S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 878–886 (2014) УДК 512.552.7
MSC 16S34

КЛАССОВЫЕ КОЛЬЦА ХАРАКТЕРОВ СПОРАДИЧЕСКИХ ГРУПП

М.И. МОЛОДОРИЧ

Abstract. The class character rings of sporadic groups have been found. For that we analysed character tables of sporadic groups from GAP. Also we determined those class character rings, which is trivial with respect to multiplication (class character ring is called trivial with respect to multiplication if it is ring of integers or subring of imaginary quadratic field). These results are initial steps towards description of central unit group of integral group rings of sporadic groups.

Keywords: sporadic group, character, group rings.

1. Введение

Классическими объектами исследований в теории групповых колец являются целочисленные групповые кольца конечных групп. Так как группа центральных единиц совпадает с центром группы всех единиц, то получение информации о центре этой группы — важнейшая часть информации о группе всех единиц.

Необходимым этапом к описанию групп центральных единиц целочисленных групповых колец спорадических групп является исследование классовых колец характеров.

В данной статье изучены классовые кольца характеров спорадических групп.

Molodorich, M.I., The class character rings of sporadic groups.

Поступила 15 сентября 2014 г., опубликована 27 ноября 2014 г.

2. Предварительные сведения

Определение 1. *Пусть G — конечная группа, $X(G)$ — множество представителей всех классов сопряжённости в G, $Irr(G)$ — множество всех неприводимых характеров группы G и $\chi \in Irr(G)$. Положим*

$$\mathbf{Z}[cl,\chi] = \Big\{ \frac{1}{\deg \chi} \sum_{x \in X(G)} |x^G| \chi(x)\gamma(x) \;\Big|\; \gamma(x) \in \mathbf{Z}\ \forall x \in X(G) \Big\}.$$

$\mathbf{Z}[cl,\chi]$ *называется* классовым кольцом характера χ.

Лемма 1. *Пусть $\chi \in Irr(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) *Отображение $f_\chi : Z(\mathbf{Z}G) \to \mathbf{C}$, где для $u = \sum_{\zeta \in Irr(G)} \beta_u(\zeta)e(\zeta)$ полагаем $f_\chi(u) = \beta_u(\chi)$, будет гомоморфизмом кольца $Z(\mathbf{Z}G)$ в поле комплексных чисел $\mathbf{C}$.*
2) *Образ f_χ совпадает с $\mathbf{Z}[cl,\chi]$ и потому $\mathbf{Z}[cl,\chi]$ — подкольцо в $\mathbf{C}$.*
3) *$\mathbf{Z}[cl,\chi]$ — подкольцо кольца целых $I(\mathbf{Q}(\chi))$ поля характера χ.*

Эта лемма и определение классового кольца характера взяты из [1].

Определение 2. *Классовое кольцо характера назовём* тривиальным по умножению, *если оно совпадает с кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$, или является подкольцом кольца целых мнимого квадратичного поля.*

Данное определение обусловлено тем, что группы единиц таких колец тривиальны[3].

При поиске классовых колец характеров будем рассматривать подгруппы по сложению, порожденные значениями характеров. Для характера χ обозначим такую группу $G(\chi)$.

3. Классовые кольца характеров спорадических групп

С помощью системы GAP были получены таблицы характеров спорадических групп, на основании анализа которых были найдены все нетривиальные по умножению классовые кольца характеров спорадических групп. Все обозначения для характеров групп в данной статье соответствуют обозначениям в системе GAP.

Теорема 1. *Группы Матье, Конвея, МакЛафлина, Хигмана-Симса, Томпсона и группа-монстр Фишера–Грайса имеют только тривиальные классовые кольца характеров.*

Доказательство. Классовые кольца характеров данных групп либо совпадают с кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$, либо являются подкольцами некоторого кольца целых мнимого квадратичного поля:

(1) для группы Матье M_{11} – $\mathrm{Q}(\sqrt{-2})$, $\mathrm{Q}(\sqrt{-11})$;
(2) для группы Матье M_{12} – $\mathrm{Q}(\sqrt{-11})$;
(3) для группы Матье M_{22} – $\mathrm{Q}(\sqrt{-7})$, $\mathrm{Q}(\sqrt{-11})$;
(4) для группы Матье M_{23} – $\mathrm{Q}(\sqrt{-7})$, $\mathrm{Q}(\sqrt{-11})$, $\mathrm{Q}(\sqrt{-15})$, $\mathrm{Q}(\sqrt{-23})$;
(5) для группы Матье M_{24} – $\mathrm{Q}(\sqrt{-7})$, $\mathrm{Q}(\sqrt{-15})$, $\mathrm{Q}(\sqrt{-23})$;
(6) для группы Конвея Co_1 – $\mathrm{Q}(\sqrt{-23})$, $\mathrm{Q}(\sqrt{-39})$;
(7) для группы Конвея Co_2 – $\mathrm{Q}(\sqrt{-7})$, $\mathrm{Q}(\sqrt{-15})$, $\mathrm{Q}(\sqrt{-23})$;
(8) для группы Конвея Co_3 – $\mathrm{Q}(\sqrt{-5})$, $\mathrm{Q}(\sqrt{-11})$, $\mathrm{Q}(\sqrt{-23})$;

(9) для группы Томпсона Th – $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-31})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-39})$;
(10) для группы Хигмана-Симса HS – $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$;
(11) для группы МакЛафлина McL – $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$;
(12) для группы-монстра Фишера-Грайса M – $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-14})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-26})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-31})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-39})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-47})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-59})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-81})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-87})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-95})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-119})$.

Таким образом, все классовые кольца характеров указанных групп тривиальны по умножению. □

Введем обозначение:

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{n}}{2} & \text{при } n \equiv 1 \pmod 4, \\ \sqrt{n} & \text{при } n \equiv 2, 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Теорема 2. *Спорадические группы, не указанные в Теореме 1, имеют следующие нетривиальные классовые кольца характеров:*

(1) *группа* J_1*:*

$$\mathbf{Z} + 11 \cdot 19\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^2 \cdot 19\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 7 \cdot 11C\mathbf{Z} + 7 \cdot 11D\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^2 \cdot 11\omega_5\mathbf{Z},$$

где $C = \zeta_{19} + \zeta_{19}^7 + \zeta_{19}^8 + \zeta_{19}^{11} + \zeta_{19}^{12} + \zeta_{19}^{18}$, $D = \zeta_{19}^4 + \zeta_{19}^6 + \zeta_{19}^9 + \zeta_{19}^{10} + \zeta_{19}^{13} + \zeta_{19}^{15}$.

(2) *группа* J_2*:*

$$\mathbf{Z} + 2^4 \cdot 3^3\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^5 \cdot 3\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^4 \cdot 3^2\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^5\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^2 \cdot 3^2\omega_5\mathbf{Z}.$$

(3) *группа* J_3*:*

$$\mathbf{Z} + 2^6 \cdot 3^4\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^7 \cdot 19\omega_{17}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^5 \cdot 3^3\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 3 \cdot 17 \cdot 19C\mathbf{Z} + 3 \cdot 17 \cdot 19D\mathbf{Z},$$

где $C = -\zeta_9^2 + \zeta_9^4 + \zeta_9^5 - \zeta_9^7$, $D = 2\zeta_9^2 + \zeta_9^4 + \zeta_9^5 + 2\zeta_9^7$.

(4) *группа* J_4*:*

$$\mathbf{Z} + 2^{20} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 37\omega_{33}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^{12} \cdot 3 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 37\omega_3\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^{20} \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29\omega_{33}\mathbf{Z},$$

$$\mathbf{Z} + 2^{11} \cdot 11^3 \cdot 29 \cdot 31\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 11^3 \cdot 29\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^{20} \cdot 11^3P\mathbf{Z} + 2^{20} \cdot 11^3Q\mathbf{Z},$$

$$\mathbf{Z} + 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43L\mathbf{Z} + 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43M\mathbf{Z},$$

$$\mathbf{Z} + 2^{21} \cdot 23 \cdot 29H\mathbf{Z} + 2^{21} \cdot 23 \cdot 29I\mathbf{Z},$$

где $H = \zeta_{31} + \zeta_{31}^2 + \zeta_{31}^4 + \zeta_{31}^8 + \zeta_{31}^{15} + \zeta_{31}^{16} + \zeta_{31}^{23} + \zeta_{31}^{27} + \zeta_{31}^{29} + \zeta_{31}^{30}$,
$I = \zeta_{31}^3 + \zeta_{31}^6 + \zeta_{31}^7 + \zeta_{31}^{12} + \zeta_{31}^{14} + \zeta_{31}^{17} + \zeta_{31}^{19} + \zeta_{31}^{24} + \zeta_{31}^{25} + \zeta_{31}^{28}$,
$L = -\zeta_{37} - \zeta_{37}^6 - \zeta_{37}^8 - \zeta_{37}^{10} - \zeta_{37}^{11} - \zeta_{37}^{14} - \zeta_{37}^{23} - \zeta_{37}^{26} - \zeta_{37}^{27} - \zeta_{37}^{29} - \zeta_{37}^{31} - \zeta_{37}^{36}$,
$M = -\zeta_{37}^3 - \zeta_{37}^4 - \zeta_{37}^5 - \zeta_{37}^7 - \zeta_{37}^{13} - \zeta_{37}^{18} - \zeta_{37}^{19} - \zeta_{37}^{24} - \zeta_{37}^{30} - \zeta_{37}^{32} - \zeta_{37}^{33} - \zeta_{37}^{34}$,
$P = \zeta_{43} + \zeta_{43}^2 + \zeta_{43}^4 + \zeta_{43}^8 + \zeta_{43}^{11} + \zeta_{43}^{16} + \zeta_{43}^{21} + \zeta_{43}^{22} + \zeta_{43}^{27} + \zeta_{43}^{32} + \zeta_{43}^{35} + \zeta_{43}^{39} + \zeta_{43}^{41} + \zeta_{43}^{42}$,
$Q = \zeta_{43}^7 + \zeta_{43}^9 + \zeta_{43}^{13} + \zeta_{43}^{14} + \zeta_{43}^{15} + \zeta_{43}^{17} + \zeta_{43}^{18} + \zeta_{43}^{25} + \zeta_{43}^{26} + \zeta_{43}^{28} + \zeta_{43}^{29} + \zeta_{43}^{30} + \zeta_{43}^{34} + \zeta_{43}^{36}$.

(5) *группа* Ly*:*

$$\mathbf{Z} + 2^6 \cdot 5^6 \cdot 67\omega_{21}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^6 \cdot 3^7 \cdot 7 \cdot 67\omega_{37}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 67\omega_{21}\mathbf{Z},$$

$$\mathbf{Z} + 2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 67\omega_6\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2 \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 37\omega_{10}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 3^7 \cdot 5^6L\mathbf{Z} + 3^7 \cdot 5^6M\mathbf{Z},$$

$$\mathbf{Z} + 5^6 \cdot 37 \cdot 67E\mathbf{Z} + 5^6 \cdot 37 \cdot 67F\mathbf{Z} + 5^6 \cdot 37 \cdot 67G\mathbf{Z}5^6 \cdot 37 \cdot 67H\mathbf{Z},$$

где $E = -\zeta_{31} - \zeta_{31}^5 - \zeta_{31}^6 - \zeta_{31}^{25} - \zeta_{31}^{26} - \zeta_{31}^{30}$,
$F = -\zeta_{31}^3 - \zeta_{31}^{13} - \zeta_{31}^{15} - \zeta_{31}^{16} - \zeta_{31}^{18} - \zeta_{31}^{28}$,

$G=-\zeta_{31}^{8}-\zeta_{31}^{9}-\zeta_{31}^{14}-\zeta_{31}^{17}-\zeta_{31}^{22}-\zeta_{31}^{23}$,
$H=-\zeta_{31}^{4}-\zeta_{31}^{7}-\zeta_{31}^{11}-\zeta_{31}^{20}-\zeta_{31}^{24}-\zeta_{31}^{27}$,
$L=-\zeta_{67}-\zeta_{67}^{3}-\zeta_{67}^{5}-\zeta_{67}^{8}-\zeta_{67}^{9}-\zeta_{67}^{14}-\zeta_{67}^{15}-\zeta_{67}^{22}-\zeta_{67}^{24}-\zeta_{67}^{25}-\zeta_{67}^{27}-\zeta_{67}^{40}-\zeta_{67}^{42}-\zeta_{67}^{43}-\zeta_{67}^{45}-\zeta_{67}^{52}-\zeta_{67}^{53}-\zeta_{67}^{58}-\zeta_{67}^{59}-\zeta_{67}^{62}-\zeta_{67}^{64}-\zeta_{67}^{66}$,
$M=-\zeta_{67}^{4}-\zeta_{67}^{7}-\zeta_{67}^{11}-\zeta_{67}^{12}-\zeta_{67}^{20}-\zeta_{67}^{21}-\zeta_{67}^{26}-\zeta_{67}^{29}-\zeta_{67}^{31}-\zeta_{67}^{32}-\zeta_{67}^{33}-\zeta_{67}^{34}-\zeta_{67}^{35}-\zeta_{67}^{36}-\zeta_{67}^{38}-\zeta_{67}^{41}-\zeta_{67}^{46}-\zeta_{67}^{47}-\zeta_{67}^{55}-\zeta_{67}^{56}-\zeta_{67}^{60}-\zeta_{67}^{63}$.

(6) *группа* O′N*:*

$$\mathbf{Z}+2^4\cdot 3^4\cdot 7^3\omega_2\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^4\cdot 7^3\cdot 31\omega_2\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+3^4\cdot 11\cdot 19\cdot 31\omega_5\mathbf{Z},$$
$$\mathbf{Z}+2^2\cdot 3^4\cdot 7\cdot 31\omega_7\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+7^3\cdot 11\cdot 31C\mathbf{Z}+7^3\cdot 11\cdot 31D\mathbf{Z}$$

где $C=-\zeta_{19}-\zeta_{19}^{7}-\zeta_{19}^{8}-\zeta_{19}^{11}-\zeta_{19}^{12}-\zeta_{19}^{18}$, $D=-\zeta_{19}^{4}-\zeta_{19}^{6}-\zeta_{19}^{9}-\zeta_{19}^{10}-\zeta_{19}^{13}-\zeta_{19}^{15}$.

(7) *группа* Ru*:*

$$\mathbf{Z}+2^4\cdot 3\cdot 5^3\cdot 29\omega_6\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^{10}\cdot 5\cdot 29\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^2\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\omega_{29}\mathbf{Z},$$
$$\mathbf{Z}+2^9\cdot 13\cdot 29A\mathbf{Z}+2^9\cdot 13\cdot 29B\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^9\cdot 5^3G\mathbf{Z}+2^9\cdot 5^3H\mathbf{Z},$$

где $A=-\zeta_7+\zeta_7^2+\zeta_7^3+\zeta_7^4+\zeta_7^5-\zeta_7^6$,
$B=\zeta_7-\zeta_7^2+\zeta_7^3+\zeta_7^4-\zeta_7^5+\zeta_7^6$,
$G=\zeta_{13}-\zeta_{13}^{2}-\zeta_{13}^{3}-\zeta_{13}^{4}+\zeta_{13}^{5}-\zeta_{13}^{6}-\zeta_{13}^{7}+\zeta_{13}^{8}-\zeta_{13}^{9}-\zeta_{13}^{10}-\zeta_{13}^{11}+\zeta_{13}^{12}$,
$H=-\zeta_{13}-\zeta_{13}^{2}-\zeta_{13}^{3}+\zeta_{13}^{4}-\zeta_{13}^{5}+\zeta_{13}^{6}+\zeta_{13}^{7}-\zeta_{13}^{8}+\zeta_{13}^{9}-\zeta_{13}^{10}-\zeta_{13}^{11}-\zeta_{13}^{12}$.

(8) *группа* He*:*

$$\mathbf{Z}+2^{10}\cdot 3^2\cdot 5^2\omega_{17}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 17\omega_{21}\mathbf{Z},$$

(9) *группа* Suz*:*

$$\mathbf{Z}+2^{13}\cdot 3^5\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^{12}\cdot 3^5\omega_{21}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^{13}\cdot 3^2\cdot 5\omega_{13}\mathbf{Z}.$$

(10) *группа* HN*:*

$$\mathbf{Z}+2^{11}\cdot 3^5\cdot 5^3\cdot 11\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^{10}\cdot 3^4\cdot 5^3\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^9\cdot 3^3\cdot 5^3\omega_5\mathbf{Z},$$
$$\mathbf{Z}+2^{11}\cdot 3^3\cdot 5^3\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^5\cdot 3^5\cdot 5^2\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^8\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11\omega_5\mathbf{Z},$$
$$\mathbf{Z}+2^{12}\cdot 5^3\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^9\cdot 5^2\cdot 11\cdot 19\omega_5\mathbf{Z}.$$

(11) *группа* Fi_{22}*:*

$$\mathbf{Z}+2^{14}\cdot 3^7\omega_{13}\mathbf{Z}.$$

(12) *группа* Fi_{23}*:*

$$\mathbf{Z}+2^{10}\cdot 3^9\cdot 17\omega_{13}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^{10}\cdot 3^{11}\omega_{13}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+3^{12}\cdot 17\cdot 23\omega_{13}\mathbf{Z}.$$

(13) *группа* Fi'_{24}*:*

$$\mathbf{Z}+2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 29\omega_{13}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^{21}\cdot 3^5\cdot 17\cdot 29\omega_{33}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^6\cdot 3^{16}\cdot 7\cdot 29\omega_7\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+3^{15}\cdot 17\cdot 23\cdot 29\omega_{13}\mathbf{Z}.$$

(14) *группа* B*:*

$$\mathbf{Z}+2^{30}\cdot 7^2\cdot 17\cdot 23\cdot 31\cdot 47\omega_2\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^{40}\cdot 13\cdot 19\cdot 47\omega_{17}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^{22}\cdot 3^{13}\cdot 19\cdot 47\omega_7\mathbf{Z}.$$

Для упрощения изложения рассмотрим каждый случай отдельно.
Пусть ζ_n — первообразный корень из 1 степени n.
В дальнейшем будем использовать нумерацию характеров как в GAP [4].

3.1. **Классовые кольца характеров групп Янко.** Прежде чем рассматривать классовые кольца характеров, убедимся, что аддитивная группа, соответствующая характерам χ_9, χ_{10}, χ_{11}, является кольцом.

Лемма 2. *Определим подгруппу по сложению*

$$G(\chi_9) = \{\alpha + \beta C + \gamma D | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}\} =< C, D, E >,$$

где $C = \zeta_{19} + \zeta_{19}^7 + \zeta_{19}^8 + \zeta_{19}^{11} + \zeta_{19}^{12} + \zeta_{19}^{18}$*;* $D = \zeta_{19}^4 + \zeta_{19}^6 + \zeta_{19}^9 + \zeta_{19}^{10} + \zeta_{19}^{13} + \zeta_{19}^{15}$*;* $E = \zeta_{19}^2 + \zeta_{19}^3 + \zeta_{19}^5 + \zeta_{19}^{14} + \zeta_{19}^{16} + \zeta_{19}^{17}$.

Данная группа замкнута по умножению и потому образует подкольцо поля $\mathbb{C}$ *и кроме того* $C^2 = 5 + C + D$*;* $D^2 = 4 - C$*;* $CD = -3 - C - 2D$*;* $CDE = 7$.

Доказательство. Рассмотрим сумму C, D и E:
$C + D + E = \zeta_{19} + \zeta_{19}^7 + \zeta_{19}^8 + \zeta_{19}^{11} + \zeta_{19}^{12} + \zeta_{19}^{18} + \zeta_{19}^4 + \zeta_{19}^6 + \zeta_{19}^9 + \zeta_{19}^{10} + \zeta_{19}^{13} + \zeta_{19}^{15} + \zeta_{19}^2 + \zeta_{19}^3 + \zeta_{19}^5 + \zeta_{19}^{14} + \zeta_{19}^{16} + \zeta_{19}^{17} = \sum_{i=1}^{18} \zeta_{19}^k = \frac{\zeta_{19} - \zeta_{19}^{19}}{1 - \zeta_{19}} = -1.$

Тогда E можно выразить следующим образом: $E = -1 - C - D$.
$C^2 = (\zeta_{19} + \zeta_{19}^7 + \zeta_{19}^8 + \zeta_{19}^{11} + \zeta_{19}^{12} + \zeta_{19}^{18})^2 = 2\zeta_{19} + \zeta_{19}^2 + \zeta_{19}^3 + 2\zeta_{19}^4 + \zeta_{19}^5 + 2\zeta_{19}^6 + 2\zeta_{19}^7 + 2\zeta_{19}^8 + 2\zeta_{19}^9 + 2\zeta_{19}^{10} + 2\zeta_{19}^{11} + 2\zeta_{19}^{12} + 2\zeta_{19}^{13} + \zeta_{19}^{14} + 2\zeta_{19}^{15} + \zeta_{19}^{16} + \zeta_{19}^{17} + 2\zeta_{19}^{18} + 6\zeta_{19}^{19} = (\zeta_{19} + \zeta_{19}^7 + \zeta_{19}^8 + \zeta_{19}^{11} + \zeta_{19}^{12} + \zeta_{19}^{18}) + (\zeta_{19}^4 + \zeta_{19}^6 + \zeta_{19}^9 + \zeta_{19}^{10} + \zeta_{19}^{13} + \zeta_{19}^{15}) + \sum_{i=1}^{18} \zeta_{19}^k + 6\zeta_{19}^{19} = C + D - 1 + 6 = 5 + C + D.$
$D^2 = (\zeta_{19}^4 + \zeta_{19}^6 + \zeta_{19}^9 + \zeta_{19}^{10} + \zeta_{19}^{13} + \zeta_{19}^{15})^2 = \zeta_{19} + 2\zeta_{19}^2 + 2\zeta_{19}^3 + 2\zeta_{19}^4 + 2\zeta_{19}^5 + 2\zeta_{19}^6 + \zeta_{19}^7 + \zeta_{19}^8 + 2\zeta_{19}^9 + 2\zeta_{19}^{10} + \zeta_{19}^{11} + \zeta_{19}^{12} + 2\zeta_{19}^{13} + 2\zeta_{19}^{14} + 2\zeta_{19}^{15} + 2\zeta_{19}^{16} + 2\zeta_{19}^{17} + \zeta_{19}^{18} + 6\zeta_{19}^{19} = -(\zeta_{19} + \zeta_{19}^7 + \zeta_{19}^8 + \zeta_{19}^{11} + \zeta_{19}^{12} + \zeta_{19}^{18}) + 2\sum_{i=1}^{18} \zeta_{19}^k + 6\zeta_{19}^{19} = -C - 2 + 6 = 4 - C.$
$CD = (\zeta_{19} + \zeta_{19}^7 + \zeta_{19}^8 + \zeta_{19}^{11} + \zeta_{19}^{12} + \zeta_{19}^{18})(\zeta_{19}^4 + \zeta_{19}^6 + \zeta_{19}^9 + \zeta_{19}^{10} + \zeta_{19}^{13} + \zeta_{19}^{15}) = 2\zeta_{19} + 3\zeta_{19}^2 + 3\zeta_{19}^3 + \zeta_{19}^4 + 3\zeta_{19}^5 + \zeta_{19}^6 + 2\zeta_{19}^7 + 2\zeta_{19}^8 + \zeta_{19}^9 + \zeta_{19}^{10} + 2\zeta_{19}^{11} + 2\zeta_{19}^{12} + \zeta_{19}^{13} + 3\zeta_{19}^{14} + \zeta_{19}^{15} + 3\zeta_{19}^{16} + 3\zeta_{19}^{17} + 2\zeta_{19}^{18} = -(\zeta_{19} + \zeta_{19}^7 + \zeta_{19}^8 + \zeta_{19}^{11} + \zeta_{19}^{12} + \zeta_{19}^{18}) - 2(\zeta_{19}^4 + \zeta_{19}^6 + \zeta_{19}^9 + \zeta_{19}^{10} + \zeta_{19}^{13} + \zeta_{19}^{15}) + 3\sum_{i=1}^{18} \zeta_{19}^k = -3 - C - 2D.$

Поскольку $CD = -3 - C - 2D$ и $E = -1 - C - D$, то
$CDE = (-3-C-2D)(-1-C-D) = 3+C+2D+3C+C^2+2CD+3D+CD+2D^2 = 3 + 4C + 5D + C^2 + 3CD + 2D^2 = 3 + 4C + 5D + (5 + C + D) + 3(-3 - C - 2D) + 2D(4 - C) = 7.$ □

Предложение 1. *Группа* J_1 *имеет следующие нетривиальные классовые кольца характеров:*

$$\mathbf{Z} + 11 \cdot 19\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^2 \cdot 19\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 7 \cdot 11C\mathbf{Z} + 7 \cdot 11D\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^2 \cdot 11\omega_5\mathbf{Z},$$

где $C = \zeta_{19} + \zeta_{19}^7 + \zeta_{19}^8 + \zeta_{19}^{11} + \zeta_{19}^{12} + \zeta_{19}^{18}$, $D = \zeta_{19}^4 + \zeta_{19}^6 + \zeta_{19}^9 + \zeta_{19}^{10} + \zeta_{19}^{13} + \zeta_{19}^{15}$.

Доказательство. Согласно замечанию 3.6 из [2] аддитивная группа классового кольца характера порождается числами из множества $\{\frac{|x^G|\chi(x)}{deg(\chi)} | (x) \in (X(G))\}$. Рассмотрим множества таких чисел, соответствующих некоторым характерам группы J_1.

Характерам χ_2, χ_3 соответствуют числа $(11 \cdot 19A, 11 \cdot 19A*, 11 \cdot 19B, 11 \cdot 19B*) = 11 \cdot 19 \cdot (2 - 2\omega_5, -1 + 2\omega_5, -1 + \omega_5, -\omega_5)$. Таким образом, данным характерам соответствует кольцо $\mathbf{Z} + 11 \cdot 19\omega_5\mathbf{Z}$.

Для характеров χ_7, χ_8 имеем $(2^2 \cdot 19B, 2^2 \cdot 19B*, 2^2 \cdot 3 \cdot 19B, 2^2 \cdot 3 \cdot 19B*, 2^3 \cdot 19B, 2^3 \cdot 19B*) = 2^2 \cdot 19 \cdot (-1 + \omega_5, -\omega_5, -3 + 3\omega_5, -3\omega_5, -2 + 2\omega_5, -2\omega_5)$ и соответствующее данным характерам классовое кольцо $\mathbf{Z} + 2^2 \cdot 19\omega_5\mathbf{Z}$.

Характерам χ_9, χ_{10} соответствует кольцо $\mathbf{Z} + 7 \cdot 11C\mathbf{Z} + 7 \cdot 11D\mathbf{Z}$, где $C = \zeta_{19} + \zeta_{19}^7 + \zeta_{19}^8 + \zeta_{19}^{11} + \zeta_{19}^{12} + \zeta_{19}^{18}, D = \zeta_{19}^4 + \zeta_{19}^6 + \zeta_{19}^9 + \zeta_{19}^{10} + \zeta_{19}^{13} + \zeta_{19}^{15}, \omega_5 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Аддитивная группа классового кольца характеров χ_{13}, χ_{14} порождается числами $(-2^2 \cdot 11B, -2^2 \cdot 11B*, 2^2 \cdot 3 \cdot 11B, 2^2 \cdot 3 \cdot 11B*, -2^3 \cdot 11B, -2^3 \cdot 11B*) = 2^2 \cdot 11 \cdot (1-\omega_5, \omega_5, -3+3\omega_5, -3\omega_5, 2-2\omega_5, 2\omega_5)$. Ей соответствует кольцо $\mathbf{Z} + 2^2 \cdot 11\omega_5\mathbf{Z}$.

Таким образом, для группы J_1 нетривиальными классовыми кольцами характеров являются кольца

$$\mathbf{Z} + 11 \cdot 19\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^2 \cdot 19\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 7 \cdot 11C\mathbf{Z} + 7 \cdot 11D\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^2 \cdot 11\omega_5\mathbf{Z},$$

а значит утверждение теоремы доказано. □

Поскольку следующие предложения и теоремы доказываются аналогично предложению 1 и теореме 3, то в дальнейшем приводяться формулировки без доказательств.

Теорема 3. *Нетривиальным классовым кольцом характера для группы* J_2 *является одно из следующих колец:*

$$\mathbf{Z} + 2^4 \cdot 3^3\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^5 \cdot 3\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^4 \cdot 3^2\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^5\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^2 \cdot 3^2\omega_5\mathbf{Z}.$$

Предложение 2. *Для группы* J_3 *определим*

$$G(\chi_{14}) = \{\alpha + \beta C + \gamma D | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}\},$$

где $C = -\zeta_9^2 + \zeta_9^4 + \zeta_9^5 - \zeta_9^7$, $D = 2\zeta_9^2 + \zeta_9^4 + \zeta_9^5 + 2\zeta_9^7$, $E = -\zeta_9^2 - 2\zeta_9^4 - 2\zeta_9^5 - \zeta_9^7$.

Данная группа образует подкольцо в $\mathbb{C}$ *и* $C^2 = 6 + C - D$, $D^2 = 6 + C + 2D$, $CD = -3 - D - 2C$, $CDE = 9$.

Теорема 4. *Нетривиальным классовым кольцом характера для группы* J_3 *является одно из следующих колец:*

$$\mathbf{Z} + 2^6 \cdot 3^4\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^7 \cdot 19\omega_{17}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^5 \cdot 3^3\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 3 \cdot 17 \cdot 19C\mathbf{Z} + 3 \cdot 17 \cdot 19D\mathbf{Z},$$

где $C = -\zeta_9^2 + \zeta_9^4 + \zeta_9^5 - \zeta_9^7$, $D = 2\zeta_9^2 + \zeta_9^4 + \zeta_9^5 + 2\zeta_9^7$.

Предложение 3. *Рассмотрим*

$$G(\chi_{56}) = \{\alpha + \beta H + \gamma I | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}\} = < H, I, J >,$$

где $H = \zeta_{31} + \zeta_{31}^2 + \zeta_{31}^4 + \zeta_{31}^8 + \zeta_{31}^{15} + \zeta_{31}^{16} + \zeta_{31}^{23} + \zeta_{31}^{27} + \zeta_{31}^{29} + \zeta_{31}^{30}$;
$I = \zeta_{31}^3 + \zeta_{31}^6 + \zeta_{31}^7 + \zeta_{31}^{12} + \zeta_{31}^{14} + \zeta_{31}^{17} + \zeta_{31}^{19} + \zeta_{31}^{24} + \zeta_{31}^{25} + \zeta_{31}^{28}$;
$J = \zeta_{31}^5 + \zeta_{31}^9 + \zeta_{31}^{10} + \zeta_{31}^{11} + \zeta_{31}^{13} + \zeta_{31}^{18} + \zeta_{31}^{20} + \zeta_{31}^{21} + \zeta_{31}^{22} + \zeta_{31}^{26}$.

Элементы данной группы образуют кольцо и $H^2 = 8 + H + 2I$; $I^2 = 6 - 2H - I$; $HI = -4 - 2I$; $HIJ = 8$.

Предложение 4. *Определим*

$$G(\chi_{53}) = \{\alpha + \beta L + \gamma M | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}\} = < L, M, N >,$$

где $L = -\zeta_{37} - \zeta_{37}^6 - \zeta_{37}^8 - \zeta_{37}^{10} - \zeta_{37}^{11} - \zeta_{37}^{14} - \zeta_{37}^{23} - \zeta_{37}^{26} - \zeta_{37}^{27} - \zeta_{37}^{29} - \zeta_{37}^{31} - \zeta_{37}^{36}$,
$M = -\zeta_{37}^3 - \zeta_{37}^4 - \zeta_{37}^5 - \zeta_{37}^7 - \zeta_{37}^{13} - \zeta_{37}^{18} - \zeta_{37}^{19} - \zeta_{37}^{24} - \zeta_{37}^{30} - \zeta_{37}^{32} - \zeta_{37}^{33} - \zeta_{37}^{34}$,
$N = -\zeta_{37}^2 - \zeta_{37}^9 - \zeta_{37}^{12} - \zeta_{37}^{15} - \zeta_{37}^{16} - \zeta_{37}^{17} - \zeta_{37}^{20} - \zeta_{37}^{21} - \zeta_{37}^{22} - \zeta_{37}^{25} - \zeta_{37}^{28} - \zeta_{37}^{35}$.

Данная группа образует подкольцо в $\mathbb{C}$ *и*
$L^2 = 7 + 3L + M$, $M^2 = 8 + 2M - L$, $LM = -3 - L - 2M$, $LMN = 11$.

Предложение 5. *Рассмотрим*

$$G(\chi_{46}) = \{\alpha + \beta P + \gamma Q | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}\} = < P, Q, R >,$$

где $P = \zeta_{43} + \zeta_{43}^2 + \zeta_{43}^4 + \zeta_{43}^8 + \zeta_{43}^{11} + \zeta_{43}^{16} + \zeta_{43}^{21} + \zeta_{43}^{22} + \zeta_{43}^{27} + \zeta_{43}^{32} + \zeta_{43}^{35} + \zeta_{43}^{39} + \zeta_{43}^{41} + \zeta_{43}^{42}$;
$Q = \zeta_{43}^7 + \zeta_{43}^9 + \zeta_{43}^{13} + \zeta_{43}^{14} + \zeta_{43}^{15} + \zeta_{43}^{17} + \zeta_{43}^{18} + \zeta_{43}^{25} + \zeta_{43}^{26} + \zeta_{43}^{28} + \zeta_{43}^{29} + \zeta_{43}^{30} + \zeta_{43}^{34} + \zeta_{43}^{36}$;
$R = \zeta_{43}^3 + \zeta_{43}^5 + \zeta_{43}^6 + \zeta_{43}^{10} + \zeta_{43}^{12} + \zeta_{43}^{19} + \zeta_{43}^{20} + \zeta_{43}^{23} + \zeta_{43}^{24} + \zeta_{43}^{31} + \zeta_{43}^{33} + \zeta_{43}^{37} + \zeta_{43}^{38} + \zeta_{43}^{40}$.

Элементы данной группы образуют кольцо и
$P^2 = 7 - 3P - 2Q$, $Q^2 = 10 + 2P - Q$, $PQ = -4 + 2Q$, $PQR = -8$.

Теорема 5. *Нетривиальным классовым кольцом характера для группы* J_4 *является одно из следующих колец:*

$$\mathbf{Z} + 2^{20} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 37\omega_{33}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^{12} \cdot 3 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 37\omega_3\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^{20} \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29\omega_{33}\mathbf{Z},$$

$$\mathbf{Z} + 2^{11} \cdot 11^3 \cdot 29 \cdot 31\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 11^3 \cdot 29\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^{20} \cdot 11^3 P\mathbf{Z} + 2^{20} \cdot 11^3 Q\mathbf{Z},$$

$$\mathbf{Z} + 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43L\mathbf{Z} + 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 43M\mathbf{Z},$$

$$\mathbf{Z} + 2^{21} \cdot 23 \cdot 29H\mathbf{Z} + 2^{21} \cdot 23 \cdot 29I\mathbf{Z},$$

где $H = \zeta_{31} + \zeta_{31}^2 + \zeta_{31}^4 + \zeta_{31}^8 + \zeta_{31}^{15} + \zeta_{31}^{16} + \zeta_{31}^{23} + \zeta_{31}^{27} + \zeta_{31}^{29} + \zeta_{31}^{30}$;
$I = \zeta_{31}^3 + \zeta_{31}^6 + \zeta_{31}^7 + \zeta_{31}^{12} + \zeta_{31}^{14} + \zeta_{31}^{17} + \zeta_{31}^{19} + \zeta_{31}^{24} + \zeta_{31}^{25} + \zeta_{31}^{28}$;
$L = -\zeta_{37} - \zeta_{37}^6 - \zeta_{37}^8 - \zeta_{37}^{10} - \zeta_{37}^{11} - \zeta_{37}^{14} - \zeta_{37}^{23} - \zeta_{37}^{26} - \zeta_{37}^{27} - \zeta_{37}^{29} - \zeta_{37}^{31} - \zeta_{37}^{36}$;
$M = -\zeta_{37}^3 - \zeta_{37}^4 - \zeta_{37}^5 - \zeta_{37}^7 - \zeta_{37}^{13} - \zeta_{37}^{18} - \zeta_{37}^{19} - \zeta_{37}^{24} - \zeta_{37}^{30} - \zeta_{37}^{32} - \zeta_{37}^{33} - \zeta_{37}^{34}$;
$P = \zeta_{43} + \zeta_{43}^2 + \zeta_{43}^4 + \zeta_{43}^8 + \zeta_{43}^{11} + \zeta_{43}^{16} + \zeta_{43}^{21} + \zeta_{43}^{22} + \zeta_{43}^{27} + \zeta_{43}^{32} + \zeta_{43}^{35} + \zeta_{43}^{39} + \zeta_{43}^{41} + \zeta_{43}^{42}$;
$Q = \zeta_{43}^7 + \zeta_{43}^9 + \zeta_{43}^{13} + \zeta_{43}^{14} + \zeta_{43}^{15} + \zeta_{43}^{17} + \zeta_{43}^{18} + \zeta_{43}^{25} + \zeta_{43}^{26} + \zeta_{43}^{28} + \zeta_{43}^{29} + \zeta_{43}^{30} + \zeta_{43}^{34} + \zeta_{43}^{36}$.

3.2. **Классовые кольца характеров групп Фишера.** .

Теорема 6. *Нетривиальным классовым кольцом характера для группы* Fi_{22} *является следующее кольцо:*

$$\mathbf{Z} + 2^{14} \cdot 3^7\omega_{13}\mathbf{Z}.$$

Теорема 7. *Нетривиальным классовым кольцом характера для группы* Fi_{23} *является одно из следующих колец:*

$$\mathbf{Z} + 2^{10} \cdot 3^9 \cdot 17\omega_{13}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^{10} \cdot 3^{11}\omega_{13}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 3^{12} \cdot 17 \cdot 23\omega_{13}\mathbf{Z}.$$

Теорема 8. *Нетривиальным классовым кольцом характера для группы* Fi_{24}' *является одно из следующих колец:*

$$\mathbf{Z}+2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 29\omega_{13}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^{21}\cdot 3^5\cdot 17\cdot 29\omega_{33}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^6\cdot 3^{16}\cdot 7\cdot 29\omega_7\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+3^{15}\cdot 17\cdot 23\cdot 29\omega_{13}\mathbf{Z}.$$

3.3. **Классовые кольца характеров групп оставшихся спорадических групп.**

Предложение 6. *Для группы* Ly *определим*

$$G(\chi_{36}) = \{\alpha + \beta E + \gamma F + \eta G + \zeta H | \alpha, \beta, \gamma, \eta, \zeta \in \mathbf{Z}\} =< E, F, G, H, I >,$$

где $E = -\zeta_{31} - \zeta_{31}^5 - \zeta_{31}^6 - \zeta_{31}^{25} - \zeta_{31}^{26} - \zeta_{31}^{30}$,
$F = -\zeta_{31}^3 - \zeta_{31}^{13} - \zeta_{31}^{15} - \zeta_{31}^{16} - \zeta_{31}^{18} - \zeta_{31}^{28}$,
$G = -\zeta_{31}^8 - \zeta_{31}^9 - \zeta_{31}^{14} - \zeta_{31}^{17} - \zeta_{31}^{22} - \zeta_{31}^{23}$,
$H = -\zeta_{31}^4 - \zeta_{31}^7 - \zeta_{31}^{11} - \zeta_{31}^{20} - \zeta_{31}^{24} - \zeta_{31}^{27}$,
$I = -\zeta_{31}^2 - \zeta_{31}^{10} - \zeta_{31}^{12} - \zeta_{31}^{19} - \zeta_{31}^{21} - \zeta_{31}^{29}$.

Данная группа замкнута по умножению и потому образует подкольцо поля $\mathbb{C}$ *и* $E^2 = 5-E+F+G-H, F^2 = 4+E+2G+2H, G^2 = 6-2E-F-2G, H^2 = 6-2F-G-2H, EF = -2+2E+F+H, EG = -1+E-F-G, EH = -2+F+G+2H, FG = -1-E+G-H, FH = -1+F-G-H, GH = -2+E+G+H$.

Предложение 7. *Рассмотрим*

$$G(\chi_{26}) = \{\alpha + \beta L + \gamma M | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}\} =< L, M, N >,$$

где $L = -\zeta_{67} - \zeta_{67}^3 - \zeta_{67}^5 - \zeta_{67}^8 - \zeta_{67}^9 - \zeta_{67}^{14} - \zeta_{67}^{15} - \zeta_{67}^{22} - \zeta_{67}^{24} - \zeta_{67}^{25} - \zeta_{67}^{27} - \zeta_{67}^{40} - \zeta_{67}^{42} - \zeta_{67}^{43} - \zeta_{67}^{45} - \zeta_{67}^{52} - \zeta_{67}^{53} - \zeta_{67}^{58} - \zeta_{67}^{59} - \zeta_{67}^{62} - \zeta_{67}^{64} - \zeta_{67}^{66}$;

$M=-\zeta_{67}^{4}-\zeta_{67}^{7}-\zeta_{67}^{11}-\zeta_{67}^{12}-\zeta_{67}^{20}-\zeta_{67}^{21}-\zeta_{67}^{26}-\zeta_{67}^{29}-\zeta_{67}^{31}-\zeta_{67}^{32}-\zeta_{67}^{33}-\zeta_{67}^{34}-\zeta_{67}^{35}-\zeta_{67}^{36}-\zeta_{67}^{38}-\zeta_{67}^{41}-\zeta_{67}^{46}-\zeta_{67}^{47}-\zeta_{67}^{55}-\zeta_{67}^{56}-\zeta_{67}^{60}-\zeta_{67}^{63}$;
$N=-\zeta_{67}^{2}-\zeta_{67}^{6}-\zeta_{67}^{10}-\zeta_{67}^{13}-\zeta_{67}^{16}-\zeta_{67}^{17}-\zeta_{67}^{18}-\zeta_{67}^{19}-\zeta_{67}^{23}-\zeta_{67}^{28}-\zeta_{67}^{30}-\zeta_{67}^{37}-\zeta_{67}^{39}-\zeta_{67}^{44}-\zeta_{67}^{48}-\zeta_{67}^{49}-\zeta_{67}^{50}-\zeta_{67}^{51}-\zeta_{67}^{54}-\zeta_{67}^{57}-\zeta_{67}^{61}-\zeta_{67}^{65}$.

Элементы данной группы образуют кольцо и $L^2=19+3L+3M, M^2=16-3L, LM=-7+L-2M, LMN=-1$.

Теорема 9. *Нетривиальным классовым кольцом характера для группы* Ly *является одно из следующих колец:*

$$\mathbf{Z}+2^6\cdot 5^6\cdot 67\omega_{21}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^6\cdot 3^7\cdot 7\cdot 67\omega_{37}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^3\cdot 3^3\cdot 5^5\cdot 67\omega_{21}\mathbf{Z},$$

$$\mathbf{Z}+2\cdot 3^3\cdot 5^5\cdot 7\cdot 67\omega_{6}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2\cdot 3^7\cdot 5^2\cdot 7\cdot 37\omega_{10}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+3^7\cdot 5^6 L\mathbf{Z}+3^7\cdot 5^6 M\mathbf{Z},$$

$$\mathbf{Z}+5^6\cdot 37\cdot 67E\mathbf{Z}+5^6\cdot 37\cdot 67F\mathbf{Z}+5^6\cdot 37\cdot 67G\mathbf{Z}5^6\cdot 37\cdot 67H\mathbf{Z},$$

где $E=-\zeta_{31}-\zeta_{31}^{5}-\zeta_{31}^{6}-\zeta_{31}^{25}-\zeta_{31}^{26}-\zeta_{31}^{30}$,
$F=-\zeta_{31}^{3}-\zeta_{31}^{13}-\zeta_{31}^{15}-\zeta_{31}^{16}-\zeta_{31}^{18}-\zeta_{31}^{28}$,
$G=-\zeta_{31}^{8}-\zeta_{31}^{9}-\zeta_{31}^{14}-\zeta_{31}^{17}-\zeta_{31}^{22}-\zeta_{31}^{23}$,
$H=-\zeta_{31}^{4}-\zeta_{31}^{7}-\zeta_{31}^{11}-\zeta_{31}^{20}-\zeta_{31}^{24}-\zeta_{31}^{27}$,
$L=-\zeta_{67}-\zeta_{67}^{3}-\zeta_{67}^{5}-\zeta_{67}^{8}-\zeta_{67}^{9}-\zeta_{67}^{14}-\zeta_{67}^{15}-\zeta_{67}^{22}-\zeta_{67}^{24}-\zeta_{67}^{25}-\zeta_{67}^{27}-\zeta_{67}^{40}-\zeta_{67}^{42}-\zeta_{67}^{43}-\zeta_{67}^{45}-\zeta_{67}^{52}-\zeta_{67}^{53}-\zeta_{67}^{58}-\zeta_{67}^{59}-\zeta_{67}^{62}-\zeta_{67}^{64}-\zeta_{67}^{66}$,
$M=-\zeta_{67}^{4}-\zeta_{67}^{7}-\zeta_{67}^{11}-\zeta_{67}^{12}-\zeta_{67}^{20}-\zeta_{67}^{21}-\zeta_{67}^{26}-\zeta_{67}^{29}-\zeta_{67}^{31}-\zeta_{67}^{32}-\zeta_{67}^{33}-\zeta_{67}^{34}-\zeta_{67}^{35}-\zeta_{67}^{36}-\zeta_{67}^{38}-\zeta_{67}^{41}-\zeta_{67}^{46}-\zeta_{67}^{47}-\zeta_{67}^{55}-\zeta_{67}^{56}-\zeta_{67}^{60}-\zeta_{67}^{63}$.

Предложение 8. *Рассмотрим*

$$G(\chi_{15})=\{\alpha+\beta C+\gamma D|\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{Z}\}=<C,D,E>,$$

где $C=-\zeta_{19}-\zeta_{19}^{7}-\zeta_{19}^{8}-\zeta_{19}^{11}-\zeta_{19}^{12}-\zeta_{19}^{18}$,
$D=-\zeta_{19}^{4}-\zeta_{19}^{6}-\zeta_{19}^{9}-\zeta_{19}^{10}-\zeta_{19}^{13}-\zeta_{19}^{15}$,
$E=-\zeta_{19}^{2}-\zeta_{19}^{3}-\zeta_{19}^{5}-\zeta_{19}^{14}-\zeta_{19}^{16}-\zeta_{19}^{17}$.

Данная группа образует подкольцо поля $\mathbb{C}$ *и*
$C^2=5-C-D, D^2=4+C, CD=-3+C+2D, CDE=-7$.

Теорема 10. *Нетривиальным классовым кольцом характера для группы* O′N *является одно из следующих колец:*

$$\mathbf{Z}+2^4\cdot 3^4\cdot 7^3\omega_2\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+2^4\cdot 7^3\cdot 31\omega_2\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+3^4\cdot 11\cdot 19\cdot 31\omega_5\mathbf{Z},$$

$$\mathbf{Z}+2^2\cdot 3^4\cdot 7\cdot 31\omega_7\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}+7^3\cdot 11\cdot 31C\mathbf{Z}+7^3\cdot 11\cdot 31D\mathbf{Z}$$

где $C=-\zeta_{19}-\zeta_{19}^{7}-\zeta_{19}^{8}-\zeta_{19}^{11}-\zeta_{19}^{12}-\zeta_{19}^{18}$,
$D=-\zeta_{19}^{4}-\zeta_{19}^{6}-\zeta_{19}^{9}-\zeta_{19}^{10}-\zeta_{19}^{13}-\zeta_{19}^{15}$.

Предложение 9. *Определим*

$$G(\chi_{11})=\{\alpha+\beta A+\gamma B|\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{Z}\}=<A,B,C>,$$

где $A=-\zeta_7+\zeta_7^2+\zeta_7^3+\zeta_7^4+\zeta_7^5-\zeta_7^6$,
$B=\zeta_7-\zeta_7^2+\zeta_7^3+\zeta_7^4-\zeta_7^5+\zeta_7^6$,
$C=\zeta_7+\zeta_7^2-\zeta_7^3-\zeta_7^4+\zeta_7^5+\zeta_7^6$.

Данная группа замкнута по умножению и потому образует подкольцо поля $\mathbb{C}$ *и* $A^2=5-2A-2B, B^2=7+2A, AB=-3-A+B, ABC=1$.

Предложение 10. *Рассмотрим*

$$G(\chi_{17})=\{\alpha+\beta G+\gamma H|\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{Z}\}=<G,H,I>,$$

где $G = \zeta_{13} - \zeta_{13}^2 - \zeta_{13}^3 - \zeta_{13}^4 + \zeta_{13}^5 - \zeta_{13}^6 - \zeta_{13}^7 + \zeta_{13}^8 - \zeta_{13}^9 - \zeta_{13}^{10} - \zeta_{13}^{11} + \zeta_{13}^{12}$,
$H = -\zeta_{13} - \zeta_{13}^2 - \zeta_{13}^3 + \zeta_{13}^4 - \zeta_{13}^5 + \zeta_{13}^6 + \zeta_{13}^7 - \zeta_{13}^8 + \zeta_{13}^9 - \zeta_{13}^{10} - \zeta_{13}^{11} - \zeta_{13}^{12}$,
$I = -\zeta_{13} + \zeta_{13}^2 + \zeta_{13}^3 - \zeta_{13}^4 - \zeta_{13}^5 - \zeta_{13}^6 - \zeta_{13}^7 - \zeta_{13}^8 - \zeta_{13}^9 + \zeta_{13}^{10} + \zeta_{13}^{11} - \zeta_{13}^{12}$.

Элементы группы образуют кольцо и $G^2 = 11 + 2H$, $H^2 = 13 - 2G - 2H$, $GH = -7 + 3G + H$, $GHI = -15$.

Теорема 11. *Нетривиальным классовым кольцом характера для группы* Ru *является одно из следующих колец:*

$$\mathbf{Z} + 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 29\omega_6\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^{10} \cdot 5 \cdot 29\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13\omega_{29}\mathbf{Z},$$
$$\mathbf{Z} + 2^9 \cdot 13 \cdot 29A\mathbf{Z} + 2^9 \cdot 13 \cdot 29B\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^9 \cdot 5^3 G\mathbf{Z} + 2^9 \cdot 5^3 H\mathbf{Z},$$

где $A = -\zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^3 + \zeta_7^4 + \zeta_7^5 - \zeta_7^6$,
$B = \zeta_7 - \zeta_7^2 + \zeta_7^3 + \zeta_7^4 - \zeta_7^5 + \zeta_7^6$,
$G = \zeta_{13} - \zeta_{13}^2 - \zeta_{13}^3 - \zeta_{13}^4 + \zeta_{13}^5 - \zeta_{13}^6 - \zeta_{13}^7 + \zeta_{13}^8 - \zeta_{13}^9 - \zeta_{13}^{10} - \zeta_{13}^{11} + \zeta_{13}^{12}$,
$H = -\zeta_{13} - \zeta_{13}^2 - \zeta_{13}^3 + \zeta_{13}^4 - \zeta_{13}^5 + \zeta_{13}^6 + \zeta_{13}^7 - \zeta_{13}^8 + \zeta_{13}^9 - \zeta_{13}^{10} - \zeta_{13}^{11} - \zeta_{13}^{12}$.

Теорема 12. *Нетривиальным классовым кольцом характера для группы* He *является одно из следующих колец:*

$$\mathbf{Z} + 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^2\omega_{17}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17\omega_{21}\mathbf{Z}.$$

Теорема 13. *Нетривиальным классовым кольцом характера для группы* Suz *является одно из следующих колец:*

$$\mathbf{Z} + 2^{13} \cdot 3^5\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^{12} \cdot 3^5\omega_{21}\mathbf{Z}, \mathbf{Z} + 2^{13} \cdot 3^2 \cdot 5\omega_{13}\mathbf{Z}.$$

Теорема 14. *Нетривиальным классовым кольцом характера для группы* HN *является одно из следующих колец:*

$$\mathbf{Z} + 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 11\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^3\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3\omega_5\mathbf{Z},$$
$$\mathbf{Z} + 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^3\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^2\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11\omega_5\mathbf{Z},$$
$$\mathbf{Z} + 2^{12} \cdot 5^3\omega_5\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^9 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 19\omega_5\mathbf{Z}.$$

Теорема 15. *Нетривиальным классовым кольцом характера для группы* B *является одно из следующих колец:*

$$\mathbf{Z} + 2^{30} \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47\omega_2\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^{40} \cdot 13 \cdot 19 \cdot 47\omega_{17}\mathbf{Z},\ \mathbf{Z} + 2^{22} \cdot 3^{13} \cdot 19 \cdot 47\omega_7\mathbf{Z}.$$

Список литературы

[1] Р.Ж. Алеев, *Центральные элементы целочисленных групповых колец* , Алгебра и логика, **39**:5 (2000), 513–525. MR1805753

[2] Р.Ж. Алеев, *Центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп: дисс. на соискание степени д-ра физ.-мат. наук.* , Челябинск, 2000.

[3] К. Айерлэнд, М. Роузен, *Классическое введение в современную теорию чисел* , Мир, Москва, 1987. MR0922892

[4] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms and Programming. Ver. 4.5.6. 2012. – http://www.gap-system.org.

Маргарита Ивановна Молодорич
Южно-Уральский Государственный Университет,
пр. Ленина 76,
454080, Челябинск, Россия
E-mail address: molodorich.margarita@gmail.com