S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 915–920 (2014) УДК 512.554

MSC 17B20, 17D10

ПРИМЕР ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ПРОСТОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ, НЕ ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ СВОБОДНЫМ МОДУЛЕМ НАД СВОИМ ЦЕНТРОИДОМ.

В.Н. ЖЕЛЯБИН, М.Е. ГОНЧАРОВ

Abstract. In this work we construct an example of differentially simple Lie algebra $\Lambda(L(\mathbb{M}))$ over an algebraically closed field of zero characteristic, such that $\Lambda(L(\mathbb{M}))$ is a finitely-generated projective non-free module over its centroid.

Keywords: differentially simple algebra, projective module, Lie algebra, algebra of polynomials

В работе [1] Р. Блок доказал, что всякая дифференциально простая алгебра с минимальным идеалом является простой в случае характеристики 0, а в случае ненулевой характеристики представляется в виде тензорного произведения ассоциативной коммутативной дифференциально простой алгебры на простую алгебру. В частности, в случае наличия минимального идеала дифференциально простая алгебра будет свободным модулем над своим центроидом. А. Поповым были получены результаты, аналогичные результатам Блока, в случае альтернативных и йордановых алгебр без предположения о существовании минимального идеала (см. [2], [3]). Более точно, было доказано, что всякая дифференциально простая альтернативная алгебра характеристики 0 является проективным модулем над своим центром.

В связи с этими результатами возникает вопрос: будет ли дифференциально простая альтернативная или йорданова алгебра свободным модулем над своим центром. В работе [4] с помощью координатного кольца n-мерной вещественной сферы строятся примеры дифференциально простых алгебр над

Zhelyabin, V.N, Goncharov, M.E., An example of differentially simple Lie algebra which is not a free module over its centroid.

Работа поддержана РФФИ, грант № 14-01-00014 и №12-01-33031-мол-а-вед.

Поступила 23 октября 2014 г., опубликована 5 декабря 2014 г.

полем вещественных чисел, являющиеся конечнопорожденными проективными, но несвободными модулями над своим центроидом. В качестве следствия примеры таких алгебр были получены в многообразиях ассоциативных, лиевых, альтернативных, мальцевских и йордановых алгебр.

В данной работе строится пример дифференциально простой алгебры Ли над алгебраически закнутым полем характеристики 0, являющийся конечнопорожденным проективным, но несвободным модулем.

Основная идея работы состоит в следующем. С помощью конструкции Михеева мы вкладываем простую нелиеву алгебру Мальцева в простую алгебру Ли с автоморфизмом порядка 2. Полученная алгебра Ли является Z_2-градуированной алгеброй. Затем с помощью некоторой дифференциально простой Z_2-градуированной ассоциативно-коммутативной алгебры строится искомый пример алгебры Ли.

Антикоммутативная алгебра M над полем F характеристики, не равной 2,3, называется алгеброй Мальцева, если для любых $x, y, t \in M$ выполнено

$$J(x, y, xt) = J(x, y, t)x, \tag{1}$$

где $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$ — якобиан элементов x, y, z.

Алгебры Мальцева были введены Мальцевым [5] как касательные алгебры локальных аналитических луп Муфанг. Они являются обобщением алгебр Ли, и их теория достаточно хорошо развита [6]. Важные примеры нелиевых алгебр Мальцева возникают из алгебр Кэли-Диксона.

Рассмотрим алгебру Кэли-Диксона $\mathbb{O}$ над полем F. Как известно, $\mathbb{O}$ — центральная простая альтернативная неассоциативная алгебра. Рассмотрим коммутаторную алгебру $\mathbb{O}^{(-)}$ с умножением

$$[a, b] = ab - ba,$$

где $a, b \in \mathbb{O}$. Тогда $\mathbb{O}^{(-)}$ является алгеброй Мальцева. Более того, любая простая нелиева алгебра Мальцева над полем F характеристики не равной, 2 и 3, изоморфна фактор-алгебре $\mathbb{O}^{(-)}/Z(\mathbb{O}^{(-)})$ алгебры $\mathbb{O}^{(-)}$ по центру $Z(\mathbb{O}^{(-)}) = F \cdot 1$, где 1 — единица алгебры $\mathbb{O}$ (см. [7]).

Пусть F — алгебраически замкнутое поле характеристики не равной 2,3. Тогда над F, с точностью до изоморфизма, существует только одна нелиева простая алгебра Мальцева $\mathbb{M}$ (см. [7]). В алгебре $\mathbb{M}$ можно выбрать базис h, x, x', y, y', z, z' со следующей таблицей умножения

$$\begin{gathered} hx = 2x,\ hy = 2y,\ hz = 2z, \\ hx' = -2x',\ hy' = -2y',\ hz' = -2z', \\ xx' = yy' = zz' = h, \\ xy = 2z',\ yz = 2x',\ zx = 2y', \\ x'y' = -2z,\ y'z' = -2x,\ z'x' = -2y. \end{gathered}$$

Остальные произведения равны нулю. Такой базис алгебры $\mathbb{M}$ будем называть стандартным.

В работе Михеева [8] была получена связь между алгебрами Мальцева и алгебрами Ли, на которых действуют автоморфизмы специального вида (алгебры Ли с тройственностью).

Пусть M — произвольная алгебра Мальцева. Напомним конструкцию Михеева построения алгебры Ли с тройственностью $L(M)$ из алгебры M. Для удобства мы будем обозначать через xy умножение в алгебре M, а через $[,]_L$ —

умножение в алгебре $L(M)$. Для элемента $x \in M$ через ad_x обозначим оператор правого умножения на элемент x: $ad_x(y) = xy$ для любого $y \in M$.

Пусть и $ad(M)$ — векторное пространство, порожденное парами $(ad_x, 3x)$. При этом мы естественным образом определяем действие пары $(ad_x, 3x)$ на M: $(ad_x, 3x)(y) = ad_x(y)$ для любого $y \in M$. В дальнейшем, для удобства, мы под ad_x будем понимать пару $(ad_x, 3x)$.

Пусть $x, y \in M$. Через $D'_{x,y}$ обозначим отображение, заданное правилом:

$$D'_{x,y}(z) = (xy)z - (yz)x - (zx)y$$

для всех $z \in M$. Известно, что $D'_{x,y}$ является дифференцированием алгебра Мальцева M. Подалгебру Ли в алгебре $Der(M)$ всех дифференцирований алгебры M, порожденную всевозможными дифференцированиями вида $D'_{x,y}$ обозначим через $IDer(M)$.

Пусть $L(M) = M \oplus ad(M) \oplus IDer(M)$ — прямая сумма векторных пространств. Определим умножение $[,]_L$ как:

$$[x, y]_L = \frac{1}{3}ad_{xy} + \frac{1}{3}D'_{x,y}, \quad [x, \Pi]_L = \Pi(x), \quad [ad_x, ad_y]_L = -ad_{xy} + D'_{x,y},$$

$$[ad_x, D'_{y,z}]_L = ad_{D'_{y,z}(x)},$$

где $x, y, z \in M$, $\Pi \in ad(M) + IDer(M)$. Как доказано в работе [8] пространство $L(M)$ с таким умножением является алгеброй Ли. На $L(M)$ определим отображение σ по правилу:

$$\sigma(x + \Pi) = -x + \Pi,$$

Тогда σ является автоморфизмом алгебры $L(M)$ порядка 2 (см. [8]). Следовательно, $L(M)$ является Z_2-градуированной алгеброй Ли, для которой $L(M)_0 = ad(M) \oplus IDer(M)$, $L(M)_1 = M$.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{M}$ — простая семимерная алгебра Мальцева, $L(\mathbb{M})$ — алгебра Ли, полученная из алгебры $\mathbb{M}$ с помощью конструкции Михеева. Тогда $L(\mathbb{M})$ - простая Z_2-градуированная алгебра Ли.*

Доказательство. Ясно, что $[L(\mathbb{M}), L(\mathbb{M})]_L \neq 0$. Пусть I — идеал в $L(\mathbb{M})$.

Сначала рассмотрим случай, когда $I \cap \mathbb{M} \neq 0$. Пусть $a \in I \cap \mathbb{M}$, $a \neq 0$. Так как $\mathbb{M}$ — простая алгебра Мальцева, то идеал, порожденный элементом a, будет совпадать с $\mathbb{M}$. Следовательно, действуя на a операторами ad_m, $m \in \mathbb{M}$, мы получаем, что $\mathbb{M} \subset I$.

Рассмотрим элементы стандартного базиса $x, y' \in \mathbb{M} \subset I$. Непосредственными вычислениями получаем, что $[x, y']_L = \frac{1}{3}D'_{x,y'} \in I$. Так как $D'_{x,y'}(y) = 6x$, то из включения $[ad_y, D'_{x,y'}]_L \in I$ следует, что $ad_x \in I$. Аналогично доказывается, что $ad_m \in I$ для любого $m \in \mathbb{M}$. Следовательно, $I = L(\mathbb{M})$.

Пусть теперь I — произвольный идеал в $L(\mathbb{M})$ и $0 \neq l = a_1 + ad_{a_2} + D \in I$, где $a_1, a_2 \in \mathbb{M}$, $D \in IDer(\mathbb{M})$. Если $a_1 = 0$, то $l \in ad(\mathbb{M}) + IDer(\mathbb{M})$. Если для любого $x \in \mathbb{M}$ $[l, x]_L = 0$, то отсюда следует, что оператор ad_{a_2} является дифференцированием алгебры $\mathbb{M}$, то есть a_2 лежит в лиевом центре алгебры $\mathbb{M}$. В силу простоты $\mathbb{M}$ ее лиев центр равен нулю. Отсюда получаем, что $ad_{a_2} = D = 0$. Поэтому существует такой $x \in \mathbb{M}$, что $[l, x]_L \neq 0$. Так как $[l, x]_L \in \mathbb{M}$, то по доказанному $I = L(\mathbb{M})$.

Следовательно, для любого элемента $l \in I$ его проекция на пространство $\mathbb{M}$ не равна нулю. Для элемента $l \in I$ мы будем использовать следующее обозначение:

$$l = a_l + ad_{b_l} + D_l,$$

где $a_l, b_l \in \mathbb{M},\ D_l \in IDer(\mathbb{M})$. По доказанному для любого $l \in I$ $a_l \neq 0$ и либо $ad_{b_l} \neq 0$, либо $D_l \neq 0$. Умножая элемент l на ad_m для всевозможных $m \in \mathbb{M}$, получаем, что для любого $a \in \mathbb{M}$ существует единственный $l_a \in I$ такой, что его проекция на $\mathbb{M}$ равна a.

Рассмотрим элемент $l_x = x + ad_{b_x} + D_x \in I$. По условию $[l_x, ad_x]_L \in I$. Раскрывая скобки, получаем $-ad_{b_x x} + D'_{b_x,x} - ad_{D'_{b_x}(x)} \in I$. По доказанному, $-ad_{b_x x} + D'_{b_x,x} - ad_{D'_{b_x}(x)} = 0$. Как следствие $D'_{b_x,x} = 0$. Пусть

$$b_x = \alpha_h h + \alpha_x x + \alpha_{x'} x' + \alpha_y y + \alpha_{y'} y' + \alpha_z z + \alpha_{z'} z'.$$

Непосредственным вычислением получаем

$$0 = D'_{b_x,x}(x') = 4\alpha_h h + 4\alpha_{x'} x' + 2\alpha_y y + 6\alpha_{y'} y' + 2\alpha_z z + 6\alpha_{z'} z'.$$

Отсюда $b_x = \alpha_x x$.

Рассмотрим теперь элемент $[l_x, ad_h]_L$. Производя необходимые вычисления, получаем

$$[l_x, ad_h]_L = -2x + 2\alpha_x ad_x + \alpha_x D'_{x,h} - ad_{D_x(h)} \in I.$$

Отсюда следует $D_x = \beta_x D'_{h,x}$. Суммируя полученные результаты, имеем

$$l_x = x + \alpha_x ad_x + \beta_x D'_{h,x} \in I.$$

Так как

$$xy' = ad_x(y') = D'_{h,x}(y') = 0,$$

то $[l_x, y']_L = \frac{1}{3} D'_{x,y'} \in I$. Нетрудно видеть, что $D'_{x,y'}(x') = -6y'$ и, как следствие, $D'_{x,y'} \neq 0$. По доказанному $I = L(\mathbb{M})$. Теорема доказана. $\square$

Пусть F — поле характеристики 0. Рассмотрим координатное кольцо Λ алгебраического многообразия, заданного многочленом $f(x,y) = x^2 + y^4 - 1$, т.е. $\Lambda = F[x,y]/f(x,y)F[x,y]$ — фактор-алгебра по идеалу, порожденному полиномом $f(x,y)$. Дифференцирование

$$D = 2y^3 \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$$

аннулирует $f(x,y)$, т.е. $D(f(x,y)) = 0$. Ясно, что дифференцирование D индуцирует дифференцирование алгебры Λ, которое мы также обозначим через D. Отождествим образы элементов x и y при каноническом гомоморфизме $F[x,y] \to \Lambda$ с элементами x и y. Рассмотрим в Λ подалгебру Λ_0, порожденную элементами $1, y^2, xy$ и Λ_0-модуль $\Lambda_1 = \Lambda_0 x + \Lambda_0 y$. Ясно, что $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ — Z_2-градуированная алгебра. Тогда, как показано в [9], алгебры Λ и Λ_0 дифференциально просты относительно дифференцирования D, а Λ_0-модуль Λ_1 не является свободным. Кроме того, Λ_1 — проективный Λ_0-модуль ранга 1. В дальнейшем Λ_0-модуль $\Lambda_0 \oplus \Lambda_0 \oplus ... \oplus \Lambda_0$ (n слагаемых) будем обозначать через Λ_0^n.

Заметим, что прямая сумма Λ_0-модулей $\Lambda_1 \oplus \Lambda_1$ изоморфна $\Lambda_0^2 = \Lambda_0 \oplus \Lambda_0$. Действительно, отображение

$$\phi : (a, b) \in \Lambda_1 \oplus \Lambda_1 \mapsto (a, b) \begin{pmatrix} x & -y \\ y^3 & x \end{pmatrix}$$

является гомоморфизмом Λ_0-модуля $\Lambda_1 \oplus \Lambda_1$ в Λ_0^2. Так как $\det \begin{pmatrix} x & -y \\ y^3 & x \end{pmatrix} = 1$, то гомоморфизм ϕ обратим. Поэтому ϕ — изоморфизм Λ_0-модулей. Следовательно, $\Lambda_0^2 \cong \Lambda_1 \oplus \Lambda_1$

Пусть $A = A_0 + A_1$ — Z_2-градуированная алгебра. В алгебре $\Lambda \otimes A$ рассмотрим подалгебру $\Lambda(A) = \Lambda_0 \otimes A_0 + \Lambda_1 \otimes A_1$. Тогда $\Lambda(A)$ — Z_2-градуированная алгебра, которая называется Λ-оболочкой алгебры A.

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{M}$ — простая семимерная алгебра Мальцева над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, $L(\mathbb{M})$ — алгебра Ли, полученная из алгебры $\mathbb{M}$ с помощью конструкции Михеева. Тогда Λ-оболочка $\Lambda(L(\mathbb{M}))$ — дифференциально проста относительно дифференцирования $D \otimes id$. Алгебра $\Lambda(L(\mathbb{M}))$ — конечнопорожденный проективный несвободный модуль над своим центроидом $C(L(\mathbb{M}))$, который изоморфен алгебре Λ_0.*

Доказательство. В силу теоремы 2 из [4] алгебра $\Lambda(L(\mathbb{M}))$ — дифференциально проста относительно дифференцирования $D \otimes id$ и цетроид $C(\Lambda(L(\mathbb{M}))$ изоморфен Λ_0. Хорошо известно, что $dimIDer(\mathbb{M}) = 14$ (см. [11]). Поэтому $\dim L(\mathbb{M}) = 28$ и ранг Λ_0-модуля $\Lambda(L(\mathbb{M}))$ равен 28. Если $\Lambda(L(\mathbb{M}))$ — свободный Λ_0-модуль, то $\Lambda(L(\mathbb{M})) \cong \Lambda_0^{28}$ — изоморфизм Λ_0-модулей. Поскольку $\dim L(\mathbb{M})_1 = 7$, то

$$\Lambda_1 \otimes L(\mathbb{M})_1 \cong \underbrace{\Lambda_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_1}_{7} \cong \Lambda_0^6 \oplus \Lambda_1.$$

Следовательно, если $\Lambda(L(\mathbb{M}))$ — свободный Λ_0-модуль, то

$$\Lambda_0^{28} \cong \Lambda(L(\mathbb{M})) = \Lambda_0 \otimes L(\mathbb{M})_0 \oplus \Lambda_1 \otimes L(\mathbb{M})_1 \cong \Lambda_0^{27} \oplus \Lambda_1.$$

Напомним (см. [10]), что проективный модуль ранга 1 над ассоциативным коммутативным кольцом удовлетворяет условию сокращения. Следовательно, $\Lambda_1 \cong \Lambda_0$, т.е. Λ_1 — свободный Λ_0-модуль. Получили противоречие. Теорема доказана. $\square$

Мы благодорим рецензента за сделанные замечания, которые позволили улучшить текст работы.

Список литературы

[1] R.E. Block, Determination of the differentiably simple rings with a minimal ideal // Ann. of Math., **90**:3 (1969), 433–459 MR0251088

[2] А.А. Попов, Дифференциально простые альтернативные алгебры // Алгебра и логика **49**:5 (2010), 670–689 MR2796492

[3] А.А. Попов, Дифференциально простые йордановы алгебры // Сибирский математический журнал, **54**:4 (2013), 890-–901 MR3137154

[4] В.Н. Желябин, А.А. Попов, И.П. Шестаков, Координатное кольцо n-мерной сферы и некоторые примеры дифференциально простых алгебр // Алгебра и логика, **42**:4 (2013), 416-434 MR3154362

[5] А.И. Мальцев, Аналитические лупы // Математический сборник, **36(78)**:3 (1955), 569–575 MR0069190

[6] Е.Н. Кузьмин, И.П. Шестаков, Неассоциативные структуры // в кн.: Алгебра-6 (Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. направл., 57), М. ВИНИТИ, 1990, 179–266 MR1060322

[7] Е.Н. Кузьмин, Структура и представления конечномерных алгебр Мальцева // в кн.: Исследования по теории колец и алгебр (Труды Ин-та матем. СО АН СССР, 16), Новосибирск, Наука, 1989, 75-101 MR1043626

[8] П.О. Михеев, О вложении алгебр Мальцева в алгебры Ли // Алгебра и Логика, **31**:2 (1992), 167—173 MR1289030

[9] В.Н. Желябин, Новые примеры простых йордановых супералгебр над произвольным полем характеристики ноль // Алгебра и анализ, **24**:4 (2012), 84–96 MR3088008

[10] А.А. Суслин, Алгебраическая K-теория // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., **20** (1982), 71–152 MR0685282

[11] A.A. Sagle, Malcev algebras // Trans. Am. Math. Soc., **101**:3 (1961), 426-458 MR0143791

Виктор Николаевич Желябин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: vicnic@math.nsc.ru

Максим Евгеньевич Гончаров
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: gme@math.nsc.ru