S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 929–950 (2014) УДК 517.958, 535, 530.145

MSC 35Q, 81C

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВИХРЕВЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

К.К. ИЗМАЙЛОВА, А.А. ЧЕРЕВКО, А.П. ЧУПАХИН

Abstract. This work presents a detailed studying one of invariant solutions of Schrodinger equation with cubic nonlinearity. We obtain this solution through the methods of group analysis of differential equations. The analysis of behavior of integral curves of the factor system representing the system of three ordinary differential equations is performed. Both analytical and numerical methods are used.

The existence of periodical solutions for particular parameter value is proved. It is shown that in other cases all system trajectories tend asymptotically to some curve in the phase space. This curve, in its turn, is a trajectory for some value of parameter.

Keywords: differential equations, Schrodinger equation, Lie groups, invariant solutions.

1. Введение

Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью (НУШ) [1]

$$\imath\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta\psi+|\psi|^2\psi=0, \tag{1}$$

где $\psi=\psi_1+\imath\psi_2$, вещественные функции ψ_k зависят от времени t и пространственных координат $\vec{x}=(x,y,z)$; Δ — лапласиан, $|\psi|=\psi\psi*=\sqrt{\psi_1^2+\psi_2^2}$ (* означает сопряжение), имеет многочисленные приложения в математической физике. Это нелинейная оптика [1], теория волн [2], конденсат Бозе-Эйнштейна [3], теория поля [4]. В одномерном случае уравнение (1) интегрируется методом

Izmailova, K.K., Cherevko, A.A., Chupakhin, A.P., On a single class of vortex solutions of nonlinear schrodinger equation.

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (Интеграционный проект №44), Программы №2.13.4 ОЭММПУ РАН.

Поступила 30 октября 2014 г., опубликована 6 декабря 2014 г.

обратной задачи рассеяния [5]. Большой интерес как для приложений, так и для теории представляют многомерные решения уравнения (1).

Теоретико-групповые методы [6] позволяют строить широкие классы точных решений дифференциальных уравнений произвольного вида, независимо от числа переменных, типа и пр. Методы группового анализа дифференциальных уравнений особенно эффективны при исследовании уравнений, описывающих математические модели механики континуума и физики. В этих случаях имеерся обширная группа Ли непрерывных преобразований, допускаемая данными уравнениями [7]. Исследование теоретико-групповых свойств математической модели включает следующие этапы.

(а) Отыскание наиболее широкой группы Ли непрерывных преобразований, допускаемых уравнениями. В приложениях удобнее работать с соответствующей алгеброй L_r, поэтому в дальнейшем, как правило, речь будет идти о последних.

(б) Перечисление всех подалгебр алгебры Ли L_r симметрии модели с точностью до внутреннего автоморфизмов. Аналитически эта процедура соответствует перечислению всех теоретико-групповых решений исходных уравнений с точностью до замены координат. Ее итогом является список подалгебр алгебры L_r с точностью до сопряжения, называемый *оптимальной системой подалгебр* ΘL_r алгебры симметрии L_r.

(в) Построение по каждому представителю $H \in \Theta L_r$ оптимальной системы дифференциальных уравнений E/H. Эта *факторсистема* имеет меньшее число независимых переменных для *инвариантных решений*. Для *частично инвариантных решений* лишь часть искомых функций имеет инвариантное представление, а часть из них, в количесве называемом *дефектом решения*, неинвариантна. Факторсистема представляется в виде объединения инвариантной подсистемы и переопределенной системы для неинвариантных функций. Последнюю нужно приводить в инволюцию [8, 9].

(г) Исследование свойств решений факторсистем и их физическая трактовка.

Результативность изложенной концепции для модели идеальной газовой динамики доказана обнаружением и исследованием обширных классов новых точных решений: барахронных [11], двумерных периодических, вихря Овсянникова [9, 10].

Для уравнения (1) этапы (а)-(б) были реализованы в работах [**?**]. Некоторые факторсистемы, отвечающие инвариантным решениям ранга один и описываемые дифференциальными уравнениями типа Пенлеве приведены в [18]. Отдельные факторсистемы для уравнения (1) рассматривались также в [19].

В [20] построены все фактоуравнения (подмодели) уравнения (1), отвечающие его трехмерным алгебрам симметрии. Для всех таких алгебр найдены универсальные инварианты и определены тип возможного решения. Основным результатом работы [20] является следующая

Теорема 1. *Трехмерные алгебры симметрии НУШ* (1) *порождают 27 существенно различных подмоделей. Среди них 9 инвариантных, из них 6— ранга один и 3 — ранга два; 18 частично инвариантных, из них 17 — ранга два и 1 — ранга три. Лишней, не инвариантной функцией во всех частично инвариантных подмоделях является фаза* Φ.

Тем самым показано, что существует большое число точных решений уравнения (1), описывающих существенно многомерные физические структуры.

В данной работе подробно исследуется одно из инвариантных решений уравнения (1), построенное в [20]. Проведен анализ поведения интегральных кривых факторсистемы, представляющей систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Используется как аналитические, так и численные методы.

Доказано существование периодических решений для частного значения параметра. Показано, что в других случаях все траектории системы ассимптотически стремятся к некоторой кривой в фазовом пространстве. Эта кривая, в свою очередь, является траекторией для некоторого значения параметра задачи.

Рассматриваемое решение имеет логарифмическую особенность на оси симметрии. Физически его можно трактовать как световой пучок в кольцевой трубке, распространяющийся вдоль оси трубы. Для отдельных решений возможно распространение этого пучка вдоль трубки без искажений.

2. Групповые свойства уравнения (1)

Введем амплитудное представление решения уравнения (1) следующим образом:

$$\psi = Ae^{\imath\Phi}. \tag{2}$$

В представлении (1) $A = (\psi\psi*)^{1/2}$ — *амплитуда*, $\Phi = Im\psi$ — *фаза* решения. После подстановки (2) в (1) и разделения мнимой и вещественной частей получаем следующую вещественную систему уравнений:

$$\begin{cases} -A\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} + \Delta A - A|\nabla\Phi|^2 + A^3 = 0, \\ \dfrac{\partial A}{\partial t} + A\Delta\Phi + 2\nabla A\cdot\nabla\Phi = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Алгебра Ли L_{12} симметрии уравнения (1), записанного в виде системы (3), имеет следующий базис [15]:

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_t, \\ &X_2 = \partial_x, X_3 = \partial_y, X_4 = \partial_z, \\ &X_5 = z\partial_y - y\partial_z, X_6 = x\partial_z - z\partial_x, X_7 = y\partial_x - x\partial_y, \\ &X_8 = 2t\partial_x + x\partial_\Phi, X_9 = 2t\partial_y + y\partial_\Phi, \\ &X_{10} = 2t\partial_z + z\partial_\Phi, X_{11} = \partial_\Phi, X_{12} = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z - A\partial_A. \end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что оператор X_{11} порождает центр алегбры L_{12}. Алгебра $L_{11} = L_{12}\ \langle X_{11}\rangle$ изоморфна алгебре Галилея L_{10}, расширенной одномерной алгебре с оператором равномерного растяжения $\langle X_{12}\rangle$. Алгебра Галилея является фундаментальной алгеброй симметрии Ньютоновской механики континуума. Так модель идеальной газовой динамики с уравнением состояния общего вида допускает именно алгебру L_{11}.

Рассмотрим подалгебру $L_{3.64}$ из оптимальной системы ΘL_{12} алгебры L_{12} [20]. Нумерация представителей оптимальной системы взята из [21]. Эта алгебра имеет следующий базис

$$L_{3.64} = \langle \partial_t, \partial_z, 2t\partial_t + z\partial_z + r\partial_r - A\partial_A + b\partial_\Phi\rangle, \tag{5}$$

где $b \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр.

Введем полярные координаты в плоскости (x, y): $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi$ и запишем систему (3):

$$\begin{cases} -A\Phi_t + \Delta_C A - A(\Phi_r^2 + \frac{1}{r^2}\Phi_\varphi^2 + \Phi_z^2) + A^3 = 0, \\ A_t + A\Delta_C\Phi + 2(A_r\Phi_r + \frac{1}{r^2}\Phi_\varphi A_\varphi + A_z\Phi_z) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где лапласиан $\Delta_C = \partial_{rr} + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_{zz}$.

Алгебра (5) имеет инварианты: $\varphi, rA, \Phi - b\ln r$. Представление инвариантного решения ранга один даётся формулами

$$A = \frac{u(\varphi)}{r}\ , \quad \Phi = b\ln r + v(\varphi)\ . \tag{7}$$

Искомые инвариантные функции u и v удовлетворяют системе

$$\begin{cases} u'' - u(v'^2 + b^2 - 1) + u^3 = 0, \\ uv'' + 2(u'v' - bu) = 0\ . \end{cases} \tag{8}$$

Уравнения (8) не содержат явно переменной v. Запишем её в виде системы первого порядка, вводя переменные

$$q = u'\ , \quad w = v'\ . \tag{9}$$

Тогда система (8) сводится к системе трёх уравнений

$$\begin{cases} q' = u(w^2 - u^2 - (1 - b^2))\ , \\ w' = \dfrac{2(bu - qw)}{u}\ , \\ u' = q\ . \end{cases} \tag{10}$$

и второму уравнению (9), из которого функция v находится интегрированием w.

В дальнейшем используются сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащиеся, например, в [21].

По физическому смыслу амплитуда $A > 0$, тогда и $u > 0$, причём граница области определения решения $u = 0$ отвечает вакууму, в этом случае $\psi = 0$. Система (10) в области $u \geq 0$ является основным объектом дальнейшего исследования.

Заметим, что система (10) не имеет особых точек в области $u > 0$ и вырождается на плоскости $u = 0$.

3. Предварительный анализ системы (10)

Важную роль при исследовании решений системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{11}$$

где $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n), \mathbf{F} = (F^1(\mathbf{x}), \dots, F^n(\mathbf{x}))$ играют многообразия $F^i(\mathbf{x}) = 0$ в фазовом пространстве $R^n(x)$ для фиксированных номеров i. Эти уравнения для $i = 1, ..., n$ определяют особые точки системы. При $n = 3$ уравнение $F^i(x^1, x^2, x^3) = 0$ для фиксированного i задаёт поверхность S_i, при переходе через которую траектория системы (11) меняет характер монотонности по i-ой координате. Более детально пересечение поверхности S_i траекторией описывается кривой L_i, которая определяет на поверхности геометрическое место точек, в которых компонента векторного поля $\mathbf{F}$ нормальная к поверхности S_i, обращается в нуль:

$$L_i: \ F_{S_i} = \mathbf{F} \cdot \nabla S_i = 0.$$

Назовём такие кривые *сингулярными.* Рассмотрим, для определённости, случай $n = 3$, который и понадобится нам в дальнейшем.

Оказывается, траектории в окрестности сингулярных кривых могут вести себя специальным образом. Рассмотрим область в фазовом пространстве, в которой нет особых точек системы (11) и которая содержит некоторую часть лишь одной поверхности S_i с кривой L_i. В зависимости от того, является ли кривая L_i траекторией системы (11) или нет, возможны следующие варианты траеторий системы (11).

Если L_i является траекторией, то в её окрестности другие траектории обвивают эту кривую, но не имеют с ней общих точек.

Если же L_i не является траекторией, то другие траектории образуют "арки касаясь в своей верхней точке кривой L_i.

Для рассматриваемой системы (10) найдём сингулярные кривые. Обозначим

$$\begin{aligned} &S_1: \ w^2 - u^2 - (1 - b^2) = 0, \quad \text{гиперболический цилиндр},\\ &S_2: \ bu - qw = 0, \quad \text{гиперболический параболоид},\\ &S_3: \ q = 0, \quad \text{плоскость}. \end{aligned}$$

Сингулярные кривые на этих многообразиях задаются уравнениями:

$$L_1: \ u = \pm\sqrt{b^2 + w^2 - 1}, \quad q = \pm\frac{2bw\sqrt{b^2 + w^2 - 1}}{b^2 + 3w^2 - 1}, \tag{12}$$

$$L_2: \ u = \pm\frac{\sqrt{w^4 + (b^2 - 1) - b^2}}{w}, \quad q = \pm\frac{b\sqrt{w^4 + (b^2 - 1) - b^2}}{w^2},$$

$$L_3: \ u = \pm\sqrt{b^2 + w^2 - 1}, \quad q = 0.$$

Лемма 1. *Кривые L_2 и L_3 не являются траекториями ни при каких значениях параметра b. Кривая L_1 может быть траекторией системы* (10) *при* $b = 0, \pm 1$.

□ Непосредственная проверка. Подставляя (12) в (2.5), получим равенство

$$\frac{b(b^2 - 1)(b^2 - w^2 - 1)\sqrt{b^2 + w^2 - 1}}{b^2 + 3w^2 - 1} = 0,$$

которое является тождеством по w лишь при $b = 0, \pm 1$. ■

Как показывают компьютерные эксперименты, кривая L_1 обладает исключительными свойствами: к ней неограниченно приближаются все траектории системы (10) при $\varphi \to \pm\infty$ при значениях параметра $b \neq 0$.

Далее будет показано, что при $b = 0$ эта кривая тоже играет особую роль — вокруг нее, как вокруг оси вращения, будут расположены замкнутые траектории системы (10).

4. Приведение системы (10) к полиномиальному виду.

Для разрешения особенности на плоскости $u = 0$ приведём систему (10) к полиномиальному виду заменой переменных $(q, w, u) \to (Q, W, U)$ по формулам

$$Q = \frac{q}{u}, \quad W = w, \quad U = u^2 + 1. \tag{13}$$

Обратная замена двузначна

$$u = \pm\sqrt{-1+U}, \quad w = W, \quad q = \pm Q\sqrt{-1+U}, \tag{14}$$

но при любых знаках в (14) после подстановки (13) в (10) получается одна и та же система уравнений

$$\begin{cases} Q' = b^2 - Q^2 - U + W^2, \\ W' = 2(b - QW), \\ U' = 2Q(U-1). \end{cases} \tag{15}$$

Систему (15) следует рассматривать при $U \geq 1$, что соответствует $u \geq 0$. В силу последнего уравнения плоскость $U = 1$ состоит из траекторий системы.

Система (15) имеет следующие особые точки

$$P_1(Q_1, W_1, U_1) = (-b, -1, 1), \quad P_2(Q_2, W_2, U_2) = (b, 1, 1).$$

Матрица Якоби векторного поля системы (15) равна

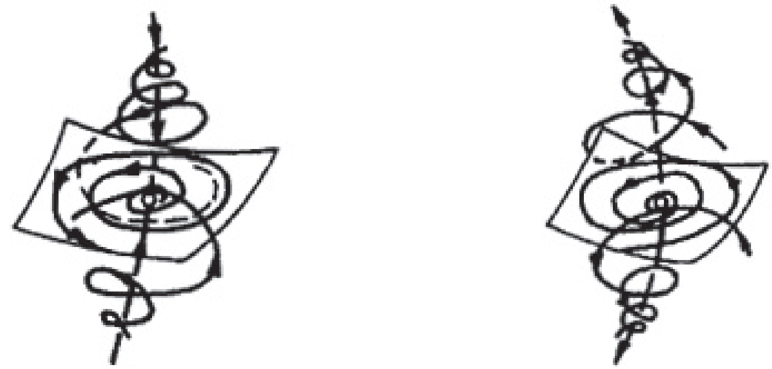
$$A = \begin{pmatrix} -2Q & 2W & -1 \\ -2W & -2Q & 0 \\ 2(U-1) & 0 & 2Q \end{pmatrix}$$

Матрица A в точках P_1 и P_2 имеет следующие собственные числа k_i^α и вектора ξ_i^α $(\alpha = 1, 2; i = 1, 2, 3)$

$$\begin{cases} k_1^1 = -2b, \quad \xi_1^1 = \left(\dfrac{b}{4b^2+1}, -\dfrac{1}{2(4b^2+1)}, 1\right)^{\mathrm{T}}, \\ k_2^1 = 2b - 2i, \quad \xi_2^1 = (-i, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \\ k_3^1 = 2b + 2i, \quad \xi_3^1 = (i, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1^2 = 2b, \quad \xi_3^2 = \left(-\dfrac{b}{1+4b^2}, \dfrac{1}{2(1+4b^2)}, 1\right)^{\mathrm{T}}, \\ k_2^2 = -2b - 2i, \quad \xi_1^2 = (i, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \\ k_3^2 = -2b + 2i, \quad \xi_2^2 = (-i, 1, 0)^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

Точки P_α $(\alpha = 1, 2)$ являются седло-фокусами при $b \neq 0$. Имеется фокус в плоскости $U = 1$ и седло в дополнении к ней. Если $b > 0$, то для P_1 фокус разматывающийся, а входящий в него со стороны $U > 1$ ус седла — притягивающий (Рис. 1 (а)); для P_2 наоборот, фокус наматывающийся, а входящий в него ус седла — отталкивающий (Рис. 1 (б)). При $b < 0$ свойства P_α меняются между собой.



(а) Разматывающийся фокус, притягивающее седло

(б) Наматывающийся фокус, отталкивающее седло

Рис.1. Седло-фокусы

Для $b = 0$ особые точки P_α в плоскости $U = 1$ являются центрами, а в дополнении к ней имеют нулевое собственное число.

Кривая L_1 (12) в переменных (Q, W, U) принимает вид

$$U = b^2 + w^2, \quad W = w, \quad Q = \frac{2bw}{b^2 + 3w^2 - 1}.$$

Заметим, что ее проекция на плоскость (W, U) при всех значениях b является параболой, а при $b = 0$ сама кривая есть плоская парабола. Кроме того, при $b = 0$ пересечение кривой L_1 с плоскостью $U = 1$ происходит в особых точках P_α.

5. Периодические решения при $b = 0$

При значениях параметра $b = 0$ система (10) интегрируется в эллиптических функциях, интегралы имеют наглядную геометрическую интерпретацию и существуют периодические по φ решения. В этом случае второе уравнение системы (10) интегрируется в виде $w = k_0 u^{-2}$, $k_0 = \mathrm{const}$. После подстановки этого значения w в первое уравнение и интегрирования, оно принимает вид

$$\int \frac{dz}{\sqrt{-z^3 - 2z^2 + 2l_0 z - 2k_0^2}} = \pm\sqrt{2}(\varphi - \varphi_0), \tag{16}$$

где $z = u^2$, l_0 — постоянная интегрирования. Интеграл в левой части уравнения (16) представляет собой эллиптическую функцию. Таким образом, при $b = 0$ система имеет решения типа солитонов и периодические. Представление решения через эллиптические функции достаточно громоздко.

Эти решения допускают наглядную геометрическую интерпретацию в фазовом пространстве. Система (15) для $b = 0$ имеет вид

$$\begin{cases} Q' = -Q^2 + W^2 - U, \\ W' = -2QW, \\ U' = 2Q(U - 1). \end{cases} \tag{17}$$

Сингулярная кривая $L_1 = \{U = w^2, W = w, Q = 0\}$, являющаяся в этом случае параболой, лежащей в плоскости $Q = 0$, состоит из стационарных точек.

Система (17) имеет интеграл

$$W(U-1)=\varkappa, \tag{18}$$

$\varkappa$ — постоянная интегрирования, которому в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3(Q,W,U)$ отвечает семейство гиперболических цилиндров с осью OQ.

Изучим систему (17) на поверхности, определяемой интегралом (18) при $\varkappa>0$ (случай $\varkappa<0$ аналогичен). Заметим, что в этом случае $W>0$.

Совершим замену переменных $(Q,W)\to(X,Y)$:

$$X=Q^2W,\quad Y=W. \tag{19}$$

Обратная замена двузначна

$$W=Y,\quad Q=\varepsilon\frac{\sqrt{X}}{\sqrt{Y}},\quad \varepsilon=\pm1.$$

Подставим (19) и $U=W^{-1}(W+\varkappa)$ в систему (17) и совершим замену независимой переменной (модификацию по времени) по формуле

$$\frac{d}{d\varphi}=2Q\frac{d}{dt} \tag{20}$$

при $Q\neq0$. Тогда система (17) сводится к следующей

$$\frac{dX}{dt}=\varepsilon(-Y^3+Y+2X+\varkappa),\quad \frac{dY}{dt}=\varepsilon Y.$$

Данная система интегрируется в элементарных функциях

$$X=-\frac{\varkappa}{2}-e^{\varepsilon t}(C_1+e^{2\varepsilon t}C_1-e^{\varepsilon t}C_2),\quad Y=C_1e^{\varepsilon t}, \tag{21}$$

где $C_1,\ C_2$ — постоянные интегрирования, переменная t связана с φ уравнением (20). Представление (21) эквивалентно существованию интеграла системы (17) следующего вида

$$X=-Y^3+cY^2-Y-\frac{\varkappa}{2}, \tag{22}$$

где c — постоянная. Подставляя в (22) представления (19) и интеграл (18), получим интеграл системы (17)

$$c=\frac{2Q^2+2W^2+U+1}{2W}.$$

В фазовом пространстве этот интеграл определяет семейство параболоидов вращения с вертикальной осью

$$\frac{U+1}{2}=-Q^2-\Big(W-\frac{c}{2}\Big)^2+\frac{c^2}{4}. \tag{23}$$

Координаты вершины параболоида $Q=0,\ W=\dfrac{c}{2},\ U=\dfrac{c^2}{2}-1$. В вершине параболоида находится его максимум. Таким образом, можно сформулировать следующую лемму.

Лемма 2. *Система* (17) *имеет интегралы* (18) *и* (23).

Это даёт наглядную геометрическую картину траекторий в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3(Q,W,U)$ — они являются пересечениями гиперболических цилиндров (18) с параболоидами вращения (23). См. рис. 2.

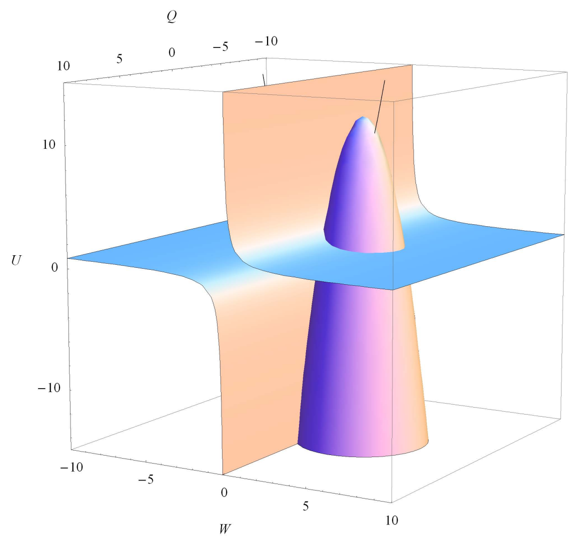


Рис.2. Интегралы системы (17) в пространстве $\mathbb{R}^3(Q, W, U)$

Заметим, что в области $U \geq 1$ пересечения этих поверхностей определяют замкнутую кривую и параболоиды (23) однократно покрывают всё полупространство $U \geq 1$ без плоскости $W = 0$. Следовательно, при $b = 0$ и $W \neq 0$ решение всегда является периодическим.

Таким образом, на поверхности (18), при $W \neq 0$, траектории топологически представляют собой вложенные друг в друга окружности с общим центром — пересечением параболической сингулярной кривой с этой поверхностью (рис.3).

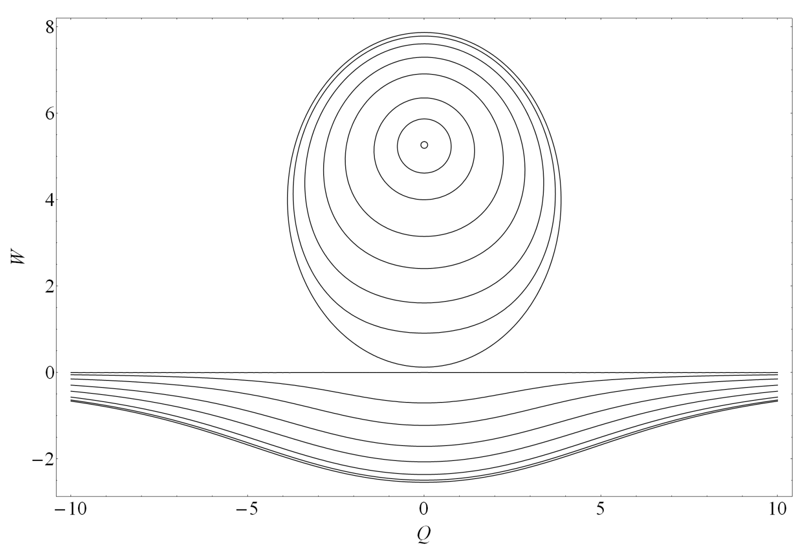


Рис.3. Интегральные кривые в плоскости $\mathbb{R}^2(Q, W)$

Рассмотрим плоскость $W = 0$. При $b = 0$ она состоит из траекторий. Система (17) принимает на этой плоскости следующий вид

$$\begin{cases} Q' = -Q^2 - U, \\ U' = 2Q(U-1). \end{cases} \tag{24}$$

Из (24) следует, что $Q' < 0$, так что Q монотонно убывает. Функция U при $Q = 0$ имеет максимум и монотонно убывает при росте $|Q|$. Решения системы (24) имеют вид:

$$Q^2(\varphi) = C_2 \mathrm{ch}\varphi - (C_1 + C_2)\mathrm{sh}\varphi - 1,$$

$$U(\varphi) = C_2 e^{\varphi} + 1,$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Этому решению отвечает семейство траекторий на плоскости (Q, U):

$$(U-1)(1 + U + 2Q^2) = h_0 \tag{25}$$

Траектории лежат выше прямой $U = 1$ при $h_0 > 0$. Эти траектории не замкнуты и имеют при $Q \to \pm\infty$ предел $U = 1$ (рис. 4).

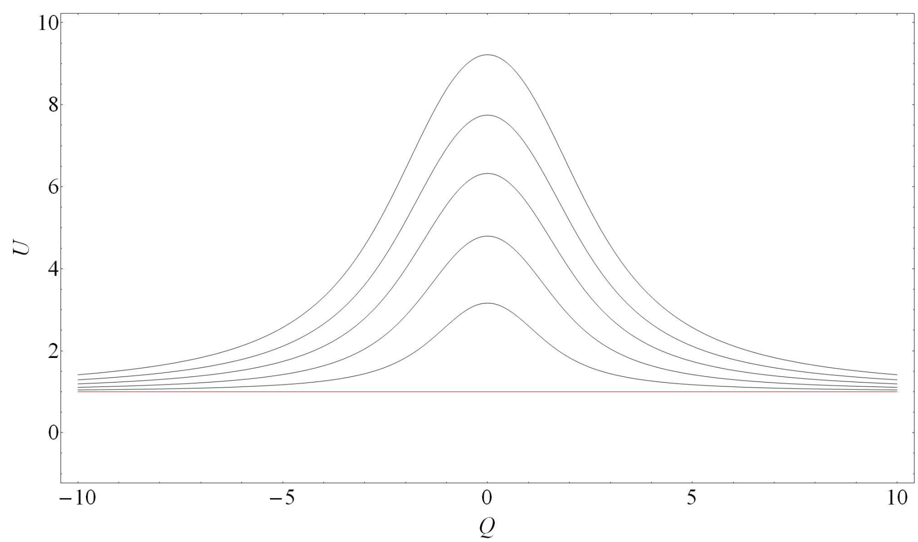


Рис.4. Траектории на плоскости $W = 0$

Если ввести новый интеграл, выражающийся произведением левых частей интегралов (18) и (23), то можно избавиться от особой роли плоскости $W = 0$. Этот интеграл будет иметь вид

$$(U-1)(1 + U + 2(Q^2 + W^2)) = h. \tag{26}$$

Физический смысл имеют только поверхности интеграла (26), лежащие выше плоскости $U = 1$. Такие поверхности получаются, если $h > 0$. Поверхности интеграла получаются из траекторий (25) вращением их вокруг оси OU (рис. 5).

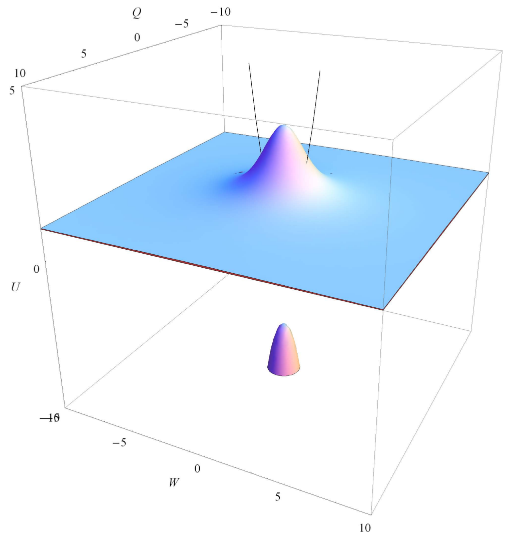


Рис.5. Поверхности интеграла (26)

Итак, на плоскости $W = 0$ траектории системы (10) не являются замкнутыми, но вследствии замены (13) в пространстве $\mathbb{R}^3(q, w, u)$ все траектории при $b = 0$ являются периодическими (рис. 6). На рисунке изображена плоскость $w = 0$.

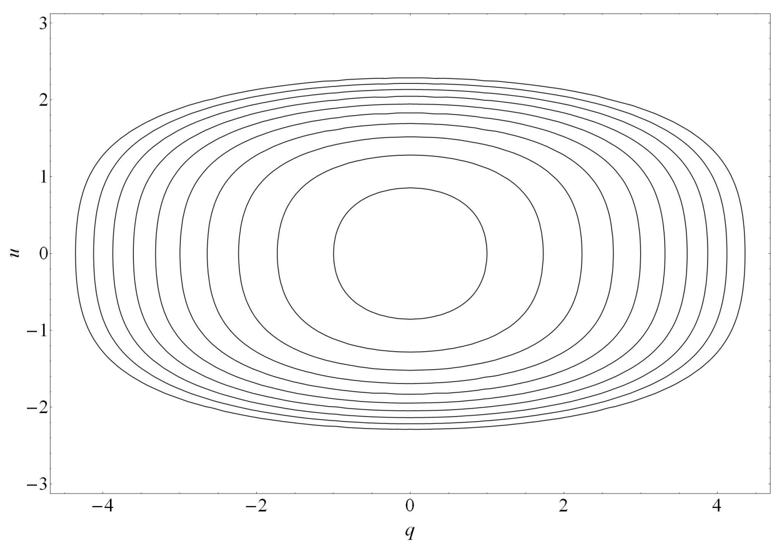


Рис.6. Интегральные кривые системы (10) при $b = 0$ на плоскости $w = 0$

Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}^3(q, w, u)$ при $b = 0$ все траектории изучаемой системы (10) являются периодическими (рис. 7).

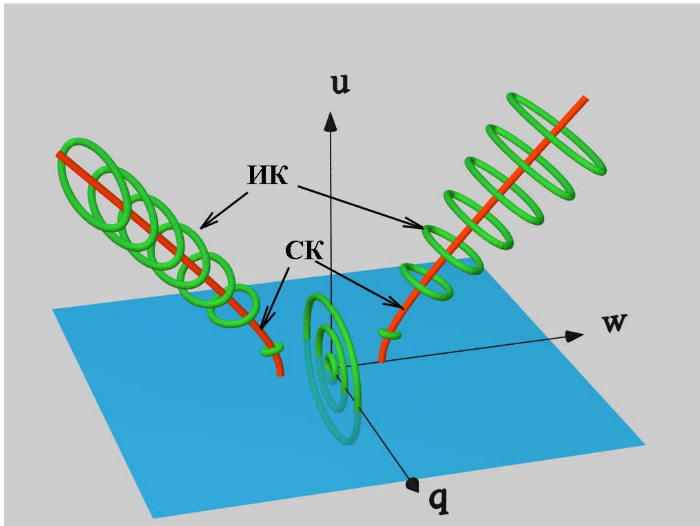


Рис.7. Интегральные кривые системы (10) при $b = 0$

На рис. 7 периодическими кривыми являются интегральные (здесь и далее они обозначены ИК), они "наматываются"на сингулярную кривую (СК) и точку $(0, 0, 0)$.

6. Периоды по замкнутым траекториям

Поскольку Q входит в интегралы (23), (26) только во второй степени, то все траектории симметричны относительно плоскости $Q = 0$. Замкнутые траектории пересекают эту плоскость в двух точках.

При интегрировании на поверхностях $W(U-1) = \varkappa$ была сделана замена переменной (модификация по времени) по формуле (20).

Будем рассматривать $Q > 0$ т.е. верхнюю половину траектории. Тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Y}{X}}. \tag{27}$$

Поскольку $dY/dt = Y$, $Y = W$, и вдоль траектории $X = -(\varkappa/2) - Y + cY^2 - Y^3$, то

$$\frac{d\varphi}{dW} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{WX}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{W(-(\varkappa/2) - W + cW^2 - W^3)}}.$$

Чтобы найти полупериод этой функции по φ надо проинтегрировать последнее выражение вдоль половины траектории. Таким образом, период φ определяется следующей формулой:

$$\Pi = \int\limits_{W_1}^{W_2} \frac{dW}{\sqrt{W(-\frac{\varkappa}{2} - W + cW^2 - W^3)}},$$

где W_1, W_2 - значения W при которых траектория пересекает плоскость $Q = 0$.

Поскольку $Q^2W = X = -(\varkappa/2) - W + cW^2 - W^3$, то интегрирование осуществляется между корнями знаменателя. Замкнутые траектории не пересекают интегральную плоскость $W = 0$, поэтому в качестве W_1 и W_2 нужно выбирать корни одного знака. Поскольку каждой траектории соотвествует симметричная ей относительно плоскости $W = 0$ траектория, то будем рассматривать случай $W > 0$. Следовательно надо рассматривать положительные корни. Кроме того, чтобы не выйти из физической области $U \geq 1$, нужно заведомо рассматривать $\varkappa \geq 0, c \geq 0$.

Чтобы проводить анализ далее, нужно выяснить при каких значениях параметров $(c, \varkappa)$ уравнение

$$-(\varkappa/2) - W + cW^2 - W^3 = 0 \tag{28}$$

имеет два положительных корня. Для этого построим на плоскости $(c, \varkappa)$ кривую, вдоль которой уравнение (28) имеет кратные корни.

Найдем экстремумы левой части (28) и приравняем их нулю. Точки экстремумов это $W = (c \pm \sqrt{c^2 - 3})/3$, обе точки экстремума при $c > \sqrt{3}$ положительны.

Уравнение (28) имеет два положительных корня при значении параметров, взятых из области внутри "угла" (см. рис. 8).

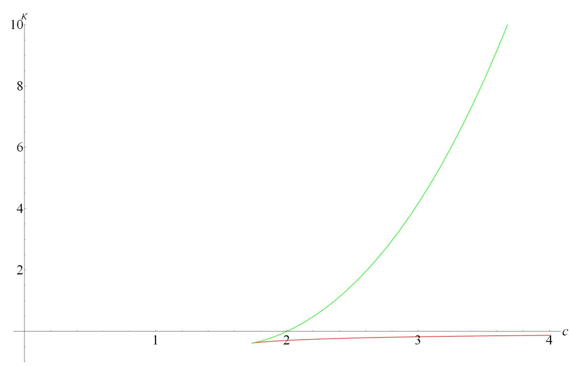


Рис.8. Область параметров, при которых уравнение (28) имеет два положительных корня

Следует заметить, что при $c > 0$ траектории лежат выше плоскости $U = 1$ только при $\varkappa > 0$. Таким образом, нужно рассматривать только часть "угла лежащую в верхней полуплоскости, следовательно, $c > 2$.

Рассмотрим "предельный"период для $\varkappa = 0$. В этом случае корни (28) имеют вид $W_{1,2} = (c \pm \sqrt{c^2 - 4})/2$. Период в этом случае выражается формулой

$$\Pi_0 = \int\limits_{W_1}^{W_2} \frac{dW}{W\sqrt{-1 + cW - W^2}}.$$

Этот интеграл берется, и $\Pi_0 = \pi$ для любого $c > 2$.

Для $\varkappa > 0$ численный расчет дает следующую зависимость периода от параметров $(c, \varkappa)$:Период всегда меньше предельного, равного π. Он убывает с ростом любого из параметров и при достаточно больших значениях параметров может быть сколь угодно мал. Заметим, что предельный период соответствует траектории, лежащей на границе физической области, соответствующей вакууму.

Траектории, имеющие периоды вида $2\pi/k, k = 3, 4, 5, \ldots$, получаются при некоторой связи между $\varkappa$ и c. Следовательно, траектории периодов, равных $2\pi/k$, лежат на некотором дискретном наборе интегральных поверхностей в пространстве (Q, W, U).

Таким образом, однозначные физические величины A, Φ (см. (2), (7), (9)) могут иметь период по φ либо 2π, что соответствует стационарным точкам лежащим на сингулярной параболе L_1, либо периоды вида $2\pi/k, k = 3, 4, 5, \ldots$, соответствующие периодическим траекториям. Период π для значений A и Φ, имеющих физический смысл, не реализуется.

7. Поведение траекторий системы (15) для случая $b \neq 0$

Поскольку система (15) не изменяется при одновременной смене знака W и b, то далее всюду считаем $b > 0$. Поскольку $U = 1$ — интегральное многообразие, то будем рассматривать $U > 1$.

Производная интеграла (18) в силу системы (15) равна $2b(U-1) > 0$ и знакоопределена.

Следовательно, траектории системы (15) пересекают без касания гиперболические цилиндры $W(U-1) = \varkappa$ в сторону возрастания $\varkappa$. Каждая траектория проектируется на плоскость (W, U) без особенностей и самопересечений.

Производная интеграла (26) в силу системы (15) равна $4b(U-1)(bQ+2W)$.

Следовательно, траектории системы (15) пересекают поверхности $(U-1)(1+U+2(Q^2+W^2)) = h > 0$ по одну сторону плоскости $bQ+2W = 0$ сверху вниз, а по другую наоборот, снизу вверх.

Исследуем поведение траекторий на бесконечности. Для этого заменой

$$x = Q/U, \ y = W/U, \ z = 1/U$$

переведем бесконечно удаленную плоскость в плоскость $z = 0$. После замены независимой переменной по формуле

$$z\frac{d}{d\varphi} = \frac{d}{dt}$$

система примет следующий вид (штрих — производная по t):

$$\left\{\begin{aligned} x' &= y^2 + x^2(2z-3) + z(b^2z-1), \\ y' &= 2(xy(z-2) + bz^2), \\ z' &= 2x(z-1)z\ . \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Поскольку система (15) рассматривалась при $U \geq 0$, то систему (29) следует рассматривать при $0 \leq z \leq 1$.

Сингулярная кривая L_1 в переменных (x, y, z) принимает вид

$$x = \frac{2bs^3}{(1+b^2s^2)(3+(b^2-1)s^2)}, \quad y = \frac{s}{1+b^2s^2}, \quad z = \frac{s^2}{1+b^2s^2}.$$

Кривая проходит через начало координат. Проекция L_1 на плоскость (y, z) является эллипсом

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2b^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2b^2}\right)^2.$$

Кроме унаследованных от (15) особых точек ($x = \pm b,\ y = \pm 1,\ z = 1$), у системы (29) появляется особая точка в начале координат. Все собственные числа этой точки равны нулю.

Численный эксперимент показывает, что при $t \to \pm\infty$ все траектории стремятся к началу координат вдоль сингулярной кривой. Значит, в пространстве $\mathbb{R}^3(Q, W, U)$ интегральные кривые уходят на бесконечность вдоль сингулярных кривых.

8. Графики амплитуды и фазы в физическом пространстве

Рассмотрим сначала случай $b = 0$. Имеем периодическое решение. Рассмотрим каждую из интегральных кривых, представленных на рис. 9.

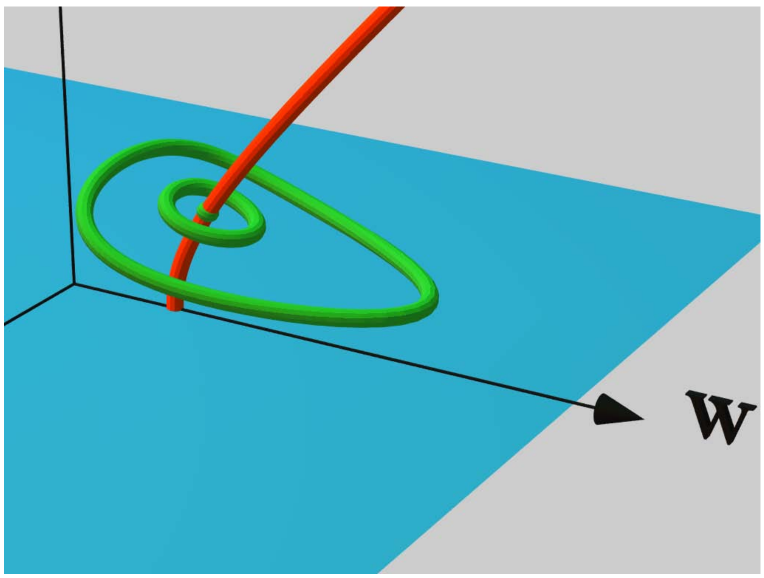
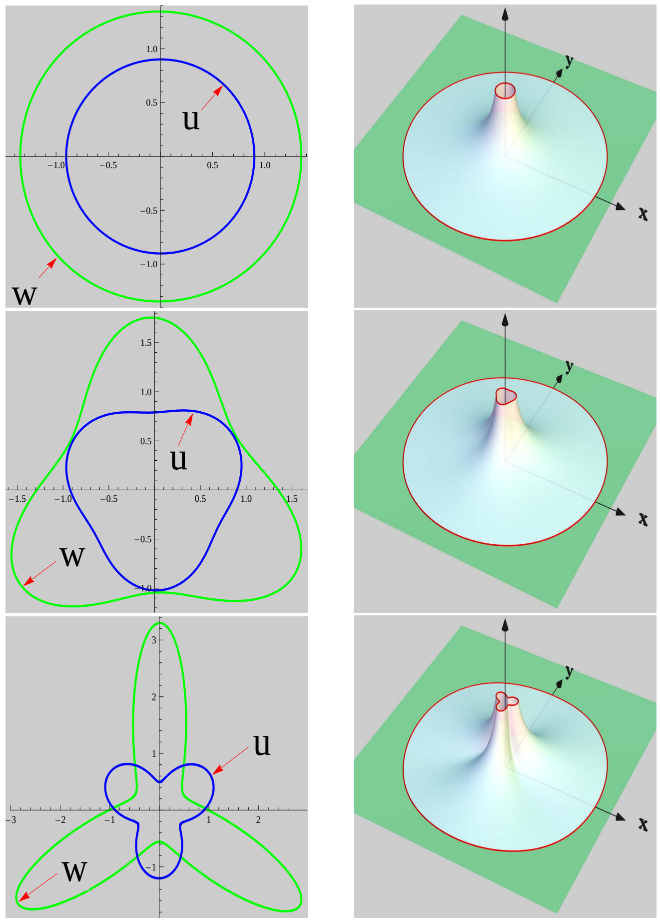


Рис.9. Интегральные кривые при $b = 0$

Здесь и далее, согласно результатам, полученным в п. 4.4, период решения кратен 2π. На рис. 10 слева представлены графики u и w в полярных координатах, справа — графики амплитуды в зависимости от физических координат (x, y).



(а) Графики u и w (б) Графики амплитуды

Рис.10. Графики u и w, амплитуды

Тогда график производной фазы Φ выглядит следующим образом.

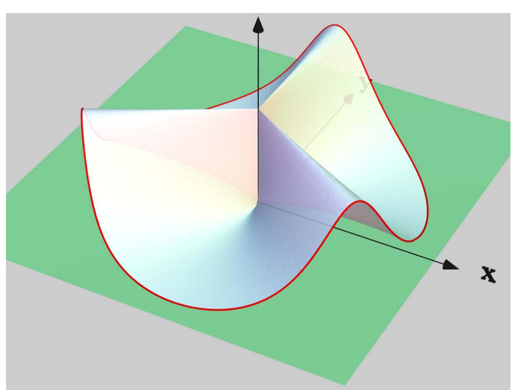
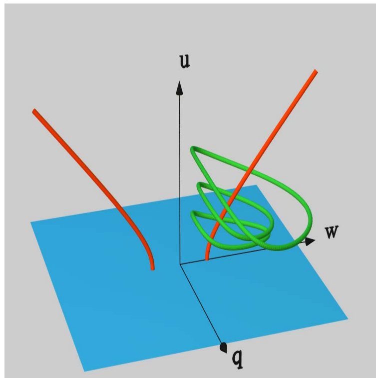
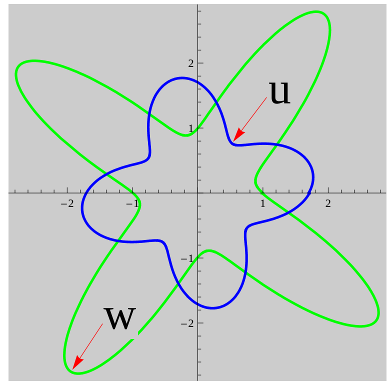


Рис.11. График производной фазы Φ

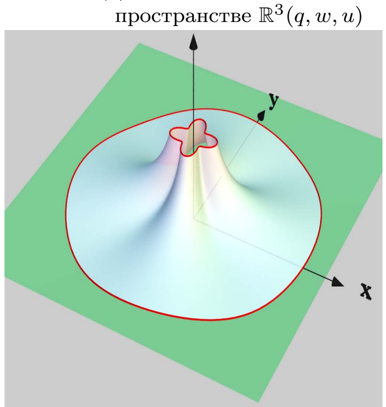
Если рассмотреть другие интегральные кривые, то можно получить и решения симметрию пятого порядка.



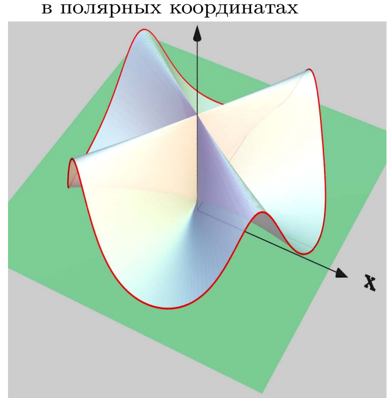
(а) Интегральные кривые в пространстве $\mathbb{R}^3(q, w, u)$



(б) График u и v в полярных координатах



(в) График амплитуды



(г) График фазы

Рис.12. Поведение интегральных кривых, функций u и v, амплитуды и фазы

В плоскости $w = 0$ половина интегральных кривых лежит в полупространстве $u < 0$, которое не имеет физического смысла. Для этого решения функция $u(\varphi)$ в полярных координатах выглядит следующим образом:

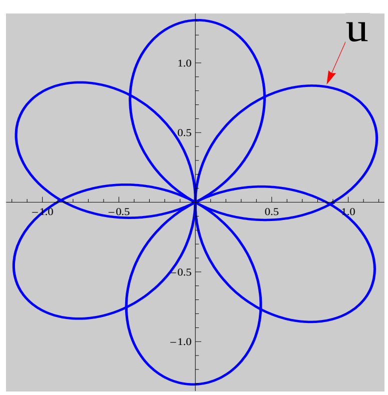


Рис.13. График u при $w = 0$

В переменных (x, y) амплитуда является многозначной функцией. Но в области $A > 0$ амплитуда однозначна, хоть и не является гладкой функцией. Имеются лучи, на которых первые производные терпят разрыв. См. рис. 14. Фаза постоянна.

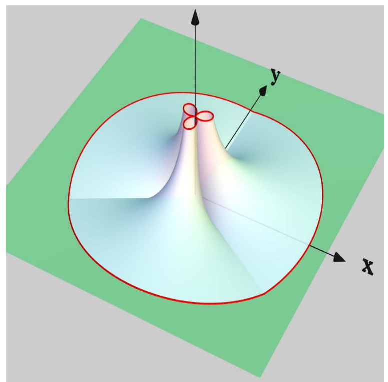


Рис.14. График амплитуды в физических переменных

В случае $b \neq 0$ периодических решений нет.

Как было показано в п. 4.5, в фазовом пространстве существуют исключительные кривые (сингулярные), к которым неограниченно приближаются все траектории при $\varphi \to \pm\infty$.

При $b = \pm 1$ эти кривые являются прямыми линиями ($q = \pm 3/2,\ w = u = \pm s$), к тому же они являются траекториями.

Для этих интегральных кривых в полярных координатах имеем следующее поведение функций $u(\varphi)$ и $w(\varphi)$ (рис. 15).

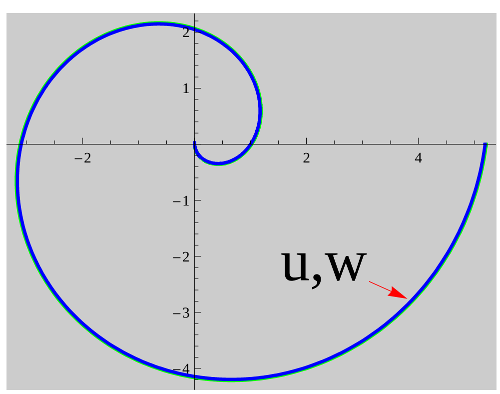
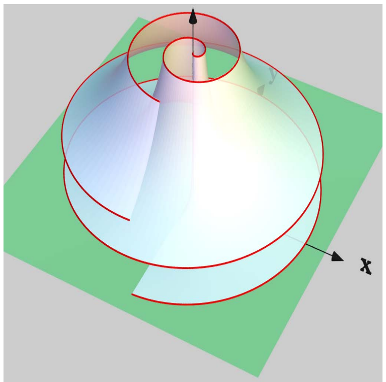
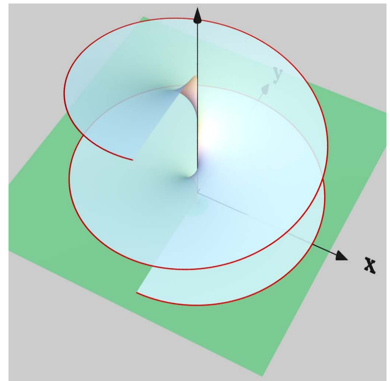


Рис.15. График функций $u(\varphi)$ и $w(\varphi)$

В физических переменных амплитуда и фаза будут многолистными функциями (рис. 16). Здесь $q > 0$.



(а) График амплитуды



(б) График фазы

Рис.16. Графики амплитуды и фазы в переменных (x, y)

Рассмотрим траекторию, которая не совпадает с сингулярной кривой. В пространстве $\mathbb{R}^3(q, w, u)$ она имеет следующий вид (рис. 17).

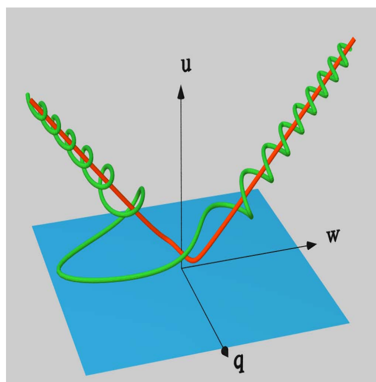
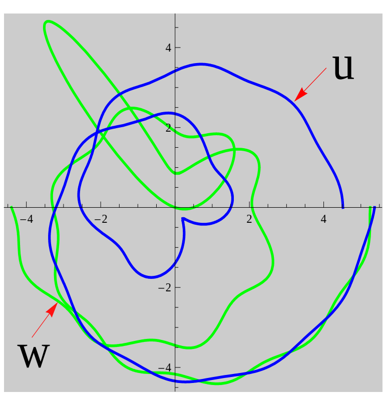
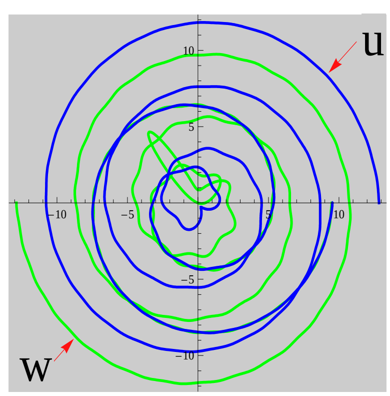


Рис.17. Интегральная кривая

Так как на плоскости $u = 0$ имеются две особые точки (седло-фокусы), то вблизи этой плоскости графики функций $u(\varphi)$ и $w(\varphi)$ имеют специфическую структуру (рис. 18(а)), но при росте φ они асимптотически стемятся к спирали (рис. 18(б)).



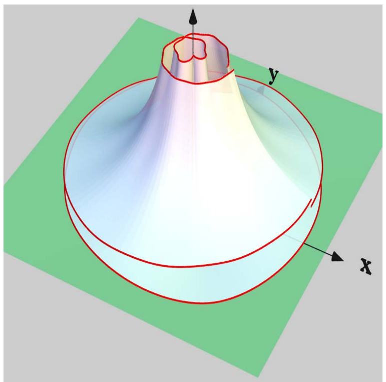
(а) Вблизи плоскости $u = 0$



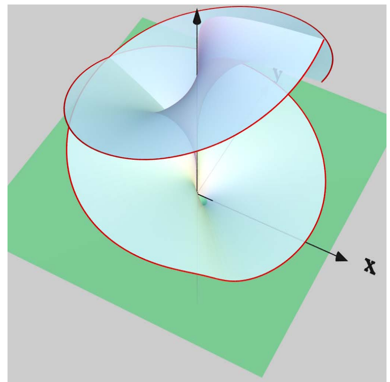
(б) При удалении от плоскости

Рис.18. Поведение интегральных кривых

Амплитуда и фаза для этой траектории в физических переменных выглядят следующим образом (рис. 19). Функции являются многолистными и соответствующие поверхности уровня имеют самопересечения.



(а) График амплитуды



(б) График фазы

Рис.19. Графики амплитуды и фазы в переменных (x, y)

В случае нелинейной оптики уравнение

$$i\psi_z + \psi_{xx} + \psi_{yy} + |\psi|^2\psi = 0$$

описывает распространение в среде светового пучка вдоль оси z. Интенсивность пучка $\sim \int |\psi|^2 dx$.

Решения, не зависящие от z, описывают распространение пучка без искажения.

В случаях, соответствующих рассмотренным решениям, распространения эллиптического пучка без искажений невозможно. В тоже время пучки с симметриями третьего и выше порядка могут распространяться не изменяясь.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовалось нелинейное кубическое уравнение Шрёдингера. Алгебра симметрии L_{12} и оптимальная система подалгебр для НУШ построена Ганьоном и Винтерницем. Она является центральным расширением алгебры Галилея L_{11}, допускаемой уравнениями газовой динамики. Были рассмотрены все трехмерные подалгебры алгебры симметрии, допускаемой НУШ. Таких подалгебр всего 64 штуки. На основе анализа универсальных инвариантов оптимальной системы подалгебр доказано, что эти алгебры симметрии НУШ порождают 27 существенно различных подмоделей. Для них построены инварианты, представление решения и факторсистемы.

Проведён полный анализ инвариантного решения НУШ, описываемого системой (10). При этом доказано, что при $b = 0$ существуют периодические решения. (b — параметр алгебры) При значениях $b \neq 0$ обнаружены сингулярные кривые в фазовом пространстве, к которым неограниченно приближаются все траектории системы. Они отвечают неограниченному возрастанию амплитуды решения. При $b = \pm 1$ эти кривые сами являются траекториями.

Решения обнаруживают довольно сложное поведение вблизи особой плоскости $u = 0$, которое определяется наличием двух особых точек — седло-фокусов на этой плоскости. Однако, начиная с какого-то значения аргумента, все интегральные кривые приближаются к сингулярным кривым.

Список литературы

[1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика, Т. VIII, Электродинамика сплошных сред.* М.: Наука, 1992. MR1330694

[2] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves,* Willey, New York, 1974. MR0483954

[3] L.P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein condensation*, Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2003. MR2012737

[4] D. Stuart, *The geodesic hypothesis and non-topological solutions on pseudo-riemannian manifolds* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4-e serie, **37**:2 (2004), 312–362. MR2061784

[5] В.Е. Захаров и др., *Теория солитонов; Метод обратной задачи.* М.:Наука, 1980. MR0573607

[6] Л.В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, М.: Наука. 1978. MR0511921

[7] N.H. Ibragimov (ed.), *CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations,* Boka Raton, CRC Press, **1-3** (1994–1996). MR1278257, MR1402244, MR1383090.

[8] С.П. Фиников, *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии*, М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948.

[9] J.F. Pommaret, *Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups,* Gordon and Breach Sc. Publ., **XIV** (1978). MR0517402

[10] Л.В. Овсянников, *Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика* ПММ. **58**:4 (1994), 30–55. MR1310991

[11] А.П. Чупахин, *Барохронные движения газа. Общие свойства и подмодели типов (1,2) и (1,1).* (Препр. Институт гидродинамики СО РАН), 1998, Новосибирск.

[12] Л.В. Овсянников, *О периодических движениях газа* ПММ, **65**:4 (2001), 567–577. MR1883794

[13] Л.В. Овсянников, *Особый вихрь*, ПМТФ, **36**:3 (1995), 45–52. MR1343206

[14] A.P. Chupakhin, *Singular Vortex in Hydro and Gas Dynamics*, In. Analytical approaches to multidimensional balance laws, Nova Science Publ. Inc, NY, 2006, 89–118. MR2553633

[15] L. Gagnon, P. Winternitz, *Lie symmetries of a generalised non-linear Schrodinger equation: I. The symmetry group and its subgroups*, J.Phys. A, Math. Gen., **21**:7 (1988), 1493–1511. MR0951040

[16] L. Gagnon, P. Winternitz, *Lie symmetries of a generalised non-linear Schrodinger equation: II. Exact solutions*, J.Phys. A, Math. Gen. **22** (1989), 469–497. MR0984526

[17] L. Gagnon, B. Grammaticos, A. Ramani and P.Winternitz, *Lie symmetries of a generalised non-linear Schrodinger equation: III. Reductions to third-order ordinary differential equations*, J.Phys. A, Math. Gen. **22** (1989), 469–497. MR0984527

[18] L. Gagnon, P.Winternitz, *Exact solutions of the cubic and quintic nonlinear Schrodinger equation for a cylindrical geometry*, Physical review A, **39**:1 (1989), 296–306.

[19] В.И. Фущич и др., *Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики*, Киев: Наук. думка., 1989.

[20] К.К. Измайлова, А.П. Чупахин, *Теоретико-групповые решения кубического уравнения Шредингера, порожденные алгебрами симметрии размерности три*, Нелинейная динам., **3**:3 (2007), 349–362.

[21] О.И. Богоявленский, *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике*, М.: Наука. 1980. MR0604548

Черевко Александр Александрович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 15,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: cherevko@mail.ru

Чупахин Александр Павлович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. академика Лаврентьева 15,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: chupakhin@hydro.nsc.ru

Измайлова Ксения Константиновна
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 2,
630090, Новосибирск, Россия