S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 896–905 (2014) УДК 519.724
MSC 60K25, 90B15

СЛУЧАЙНЫЙ МНОЖЕСТВЕННЫЙ ДОСТУП С ОБЩИМ ПОПОЛНЯЕМЫМ ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ

Д.К. КИМ, А.М. ТЮРЛИКОВ, С.Г. ФОСС

Abstract. We consider classical synchronised multiple access system with a single transmission channel, randomised transmission protocol (ALOHA) and additional common energy supply mechanism: any message requires charging energy for transmission. There are two stochastic renewal inputs to the system, of messages and of energy supply. We study conditions on these inputs for (in)stability of the system.

Keywords: random multiple access; ALOHA algorithm; stochastic energy supply; (in)stability; generalised Foster criterion.

1. Введение

Коммуникационные системы с накоплением энергии (energy harvesting) применяются все шире на практике – см., напр., [1] и ссылки в этой работе. В частности, в системах со случайным множественным доступом использование накопления энергии приводит к ряду новых интересных возможностей и математических постановок. Например, как мы покажем, ограничения на поступление энергии могут стабилизировать в известном смысле работу системы, в то время как традиционные системы множественного доступа (см, например, [2], [3]) не могут быть стабильными ни при каких значениях управляемых параметров.

Kim, D.K., Turlikov, A. M., Foss, S.G., Random multiple access with common energy harvesting mechanism.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства Образования и Науки Республики Казахстан (грант 0770/ГФ3).

Поступила 24 октября 2014 г., опубликована 1 декабря 2014 г.

Изучению энергоэффективности для алгоритмов разрешения конфликтов посвящена работа [4]. Свойства стабильности для систем случайного множественного доступа с конечным числом пользователей и децентрализованным механизмом накопления энергии изучались в работе [5]. Отличием нашей модели от моделей из ряда предыдущих работ (см. напр., статью [5] и ссылки в ней), является наличие общего механизма пополнения энергии, в то время как в других моделях предполагается, что у каждого пользователя есть индивидуальный источник пополнения энергии.

Более точно, мы изучим условия стабильности коммуникационной системы случайного множественного доступа с общим пополняемым источником энергии и с неограниченным количеством пользователей. Тезисы работы опубликованы ранее в трудах конференции [6].

Работа состоит из 5 параграфов и приложения. Во втором параграфе описывается математическая модель, в третьем формулируется основной результат, в четвертом приводится его доказательство, а в последнем – ряд комментариев. В приложении приводятся некоторые полезные и хорошо известные определения и свойства.

Авторы выражают признательность Дмитрию Пургину за помощь в оформлении рисунка и рецензенту за критические замечания.

2. Описание модели

Мы рассматриваем классическую систему случайного множественного доступа с алгоритмом разрешения конфликтов ALOHA (см., напр., [2]), но с дополнительным механизмом пополнения энергии.

Более конкретно, предположим, что время слотировано (т.е. разбито на целочисленные периоды), и обозначим через ξ_n число сообщений, прибывающих в систему за n-ый период, т.е. в течение интервала времени $[n-1, n)$. Будем считать, что $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют последовательность независимых и одинаково распределенных (i.i.d.) случайных величин с конечным средним λ. Дополнительно предположим, что задана другая i.i.d. последовательность неотрицательных случайных величин $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ с конечным средним μ, которая не зависит от $\{\xi_n\}$ и характеризует объемы поступающей в систему энергии. Здесь η_n – количество единиц (квантов) энергии, поступающих в систему за n-ый период времени. Предполагается, что для одной передачи сообщения требуется один квант энергии.

Опишем динамику системы с помощью рекурсии. Предположим, что в начале n-го периода в системе имеется Q_n "старых" (т.е. прибывших ранее) сообщений и V_n квантов энергии и в течение n-го периода прибывает ξ_n "новых" сообщений и η_n квантов энергии. Каждое из новых сообщений планирует передачу в конце n-го периода с вероятностью 1, а каждое из старых – с вероятностью p (здесь $p \in (0,1]$ – наперед заданное число). Таким образом, общее число планируемых передач сообщений есть $\xi_n + B_n(Q_n, p)$ (где $B_n(k,p) = \sum_{i=1}^{k} \kappa_{n,i}$, а $\{\kappa_{n,i}\}_{i,n\geqslant 1}$ – семейство независимых и одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1-p$, и независящих от остальных управляющих последовательностей модели). Однако в момент отправки сообщений в наличии имеется только $V_n + \eta_n$ квантов энергии, поэтому отправляются, вообще говоря, не все запланированные сообщения, а только $z_n = \min\{\xi_n + B_n(Q_n,p), V_n + \eta_n\}$ из них. Здесь равенство

$z_n = 0$ означает, что ни одно сообщение не отправляется на передачу в конце n-го периода времени. Если $z_n = 1$, то передача сообщения оказывается успешной, после чего как это сообщение, так и один квант энергии покидают систему. Если же передается $z_n \geqslant 2$ сообщений, то происходит их конфликт и все сообщения остаются в системе, в то время как z_n использованных квантов энергии её покидают.

Из описания следует, что двумерный вектор (Q_n, V_n) образует однородную цепь Маркова, принимающую значения в $\mathbb{Z}_+^2$ и удовлетворяющую рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= Q_n - \mathbf{I}(z_n = 1) + \xi_n, \\ V_{n+1} &= V_n - z_n + \eta_n, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где по-прежнему $z_n = \min\{\xi_n + B_n(Q_n, p), V_n + \eta_n\}$, а $\mathbf{I}(z_n = 1)$ – индикаторная функция, которая принимает значение 1, если $z_n = 1$, и значение 0 в противном случае.

Будем предполагать, что

$$r := \mathbf{P}(\eta_1 = 1) > 0, \quad \mathbf{P}(\xi_1 = 0) > 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(\xi_1 \geqslant 2) > 0. \tag{2.2}$$

Последние два предположения приводятся чтобы избежать рассмотрения тривиальных случаев. Отметим, что из условия (2.2) следует, что состояние $(0, 1)$ достижимо из любого другого состояния цепи Маркова. Следовательно, все существеннные состояния этой цепи являются сообщающимися.

3. Основной результат

Будем говорить, что рассматриваемая система работает *стабильно*, если цепь Маркова (Q_n, V_n) является положительно возвратной, и *нестабильно*, в противном случае (см. определение положительной возвратности в Приложении).

Теорема 1. *Предположим, что выполнено условие* (2.2). *Тогда рассматриваемая система стабильна при $\lambda < r$ и нестабильна при $\lambda > r$.*

Сделаем ряд замечаний.

(1) Для *эргодичности* стабильной цепи Маркова (см. Приложение) нужно дополнительно предположить ее апериодичность. В нашем случае для этого достаточно добавить, например, условие $\mathbf{P}(\eta_1 = 0) > 0$.

(2) Скорее всего, в случае $\lambda = r$ имеет место невозвратность, если дополнительно предположить, что случайные величины ξ_n и η_n имеют конечные вторые моменты. Из конечности μ следует, что $\mathbf{P}(\eta_1 \geqslant i) = o(1/i)$ с ростом i, и, видимо, можно применить вариант т.н. “критерия Ламперти”. Вопрос открыт в случае, когда хотя бы один из вторых моментов бесконечен.

(3) В случае $r = 0$ система нестабильна, т.к. $\lambda > 0$, и можно по сути повторить рассуждения из пункта 4.4.

(4) Если в систему поступает неограниченный объем энергии, то модель представляет собой классическую систему ALOHA. Известно, что эта модель нестабильна при любых p и λ (см., напр., [7]). Таким образом, дополнительное ограничение на объем поступающей энергии может стабилизировать систему.

(5) Условия стабильности/нестабильности не зависят от вероятности p.
(6) Изучаемая модель допускает различные обобщения и вариации. Например, аналогичные утверждения справедливы и для более общей модели с возможной потерей энергии, когда каждый квант энергии, не использованный в течение некоторого периода времени, может быть потерян после окончания этого периода с вероятностью $\gamma \in [0,1]$, вне зависимости от других факторов. Другой вариант обобщения: можно предположить, что каждое вновь прибывшее сообщение планирует передачу не с вероятностью 1, а с вероятностью $p_0 \in [0,1]$, где p_0 – наперед заданное число.

4. Доказательство Теоремы 1.

Доказательство стабильности.

Мы начнем с доказательства стабильности, которое основано на т.н. обобщенном критерии Фостера (см., напр., [8]).

Рассмотрим двумерную цепь Маркова $X_n = (Q_n, V_n)$. При $x = (Q,V) \in \mathbb{Z}_+^2$ определим тестовую функцию

$$V(x) = Q + V$$

и ограниченное конечное множество

$$D = \{x \in \mathbb{Z}_+^2 \ : \ V(x) \leqslant N\},$$

при некотором $N > 0$, которое будет определено позднее. Через D^c обозначим дополнение множества D в $\mathbb{Z}_+^2$.

Для доказательства стабильности достаточно показать, что множество D положительно возвратно (см. Приложение). Для любого события G, пусть $\mathbf{P}_x(G) = \mathbf{P}\left(G|X_1 = x\right)$ и $\mathbf{E}_x Y$ – математическое ожидание случайной величины Y по мере $\mathbf{P}_x$. В свою очередь, для доказательства возвратности достаточно (см., напр., теорему 2 из [8]) определить большое число N и ограниченную положительную целочисленную функцию $g(x)$ такие, что при любом начальном значении $X_1 = z \in D$ марковская цепь имеет ограниченный снос

$$\mathbf{E}_z \left(V(X_{1+g(X_1)}) - V\left(X_1\right)\right) < \infty, \tag{4.3}$$

и для любого $X_1 = x \in D^c$ цепь Маркова имеет равномерно отрицательный снос за $g(x)$ шагов:

$$\mathbf{E}_x \left(V(X_{1+g(X_1)}) - V(X_1)\right) \leqslant -\varepsilon, \tag{4.4}$$

где ε некоторая положительная константа.

Нетрудно видеть, что условие (4.3) выполнено для всех $x \in D$ при $g(x) = 1$, поскольку λ и μ конечны. Поэтому требуется доказать лишь (4.4).

Представим множество D^c в виде объединения трех попарно непересекающихся множеств:

$$D^c = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

где

$$A_1 = D^c \cap \{X_1 : \min(Q_1, V_1) > M\},$$
$$A_2 = D^c \cap \{X_1 : V_1 \leqslant M\},$$
$$A_3 = D^c \cap \{X_1 : Q_1 \leqslant M\},$$

а M – любое целое число, меньшее чем N и удовлетворяющее неравенству

$$M > (\lambda + \mu)/p. \tag{4.5}$$

Зададим $g(x)$ как кусочно-постоянную функцию,

$$g(x) = k_i \quad \text{при} \quad x \in A_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $k_1 = 1$, а k_2 и k_3 будут определены позже.

Как будет видно из доказательства успешная передача сообщений в основном будет происходить когда энергии мало, т.е. в случае A_2, и “стабилизация” достигается за счет того, что при увеличении количества сообщений происходит увеличение “расхода” энергии. Схематичное изложение доказательства приведено на следующем рисунке:

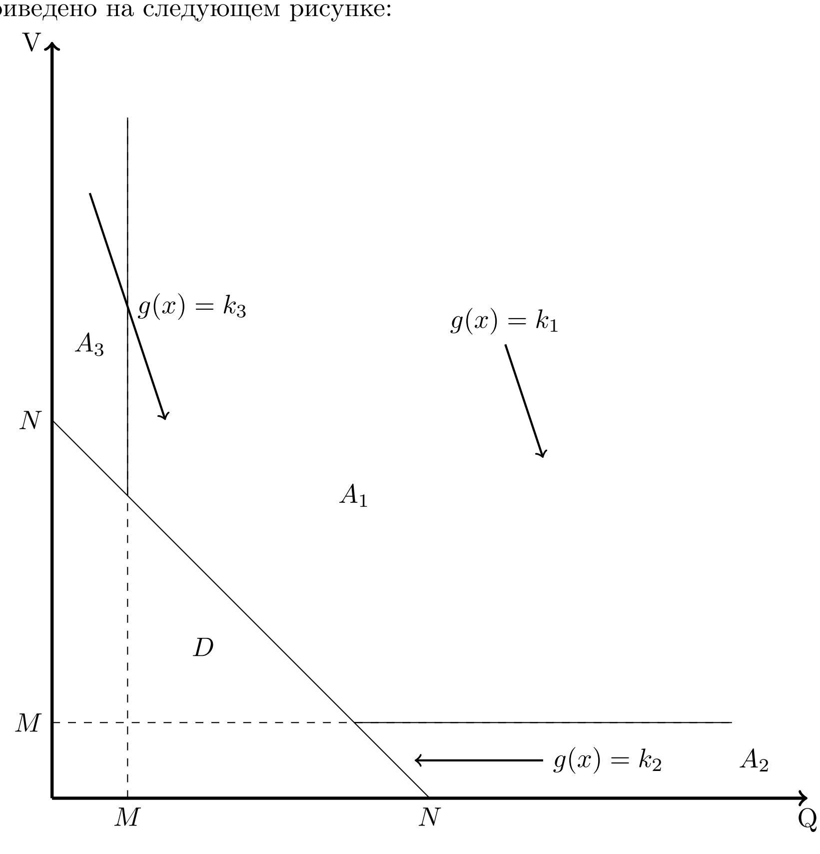

Рис. 1. Схема доказательства стабильности системы.

Рассмотрим каждый случай по очереди.

4.1. **Случай** $X_1 = x \in A_1$**.** Для $X_1 = x = (Q_1, V_1) \in A_1$ возьмем $g(x) = 1$ и покажем, что “снос” за один шаг $\mathbf{E}_x(Q_2+V_2-Q_1-V_1)$ равномерно отрицателен. С очевидностью,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x\,(Q_2 + V_2 - Q_1 - V_1) &\leqslant \lambda + \mu - \mathbf{E}_x\,(\min\{B_1(Q_1, p), V_1\}) \\ &\leqslant \lambda + \mu - \mathbf{E}_x\,(\min\{B_1(M, p), M\}) \\ &= \lambda + \mu - Mp =: -\varepsilon_1 < 0, \end{aligned}$$

при выполнении (4.5).

4.2. **Случай** $X_1 = x \in A_2$**.** В этом случае мы полагаем $g(x) = k_2$, где k_2 – любое натуральное число такое, что $(k_2-1)(\lambda-r)+\lambda<0$. Возьмем $\delta_2 \in (0,1)$ такое, что

$$\begin{aligned} & ((k_2-1)(\lambda-r)+\lambda)(1-\delta_2)+k_2\delta_2(\lambda+\mu) \\ \equiv\ & \lambda k_2 + k_2\delta_2\mu - r(k_2-1)(1-\delta_2) =: -\varepsilon_2 < 0 \end{aligned}$$

Для любого $N_2 \in \mathbb{Z}_+$ введем событие $C_1 = \{B_1(N_2-M,p)-M \geqslant \max(\eta_1,2)\}$ и при $i=2,\ldots,k_2$ – события $C_i = \{B_i(N_2-M-(i-1),p) \geqslant \max(\eta_i,2)\}$. Эти события независимы между собой в совокупности. Положим $H = \cap_{i=1}^{k_2} C_i$ и $H_i = \cap_{j\neq i} C_j$, так что $H = H_i \cap C_i$ и $H^c = H_i^c \cup C_i^c$ при каждом $i=1,\ldots,k_2$. Выберем N_2 настолько большим, чтобы

$$\mathbf{P}(H) = \prod_1^{k_2} \mathbf{P}(C_i) \geqslant 1-\delta_2/2$$

и

$$\mathbf{E}\left(\eta_i \cdot \mathbf{I}(\max(\eta_i,2) > B_i(N_2-M-k_2,p))\right) \leqslant \mu\delta_2/2.$$

Отметим, что при каждом $i=1,\ldots,k_2$

$$\mathbf{P}(\eta_i = 1 \mid H) = \mathbf{P}(\eta_i = 1 \mid C_i) \geqslant \mathbf{P}(\eta_i = 1).$$

По построению, при каждом i случайные величины $B_i(k,p)$ монотонно не убывают п.н. с ростом k. Поэтому при любом начальном условии $x \in A_2$ на событии H выполнены следующие равенства:

$$z_i = V_i + \eta_i, \quad i = 1,\ldots,k_2$$

и, следовательно,

$$V_2 = V_3 = \cdots = V_{k_2+1} = 0$$

и

$$Q_{k_2+1} = Q_1 + \xi_1 - \mathbf{I}\left(V_1+\eta_1=1\right) + \sum_{i=2}^{k_2}\left(\xi_i - \mathbf{I}(\eta_i=1)\right).$$

Положим $\Delta_{k_2} = Q_{k_2+1} + V_{k_2+1} - Q_1 - V_1$. При $X_1 = x \in A_2$ выполняются п.н. неравенства:

$$\begin{aligned} \Delta_{k_2} \ &\leqslant\ \left(\xi_1 + \sum_{i=2}^{k_2}(\xi_i - \mathbf{I}(\eta_i=1))\right)\mathbf{I}(H) + \left(\sum_{i=1}^{k_2}(\xi_i+\eta_i)\right)\mathbf{I}(H^c) \\ &\leqslant\ \sum_{i=1}^{k_2}\xi_i - \sum_{i=2}^{k_2}\mathbf{I}(\eta_i=1)\mathbf{I}(H) + \sum_{i=1}^{k_2}\eta_i\left(\mathbf{I}(H_i^c)+\mathbf{I}(C_i^c)\right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x\Delta_{k_2} \ &\leqslant\ k_2\lambda - \mathbf{P}(H)(k_2-1)r + \sum_{i=1}^{k_2}\mathbf{P}(H_i^c)\mathbf{E}\eta_i + \sum_{i=1}^{k_2}\mathbf{E}\left(\eta_i\mathbf{I}(C_i^c)\right) \\ &\leqslant\ k_2\lambda - r(1-\delta_2/2)(k_2-1) + \delta_2 k_2\mu \leqslant -\varepsilon_2. \end{aligned}$$

4.3. **Случай** $X_1 = x \in A_3$**.** Рассмотрим сначала вспомогательную систему $(\widehat{Q}_n, \widehat{V}_n)$ с начальным состоянием $\widehat{Q}_1 = 0$ и $\widehat{V}_1 = \infty$, т.е. при наличии неограниченного источника энергии. Хорошо известно (см., напр. [3]), что эта система нестабильна и, более того, общее число успешных передач в ней п.н. конечно и, начиная с некоторого (случайного) момента времени, происходят только конфликты. Значит, начиная с этого момента времени, выполнены п.н. равенства $\widehat{Q}_{n+1} = \widehat{Q}_n + \xi_n$. Поэтому для любых наперед заданных $\delta_3 \in (0,1)$ и $m_0 >> 1$ найдется n_0 такое, что вероятность события

(4.6)

$$\widehat{C} := \{\widehat{Q}_n \geqslant \lambda(n-n_0)/2 + m_0 \text{ и } B_n([\lambda(n-n_0)/2] + m_0, p) \geqslant 2 \text{ при всех } n \geqslant n_0\}$$

не меньше, чем δ_3. В силу монотонности, (4.6) остается верным при любом начальном состоянии $\widehat{Q}_1 \in \{0, 1, \ldots, M\}$. Поэтому на таком событии

$$\sum_{i=n_0}^{n} B_i(\widehat{Q}_n, p) \geqslant \sum_{i=n_0}^{n} B_i\left(\lambda\left[(i-n_0)/2\right], p\right) =: \Sigma_n.$$

Здесь $\Sigma_n/n^2 \to \lambda p/2$ при $n \to \infty$ почти наверное и в среднем. Выберем теперь k_3 настолько большим, чтобы

$$\mathbf{E}\left(\Sigma_{k_3} \mid \widehat{C}\right) \geqslant \lambda k_3^2 p/3 \tag{4.7}$$

и

$$k_3(\lambda+\mu) - \frac{\delta_3}{2}\frac{\lambda k_3^2 p}{4} =: -\varepsilon_3 < 0. \tag{4.8}$$

Положим $g(x) = k_3$ при $x \in A_3$.

Рассмотрим теперь систему с начальным состоянием $Q_1 \in \{0, 1, \ldots, M\}$, $V_1 \geqslant N_3 - M$ для некоторого целого $N_3 > M$ и событие

$$\begin{aligned} C := &\left\{N_3 - M \geqslant Q_1 + \sum_{i=1}^{k_3} \xi_i\right\} \cap \{Q_n \geqslant \lambda(n-n_0)/2 + m_0\} \\ &\cap \{B_n\left(\lambda\left[(n-n_0)/2\right] + m_0, p\right) \geqslant 2 \ \forall \ n \in [n_0, k_3]\}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Отметим, что на событии C

$$z_1 = B(Q_1, p) + \xi_1, z_2 = B(Q_2, p) + \xi_2, \ldots, z_{k_3} = B(Q_{k_3}, p) + \xi_{k_3}$$

и $\mathbf{I}\left(B_n\left(Q_n, p\right) + \xi_n = 1\right) = 0$, при $n \in [n_0, k_3]$, поэтому можно выбрать N_3 настолько большим, чтобы вероятность события была не меньше, чем $\delta_3/2$, а также чтобы $\mathbf{E}(\Sigma_{k_3} \mid C) \geqslant \lambda k_3^2 p/4$. Последнее всегда возможно, т.к. $\mathbf{E}\left(\Sigma_{k_0} \mid C\right) \to \mathbf{E}\left(\Sigma_{k_0} \mid \widehat{C}\right)$ с ростом N_3.

Положим $\Delta_{k_3} = Q_{k_3} + V_{k_3} - Q_1 - V_1$. Тогда при $Q_1 \in \{0, 1, \ldots, M\}$ и $N \geqslant N_3$

$$\mathbf{E}\Delta_{k_3} \leqslant k_3(\lambda+\mu) - \mathbf{P}(C)\mathbf{E}(\Sigma_{k_3} \mid C) \leqslant -\varepsilon_3.$$

Осталось положить $N = \max(N_2, N_3)$ и $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Доказательство первой части теоремы завершено.

4.4. **Доказательство нестабильности.** Рассмотрим вспомогательное случайное блуждание

$$W_{n+1} = W_n + \xi_n - \mathbf{I}(\eta_n = 1)$$

с начальным значением $W_1 = 0$. Так как $\zeta_n := \xi_n - \mathbf{I}(\eta_n = 1)$ образуют i.i.d. последовательность с положительным средним $\mathbf{E}\zeta_1 = \lambda - r =: a > 0$, то $W_n/n \to a$ п.н. Поэтому найдется такое $L_1 > 0$, что вероятность события

$$D_1 := \{W_n > -L_1 + na/2 \ \text{ при всех } n\}$$

не меньше, чем, например, $3/4$. Далее, отметим, что $\dfrac{B_n([na/2], p)}{na/2} \to p$ п.н.

Теперь рассмотрим последовательность $\{\eta_n\}$. Так как их среднее $\mu = \mathbf{E}\eta_1$ конечно, то $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \eta_i/n \to 0$ п.н. и найдется $L_2 > 0$ настолько большое, что вероятность события

$$D_2 := \{\eta_1 + 1 < B_1\left(L_2 + [a/2]\,, p\right),\ \eta_n < B_n\left(L_2 + [na/2]\,, p\right) \ \text{ при всех } \ n \geqslant 2\}$$

было не меньше, чем $3/4$. При этом $\mathbf{P}(D_1 \cap D_2) \geqslant 1 - \mathbf{P}(D_1^c) - \mathbf{P}(D_2^c) = 1/2$.

Из условия (2.2) следует, что при любом достаточно большом $\widehat{L}$ найдется $L \geqslant \widehat{L}$ такое, что состояние $(L, 1)$ достижимо из состояния $(0, 1)$ нашей цепью Маркова. Возьмем $\widehat{L} > L_1 + L_2$ и рассмотрим цепь Маркова (Q_n, V_n) с начальным состоянием $(Q_1, V_1) = (L, 1)$. На событии $D_1 \cap D_2$ положительной вероятности, равенство $Q_n = W_n + L$ имеет место при всех n и, поэтому, $Q_n \to \infty$ с линейной скоростью. И так как состояние $(0, 1)$ достижимо из любого другого состояния $x \in \mathbb{Z}_+^2$, то $Q_n \to \infty$ с положительной вероятностью при любом начальном состоянии цепи (следует добавить, что на самом деле $Q_n \to \infty$ с вероятностью единица, что также нетрудно показать).

Нестабильность доказана.

5. Заключение

Мы рассмотрели модель для системы случайного множественного доступа под управлением алгоритма ALOHA с общим для всех пользователей пополняемым источником энергии и изучили условия ее (не)стабильности. Отметим, что при неограниченном источнике энергии и пуассоновском входном потоке модель представляет собой классический алгоритм ALOHA, который нестабилен для любых p и λ и метастабилен ([9]) для малых p и $\lambda < e^{-1}$. Мы же показали, что введение дополнительного ограничения в виде источника энергии может стабилизировать систему.

Модель, предложенная в работе, предполагает пополняемый источник энергии, общий для всех пользователей. В создаваемых в настоящее время системах с передачей энергией по радиоканалу (см., например, [1]) энергия, передаваемая базовой станцией, накапливается у каждого абонента в своем индивидуальном источнике и далее используется для передачи информации. Однако, в работе [10] было отмечено, что с увеличением абонентов, количество энергии, которое получает один абонент уменьшается. Таким образом, изучаемая в нашей работе упрощенная модель отражает некоторые черты перспективных беспроводных систем, в которых одна базовая станция передает энергию по радиоканалу большому количеству абонентов и по радиоканалу получает от них сообщения.

6. Приложение: некоторые известные определения и свойства

Рассмотрим цепь Маркова $\{X_n\}$ на пространстве состояний $(\mathbf{X}, \mathbf{B}_X)$. Измеримое множество $A \in \mathbf{B}_X$ называется *возвратным*, если первое время попадания (возвращения) в это множество

$$\tau_x \equiv \tau_x(A) := \min\{n \geqslant 1 \ : \ X_n \in A \mid X_0 = x\}$$

конечно (почти наверное), и *положительно возвратным*, если в тому же среднее время возвращения равномерно ограничено,

$$\sup_{x \in A} \mathbf{E}\tau_x < \infty.$$

В частности, состояние $x \in \mathbf{X}$ можно рассматривать как одноточечное множество и говорить о его (положительной) возвратности. Если два состояния $x, y \in \mathbf{X}$ *сообщаются*, то они одновременно либо (положительно) возвратны, либо нет.

Если пространство $\mathbf{X}$ не более чем счетно и все состояния цепи Маркова сообщаются между собой, то наличие конечного (положительно) возвратного множества эквивалентно тому, что каждое состояние $x \in \mathbf{X}$ (положительно) возвратно. В таком случае говорят о (положительной) возвратности марковской цепи.

Если цепь Маркова апериодична (т.е. при некотором $x_0 \in \mathbf{X}$ наибольший общий делитель всех элементов множества $\{n \geqslant 1 : \mathbf{P}(X_n = x_0 | X_0 = x_0) > 0\}$ равен единице) и положительно возвратна, то она и *эргодична*, т.е. у нее существует единственное стационарное распределение, которое к тому же является предельным при любом начальном состоянии $X_0 = x \in \mathbf{X}$.

Список литературы

[1] Xun Zhou, Rui Zhang, Chin Keong Ho, *Wireless Information and Power Transfer in Multiuser OFDM Systems*, IEEE Transactions on Wireless Communications, **13**:4 (2014), 2282–2294.

[2] N. Abramson, *Development of the ALOHANET*, IEEE Trans. Info. Theory, **31** (1985), 119–123. Zbl 0563.94001

[3] G. Fayolle, E. Gelenbe, J. Labetoulle, *Stability and optimal control of the packet switching broadcast channel*, Journal of the ACM (JACM), **24**:3 (1977), 375–386. MR0445639

[4] A. Bergman, M. Sidi, *Energy efficiency of collision resolution protocols*, Computer Communications, **29** (2006), 3397–3415.

[5] J. Jeon and A. Ephremides, *The stability region of random multiple access under stochastic energy harvesting*, Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), (2011), 1796–1800.

[6] S. Foss, D. Kim, A. Turlikov, *Models with Common Energy Harvesting for the Random Multiple Access System*, XIV International symposium on problems of redundancy in information and control systems, (2014), 39–42.

[7] J. P. Kelly and I. M. McPhee, *The Number of Packets Transmitted by Collision Detect Random Access Schemes*, Annals of Probability, **15**:4 (1987), 1557–1568. MR0905348

[8] S. Foss, T. Konstantopoulos, *An overview of some stochastic stability methods*, Journal of Operation Research Society Japan, **47**:4 (2004), 275–303. MR2174067

[9] N. Vvedenskaya, Yu. Suhov, *Multi-access system with many users: Stability and metastability*, Problems of Information Transmission, **43**:3 (2007), 263–269. MR2360021

[10] B.L. Cannon, J.F. Hoburg, D.D. Stancil, S.C. Goldstein, *Magnetic Resonant Coupling As a Potential Means for Wireless Power Transfer to Multiple Small Receivers*, IEEE Transactions on Power Electronics, **24**:7 (2009), 1819–1825.

Дмитрий Константинович Ким
Казахский Национальный Технический Университет им. К. И. Сатпаева;
ТОО “EcoRisk”,
ул. Сатпаева 22,
050013, Алматы, Казахстан
E-mail address: kdk26@mail.ru

Андрей Михайлович Тюрликов
Государственный Университет Аэрокосмического Приборостроения,
ул. Большая морская 67,
190000, Санкт-Петербург, Россия
E-mail address: turlikov@vu.spb.ru

Сергей Георгиевич Фосс
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия;
Heriot-Watt University,
EH14 4AS,
Edinburgh, UK
E-mail address: foss@math.nsc.ru, s.foss@hw.ac.uk