процесса управления. Для системы n порядка имеем на фазовых осях $2n$ граничных точек.

Проведем через n различных граничных точек, принадлежащих различным фазовым осям, гиперплоскости, каждая из которых описывается одним из нижеследующих уравнений в отрезках

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\pm x_{(i)}^*} - 1 = 0. \quad (3.1)$$

Число гиперплоскостей, которые проходят через $2n$ граничных точек, равно 2^n . Совокупность гиперплоскостей (3.1), ограничивающих часть фазового пространства, может быть описана векторным уравнением

$$Px - I = 0. \quad (3.2)$$

Здесь x – n -мерный вектор фазового пространства; I – единичный вектор-столбец размера 2^n ; P – матрица размера $2^n \times n$, составленная из 2^n комбинаций различных значений $\frac{1}{\pm x_{(i)}^*}$ по n в каждой строке. Если выполнено условие

$$Px(t_0) - I \leq 0 \quad (3.3)$$

для всех 2^n линейных неравенств, то точка $x(t_0)$ лежит внутри (либо на границе в случае равенства) фазового пространства, ограниченного гиперплоскостями (3.1). Нетрудно видеть, что (3.3) выделяет многогранник Y , вписанный в область достижимости за время T и имеющий с ней $2n$ общих граничных точек. Процедуру выделения $x(t_0) \in Y$ можно существенно упростить. Нет необходимости в одновременном рассмотрении всех 2^n линейных неравенств (3.3). Так как справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i(t_0)}{\pm x_{(i)}^*} \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{(i)}^*} \right|,$$

то достаточно рассмотреть предельное соотношение, которое имеет место при любом расположении точки $x(t_0)$ в фазовом пространстве

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{(i)}^*} \right| - 1 \leq 0. \quad (3.4)$$

уравнений. Другими словами, выбор граничных точек на фазовых осях резко упрощает процесс вычисления коэффициентов.

Важно отметить, что для определения принадлежности начального условия $x(t_0) = x_0$ области достижимости необходимо и достаточно проверить лишь условия принадлежности в октанте, в котором находится начальное условие, т.е. в октанте $[\text{sign } x_1(t_0); \text{sign } x_2(t_0); \dots; \text{sign } x_n(t_0)]$. Если начальное условие находится в α октанте фазового пространства, то начальное условие $x(t_0) = x_0$ принадлежит области достижимости за время T при выполнении *всех* n неравенств

$$\sum_{i=1}^n c_{ik}^{\alpha} x_i(t_0) - 1 \leq 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (3.8)$$

3.2. Деление области начальных условий на области достижимости. Разделим все ограниченное множество начальных условий $x_0 \in D$ на q областей достижимости за разные времена $T_s, s = \overline{1, q}$, где $T_{s-1} < T_s$. Каждое подмножество достижимости за время T_s аппроксимируется совокупностью гиперплоскостей.

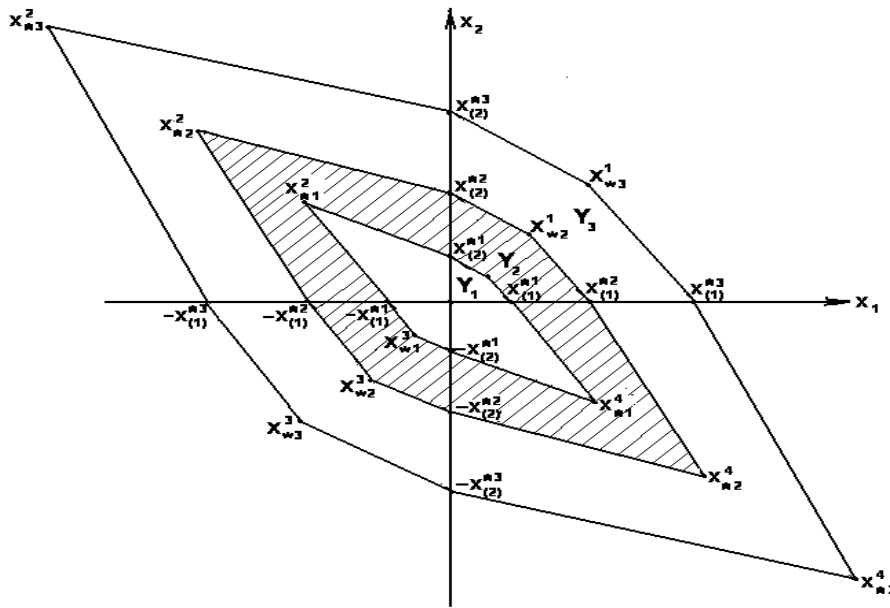


Рис. 1. Деление области начальных условий на области достижимости

Каждая из гиперплоскостей описывается в α октанте фазового пространства одним из нижеследующих уравнений при фиксированных k и s :

$$\sum_{i=1}^n c_{ik}^{\alpha s} x_i - 1 = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad s = \overline{1, q}. \quad (3.9)$$

На рис. 1 показано деление области начальных условий на области достижимости за различные времена.

Подмножество Y_s выделяется следующим образом. Находится минимальное значение s , при котором для каждого $k = \overline{1, n}$ выполняется неравенство (3.8),

а при $(s - 1)$ существуют такие $k \in [1, n]$ (или хотя бы одно значение), для которых это неравенство (3.8) не выполняется:

$$Y_s = \left[x(t_0) : \sum_{i=1}^n c_{ik}^{\alpha s} x_i(t_0) - 1 \leq 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad \exists k \in [1, n] \sum_{i=1}^n c_{ik}^{\alpha(s-1)} x_i(t_0) - 1 > 0 \right]. \quad (3.10)$$

Если для произвольно выбранного s выполняются для каждого $k = \overline{1, n}$ соотношения

$$\sum_{i=1}^n c_{ik}^{\alpha s} x_i(t_0) - 1 < 0, \quad \sum_{i=1}^n c_{ik}^{\alpha(s-1)} x_i(t_0) - 1 \leq 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (3.11)$$

то это является условием уменьшения s . Если существуют такие значения $k \in [1, n]$ (или хотя бы одно значение), для которых выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^n c_{ik}^{\alpha s} x_i(t_0) - 1 > 0, \quad \sum_{i=1}^n c_{ik}^{\alpha(s-1)} x_i(t_0) - 1 > 0, \quad \exists k \in [1, n], \quad (3.12)$$

то это является условием увеличения s . Процесс выбора s заканчивается, когда выполняются условия (3.10).

Важно подчеркнуть, что процесс нахождения подобласти, которой принадлежит заданное начальное условие, следует начинать с минимального значения s . Рассматриваются только гиперплоскости октанта, в котором находится начальное условие $x(t_0) = x_0$.

Итак, s найдено. После определения s , удовлетворяющего условиям (3.10), необходимо именно из этих n гиперплоскостей выбрать одну в качестве опорной. В [14] доказано, что в качестве опорной следует брать гиперплоскость, для которой нормированное расстояние $d_k = \sum_{i=1}^n c_{ik} x_i(t_0) - 1, \quad k = \overline{1, n}$ от начального условия $x(t_0) = x_0$ до опорной гиперплоскости $\Gamma_r, r \in [1, n]$ области достижимости за время T_{s-1} неотрицательно ($d \geq 0$) и максимально: $d_r = \max_k d_k$.

3.3. Вычисление приближенных значений моментов переключений и времени оптимального управления. Допустим, что начальное условие $x(t_0) = x_0$ системы (2.1) находится на границе области достижимости за время T . Проведем через точку $x(t_0) = x_0$ опорную гиперплоскость к области достижимости. Нормальный вектор гиперплоскости, исходящий из точки $x(t_0) = x_0$ и направленный внутрь области достижимости, и есть вектор $\psi(t_0)$ [2]. Из этого факта следует несколько важных утверждений.

Утверждение 1. *Множество достижимости строго выпукло.*

Доказательство. Предположим, что множество достижимости выпукло, но не строго. Это означает, что у множества есть грани. Тогда каждая грань имеет единственный нормальный вектор, направленный внутрь множества, т.е. единственный вектор сопряженной системы и, следовательно, одно единственное оптимальное управление. Это в свою очередь означает, что из всех точек грани (т.е. из различных точек фазового пространства) можно перейти в начало координат с одним и тем же оптимальным управлением. Но это противоречит тому, что для каждой точки фазового пространства существует свое оптимальное управление, и оно единственно. Из противоречия следует, что множество достижимости строго выпукло.

Утверждение 2. *Граница множества достижимости является гладкой.*

Доказательство. Гладкость означает, что на границе множества достижимости нет "особых" точек, т.е. точек, в которых перпендикуляр к множеству достижимости в этой точке равен нулю. Так как перпендикуляр есть вектор сопряженной системы, то его равенство нулю означает, что для этой точки не существует оптимального управления, переводящего за время T фазовое состояние системы в начало координат. Но это входит в противоречие с определением понятия множества достижимости за время T . Из противоречия следует, что граница множества достижимости является гладкой.

Следует подчеркнуть, что для задачи быстродействия в силу однородности функции Понтрягина относительно сопряженной системы важно лишь направление вектора $\psi(t_0)$, а его величина не имеет значения. Так как область достижимости аппроксимирована гиперплоскостями, то нормальный вектор к соответствующей опорной гиперплоскости и есть вектор $\psi(t_0)$. Компоненты *единичного* нормального вектора $\hat{\psi}(t_0)$ определяются через направляющие косинусы. Если через начальное условие $x(t_0)$ проходит, например, μ гиперплоскость вида

$$c_{1\mu}x_1(t_0) + c_{2\mu}x_2(t_0) + \dots + c_{n\mu}x_n(t_0) - 1 = 0, \quad \mu \in [1, n], \quad (3.13)$$

то имеем

$$\hat{\psi}_1(t_0) = -\frac{c_{1\mu}}{\left[\sum_{i=1}^n c_{i\mu}^2\right]^{1/2}}; \dots \quad \hat{\psi}_k(t_0) = -\frac{c_{k\mu}}{\left[\sum_{i=1}^n c_{i\mu}^2\right]^{1/2}}; \dots \quad \hat{\psi}_n(t_0) = -\frac{c_{n\mu}}{\left[\sum_{i=1}^n c_{i\mu}^2\right]^{1/2}}. \quad (3.14)$$

Следует отметить ряд существенных аспектов.

Во-первых, область достижимости аппроксимируется гиперплоскостями, т.е. граница области достижимости совпадает с аппроксимирующим многогранником лишь в отдельных точках, число которых $2^n(n+1)q$. Поэтому начальное условие $x(t_0) = x_0$ в общем случае может находиться *вблизи* границы области достижимости и, следовательно, начальное условие сопряженной системы $\hat{\psi}(t_0)$ вычисляется приближенно.

Во-вторых, на границе области достижимости опорная гиперплоскость изменяется непрерывно и параллельна аппроксимирующей гиперплоскости лишь в одной "средней" точке. Следовательно, только для этой точки нормальный вектор к опорной гиперплоскости и нормальный вектор к аппроксимирующей гиперплоскости совпадают по направлению.

В третьих, для построения аппроксимирующей конструкции берется лишь ограниченное число граничных точек. Все это приводит к приближенному вычислению нормированного вектора начальных условий $\hat{\psi}(t_0)$. Но искомое оптимальное по быстродействию управление весьма критично (чувствительно) к заданию направления $\hat{\psi}(t_0)$. Поэтому для *повышения точности задания начального приближения* необходимо перейти к вычислению приближенных значений моментов переключений, через которые затем находят $\hat{\psi}(t_0)$. О целесообразности такого подхода говорит следующее обстоятельство: в то время как оптимальные управления для двух граничных точек на симметричных фазовых осях хотя и противоположны по знакам, но имеют одинаковые моменты

переключений. Это означает, что одним и тем же моментам переключений соответствуют различные функции переключений. Поэтому для определения истинных знаков искомого оптимального управления следует использовать квазиоптимальное управление [25]-[26], которое наряду с простотой реализации обладает целым рядом других важных свойств.

Для заданного начального условия $x(t_0) = x_0$ вычисляем опорную гиперплоскость. Она проходит через n граничных точек, из которых $(n-1)$ находятся на фазовых осях и одна максимально удалена. Для каждой граничной точки известно оптимальное управление, т.е. известны все моменты переключений. Вычисляем *усредненный* p момент переключения j компоненты оптимального управления для любого начального условия, принадлежащего опорной гиперплоскости в α октанте:

$$\nu_{j(on)}^p = \frac{1}{n} \left[\sum_{\xi=1}^{n-1} \nu_j^p \left(x_{\xi}^*(T_{s-1}) \right) + \nu_j^p \left(x_*^{\alpha}(T_{s-1}) \right) \right], \quad p = \overline{1, r_j}. \quad (3.15)$$

Здесь: $\nu_j^p \left(x_{\xi}^*(T_{s-1}) \right)$ – p момент переключения j компоненты оптимального управления для ξ граничной точки, принадлежащей опорной гиперплоскости и находящейся на фазовой оси; $\nu_j^p \left(x_*^{\alpha}(T_{s-1}) \right)$ – p момент переключения j компоненты оптимального управления для максимально удаленной граничной точки, принадлежащей этой же опорной гиперплоскости в этом же α октанте фазового пространства.

Вычисляем усредненный p момент переключения для начальных условий, принадлежащих параллельной гиперплоскости. Параллельной гиперплоскостью будем называть гиперплоскость, проходящую через граничные точки на тех же фазовых осях, что и опорная гиперплоскость, но с временем достижимости равным T_s :

$$\nu_{j(pr)}^p = \frac{1}{n} \left[\sum_{\xi=1}^{n-1} \nu_j^p \left(x_{\xi}^*(T_s) \right) + \nu_j^p \left(x_*^{\alpha}(T_s) \right) \right], \quad p = \overline{1, r_j}. \quad (3.16)$$

Точка $x(t_0) = x_0$ и начало координат находятся по одну сторону от параллельной гиперплоскости (Γ_2) и по разные стороны от опорной гиперплоскости (Γ_1). Нормированное расстояние ($d_1 \geq 0$) от точки $x(t_0) = x_0$ до опорной гиперплоскости Γ_1 равно

$$d_1 = \sum_{i=1}^n c_{ik}^{\alpha(s-1)} x_i(t_0) - 1, \quad d_1 \geq 0. \quad (3.17)$$

Нормированное расстояние ($d_2 < 0$) от точки $x(t_0) = x_0$ до параллельной гиперплоскости Γ_2 равно

$$d_2 = \sum_{i=1}^n c_{ik}^{\alpha s} x_i(t_0) - 1, \quad d_2 < 0. \quad (3.18)$$

Точка $x(t_0) = x_0$ находится между гиперплоскостями Γ_1 и Γ_2 , отстоящими на $\Delta T = T_s - T_{s-1}$. Приближенное значение времени перевода системы (2.1) из заданного начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат пропорционально расстоянию и равно

$$T = T_{s-1} + \frac{d_1}{d_1 + |d_2|} (T_s - T_{s-1}). \quad (3.19)$$

Аналогично времени перевода приближенные значения моментов переключений искомого оптимального управления вычисляются следующим образом:

$$\nu_j^p = \nu_{j(on)}^p + \frac{d_1}{d_1 + |d_2|} (\nu_{j(pr)}^p - \nu_{j(on)}^p), \quad p = \overline{1, r_j}. \quad (3.20)$$

Следует подчеркнуть, что значения d_1 и d_2 вычисляются по простым выражениям (3.17) и (3.18). Таким образом, задание начального приближения не требует сложных вычислений.

3.4. Вычисление нормированного начального условия сопряженной системы $\hat{\psi}(t_0)$.

Для линейной системы (2.1) оптимальное по быстродействию управление задается выражением:

$$u_j^0(t) = M_j \text{sign} [B_j(t)]^* \psi(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.21)$$

где $[B_j(t)]^*$ — транспонированный j -й столбец матрицы $B(t)$; $\psi(t)$ — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi(t), \quad \psi(t_0) = \psi_0, \quad (3.22)$$

имеющее вид $\psi(t) = \hat{\Phi}(t, t_0)\psi(t_0)$. Здесь $\hat{\Phi}(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений линейного однородного дифференциального уравнения, которая находится из решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d\hat{\Phi}(t, t_0)}{dt} = -A^*(t)\hat{\Phi}(t, t_0), \quad \hat{\Phi}(t_0, t_0) = I. \quad (3.23)$$

Матрица $\hat{\Phi}(t, t_0)$ выражается через фундаментальную матрицу решений прямой системы (2.1) следующим образом: $\hat{\Phi}(t, t_0) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^*$. Отсюда $\Phi^{-1}(t, t_0) = [\hat{\Phi}(t, t_0)]^*$.

Моменты переключений ν_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$ компонент вектора оптимального управления и их число r_j на интервале $[t_0, t_k]$ однозначно определяются функциями переключений $[B_j(t)]^* \psi(t)$, $j = \overline{1, m}$, если известно решение $\psi(t)$, т.е. известны начальные условия $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ сопряженной системы. В моменты переключений функция переключений равна нулю, т.е.

$$[B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0)\psi(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}. \quad (3.24)$$

Введем обозначение $\hat{\psi}(t_0) = \psi(t_0)/\psi_\beta(t_0)$, где $\beta \in [1, n]$. Здесь $\psi_\beta(t_0)$ — начальное условие β координаты, отличное от нуля в момент t_0 . Причем β — любое из множества $[1, n]$, для которого $\psi_\beta(t_0) \neq 0$. Получим систему

$$[B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0)\hat{\psi}(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}, \quad (3.25)$$

которая связывает моменты переключений ν_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$ с начальным условием нормированной сопряженной системы $\hat{\psi}(t_0)$.

Подставим в (3.25) найденные приближенные $(n-1)$ значения моментов переключений ν_j^i , $i = \overline{1, (n-1)}$, которые вычислены по формуле (3.20). Получим систему из $(n-1)$ линейных неоднородных алгебраических уравнений с $(n-1)$ неизвестными, которыми являются компоненты нормированного начального условия сопряженной системы $\hat{\psi}(t_0)$ (учитывая, что $\hat{\psi}_\beta(t_0) = 1$):

$$\begin{aligned} [B_j(\nu_j^1)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^1, t_0)\hat{\psi}(t_0) &= 0, \\ [B_j(\nu_j^2)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^2, t_0)\hat{\psi}(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$[B_j(\nu_j^{n-1})]^* \hat{\Phi}(\nu_j^{n-1}, t_0) \hat{\psi}(t_0) = 0,$$

Важно подчеркнуть, что такой способ нормирования вектора начального условия сопряженной системы позволяет исключить принципиальную трудность, возникающую при аппроксимации множества достижимости гиперплоскостями: провести опорную гиперплоскость через удаленные граничные точки на различных фазовых осях, для которых оптимальное управление противоположно по знакам. Предлагаемый метод основан на том, что через одни и те же $(n - 1)$ значений моментов переключений можно провести две симметричные нормированные функции переключений. На рис. 2 показаны две симметричные нормированные функции переключений, проходящие через моменты переключений ν^1 и ν^2 и удовлетворяющие на интервале $t \in [t_0, t_k]$ различным (симметричным) последовательностям знаков оптимального управления.

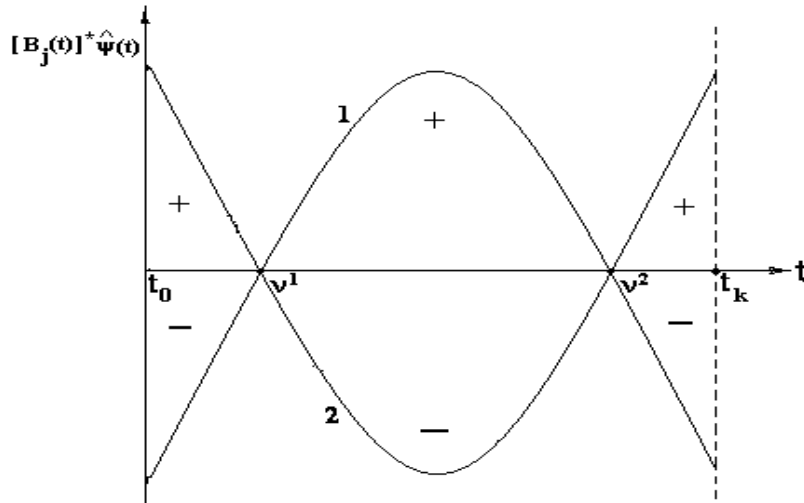


Рис. 2. Симметричные нормированные функции переключений

Последовательность знаков искомого оптимального управления, соответствующая заданному начальному условию $x(t_0) = x_0$, задается с помощью квазиоптимального управления [25]-[26].

3.5. Формирование квазиоптимального управления. На интервале $[t_0, t_k]$, где t_k — произвольно, выбираем произвольно $(n - 1)$ моментов переключений $\nu_j^p, j = \overline{1, m}; p = \overline{1, q_j}; \sum_{i=1}^n q_j = n - 1$ для компонент вектора управления. Квазиоптимальное управление формируется по алгоритму:

$$u_j^{kv}(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij}^p x_i(t_0) \text{sign} [B_j(t)]^* \psi(t), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (3.27)$$

Используя обозначение $\hat{N}_{ij}^p = N_{ij}^p \text{sign} [B_j(t)]^* \psi(t)$, получаем для квазиоптимального управления следующее простое выражение:

$$u_j^{kv}(t) = \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (3.28)$$

Весовые коэффициенты \hat{N}_{ij}^p находятся из решения систем линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^{q_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + \sum_{p=q_j+1}^{r_j} (-1)^{p-q_j} \hat{N}_{ij}^{q_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau \right\} + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.29)$$

Решение системы (3.29) существует, если выполнено условие полной управляемости (2.3).

Квазиоптимальное управление переводит линейную систему из любого начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат за фиксированное время $T = t_k - t_0$, но управляющие воздействия (3.28) в общем случае не равны предельным значениям $\pm M_j$. Суть предлагаемого метода нахождения оптимального управления заключается в выравнивании величин квазиоптимального управления до предельных значений $\pm M_j$, $j = \overline{1, m}$, с которыми формируется оптимальное по быстродействию управление линейной системой (2.1). При выравнивании управляющих воздействий соответствующим образом изменяются и моменты переключений квазиоптимального управления, которые стремятся к моментам переключений оптимального управления.

Моменты переключений ν_j^p , $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$, время перевода $T = t_k - t_0$ и весовые коэффициенты \hat{N}_{ij}^p квазиоптимального управления *не зависят от начального условия* $x(t_0) = x_0$, как это непосредственно видно из (3.29). Именно это свойство позволяет находить весовые коэффициенты и *все* моменты переключений *предварительно до начала процесса управления*. Простота реализации квазиоптимального управления (3.28) позволяет определить знаки компонент искомого оптимального управления, соответствующие заданному начальному условию $x(t_0) = x_0$, если выбрать моменты переключений ν_j^p и время перевода $T = t_k - t_0$ не произвольно, а взять полученные выше по формулам (3.19) и (3.20) *приближенные значения* ν_j^p и T .

4. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

4.1. Вариация управляющих параметров. Отклонение величины квазиоптимального управления от соответствующего предельного значения $M_j S_j(p) = M_j \text{sign} [B_j(t)]^* \psi(t)$, $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$ при оптимальном управлении для j компоненты на p интервале составляет

$$\Delta u_j^p = M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (4.1)$$

Чтобы обеспечить сходимость вычислительного процесса будем выравнивать амплитуды управляющих воздействий не сразу полностью, а постепенно, беря лишь ρ часть отклонения ($0 < \rho \leq 1$), если максимальное из вычисленных отклонений $\Delta \nu_j^p, \Delta t_k$ превышает предельно-допустимое значение Δt_{max} (выбор ρ рассмотрен ниже). Отклонение $\rho \Delta u_j^p$ порождает следующее отклонение

фазовых координат в конечный момент t_k :

$$\Delta \hat{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \rho \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau. \quad (4.2)$$

4.2. Вариация моментов переключений управления. Вариация моментов переключений на $\Delta \nu_j^p$, а конечного момента на Δt_k для кусочно-постоянного управления $u(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени ν_j^p и принимают значения $u_j(t) = \hat{u}_j^p$, $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$, вызывает следующее отклонение фазовых координат в конечный момент $t = t_k$:

$$\Delta \tilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{\nu_j^p}^{\nu_j^p + \Delta \nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) [\hat{u}_j^p - \hat{u}_j^{p+1}] d\tau + \sum_{j=1}^m \int_{t_k}^{t_k + \Delta t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \hat{u}_j^{r_j} d\tau. \quad (4.3)$$

Если $\Delta \nu_j^p$ и Δt_k достаточно малы (а это, как показано ниже, при рассматриваемом методе задания начального приближения, выполняется), то можно записать следующее приближенное соотношение, которое тем точнее, чем меньше по модулю $\Delta \nu_j^p$ и Δt_k :

$$\Delta \tilde{x}(t_k) \approx \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) [\hat{u}_j^p - \hat{u}_j^{p+1}] \Delta \nu_j^p + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) \hat{u}_j^{r_j} \Delta t_k. \quad (4.4)$$

4.3. Уравнение баланса отклонений. Отклонение $\Delta \hat{x}(t_k)$, вызванное изменением величин управляющих воздействий, должно быть скомпенсировано отклонением $\Delta \tilde{x}(t_k)$, вызванным изменением моментов переключений и конечного момента:

$$\Delta \hat{x}(t_k) + \Delta \tilde{x}(t_k) = 0. \quad (4.5)$$

Подставим в (4.5) выражения (4.2) и (4.4). Получим систему из n линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) [\hat{u}_j^p - \hat{u}_j^{p+1}] \Delta \nu_j^p + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) \hat{u}_j^{r_j} \Delta t_k + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \rho \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В (4.6), во-первых, число неизвестных $\Delta \nu_j^p$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$ и Δt_k может быть не равным числу линейных алгебраических уравнений и, в частности, число неизвестных может быть больше числа уравнений. Однако отклонения моментов переключений *не являются независимыми переменными*. Выше было показано, что заданием $(n-1)$ моментов переключений с помощью нормированной сопряженной системы определяются все остальные (соответствующие этим заданным) моменты переключений, если они существуют на интервале $[t_0, t_k]$. Точно так же отклонения начальных условий нормированной сопряженной системы определяют отклонения всех моментов переключений. Во-вторых,

при итерировании возможно возникновение новых и исключение прежних моментов переключений. Поэтому для нахождения оптимального управления (а не просто допустимого) необходимо перейти к определению числа и расположения моментов переключений с помощью сопряженной системы. Для этого необходимо установить связь между отклонениями $\Delta\nu_j^p$ моментов переключений и отклонениями начальных условий нормированной сопряженной системы $\Delta\hat{\psi}(t_0)$. Такая связь была установлена [27]:

$$\Delta\nu_j^p \approx \left\{ \left[B_j(\nu_j^p) \right]^* A^*(\nu_j^p) - \left[\dot{B}_j(\nu_j^p) \right]^* \right\} \left[\Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0) \right]^* \hat{\psi}(t_0) \right\}^{-1} \times \\ \left[B_j(\nu_j^p) \right]^* \left[\Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0) \right]^* \Delta\hat{\psi}(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \quad (4.7)$$

Соотношение (4.7) запишем в компактном виде

$$\Delta\nu_j^p \approx \mathfrak{L}(\nu_j^p) \Delta\hat{\psi}(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \quad (4.7)'$$

Важно подчеркнуть, что при изменении начальных условий может изменяться количество моментов переключений на интервале $[t_0, t_k]$. Формула (4.7) позволяет находить отклонение *любого* момента переключения на интервале $[t_0, \infty)$. Это существенно в случае появления новых моментов переключений управления. Выражение (4.7), несмотря на кажущуюся сложность, имеет простой вид благодаря матрицам размера $(n \times 1)$ и $(1 \times n)$, входящим в это выражение.

Подставив (4.7)' в (4.6), получим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, которыми являются $(n - 1)$ отклонений $\Delta\hat{\psi}_i(t_0)$ и отклонение Δt_k конечного момента t_k :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) \left[\hat{u}_j^p - \hat{u}_j^{p+1} \right] \mathfrak{L}(\nu_j^p) \Delta\hat{\psi}(t_0) + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) \hat{u}_j^{r_j} \Delta t_k + \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \rho \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau = 0. \quad (4.8)$$

Решив (4.8), находим $\Delta\hat{\psi}(t_0)$ и Δt_k . Система (4.8) однозначно разрешима при выполнении следующих условий: 1) линейная система (2.1) полностью управляема; 2) оптимальное управление единственно. Докажем, что решение системы линейных алгебраических уравнений существует. Для этого необходимо доказать невырожденность матрицы $\sum_{j=1}^m \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p)$.

Теорема 1. *Если система (2.1) полностью управляема, то матрица $\sum_{j=1}^m \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p)$ невырождена и решение системы линейных алгебраических уравнений (4.8) существует.*

Доказательство. Справедлива запись $\sum_{j=1}^m \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) = \Phi(t_k, \nu_j^p) B(\nu_j^p)$, $j = \overline{1, m}$. Для автономной системы матрица фундаментальных решений имеет вид $\Phi(t_k, t_0) = e^{A(t_k - t_0)}$, а условие полной управляемости (2.3) записывается в виде:

$$\text{rank} \left[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B \right] = n. \quad (2.3)'$$

Разложим матрицу $e^{A(t_k - t_0)}$ в ряд Тейлора [28]. Получим

$$e^{A(t_k - t_0)} = E + A(t_k - t_0) + \frac{1}{2}A^2(t_k - t_0)^2 + \frac{1}{6}A^3(t_k - t_0)^3 + \dots$$

В результате имеем

$$\sum_{j=1}^m \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) = B + AB(t_k - \nu_j^p) + \frac{1}{2}A^2B(t_k - \nu_j^p)^2 + \frac{1}{6}A^3B(t_k - \nu_j^p)^3 + \dots$$

Так как условие полной управляемости (2.3) в постановке задачи предполагается выполненным, то, следовательно, ранг рассматриваемой матрицы максимален и равен n

$$\text{rank} \left[\sum_{j=1}^m \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) \right] = n,$$

т.е. матрица невырождена и решение системы линейных алгебраических уравнений существует.

Теорема доказана.

Таким образом, для невырожденности матриц неоднородных систем линейных алгебраических уравнений необходимо выполнение условия полной управляемости. В постановке задачи предполагается выполнение этого необходимого условия (см. (2.3)). Проблема единственности оптимального управления рассматривается в разделе 5 при доказательстве сходимости вычислительного процесса.

4.4. Вычисление оптимального управления. Решив (4.8), находим $\Delta \hat{\psi}(t_0)$ и Δt_k . Оценить "малы" или "велики" отклонения и достигается ли сходимость вычислительного процесса весьма сложно. Проще оценить сходимость по отклонениям моментов переключений и конечного момента. По формуле (4.7) вычисляем отклонения $\Delta \nu_j^p$ моментов переключений управления. Проверяем выполнение условия

$$\max_{j,p} [|\Delta \nu_j^p|, |\Delta t_k|] \leq \gamma(t_k - t_0), \quad 0 < \gamma < 1, \tag{4.9}$$

где γ — задано. Если (4.9) выполняется, то находим уточненные значения моментов переключений, конечного момента и нормированного начального условия сопряженной системы для следующей $(s + 1)$ итерации: $\nu_j^{p,s+1} = \nu_j^{p,s} + \Delta \nu_j^{p,s}$; $t_k^{s+1} = t_k^s + \Delta t_k^s$; $\hat{\psi}^{s+1}(t_0) = \hat{\psi}^s(t_0) + \Delta \hat{\psi}^s(t_0)$.

Если (4.9) не выполняется, то полагаем $\nu_j^{p,s+1} = \nu_j^{p,s} + \rho \Delta \nu_j^{p,s}$; $t_k^{s+1} = t_k^s + \rho \Delta t_k^s$; $\hat{\psi}^{s+1}(t_0) = \hat{\psi}^s(t_0) + \rho \Delta \hat{\psi}^s(t_0)$, где коэффициент ρ вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{\gamma(t_k - t_0)}{\max_{j,p} [|\Delta \nu_j^p|, |\Delta t_k|]}. \tag{4.10}$$

В результате максимальное отклонение на этой итерации принимается равным предельно допустимому значению, а остальные отклонения уменьшаются пропорционально в ρ раз, и компенсируется не все отклонение $\Delta \hat{x}(t_k)$, а лишь его ρ часть. Из-за приближенности соотношений (4.4) и (4.7) ограничение больших отклонений позволяет избежать расходимости итерационного процесса вычислений.

Интегрируем систему (2.1) с уточненным управлением и находим отклонение фазовой траектории от начала координат в уточненный конечный момент. Начинается новый шаг вычислений и уточнений моментов переключений управления и конечного момента времени. Процесс вычислений заканчивается, если $\|\Delta\tilde{x}(t_k)\| \leq \varepsilon_0$, где ε_0 задано и характеризует требуемую точность вычисления оптимального управления.

Докажем сходимость итерационного процесса вычисления оптимального управления, т.е. сходимость последовательности квазиоптимальных управлений к оптимальному управлению.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Теорема 2. *Последовательность квазиоптимальных управлений (3.27) $u_j^{kv,s}(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij}^{p,s} x_i(t_0) \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t)$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$; $t \in [\nu_j^{p-1, s}, \nu_j^{p, s}]$; $s = 1, 2, 3, \dots$ сходится на N итерации к ε -оптимальному по быстродействию управлению (3.21) $u_j^0(t) = M_j \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t)$, $j = \overline{1, m}$ линейной системой (2.1) $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ с любой наперед заданной точностью ε , т.е. $\max_{j,p} |u_j^0(t) - u_j^{kv,N}| \leq \varepsilon$.*

Доказательство. Для сходимости итерационного вычислительного процесса необходимо обеспечить на каждой итерации малые отклонения. Чем меньше отклонения, тем точнее используемые приближенные соотношения (4.4) и (4.7), которые в пределе стремятся к точным соотношениям. На p -м интервале постоянства отклонение квазиоптимального управления от оптимального управления для j -й компоненты составляет

$$\Delta u_j^p = M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}. \quad (5.1)$$

Возьмем лишь ρ -ю часть этого отклонения

$$\rho \Delta u_j^p = \rho \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right], \quad 0 < \rho \leq 1. \quad (5.2)$$

В этом случае при выравнивании управляющих воздействий квазиоптимальное управление на каждом интервале постоянства будет стремиться не к предельному значению $M_j S_j(p)$, а к некоторому *промежуточному* значению

$$\hat{u}_j^p = \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) + \rho \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right].$$

Отклонение фазовых координат, вызванное отклонением $\rho \Delta u_j^p$ (5.2), вычисляется по формуле

$$\Delta \hat{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \rho \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau. \quad (5.3)$$

При значительных отклонениях воздействий квазиоптимального управления от предельных значений $M_j S_j(p)$ выбором регулирующего параметра ρ на

каждой итерации можно обеспечить любую сколь угодно малую величину отклонения $\Delta\hat{x}(t_k)$. Из уравнения баланса отклонений (4.5) следует, что и отклонение $\Delta\tilde{x}(t_k)$ будет малым и, следовательно, будут сколь угодно малыми отклонения $\Delta\hat{\psi}(t_0)$ и Δt_k , порождающие $\Delta\tilde{x}(t_k)$. Докажем, что малость отклонений $\Delta\hat{\psi}(t_0)$ и Δt_k на каждой итерации гарантирует сходимость последовательности квазиоптимальных управлений к квазиоптимальному управлению с предельными значениями $\pm M_j$, $j = \overline{1, m}$.

Для отклонения фазовых координат $\Delta\tilde{x}(t_k)$ имеем выражение (4.3)

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{x}(t_k) = & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{\nu_j^p}^{\nu_j^p + \Delta\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) [\hat{u}_j^p - \hat{u}_j^{p+1}] d\tau + \\ & + \sum_{j=1}^m \int_{t_k}^{t_k + \Delta t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \hat{u}_j^{r_j} d\tau. \end{aligned}$$

Так как подынтегральная функция непрерывна на каждом интервале $[\nu_j^p, \nu_j^p + \Delta\nu_j^p]$, то на основании теоремы о среднем имеем

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{x}(t_k) = & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p + \mu_j^p \Delta\nu_j^p) B_j(\nu_j^p + \mu_j^p \Delta\nu_j^p) [\hat{u}_j^p - \hat{u}_j^{p+1}] \Delta\nu_j^p + \\ & + \sum_{j=1}^m \Phi(t_k, t_k + \mu_j \Delta t_k) B_j(t_k + \mu_j \Delta t_k) \hat{u}_j^{r_j} \Delta t_k, \quad 0 < \mu_j^p, \mu_j < 1. \end{aligned}$$

Применим теорему Лагранжа о конечном приращении. Получим

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{x}(t_k) = & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) [\hat{u}_j^p - \hat{u}_j^{p+1}] \Delta\nu_j^p + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) \hat{u}_j^{r_j} \Delta t_k + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \mu_j^p [\hat{u}_j^p - \hat{u}_j^{p+1}] \frac{d\{\Phi(t_k, \nu_j^p + \Theta_j^p \mu_j^p \Delta\nu_j^p) B_j(\nu_j^p + \Theta_j^p \mu_j^p \Delta\nu_j^p)\}}{dt} (\Delta\nu_j^p)^2 + \\ & + \sum_{j=1}^m \mu_j \hat{u}_j^{r_j} \frac{d\{\Phi(t_k, t_k + \Theta_j \mu_j \Delta t_k) B_j(t_k + \Theta_j \mu_j \Delta t_k)\}}{dt} (\Delta t_k)^2, \\ & 0 < \Theta_j^p, \Theta_j < 1; \quad 0 < \mu_j^p, \mu_j < 1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Введем обозначения

$$\Delta\nu_j^p = \Delta\tilde{\nu}_j^p + \sigma\nu_j^p, \quad \Delta t_k = \Delta\tilde{t}_k + \sigma t_k. \quad (5.5)$$

Здесь: $\Delta\nu_j^p$, Δt_k — точные (истинные), а $\Delta\tilde{\nu}_j^p$, $\Delta\tilde{t}_k$ — вычисленные значения отклонений; $\sigma\nu_j^p$, σt_k — погрешности (ошибки) вычисления отклонений. Значения $\Delta\tilde{\nu}_j^p$, $\Delta\tilde{t}_k$ определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений (4.4), которая для *вычисленных* значений является точной:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) [\hat{u}_j^p - \hat{u}_j^{p+1}] \Delta\tilde{\nu}_j^p + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) \hat{u}_j^{r_j} \Delta\tilde{t}_k = \Delta\tilde{x}(t_k). \quad (5.6)$$

Подставив (5.5) в (5.4) и учитывая (5.6), получим уравнение

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) [\hat{u}_j^p - \hat{u}_j^{p+1}] \sigma \nu_j^p + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) \hat{u}_j^{r_j} \sigma t_k + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \mu_j^p [\hat{u}_j^p - \hat{u}_j^{p+1}] \frac{dF(t_k, \Delta \nu_j^p)}{dt} (\Delta \nu_j^p)^2 + \sum_{j=1}^m \mu_j \hat{u}_j^{r_j} \frac{dF(t_k, \Delta t_k)}{dt} (\Delta t_k)^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где для сокращения записи использованы обозначения

$$\begin{aligned} F(t_k, \Delta \nu_j^p) &= \Phi(t_k, \nu_j^p + \Theta_j^p \mu_j^p \Delta \nu_j^p) B_j(\nu_j^p + \Theta_j^p \mu_j^p \Delta \nu_j^p), \\ F(t_k, \Delta t_k) &= \Phi(t_k, t_k + \Theta_j \mu_j \Delta t_k) B_j(t_k + \Theta_j \mu_j \Delta t_k), \\ 0 &< \Theta_j^p, \Theta_j < 1; \quad 0 < \mu_j^p, \mu_j < 1. \end{aligned}$$

Для доказательства сходимости вычислительного процесса важно следующее положение: погрешности $\sigma \nu_j^p$, σt_k , найденные на s -й итерации, являются точными (истинными) значениями отклонений для $(s+1)$ -й итерации, т.е.

$$\sigma \nu_j^{p,s} = \Delta \nu_j^{p,s+1}, \quad \sigma t_k^s = \Delta t_k^{s+1}. \quad (5.8)$$

Подставив (5.8) в (5.7), получим выражение, связывающее отклонения на s -й и $(s+1)$ -й итерациях:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^s, \nu_j^{p,s}) B_j(\nu_j^{p,s}) [\hat{u}_j^{p,s} - \hat{u}_j^{p+1,s}] \Delta \nu_j^{p,s+1} + \sum_{j=1}^m B_j(t_k^s) \hat{u}_j^{r_j,s} \Delta t_k^{s+1} = \\ & = - \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \mu_j^{p,s} [\hat{u}_j^{p,s} - \hat{u}_j^{p+1,s}] \frac{dF(t_k^s, \Delta \nu_j^{p,s})}{dt} (\Delta \nu_j^{p,s})^2 - \sum_{j=1}^m \mu_j^s \hat{u}_j^{r_j,s} \frac{dF(t_k^s, \Delta t_k^s)}{dt} (\Delta t_k^s)^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Подставим (4.7)' в (5.9) и получим систему из n уравнений с n неизвестными, которыми являются $(n-1)$ отклонение начальных условий $\Delta \hat{\psi}_i^{s+1}(t_0)$ нормированной сопряженной системы и отклонение Δt_k^{s+1} конечного момента $t = t_k$:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^s, \nu_j^{p,s}) B_j(\nu_j^{p,s}) [\hat{u}_j^{p,s} - \hat{u}_j^{p+1,s}] \mathfrak{L}(\nu_j^p) \Delta \hat{\psi}^{s+1}(t_0) + \sum_{j=1}^m B_j(t_k^s) \hat{u}_j^{r_j,s} \Delta t_k^{s+1} = \\ & = - \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \mu_j^{p,s} [\hat{u}_j^{p,s} - \hat{u}_j^{p+1,s}] \frac{dF(t_k^s, \Delta \hat{\psi}^s)}{dt} (\mathfrak{L}(\nu_j^p) \Delta \hat{\psi}^s(t_0))^2 - \\ & \quad - \sum_{j=1}^m \mu_j^s \hat{u}_j^{r_j,s} \frac{dF(t_k^s, \Delta t_k^s)}{dt} (\Delta t_k^s)^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Система (5.10) связывает отклонения на s -й и $(s+1)$ -й итерациях. Для единообразия и компактности записи введем обозначение $\Delta z = (\Delta \hat{\psi}(t_0), \Delta t_k)$. В результате система (5.10) может быть представлена в следующем компактном виде:

$$\Delta z^{s+1} = D(t_k^s, \nu_j^{p,s}) \Delta \tilde{z}^s \Delta z^s. \quad (5.11)$$

Здесь: Δz^s — n -мерный вектор-столбец, компонентами которого являются значения $\Delta \hat{\psi}(t_0), \Delta t_k^s$; $\Delta \tilde{z}^s$ — диагональная матрица $(n \times n)$ с вышеуказанными элементами на диагонали; $D(t_k^s, \nu_j^{p,s})$ — матрица размера $(n \times n)$.

Процесс вычислений обладает свойством улучшения управлений [7], если выполняется следующее достаточное условие:

$$\|\Delta z^{s+1}\| < \|\Delta z^s\|, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (5.12)$$

Из системы (5.11) непосредственно следует, что в силу *квадратичной* зависимости существуют такие значения Δz_*^s , что выполняется достаточное условие улучшения управлений в итерационном процессе:

$$\|\Delta z^{s+1}\| < \|\Delta z_*^s\|, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (5.13)$$

Величины отклонений Δz^s , которые образуются на каждой итерации, *выбираются* по нашему усмотрению. Действительно, задавая параметр ρ в уравнении (4.8), тем самым определяем, какая часть от полного рассогласования Δz^s при $\rho = 1$ будет скомпенсирована на s -й итерации. Если $\rho \rightarrow 0$, то из (5.3) непосредственно видно, что $\Delta \hat{x}(t_k^s) \rightarrow 0$. Тогда из уравнения баланса (4.5) следует, что $\Delta \tilde{x}(t_k^s) \rightarrow 0$ и, следовательно, порождающее его отклонение $\Delta z^s \rightarrow 0$. Итак, выбирая на каждой итерации ρ^s , тем самым выбираем величину Δz^s . В результате последовательность квазиоптимальных управлений стремится к квазиоптимальному управлению с предельными значениями $u_j = \pm M_j, j = \overline{1, m}$. На некоторой итерации $s = N$, где N не фиксировано, при найденных значениях моментов переключений $\nu_j^{p, N}$ и конечного момента t_k^N достигается заданная точность перевода управляемой системы (2.1) в начало координат, т.е. $\|x(t_k^N)\| \leq \varepsilon_0$, где ε_0 задано и характеризует требуемую точность вычисления оптимального управления. Это квазиоптимальное управление с предельными значениями управляющих параметров и есть ε -оптимальное по быстрдействию управление, и процесс вычислений заканчивается.

Действительно, это квазиоптимальное управление переводит линейную систему из начального состояния в начало координат и удовлетворяет необходимому условию оптимальности — принципу максимума Понтрягина [1]. Для линейной системы (2.1) оптимальное по быстрдействию управление задается выражением $u_j^0(t) = M_j \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t), j = \overline{1, m}$, т.е. управляющие воздействия принимают предельные значения $\pm M_j, j = \overline{1, m}$, а моменты переключений определяются с помощью сопряженной системы $\psi(t)$ посредством функций переключений $[B_j(t)]^* \psi(t), j = \overline{1, m}$. Моменты переключений квазиоптимального управления также определяются посредством функций переключений, а управляющие воздействия в конце итерационного процесса стремятся к предельным значениям. Для линейной системы оптимальное по быстрдействию управление существует, если $x(t_0) \in V$, т.е. начальное условие принадлежит области управляемости. Это условие выполнено (см. (2.1)).

Оптимальное управление единственно, если начало координат области управления является ее внутренней точкой и выполнено "условие общности положения" [1]. Для рассматриваемых ограничений на компоненты вектора управления (2.2) начало координат является внутренней точкой области управления. При прямоугольных параллелепипедных ограничениях на компоненты вектора управления (2.2), рассматриваемых в данной работе, "условие общности положения" адекватно условию покомпонентной полной управляемости,

т.е. условие полной управляемости (2.3) должно выполняться для *каждой* компоненты вектора управления

$$\text{rank} \left[\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) B_j^*(\tau) \Phi^*(t_k, \tau) d\tau \right] = n, \quad j = \overline{1, m}. \quad (5.14)$$

Таким образом, "условие общности положения" является более жестким, чем условие полной управляемости (2.3).

Для скалярного управления "условие общности положения" и условие полной управляемости совпадают. Поэтому для скалярного управления в силу единственности оптимального по быстродействию управления найденное квазиоптимальное управление с ε -предельными значениями управляющих воздействий $\pm M_j$, $j = \overline{1, m}$, которое переводит систему в начало координат, находится с помощью сопряженной системы, удовлетворяет необходимому условию оптимальности — принципу максимума Понтрягина и является ε -оптимальным по быстродействию управлением.

Для векторного управления оптимальное управление может быть неединственным, так как в работе предполагается, что выполняется лишь условие полной управляемости (2.3). В этом случае последовательность квазиоптимальных управлений сходится к одному из ε -оптимальных управлений.

Теорема доказана.

Следствие 1. Из (5.11) непосредственно следует, что *локальная* сходимость имеет *квадратичную скорость сходимости*.

Следствие 2. Радиус локальной сходимости равен $R_{cx} = \|\Delta z_*^s\|$.

Следствие 3. Так как $\Delta z^{s+1} = \sigma z^s$, то имеем адекватное (5.12) *достаточное* условие сходимости вычислительного процесса

$$\|\sigma z^s\| < \|\Delta z^s\|, \quad s = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.15)$$

т.е. норма ошибки (погрешности) вычисления должна быть меньше нормы истинного (точного) значения отклонения.

6. ПЕРЕВОД СИСТЕМЫ В НЕНУЛЕВОЕ КОНЕЧНОЕ СОСТОЯНИЕ

Рассмотренный метод позволяет находить оптимальное по быстродействию управление при переводе системы в ненулевое конечное состояние $x(t_k) = x_k$ путем эквивалентного преобразования начального и конечного условий.

Выпишем решение системы (2.1) в конечный момент времени $t = t_k$ при переводе системы в ненулевое конечное состояние $x(t_k) = x_k$ для кусочно-постоянного управления $u(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени ν_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$ и принимают значения $u_j(t) = u_j^p$, $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$, где $\nu_j^0 = t_0$, $\nu_j^{r_j} = t_k$:

$$x(t_k) = \Phi(t_k, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) u_j^p d\tau. \quad (6.1)$$

Представим решение (6.1) в следующем виде

$$0 = \Phi(t_k, t_0) \left[x(t_0) - \Phi^{-1}(t_k, t_0)x(t_k) \right] + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) u_j^p d\tau, \quad (6.2)$$

где $\hat{x}_0 = \left[x(t_0) - \Phi^{-1}(t_k, t_0)x(t_k) \right]$ – новое (преобразованное) начальное условие. В результате приходим к задаче перевода системы

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)u, \quad y(t_0) = \hat{x}_0, \quad y(t_k) = 0. \quad (6.3)$$

из начального состояния $y(t_0) = \hat{x}_0$ в начало координат $y(t_k) = 0$. Перевод системы (6.3) в начало координат эквивалентен переводу системы (2.1) в заданное ненулевое конечное состояние $x(t_k) = x_k$. Другими словами, найденное оптимальное по быстродействию управление $u^0(t)$, переводящее систему (6.3) из начального состояния $y(t_0) = \hat{x}_0$ в начало координат $y(t_k) = 0$, переводит систему (2.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в заданное ненулевое конечное состояние $x(t_k) = x_k$.

Следует подчеркнуть, что при переводе системы в ненулевое конечное состояние новое (преобразованное) начальное условие \hat{x}_0 зависит от конечного момента t_k , который неизвестен и является искомым параметром в задаче оптимального быстродействия. Это означает, что при изменении параметра t_k изменяется положение начальной точки $y(t_0) = \hat{x}_0$ в фазовом пространстве. Эта особенность учитывается следующим образом. Задаем последовательно значения $T_s, s = 1, 2, 3, \dots$ (начиная с минимального значения), вычисляем соответствующие значения $y^s(t_0) = \hat{x}_0^s$ и находим такое значение s и T_s , для которого выполняются условия (3.10). Вычисляется Y_s , опорная гиперплоскость Γ_{s-1} , "привязанные" к ней моменты переключений управления. Так вычисляется *приближенное* значение оптимального по быстродействию управления.

Точное значение оптимального управления находится с помощью итерационной процедуры, рассмотренной выше в разделе 4. Только теперь при переводе системы в ненулевое конечное состояние выражение $\Delta\tilde{x}(t_k)$ (4.3) это не отклонение от начала координат, а есть отклонение от заданного ненулевого конечного состояния $x(T)$ (которое фактически принимается за новое начало координат).

Действительно, выпишем решение (6.1) уравнения (2.1) в конечный момент времени $t = t_k$ при действии на систему полученного кусочно-постоянного управления $u(t)$. Полученное с помощью аппроксимирующей конструкции приближенное управление переводит систему (2.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в окрестность заданного ненулевого конечного состояния $x(T)$. Поэтому справедливо соотношение $x(t_k) = x(T) + \Delta\tilde{x}(t_k)$. Следовательно, необходимо так изменить моменты переключений ν_j^p на $\Delta\nu_j^p, j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j}$ и конечный момент t_k на Δt_k , чтобы компенсировать отклонение $\Delta\tilde{x}(t_k) = x(t_k) - x(T)$, т.е. компенсировать отклонение фазовых координат от заданного ненулевого конечного состояния (т.е. $x(T)$) в конечный момент $t = t_k$ решения уравнения (2.1) с полученным приближенным управлением (т.е. $x(t_k)$).

7. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ МЕТОДА

Операция интегрирования является в вычислительном отношении наиболее затратной по времени в сравнении с другими операциями, в частности,

по сравнению с решением системы линейных алгебраических уравнений. Поэтому трудоемкость любого итерационного метода вычисления оптимального управления принято оценивать по числу решений задачи Коши [3]. Как правило, число интегрирований дифференциальных уравнений на всем интервале управления $[t_0, t_k]$ достигает нескольких десятков, что делает невозможным применение таких итерационных методов для вычисления оптимального управления в *процессе управления*. Для вычисления и реализации оптимального управления в процессе управления необходимы алгоритмы, требующие малых вычислительных затрат. Малая трудоемкость итерационного вычислительного процесса в предлагаемом методе достигается благодаря: 1) построению аппроксимирующей конструкции, позволяющей получить начальное приближение, которое близко к искомому оптимальному управлению; 2) процедуре интегрирования дифференциальных уравнений на каждой итерации не на всем интервале управления, а *лишь на интервалах перемещений* конечного момента и моментов переключений управления. Рассмотрим эти два аспекта.

1) Область начальных условий $x_0 \in D$ делится на области достижимости за различные времена. Каждая область достижимости аппроксимируется совокупностью гиперплоскостей. Каждая гиперплоскость является опорной для некоторого подмножества начальных условий. Построение аппроксимирующей конструкции не зависит от *конкретного начального условия*, что позволяет провести необходимые вычисления *предварительно* до начала процесса управления и получить хорошее начальное приближение искомого оптимального управления. В результате вычисление оптимального управления сводится к *уточнению* приближенно заданных моментов $\nu_j^{p,0}$ переключений управления и к *уточнению* конечного момента t_k^0 . Задание хорошего начального приближения значительно сокращает число необходимых итераций.

2) На каждой итерации нет необходимости в интегрировании уравнения (4.8) на всем интервале $[t_0, t_k]$, так как достаточно проинтегрировать уравнение (4.8) на интервале $[t_0, t_k^0]$ *предварительно один раз*, "прикрепить" значение интегрального выражения к опорной гиперплоскости, запомнить только фундаментальную матрицу решений прямой системы и затем интегрировать дифференциальные уравнения *лишь на интервалах перемещений конечного момента и моментов переключений управления*.

Покажем, как конкретно это осуществляется. С учетом (4.9), (4.10), (5.2) и свойства квазиоптимального управления — переводить систему (2.1) из любого начального состояния в начало координат — уравнение (4.8) может быть преобразовано к виду:

$$2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \mathcal{L}(\nu_j^p) \Delta \hat{\psi}(t_0) + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) M_j S_j(r_j) \Delta t_k + \Delta \tilde{x}(t_k) = 0. \quad (7.1)$$

Это уравнение является приближенным и связывает отклонения $\Delta \hat{\psi}(t_0)$ и Δt_k с отклонением $\Delta \tilde{x}(t_k)$ управляемой системы (2.1) от начала координат в конечный момент времени $t = t_k$. Для обоснования возможности интегрирования в процессе управления только на интервалах перемещений моментов переключений и конечного момента необходимо перейти к точным соотношениям. Для

этого выпишем отклонение от начала координат решения уравнения (2.1) в момент $t = t_k^0$ при приближенном *начальном* задании моментов переключений $\nu_j^{p,0}$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$ и приближенном задании конечного момента t_k^0 , полученных с помощью аппроксимирующей конструкции:

$$\Delta \tilde{x}(t_k^0) = \Phi(t_k^0, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1,0}}^{\nu_j^{p,0}} \Phi(t_k^0, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau. \quad (7.2)$$

Представим (7.2) в следующем компактном виде

$$\Delta \tilde{x}(t_k^0) = \Phi(t_k^0, t_0)x(t_0) + R_0(t_k^0). \quad (7.3)$$

Здесь $R_0(t_k^0)$ — интегральные выражения в (7.2), которые не зависят от начального условия $x(t_0)$ и поэтому вычисляются *предварительно* при построении аппроксимирующей конструкции и "прикрепляются" к опорной гиперплоскости.

Для компенсации отклонения $\Delta \tilde{x}(t_k^0)$ необходимо изменить моменты переключений ν_j^p и конечный момент t_k . Сделать это сразу не представляется возможным. Поэтому используем итерационную процедуру.

1 итерация. Решаем систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, которыми являются $(n - 1)$ отклонение компонент $\Delta \hat{\psi}^1(t_0)$ и отклонение Δt_k^1 :

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^0, \nu_j^{p,0}) B_j(\nu_j^{p,0}) M_j S_j(p) \mathcal{L}^\circ(\nu_j^{p,0}) \Delta \hat{\psi}^1(t_0) + \\ & + \sum_{j=1}^m B_j(t_k^0) M_j S_j(r_j) \Delta t_k^1 + \Delta \tilde{x}(t_k^0) = 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Вычисляем отклонения моментов переключений, используя соотношение (4.7):

$$\Delta \nu_j^{p,1} \approx \mathcal{L}^\circ(\nu_j^{p,0}) \Delta \hat{\psi}^1(t_0). \quad (7.5)$$

Находим уточненные значения конечного момента и $(n - 1)$ произвольно выбранных моментов переключений управления:

$$\nu_j^{p,1} = \nu_j^{p,0} + \Delta \nu_j^{p,1}; \quad t_k^1 = t_k^0 + \Delta t_k^1; \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, q_j}; \quad \sum_{j=1}^m q_j = n - 1. \quad (7.6)$$

Уточняем начальное условие нормированной сопряженной системы, которое соответствует $(n - 1)$ произвольно выбранным значениям моментов переключений управления. Для этого решаем систему из $(n - 1)$ линейных алгебраических уравнений с $(n - 1)$ неизвестными компонентами вектора $\hat{\psi}(t_0)$:

$$[B_j(\nu_j^{p,1})]^* \hat{\Phi}(\nu_j^{p,1}, t_0) \hat{\psi}^1(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, q_j}; \quad \sum_{j=1}^m q_j = n - 1.$$

Фундаментальная матрица $\hat{\Phi}(t, t_0)$ решений сопряженной системы (3.22) связана с фундаментальной матрицей $\Phi(t, t_0)$ решений прямой системы (2.1) соотношением $\hat{\Phi}(t, t_0) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^*$, что позволяет ограничиться знанием фундаментальной матрицы только прямой системы.

Вычисляем остальные моменты переключений управления $\nu_j^{p,1}$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{q_j + 1, r_j - 1}$, соответствующие $(n - 1)$ выбранным (принятым) значениям моментов переключений. Моменты переключений уточняем в окрестности значений: $\nu_j^{p,1} = \nu_j^{p,0} + \Delta\nu_j^{p,1}$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{q_j + 1, r_j - 1}$.

Вычисляем уточненное значение отклонения от начала координат решения уравнения (2.1) в момент $t = t_k^1$:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{x}(t_k^1) = & \Phi(t_k^1, t_0)x(t_0) + R_0(t_k^0) + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{\nu_j^{p,0}}^{\nu_j^{p,0} + \Delta\nu_j^{p,1}} \Phi(t_k^0, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau + \\ & + \sum_{j=1}^m \int_{t_k^0}^{t_k^0 + \Delta t_k^1} \Phi(t_k^0, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(r_j) d\tau. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Запишем (7.7) в следующем компактном виде

$$\Delta\tilde{x}(t_k^1) = \Phi(t_k^1, t_0)x(t_0) + R_0(t_k^0) + \Delta R_1(\Delta\nu_j^{p,1}, \Delta t_k^1), \quad (7.8)$$

где через $\Delta R_1(\Delta\nu_j^{p,1}, \Delta t_k^1)$ обозначены интегральные составляющие выражения (7.7).

2 итерация. Решаем систему с полученными уточненными значениями конечного момента, моментов переключений и уточненным начальным условием нормированной сопряженной системы

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^1, \nu_j^{p,1}) B_j(\nu_j^{p,1}) M_j S_j(p) \mathfrak{L}^1(\nu_j^{p,1}) \Delta\hat{\psi}^{(2)}(t_0) + \\ + \sum_{j=1}^m B_j(t_k^1) M_j S_j(r_j) \Delta t_k^{(2)} + \Delta\tilde{x}(t_k^1) = 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Вычисляем $(n - 1)$ значение компонент отклонений $\Delta\hat{\psi}^{(2)}(t_0)$ вектора начального условия нормированной сопряженной системы и отклонение $\Delta t_k^{(2)}$ конечного момента. По формуле (4.7) вычисляем отклонения моментов переключений

$$\Delta\nu_j^{p,2} \approx \mathfrak{L}^1(\nu_j^{p,1}) \Delta\hat{\psi}^{(2)}(t_0). \quad (7.10)$$

Уточняем значения моментов переключений и конечного момента:

$$\nu_j^{p,2} = \nu_j^{p,1} + \Delta\nu_j^{p,2}; \quad t_k^{(2)} = t_k^1 + \Delta t_k^{(2)}; \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, q_j}; \quad \sum_{j=1}^m q_j = n - 1. \quad (7.11)$$

Аналогично уточняем нормированное начальное условие $\hat{\psi}^{(2)}(t_0)$ сопряженной системы, решая систему из $(n - 1)$ линейных алгебраических уравнений с $(n - 1)$ неизвестными компонентами вектора $\hat{\psi}^{(2)}(t_0)$:

$$[B_j(\nu_j^{p,2})]^* \hat{\Phi}(\nu_j^{p,2}, t_0) \hat{\psi}^{(2)}(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, q_j}; \quad \sum_{j=1}^m q_j = n - 1.$$

Снова уточняем остальные моменты переключений $\nu_j^{p,2}$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{q_j + 1, r_j - 1}$, соответствующие $(n - 1)$ выбранным (принятым) значениям

моментов переключений: $\nu_j^{p,2}$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, q_j}$; $\sum_{j=1}^m q_j = n - 1$. Вычисляем уточненное значение отклонения от начала координат фазовой траектории движения системы (2.1) в конечный момент $t = t_k^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{x}(t_k^{(2)}) &= \Phi(t_k^{(2)}, t_0)x(t_0) + R_0(t_k^0) + \Delta R_1(\Delta \nu_j^{p,1}, \Delta t_k^1) + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{\nu_j^{p,1}}^{\nu_j^{p,1} + \Delta \nu_j^{p,2}} \Phi(t_k^1, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau + \sum_{j=1}^m \int_{t_k^1}^{t_k^1 + \Delta t_k^{(2)}} \Phi(t_k^1, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(r_j) d\tau. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Представляем (7.12) в компактной форме

$$\Delta \tilde{x}(t_k^{(2)}) = \Phi(t_k^{(2)}, t_0)x(t_0) + R_0(t_k^0) + \Delta R_1(\Delta \nu_j^{p,1}, \Delta t_k^1) + \Delta R_2(\Delta \nu_j^{p,2}, \Delta t_k^{(2)}). \quad (7.13)$$

В (7.13) через $\Delta R_2(\Delta \nu_j^{p,2}, \Delta t_k^{(2)})$ обозначены интегральные составляющие выражения (7.12).

с итерация. Решаем систему линейных алгебраических уравнений с полученными на $(s - 1)$ итерации значениями: вычисленного отклонения от начала координат $\Delta \tilde{x}(t_k^{s-1})$; конечного момента t_k^{s-1} ; моментов переключений $\nu_j^{p,s-1}$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, q_j}$; $\sum_{j=1}^m q_j = n - 1$; нормированного начального условия сопряженной системы $\hat{\psi}^{(s-1)}(t_0)$:

$$\begin{aligned} &2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^{s-1}, \nu_j^{p,s-1}) B_j(\nu_j^{p,s-1}) M_j S_j(p) \mathfrak{L}^{s-1} \Delta \hat{\psi}^s(t_0) + \\ &+ \sum_{j=1}^m B_j(t_k^{s-1}) M_j S_j(r_j) \Delta t_k^s + \Delta \tilde{x}(t_k^{s-1}) = 0. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Вычисляем $(n - 1)$ значение компонент отклонений $\Delta \hat{\psi}^s(t_0)$ вектора начального условия нормированной сопряженной системы и отклонение Δt_k^s конечного момента. По формуле (4.7) вычисляем отклонения моментов переключений

$$\Delta \nu_j^{p,s} \approx \mathfrak{L}^{s-1}(\nu_j^{p,s-1}) \Delta \hat{\psi}^s(t_0). \quad (7.15)$$

Снова выбираем и уточняем $(n - 1)$ значений моментов переключений и уточняем конечный момент:

$$\nu_j^{p,s} = \nu_j^{p,s-1} + \Delta \nu_j^{p,s}, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, q_j}; \quad \sum_{j=1}^m q_j = n - 1; \quad t_k^s = t_k^{s-1} + \Delta t_k^s. \quad (7.16)$$

Затем уточняем нормированное начальное условие $\hat{\psi}^s(t_0)$ сопряженной системы, решая систему из $(n - 1)$ линейных алгебраических уравнений с $(n - 1)$ неизвестными, которыми являются компоненты вектора $\hat{\psi}^s(t_0)$:

$$[B_j(\nu_j^{p,s})]^* \hat{\Phi}(\nu_j^{p,s}, t_0) \hat{\psi}^s(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, q_j}; \quad \sum_{j=1}^m q_j = n - 1.$$

Далее уточняем остальные моменты переключений $\nu_j^{p,s}$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{q_j + 1, r_j - 1}$, соответствующие $(n - 1)$ выбранным (принятым) значениям моментов переключений: $\nu_j^{p,s}$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, q_j}$; $\sum_{j=1}^m q_j = n - 1$. Моменты переключений уточняем в окрестности значений: $\nu_j^{p,s} = \nu_j^{p,s-1} + \Delta \nu_j^{p,s}$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{q_j + 1, r_j - 1}$.

Вычисляем уточненное значение отклонения от начала координат фазовой траектории движения системы (2.1) в конечный момент $t = t_k^s$:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{x}(t_k^s) = & \Phi(t_k^s, t_0)x(t_0) + R_0(t_k^0) + \Delta R_1(\Delta \nu_j^{p,1}, \Delta t_k^1) + \Delta R_2(\Delta \nu_j^{p,2}, \Delta t_k^{(2)}) + \dots + \\ & + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{\nu_j^{p,s-1}}^{\nu_j^{p,s-1} + \Delta \nu_j^{p,s}} \Phi(t_k^{s-1}, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau + \\ & + \sum_{j=1}^m \int_{t_k^{s-1}}^{t_k^{s-1} + \Delta t_k^s} \Phi(t_k^{s-1}, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(r_j) d\tau. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Представляем (7.17) в компактном виде

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{x}(t_k^s) = & \Phi(t_k^s, t_0)x(t_0) + R_0(t_k^0) + \Delta R_1(\Delta \nu_j^{p,1}, \Delta t_k^1) + \Delta R_2(\Delta \nu_j^{p,2}, \Delta t_k^{(2)}) + \dots \\ & + \Delta R_s(\Delta \nu_j^{p,s}, \Delta t_k^s). \end{aligned} \quad (7.18)$$

В (7.18) через $\Delta R_s(\Delta \nu_j^{p,s}, \Delta t_k^s)$ обозначены интегральные составляющие выражения (7.17).

Итерационный процесс вычисления продолжается аналогичным образом до тех пор, пока на N итерации

$$\|\Delta \tilde{x}(t_k^N)\| \leq \varepsilon_0, \quad (7.19)$$

где $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, задано и характеризует необходимую точность вычисления оптимального управления.

Таким образом, достаточно интегрировать систему дифференциальных уравнений *лишь на интервалах перемещений* конечного момента и моментов переключений управления. *Это резко снижает вычислительные затраты и делает возможным вычисление оптимального управления в процессе управления объектом.*

Предварительные вычисления не входят в оценку трудоемкости вычислительного метода, так как процесс управления начинается с момента задания начального условия $x(t_0) = x_0$, которое может быть любым из ограниченной области D начальных условий: $x_0 \in D$. Для управления важны лишь те вычислительные операции, которые производятся в процессе управления системой. Наиболее затратной является операция интегрирования.

Определение. *Трудоемкость (R) вычислительного метода это отношение затрат времени на интегрирование при вычислении оптимального управления к времени оптимального процесса $T_{opt} = t_k - t_0$.*

Суммарное время интегрирования определяется выражением

$$T_* = \sum_{s=1}^N \left[\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} |\Delta \nu_j^{p,s}| + |\Delta t_k^s| \right]. \quad (7.20)$$

Трудоемкость рассматриваемого метода равна

$$R = \frac{T_*}{T_{opt}}. \quad (7.21)$$

Трудоемкость вычислительного метода определяется суммарным перемещением моментов переключений и конечного момента и *в случае монотонной сходимости не зависит от числа перемещений, т.е. не зависит от числа итераций*. Более того, чем точнее начальное приближение, тем более монотонно сходится вычислительный процесс и, следовательно, тем меньше величина суммарного перемещения T_* . В качестве нижней оценки затрат времени на вычисления можно принять

$$T_{*min} = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} |\nu_j^p - \nu_j^{p,0}| + |t_k - t_k^0|, \quad R_{min} = \frac{T_{*min}}{T_{opt}}. \quad (7.22)$$

Здесь $\nu_j^{p,0}, t_k^0$ — начальные значения моментов переключений управления и конечного момента времени (начальное приближение); ν_j^p, t_k — значения оптимального процесса.

Таким образом, близость параметра R к параметру R_{min} свидетельствует о близости сходимости вычислительного процесса к монотонной сходимости.

8. МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(t_0) &= x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= x_3, & x_2(t_0) &= x_{20}, \\ \dot{x}_3 &= x_4, & x_3(t_0) &= x_{30}, \\ \dot{x}_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + bu, & x_4(t_0) &= x_{40}, \quad |u| \leq M. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Система (8.1) при $a_{41} = -2, 9684$; $a_{42} = -5, 84$; $a_{43} = -6, 33$; $a_{44} = -3, 4$ имеет следующие комплексно-сопряженные собственные значения матрицы A : $\lambda_{1,2} = -0, 784 \pm j 0, 986$; $\lambda_{3,4} = -0, 916 \pm j 1, 016$. Принято $b = 4$, $M = 5$, $T_{s+1} - T_s = 0, 5$, $s = \overline{1, 10}$.

Пусть задано $x(t_0) = (1, 0, 8, -1, 2, 2)$. Начальное условие принадлежит октанту $[+ + - +]$ фазового пространства. Проверяем выполнение условий (3.10) и получаем, что заданное начальное условие принадлежит области достижимости за время $T = 2, 5$ и не принадлежит области достижимости за время $T = 2$. Опорная гиперплоскость Γ_1 при $T = 2$ проходит через граничные точки на фазовых осях x_1, x_2, x_4 : $x_{(1)}^*(2) = 0, 833$; $x_{(2)}^*(2) = 0, 799$; $x_{(4)}^*(2) = 9, 053$ и максимально удаленную граничную точку $x_{(*)}^\alpha(2) = (2; 1, 98; -11, 088; 13, 86)$ и описывается уравнением

$$1, 20048x_1 + 1, 251564x_2 + 0, 487919x_3 + 0, 110461x_4 - 1 = 0. \quad (8.2)$$

Нормированное расстояние ($d_1 > 0$) от точки $x(t_0)$ до опорной гиперплоскости равно $d_1 = 0, 83715$. Усредненные значения моментов переключений управления для начальных условий, принадлежащих опорной гиперплоскости, следующие: $\nu_{(on)}^1 = 0, 5128$; $\nu_{(on)}^2 = 1, 2524$; $\nu_{(on)}^3 = 1, 8$.

Параллельная опорной гиперплоскость Γ_2 при $T = 2, 5$ проходит через граничные точки на тех же фазовых осях x_1, x_2, x_4 : $x_{(1)}^*(2, 5) = 2, 0835$; $x_{(2)}^*(2, 5) = 1, 62$;

$x_{(4)}^*(2, 5) = 13, 304$ и описывается уравнением

$$0, 479962x_1 + 0, 617284x_2 + 0, 259334x_3 + 0, 075165x_4 - 1 = 0. \quad (8.3)$$

Нормированное расстояние ($d_2 < 0$) от точки $x(t_0)$ до гиперплоскости Γ_2 равно $d_1 = -0.187082$. Усредненные значения моментов переключений для начальных условий, принадлежащих гиперплоскости Γ_2 , следующие: $\nu_{(pr)}^1 = 0.645$; $\nu_{(pr)}^2 = 1.599$; $\nu_{(on)}^3 = 2.2615$.

По формулам (3.19), (3.20) вычисляем приближенные значения времени и моментов переключений оптимального управления, переводящего систему (8.1) из начального состояния $x(t_0) = (1, 0.8, -1.2, 2)$ в начало координат: $\nu^1 = 0.621$; $\nu^2 = 1.536$; $\nu^3 = 2.177$; $T = 2.409$. Этим моментам переключений соответствуют следующие нормированные начальные условия сопряженной системы: $\hat{\psi}_1(t_0) = 1$; $\hat{\psi}_2(t_0) = 1.190031$; $\hat{\psi}_3(t_0) = 0.554368$; $\hat{\psi}_4(t_0) = 0.111541$. Структура искомого оптимального управления $[-M, +M, -M, +M]$. На рис. 3 показаны начальное приближение (пунктирные линии) и вычисленное оптимальное управление.

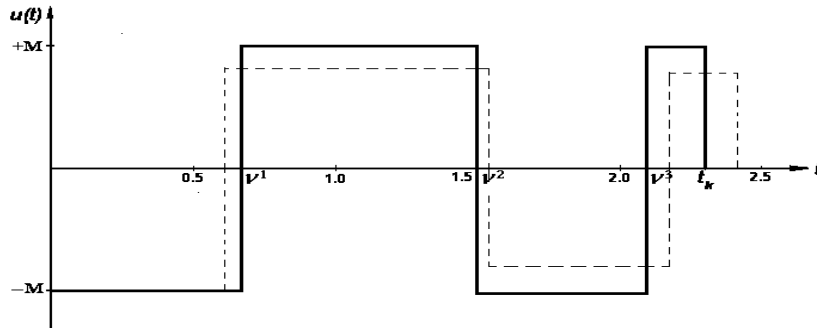


Рис. 3. Начальное приближение и оптимальное управление

В табл. 1 приведены вычисленные на каждой итерации значения моментов переключений искомого оптимального управления, времени перевода, величин квазиоптимального управления на каждом интервале знакопостоянства и нормы $\|x(t_k)\|$ системы (8.1) в конечный момент времени $t = t_k$. Трех итераций достаточно для вычисления оптимального управления с точностью 10^{-7} .

Т а б л и ц а 1.

h	ν^1	ν^2	ν^3	t_k	\hat{u}^1	\hat{u}^2	\hat{u}^3	\hat{u}^4	$\ x(t_k)\ $
0	0.621	1.536	2.177	2.409	-4.986	3.815	-3.590	3.706	0.81600
1	0.67428	1.50582	2.10050	2.32296	-4.956	4.911	-4.868	4.889	0.03515
2	0.67389	1.50200	2.09201	2.31391	-4.999	4.999	-4.999	4.999	0.00052
3	0.67387	1.50192	2.09191	2.31381	-5.000	5.000	-5.000	5.000	0.00000

Затраты времени на вычисления составляют $T_* = 0.268047$. Вычислительная трудоемкость метода: $R = 0.115846 \approx 0.116$; $R_{min} = 0.115487 \approx 0.115$. Сходимость близка к монотонной, а время на интегрирование в процессе управления составляет лишь 11.6 % от времени оптимального перевода системы.

Зададим другое начальное условие $x(t_0) = (2.5, 3, 4, 7)$. Эта точка находится в октанте $[+ + + +]$ фазового пространства. Проверяем выполнение неравенств (3.10) и находим, что начальное условие принадлежит области достижимости за время $T = 4$ и не принадлежит области достижимости за время $T = 3.5$. Опорная гиперплоскость проходит через граничные точки на фазовых осях

$x_1, x_2, x_3, : x_{(1)}^*(3.5) = 9,734; x_{(2)}^*(3.5) = 5,499; x_{(3)}^*(3.5) = 8.526$ и максимально удаленную граничную точку $x_{(*)}^\alpha(3.5) = (2.47792; 1.39984; 2.1704; 7.26574)$ и описывается уравнением

$$0.102733x_1 + 0.181851x_2 + 0.117288x_3 + 0.032524x_4 - 1 = 0. \quad (8.4).$$

Нормированное расстояние ($d_1 > 0$) от точки $x(t_0)$ до опорной гиперплоскости равно $d_1 = 0.499205$. Усредненные значения моментов переключений управления для начальных условий, принадлежащих опорной гиперплоскости, следующие: $\nu_{(on)}^1 = 1.313925; \nu_{(on)}^2 = 2,488759; \nu_{(on)}^3 = 3.215372$.

Параллельная опорной гиперплоскость Γ_2 при $T = 4$ проходит через граничные точки на тех же фазовых осях $x_1, x_2, x_3 : x_{(1)}^*(4) = 20.517; x_{(2)}^*(4) = 10.1315;$

$x_{(3)}^*(4) = 14.42$ и через граничную удаленную точку с координатами $x_{(*)}^\alpha(4) = (5.27143; 2.60309; 3.70493; 11.18493)$. Параллельная опорной гиперплоскость Γ_2 описывается уравнением

$$0.04874x_1 + 0.098702x_2 + 0.069348x_3 + 0.0204929x_4 - 1 = 0. \quad (8.5).$$

Нормированное расстояние ($d_2 < 0$) от точки $x(t_0)$ до гиперплоскости Γ_2 равно $d_2 = -0.1799157$. Усредненные значения моментов переключений для начальных условий, принадлежащих гиперплоскости Γ_2 , следующие: $\nu_{(pr)}^1 = 1.499735; \nu_{(pr)}^2 = 2.897506; \nu_{(on)}^3 = 3.679024$.

По формулам (3.19), (3.20) вычисляем приближенные значения времени и моментов переключений оптимального управления, переводящего систему (8.1) из начального состояния $x(t_0) = (2.5, 3, 4, 7)$ в нулевое конечное состояние: $\nu^1 = 1.4505; \nu^2 = 2.789; \nu^3 = 3.556; T = 3.867$. Этим моментам переключений соответствуют следующие нормированные начальные условия сопряженной системы: $\hat{\psi}_1(t_0) = 1; \hat{\psi}_2(t_0) = 2.019319; \hat{\psi}_3(t_0) = 1.371009; \hat{\psi}_4(t_0) = 0.421160$. Структура искомого оптимального управления $[-M, +M, -M, +M]$. На рис. 4 показаны начальное приближение (пунктирные линии) и вычисленное оптимальное управление.

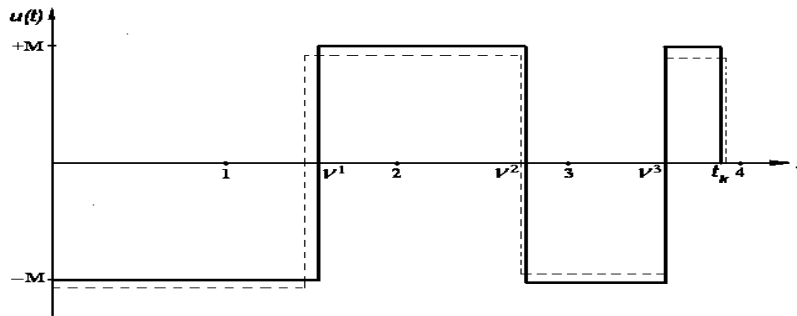


Рис. 4. Начальное приближение и оптимальное управление

В табл. 2 приведены вычисленные на каждой итерации значения моментов переключений искомого оптимального управления, времени перевода, величин квазиоптимального управления на каждом интервале знакопостоянства и нормы $\|x(t_k)\|$ системы (8.1) в конечный момент времени $t = t_k$. Трех итераций достаточно для вычисления оптимального управления с точностью 10^{-7} . Затраты времени на вычисления равны $T_* = 0.109706$. Вычислительная

трудоемкость метода: $R = 0.028473 \approx 0,0285$; $R_{min} = 0.025937 \approx 0,026$. Сходимость близка к монотонной, а время на интегрирование в процессе управления составляет лишь 2.85 % от времени оптимального перевода системы.

Т а б л и ц а 2.

h	ν^1	ν^2	ν^3	t_k	\hat{u}^1	\hat{u}^2	\hat{u}^3	\hat{u}^4	$\ x(t_k)\ $
0	1.4505	2.789	3.556	3.867	-5.307	4.540	-4.539	4.459	0.92322
1	1.52636	2.78978	3.54877	3.85073	-5.018	5.022	-5.002	4.995	0.03531
2	1.52745	2.79337	3.55139	3.85297	-5.000	5.000	-5.000	5.000	0.00015
3	1.52744	2.79337	3.55140	3.85298	-5.000	5.000	-5.000	5.000	0.00000

Представляет интерес сравнение вычислительных затрат предлагаемого метода с другими известными методами вычисления оптимального по быстродействию управления. Выше (раздел 7) отмечалось, что трудоемкость итерационных методов вычисления оптимального управления принято оценивать по числу решений задачи Коши. Число интегрирований дифференциальных уравнений на всем интервале управления $[t_0, t_k]$ составляет, как правило, несколько десятков. Трудоемкость традиционных вычислительных методов может быть оценена следующим образом: $R \approx c 10$, где $1 < c < 10$. Коэффициент c зависит от многих факторов: размерности управляемой системы; структуры матриц $A(t)$ и $B(t)$; собственных значений матрицы $A(t)$; структуры и формы множества достижимости; числа возможных переключений управляющих параметров; заданной точности вычисления оптимального управления; начального и конечного условий и др. Трудоемкость предлагаемого метода может быть оценена так: $R \approx c 0,02$. Таким образом, трудоемкость предлагаемого метода по сравнению с традиционными методами вычисления *более чем на два порядка меньше*. Так, например, в работе [3] приведено, что для системы третьего порядка с нулевыми собственными значениями матрицы A число решений задачи Коши достигает 100, т.е. $R = 100$. В [13] в качестве тестовой рассмотрена такая же система третьего порядка с нулевыми собственными значениями и вычислены оптимальные управления для двух различных начальных условий: 1) $x(t_0) = (7; -10; 15)$ и 2) $x(t_0) = (3; 5; 7)$. В первом случае вычислительная трудоемкость составила $R = 0,2805$, т.е. вычислительные затраты предлагаемого метода в 356 раз меньше. Во втором случае трудоемкость составила $R = 0,148$, т.е. вычислительные затраты предлагаемого метода в 675 раз меньше.

Отличия трудоемкости предлагаемого метода от трудоемкости метода минской школы [10]-[12] не столь разительны, так как оба метода являются методами реализации оптимального управления в реальном времени. Однако, скорость сходимости метода минской школы линейная, а предлагаемого метода — квадратичная. Поэтому по мере увеличения заданной точности вычисления оптимального управления (параметра ε_0 в (7.19)) увеличивается трудоемкость метода минской школы. Метод минской школы не предполагает задания хорошего начального приближения и предварительного однократного интегрирования. Поэтому трудоемкость вычисления оптимального управления может быть оценена как $R \approx 1 + c 0,02$. В результате вычислительная трудоемкость предлагаемого метода по сравнению с методом минской школы *меньше лишь в несколько раз*.

Предложенная в настоящей работе модификация метода вычисления оптимального управления еще более уменьшает вычислительную трудоемкость. В качестве тестовой в работе рассмотрена более сложная система четвертого порядка (8.1) с комплексно-сопряженными собственными значениями, для которой вычислены оптимальные управления для двух различных начальных условий: 1) $x(t_0) = (1, 0.8, -1.2, 2)$ и 2) $x(t_0) = (2.5, 3, 4, 7)$. Вычислительная трудоемкость соответственно составила $R = 0.116$ и $R = 0.0285$. Таким образом, даже при существенном усложнении описания управляемой системы, трудоемкость вычисления оптимального управления уменьшается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Процесс управления начинается с момента задания конкретного начального условия, которое может быть любым из области начальных условий. Разделение вычислительных затрат на предварительные вычисления и вычисления в процессе управления позволяет существенно уменьшить объем необходимых вычислений в процессе управления, что делает возможным реализацию оптимального управления многими объектами и технологическими процессами в реальном времени. Предварительные вычисления осуществляются для всей области начальных условий управляемой системы и не зависят от конкретного начального условия. Разделение области начальных условий на области достижимости и аппроксимация каждой области совокупностью гиперплоскостей позволяет предварительно вычислить управление, которое близко к искомому оптимальному по быстродействию управлению. Квазиоптимальное управление дает структуру искомого оптимального управления. В конечном итоге, для вычисления оптимального управления с необходимой точностью достаточно нескольких итераций. При этом интегрирование дифференциальных уравнений на каждой итерации производится с использованием вариаций Лагранжа и не на всем интервале управления, а только на интервалах перемещений конечного момента и моментов переключений управления. Это резко сокращает вычислительные затраты, а преобразование начального и конечного условий позволяет использовать аппроксимирующую конструкцию для перевода системы в любое конечное состояние.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, Москва, 1976.
- [2] В.Г. Болтянский, *Математические методы оптимального управления*, Наука, Москва, 1969. MR0353082
- [3] Р.П. Федоренко, *Приближенное решение задач оптимального управления*, Наука, Москва, 1978. MR0545338
- [4] А.А. Любушин, *О применении модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **22**:1 (1982), 30–35. MR0648259
- [5] Н.И. Грачев, Ю.Г. Евтушенко, *Библиотека программ для решения задач оптимального управления*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **19**:2 (1979), 367–387. MR0531347
- [6] Ю.Н. Киселев, *Быстросходящиеся алгоритмы для линейного оптимального быстрого действия*, Кибернетика, **62**:6 (1990), 47–57. MR1099300
- [7] В.А. Срочко, *Итерационные методы решения задач оптимального управления*, Физматлит, Москва, 2000.

- [8] R.E. Hartl, S.P. Sethi, R.G. Vickson, *A survey of the maximum principle for optimal control problems with state constraints*, SIAM Review, **37** (1995), 181–218. MR1343211
- [9] Ю.С. Осипов, *Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией*, Успехи математических наук, **61**:4 (2006), 25–76. MR2279043
- [10] Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, А.И. Тятюшкин, *Конструктивные методы оптимизации. Ч.1. Линейные задачи*, «Университетское», Минск, 1984. MR0761172
- [11] Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, *Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **40**:6 (2000), 838–859. MR1804426
- [12] Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, *Оптимальное управление и наблюдение в реальном времени*, Изв. РАН. Теория и системы управления, **3**, (2006), 90–111. MR2300994
- [13] В.М. Александров, *Аппроксимация множеств достижимости и вычисление оптимального по быстрдействию управления в реальном времени*, Сибирские Электронные Математические Известия, **8** (2011), 72–104. MR2800822
- [14] В.М. Александров, *Вычисление оптимального управления в реальном времени*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **52**:10 (2012), 1778–1800. MR3150293
- [15] В.М. Александров, *Построение аппроксимирующей конструкции для вычисления и реализации оптимального управления в реальном времени*, Сибирский журнал вычислительной математики, **15**:1 (2012), 1–19.
- [16] Ф.Л. Черноусько, *Эллипсоидальные оценки области достижимости управляемой системы*, Прикладная математика и механика, **45**:1 (1981), 11–19. MR0654770
- [17] А.И. Овсеевич, Ф.Л. Черноусько, *Некоторые свойства оптимальных эллипсоидов, аппроксимирующих множества достижимости*, ДАН., **388**:4. (2003), 462–465. MR2004146
- [18] А.И. Овсеевич, Ю.В. Тарабанько, *Явные формулы для эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости*, Изв. РАН. Теория и системы управления, **2** (2007), 33–44. MR2367889
- [19] М.М. Хрусталева, *Точное описание множеств достижимости и условие глобальной оптимальности динамических систем. I. Оценки и точное описание множеств достижимости и управляемости*, Автоматика и телемеханика, **5** (1988), 62–71. MR0952669
- [20] В.И. Гурман, Е.А. Трушкова, *Оценки множеств достижимости управляемых систем*, Дифференциальные уравнения, **45**:11 (2009), 1601–1609. MR2675282
- [21] Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков, *Множества достижимости и притяжения линейных систем с ограниченным управлением: описание с помощью инвариантных эллипсоидов*, Стохастическая оптимизация в информатике, **4**:1 (2008), 3–24.
- [22] Ю.И. Бердышев, *О построении области достижимости в одной нелинейной задаче*, Изв. РАН. Теория и системы управления, **4** (2006), 22–26. MR2289385
- [23] Г. Райсиг, *Выпуклость множеств достижимости систем управления*, Автоматика и телемеханика, **9** (2007), 64–78. MR2360819
- [24] Н.Б. Брусникина, А.В. Лотов, *Аппроксимация с гарантированной точностью множеств достижимости для линейной динамической системы, подверженной импульсным воздействиям*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **47**:11 (2007), 1855–1864. MR2405030
- [25] В.М. Александров, *Приближенное решение задачи линейного быстрогодействия*, Автоматика и телемеханика, **12** (1998), 3–13. MR1812825
- [26] В.М. Александров, *Последовательный синтез оптимального по быстрдействию управления в реальном времени*, Автоматика и телемеханика, **8** (2008), 3–24. MR2494247
- [27] В.М. Александров, *Численный метод решения задачи линейного быстрогодействия*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **38**:6 (1998), 918–931. MR1646846
- [28] Ф.Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва, 1966. MR0202725

Владимир Михайлович Александров
 Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
 пр. академика Коптюга 4,
 630090, Новосибирск, Россия
 E-mail address: vladalex@math.nsc.ru