S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 887–890 (2014) УДК 514.74
MSC 52C05

ОБ УИЛЛМОРОВСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ В $\mathbb{R}^3$

С.М. ЧЕРОСОВА, Э.И. ШАМАЕВ

Abstract. In this paper, we study Euler–Lagrange equation for the Willmore functional in the case of surfaces of revolution. Explicit solutions are constructed in terms of elliptic functions.

Keywords: Willmore surface, exact solution

1. Введение

Введение. Уиллморовскими поверхностями в $\mathbb{R}^3$ называются экстремали функционала Уиллмора

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \int_\Sigma H^2 d\mu,$$

где H — средняя кривизна поверхности Σ, $d\mu$ — индуцированная мера площади. Уравнение Эйлера–Лагранжа для $\mathcal{W}$ имеет вид

$$\triangle H + 2H(H^2 - K) = 0, \tag{1}$$

где $\triangle$ — оператор Лапласа–Бельтрами, K — гауссова кривизна [1].

Уиллморовские цилиндры вращения с краем изучались в [2, 3]. В частности в [2] установлено, что для любых двух одноосных окружностей радиусов r и R найдется уиллморовский цилиндр вращения с краем, который образован этими окружностями, с нулевой средней кривизной на крае. В [4] было замечено, что уравнение (1) в случае поверхностей вращения сводится к уравнению эластик в плоскости Лобачевского. Отметим, что в этих работах поверхности не были найдены в явном виде.

Cherosova, S.M., Shamaev, E.I., On Willmore Surfaces of Revolution in $\mathbb{R}^3$.

Данная работа поддержана Российским Научным Фондом, грант 14-11-00441.

Поступила 14 ноября 2014 г., опубликована 1 декабря 2014 г.

Сформулируем основной результат этой работы. Пусть $\Gamma = \mathbb{C}/\{2\mathbb{Z} + 2i\tau\mathbb{Z}\}$ — эллиптическая кривая с $\tau \in (0,1)$, $\wp(u)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса. Пусть $e_1 = \wp(1)$, $e_2 = \wp(1+i\tau)$, $\rho = \sqrt{(e_1-e_2)(e_1+2e_2)}$. Отметим, что e_1, e_2 и ρ вещественны (см. ниже). Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Поверхность* Σ, *заданная формулами*

$$(x(u), y(u)\cos\varphi,\ y(u)\sin\varphi), \quad u \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \tag{2}$$

где

$$y(u) = e^{f(u)}, \quad x(u) = \int_0^u y(t)\sqrt{3e_2 - (f'(t))^2}\,dt,$$
$$f(u) = \sqrt{3e_2}\int_0^u \frac{\wp(t) - e_2 - \rho}{\wp(t) - e_2 + \rho}\,dt,$$

является вложенной уиллморовской поверхностью.

Отметим, что функции $x(u)$, $y(u)$, $u \in \mathbb{R}$ — гладкие (см. доказательство теоремы 1).

Радиус окружности (параллели) $x = const$ равен $R(u) = e^{f(u)}$. Функция $f(u)$ имеет вид

$$f(u) = \lambda u + h(u),$$

где $h(u)$ — некоторая периодическая функция с периодом 2 (с тем же периодом, что и $\wp(u)$), а λ — константа. Приближенные вычисления показывают, что при $\tau \in (0,1)$ константа λ положительна. Отсюда следует, что

$$\lim_{u\to+\infty} x(u) = \lim_{u\to+\infty} R(u) = +\infty,$$
$$\lim_{u\to-\infty} x(u) = x_0, \quad \lim_{u\to-\infty} R(u) = 0,$$

где x_0 — некоторая конечная точка в $\mathbb{R}$. Таким образом, наша поверхность Σ выглядит как "конус".

Авторы выражают благодарность А.Е. Миронову, И.А. Тайманову и В.В. Чуешеву за полезные обсуждения.

Доказательство теоремы 1

Рассмотрим поверхность вращения Σ, заданную формулой (2). Для упрощения уравнения (1) воспользуемся следующей подстановкой

$$y(u) = e^{f(u)}, \quad x(u) = \int_0^u y(t)\sqrt{\kappa^2 - (f'(t))^2}\,dt, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

В этом случае метрика на поверхности Σ принимает вид

$$g_{11} = \kappa^2 e^{2f(u)}, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = e^{2f(u)}.$$

Выпишем вторую квадратичную форму Σ

$$b_{11} = -\kappa e^{f(u)}\frac{f''(u)}{\sqrt{\kappa^2 - (f'(u))^2}}, \quad b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{22} = \frac{e^{f(u)}}{\kappa}\sqrt{\kappa^2 - (f'(u))^2}.$$

Главные кривизны равны

$$k_1 = -e^{-f(u)}\frac{f''(u)}{\kappa\sqrt{\kappa^2 - (f'(u))^2}}, \quad k_2 = \frac{e^{-f(u)}}{\kappa}\sqrt{\kappa^2 - (f'(u))^2}.$$

Средняя и гауссова кривизны имеют вид

$$H = e^{-f}\frac{\kappa^2 - (f'(u))^2 - f''(u)}{2\kappa\sqrt{\kappa^2 - (f'(u))^2}}, \quad K = -e^{-2f(u)}\frac{f''(u)}{k^2}.$$

Так как

$$g^{11} = \frac{1}{\kappa^2}e^{-2f(u)}, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = e^{-2f(u)}, \quad \sqrt{g} = \kappa e^{2f(u)},$$

то уравнение Эйлера–Лагранжа (1)

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_u\left(g^{11}\sqrt{g}\partial_u H\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\varphi\left(g^{22}\sqrt{g}\partial_\varphi H\right) + 2H(H^2 - K) = 0$$

после упрощения принимает вид

$$\frac{e^{-2f(u)}}{\kappa^2}H_{uu} + 2H(H^2 - K) = 0.$$

Отсюда вытекает, что функция $h(u) = \frac{1}{\kappa}f'(u)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}(3)\quad 2h\big(k(1-h^2)^2 - 3(1-h^2)h'\big)h'' + \kappa\big(h' + \kappa(1-h^2)\big)(1-h^2)(3h^2-1)h'\\ - 2(1-h^2)^2h''' + (1+h^2)\big(\kappa^3(1-h^2)^3 - 3(h')^3\big) = 0.\end{aligned}$$

Прямыми вычислениями можно проверить, что при $\kappa = \sqrt{3e_2}$ функция

$$h(u) = \frac{\wp(u) - e_2 - \rho}{\wp(u) - e_2 + \rho}$$

удовлетворяет уравнению (3).

Отметим, что $h(u)$ не имеет особенности в 0. Кроме того, $\wp(u) \geqslant e_1$. Действительно, функция $\wp(u)$ вещественна на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет уравнению

$$(\wp'(u))^2 = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3 = 4(\wp(u) - e_1)(\wp(u) - e_2)(\wp(u) - e_3),$$

где $e_3 = \wp(i\tau)$. Поэтому $\wp'(u)$ равна нулю только в точках 1, $i\tau$ и $1 + i\tau \in \Gamma$. Функция $\wp(u)$ равна e_1 в точке 1 и стремится к $+\infty$ при $u \to 0$. Следовательно, периодическая функция $\wp(u)$ убывает на отрезке $(0,1)$ и возрастает на $(1,2)$. Теперь из $e_1 > e_2 > 0$ (см. разделы 18.2 и 18.3 в [5]) следует, что $\wp(u) - e_2 + \rho > 0$ и $h(u)$ не имеет особенностей на $\mathbb{R}$.

Покажем, что функция $x(u)$ корректно определена на $\mathbb{R}$. Для этого достаточно показать неотрицательность подкоренного выражения в

$$\sqrt{3e_2 - (f'(u))^2} = \sqrt{3e_2(1 - h^2(u))}.$$

Выше было показано, что $\wp(u)$ убывает на $(0,1)$ и возрастает на $(1,2)$. Поэтому $h'(u) = \frac{2\rho}{(\wp(u) - e_2 + \rho)^2}\wp'(u)$ отрицательна на $(0,1)$ и положительна на $(1,2)$. Следовательно, наибольшое значение $h(u)$ достигается в точке 0, наименьшее — в точке 1. Так как $h(1) = \frac{e_1 - e_2 - \rho}{e_1 - e_2 + \rho} > -1$ и $h(0) = 1$, то $-1 < h(u) \leqslant 1$ для $u \in \mathbb{R}$.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Willmore T.J. *Note on embedded surfaces*, An. Şti. Univ. “Al. I. Cuza” Iaşi, Secţ. I a Mat., **11B** (1965), 493–496. MR0202066

[2] Bergner M., Dall’Acqua A., Fröhlich S. *Willmore surfaces of revolution with two prescribed boundary circles*, J. of Geometric Analysis, **23**:1 (2013), 283–302. MR3010281

[3] Dall'Acqua A., Fröhlich S., Grunau H.-C., Schieweck F. *Symmetric Willmore surfaces of revolution satisfying arbitrary Dirichlet boundary data*, Adv. in Calculus of Variations, **4**:1 (2011), 1–81.

[4] Langer J., Singer D. A. *Curves in the hyperbolic plane and mean curvature of tori in 3-space*, Bull. of the London Math. Soc., **16**:5 (1984), 531–534. MR0751827

[5] Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, New York: Courier Dover Publ., 1972. Zbl 0543.33001

Светлана Михайловна Черосова
Северо-Восточный федеральный университет,
Кулаковского ул., 48
677000, Якутск, Россия
E-mail address: cherosova@mail.ru

Эллэй Иванович Шамаев
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Академика Коптюга ул., 4
630090, Новосибирск, Россия
Северо-Восточный федеральный университет,
Кулаковского ул., 48
677000, Якутск, Россия
E-mail address: eshamaev@mail.ru