S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 966–974 (2014) УДК 515.165.7
MSC 55R65

О СЕМИМЕРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ РАССЛОЕНИЯХ ЗЕЙФЕРТА НАД КОМПЛЕКСНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

Н.Е. РУССКИХ

Abstract. We discuss topological properties of certain 7-dimensional generalized Seifert fibrations, and, in particular, of the Eschenburg spaces with positive sectional curvature. We compute the values of the first fractional Chern class κ of the corresponding $S^3/\mathbb{Z}_q$ bundles over $\mathbb{C}P^1$.

Keywords: homogenous spaces, sectional curvature, Seifert fibrations.

1. Введение

Пространства Эшенбурга являются первыми известными примерами замкнутых многообразий, допускающих метрику положительной секционной кривизны и негомеоморфных однородным [1]. До настоящего времени список известных примеров многообразий положительной секционной кривизны остается очень коротким и кроме гомеоморфных однородным — это два шестимерных многообразия и бесконечные семейства примеров в размерностях 7 и 13. Поэтому, чтобы понять связь топологии и положительной секционной кривизны, представляет интерес изучение топологических свойств известных многообразий. Наиболее свежий обзор известных примеров многообразий положительной секционной кривизны дан в [2].

В [3] на некоторых многообразиях Эшенбурга была определена гладкая проекция на $\mathbb{C}P^2$ и было высказано предположение, что она задает расслоение со

Russkikh, N.E., On generalized 7-dimensional Seifert fibrations over complex projective plane.

Работа поддержана РНФ (грант 14-11-00441).

Поступила 18 ноября 2014 г., опубликована 12 декабря 2014 г.

слоем $\mathbb{R}P^3$. Циллер указал на то, что эта проекция задает расслоение с указанным слоем над дополнением к $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$, а прообразы точек из $\mathbb{C}P^1$ диффеоморфны $\mathbb{R}P^3/\mathbb{Z}_n$.

В нашей дипломной работе (июнь 2014 г.) мы

(1) описали топологический тип указанных $\mathbb{R}P^3/\mathbb{Z}_n$-расслоений над $\mathbb{C}P^1$;

(2) построили новые примеры отображений семимерных замкнутых многообразий на $\mathbb{C}P^2$, при котором прообразы точек из $\mathbb{C}P^2 \setminus \mathbb{C}P^1$ и $\mathbb{C}P^1$ диффеоморфны $\mathbb{R}P^3$ и $\mathbb{R}P^3/\mathbb{Z}_n$, соответственно.

Эти результаты изложены в §3 и §4.

Недавно в [4] было введен класс обобщенных многомерных расслоений Зейферта (S-расслоений), и было показано, что он покрывает случаи многообразий Эшенбурга. Там же были описаны некоторые простейшие характеристические классы возникающих $\mathbb{R}P^3/\mathbb{Z}_n$-расслоений над $\mathbb{C}P^1$ в терминах $H^2(B(U(2)/\mathbb{Z}_{2n}))$.

В §5 мы демонстрируем, что построенные нами в §4 примеры задают S-расслоения.

Автор благодарит И.А. Тайманова за постановку задачи и полезные обсуждения.

2. Пространства Эшенбурга

Пространства Эшенбурга являются фактор-пространствами группы $SU(3)$ по свободному двустороннему действию группы $U(1)$. Следуя [3], мы ограничимся рассмотрением следующих пространств Эшенбурга

$$W^7_{\bar{n}} = \mathrm{diag}\,(e^{2ni\varphi}, e^{2ni\varphi}, e^{2i\varphi})\backslash SU(3)/\mathrm{diag}\,(e^{-(2n+1)i\varphi}, e^{-(2n+1)i\varphi}, 1). \tag{1}$$

Они допускают правое действие матричной группы $SU(2)$, вложенной в $SU(3)$:

$$A \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in SU(2),$$

поскольку правое действие $SU(2)$ на $SU(3)$ коммутирует с (двусторонним) действием $U(1)$. Имеет место стандартное расслоение над пространством орбит правого действия $SU(2)$ на $SU(3)$:

$$SU(3) \xrightarrow{SU(2)} S^5 \tag{2}$$

вида

$$B \to B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1, \quad B \in SU(3).$$

Двустороннее $U(1)$-действие на $SU(3)$ (1) имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & z_1 \\ a_{21} & a_{22} & z_2 \\ a_{31} & a_{32} & z_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u^{-1}a_{11} & u^{-1}a_{12} & u^{2n}z_1 \\ u^{-1}a_{21} & u^{-1}a_{22} & u^{2n}z_2 \\ u^{1-2n}a_{31} & u^{1-2n}a_{32} & u^2 z_3 \end{pmatrix}, u = e^{i\varphi},$$

и индуцирует на базе расслоения (2) действие

$$(z_1, z_2, z_3) \to (u^{2n}z_1, u^{2n}z_2, u^2 z_3).$$

Это действие не является свободным: $u = -1$ действует тривиально для любых $(z_1, z_2, z_3) \in S^5$, а также элементы $u \in U(1)$ такие, что $u^{2n} = 1$, тривиально действуют на экваториальной 3-сфере в S^5, задаваемой уравнением $z_3 = 0$.

Группа $U(1)$ действует при этом послойно на слоях расслоения (2) и это действие индуцирует отображение пространств орбит:

$$\pi : W^7_{\bar{n}} \to \mathbb{C}P^2, \tag{3}$$

которое и было построено в [3].

Отображение π задает локально тривиальные расслоения над особым локусом $\mathbb{C}P^1 = (z_1 : z_2 : 0)$ со слоем $S^3/\mathbb{Z}_{2n} = \mathbb{R}P^3/\mathbb{Z}_n$ и над его дополнением $\mathbb{C}P^2 \backslash \mathbb{C}P^1$ со слоем $S^3/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^3$.

Замечание 1. $W^7_{\bar{n}}$ допускает левое действие $SU(2)$. Оно соответствует расслоению $SU(3) \xrightarrow{SU(2)} S^5$ с отображением проекции $A \to (0,0,1)\cdot A$ для $A \in SU(3)$. Индуцированное послойное $U(1)$-действие на базе этого расслоения имеет вид

$$(z_1, z_2, z_3) \xrightarrow{e^{i\varphi} \in U(1)} (e^{(1-2n)i\varphi} z_1, e^{(1-2n)i\varphi} z_2, e^{2i\varphi} z_3).$$

Фактор-пространством S^5 по этому действию является взвешенная комплексная проективная плоскость, не являющаяся гладким многообразием.

3. Расслоение пространств $W^7_{\bar{n}}$ над особым локусом

Сужение расслоения

$$SU(3) \to SU(3)/SU(2) = S^5$$

над экваториальной трехмерной сферой $\{|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, z_3 = 0\}$ тривиально, т.к. классам эквивалентности таких расслоений со структурной группой $U(2)$ соответствуют элементы группы $\pi_2(U(2))$, а она тривиальна. Таким образом, $\pi^{-1}(S^3) = S^3 \times S^3 \subset SU(3)$ и слой над точкой $(z_1, z_2, 0) \in S^3 \subset S^5$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{z}_2 & z_1 \\ 0 & -\bar{z}_1 & z_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -\bar{b} & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{bz_2} & \overline{az_2} & z_1 \\ \overline{bz_1} & -\overline{az_1} & z_2 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Выпишем в коэффициентах действие $U(1)$ на этой орбите:

$$\begin{pmatrix} u^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & u^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{z}_2 & z_1 \\ 0 & -\bar{z}_1 & z_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -\bar{b} & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-2n-1} & 0 & 0 \\ 0 & u^{-2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} u^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & u^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{z}_2 & z_1 \\ 0 & -\bar{z}_1 & z_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-2n-1} & 0 & 0 \\ 0 & u^{-2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -\bar{b} & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & u^{2n}\bar{z}_2 & u^{2n}z_1 \\ 0 & -u^{2n}\bar{z}_1 & u^{2n}z_2 \\ u^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-2n-1} & 0 & 0 \\ 0 & u^{-2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -\bar{b} & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & u^{-1}\bar{z}_2 & u^{2n}z_1 \\ 0 & -u^{-1}\bar{z}_1 & u^{2n}z_2 \\ u^{1-2n} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -\bar{b} & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & u^{-2n}\bar{z}_2 & u^{2n}z_1 \\ 0 & -u^{-2n}\bar{z}_1 & u^{2n}z_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{1-2n} & 0 & 0 \\ 0 & u^{2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -\bar{b} & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & u^{-2n}\bar{z}_2 & u^{2n}z_1 \\ 0 & -u^{-2n}\bar{z}_1 & u^{2n}z_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{1-2n}a & u^{1-2n}b & 0 \\ -u^{2n-1}\bar{b} & u^{2n-1}\bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $U(1)$ действует на $\pi^{-1}(S^3)$ следующим образом

$$(z_1, z_2) \to (u^{2n}z_1, u^{2n}z_2), \quad (a, b) \to (u^{1-2n}a, u^{1-2n}b). \tag{4}$$

Из точной гомотопической последовательности расслоения

$$S^3 \times S^3 \xrightarrow{S^1 = U(1)} \pi^{-1}(\mathbb{C}P^1) = M_n$$

следует, что $\pi_1(M_n) = 0, \pi_2(M_n) = \mathbb{Z}, \pi_3(M_n) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Более тонкие топологические соображения позволяют показать, что многообразия M_n диффеоморфны $S^2 \times S^3$ [5].

Группа $U(2)$ содержит нормальную подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}_q$:

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi ki}{q}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi ki}{q}} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, q,$$

и под группой

$$U(2)/\mathbb{Z}_q$$

мы будем понимать фактор-группу по этой подгруппе.

Заметим, что классы эквивалентности расслоений над $\mathbb{C}P^1 = S^2$ со структурной группой $U(2)/\mathbb{Z}_q$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами $\pi_1(U(2)/\mathbb{Z}_q)$ (так как $U(2)/\mathbb{Z}_q$ линейно связна)и это соответствие задается гомотопическим классом отображения

$$\chi : S^1 \to U(2)/\mathbb{Z}_q.$$

Это соответствие строится следующим образом: сфера $\mathbb{C}P^1$ распадается в объединение двух дисков

$$D_1 = \{(z_1 : 1) \mid |z_1| \le 1\}, \quad D_2 = \{(1 : z_2) \mid |z_2| \le 1\}, \tag{5}$$

которые склеиваются по общей границе, диффеоморфной окружности. Ограничения расслоения на диски тривиальны как расслоения над стягиваемыми пространствами и само расслоение задается склейкой двух тривиализаций по границе дисков. Эта склейка задается отображением из S^1 в структурную группу $U(2)/\mathbb{Z}_q$ и класс эквивалентности расслоения определяется гомотопическим классом этого отображения.

Теорема 1. *Ограничение отображения (3)*

$$\pi : M_n \to \mathbb{C}P^1 \tag{6}$$

на $\pi^{-1}(\mathbb{C}P^1)$ является локально-тривиальным расслоением со слоем $\mathbb{R}P^3/\mathbb{Z}_n = S^3/\mathbb{Z}_{2n}$ и структурной группой $U(2)/\mathbb{Z}_{2n}$. Слой параметризован такими парами чисел $a, b \in \mathbb{C}$, что $|a|^2 + |b|^2 = 1$ и они определены с точностью до умножения на

$$(a, b) \to (e^{i\pi k/n}a, e^{i\pi k/n}b), \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Действие структурной группы на слое индуцируется действием $U(2)$ на S^3. Ограничения π на диски D_1 и D_2 вида (5) склеиваются на границах дисков по *отображению*

$$\chi : S^1 \to U(2)/\mathbb{Z}_{2n}, \qquad \chi(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2n-1}{2n} i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2n-1}{2n} i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Доказательство. Отображение (6) задает локально-тривиальное расслоение по построению. Зафиксируем тривиализации ограничений расслоения на диски D_1 и D_2:

$$f_1 : D_1 \times S^3/\mathbb{Z}_{2n} \to \pi^{-1}(D_1) \tag{7}$$

$$f_1(z_1, (a, b)) = [(\frac{z_1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}), (a, b)]$$

$$f_2 : D_2 \times S^3/\mathbb{Z}_{2n} \to \pi^{-1}(D_2)$$

$$f_2(z_2, (a, b)) = [(\frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}, \frac{z_2}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}), (a, b)]$$

Диски склеиваются по окружности

$$\partial D_1 = \{(e^{i\varphi} : 1)\} = \{(1 : e^{-i\varphi})\} = \partial D_2. \tag{8}$$

Формула (4) для $U(1)$–действия показывает, как склеиваются ограничения тривиальных расслоений на границах дисков:

$$[(e^{i\varphi} : 1), (a, b)] \sim [(u^{2n} e^{i\varphi} : u^{2n}), (u^{1-2n} a, u^{1-2n} b)], \quad |u| = 1,$$

где u находится из уравнения

$$u^{2n} e^{i\varphi} = 1.$$

Заметим, что отсюда u находится с точностью до умножения на корень степени $2n$ из единицы, но так как u определяет элемент $U(2)/\mathbb{Z}_{2n}$, а не $U(2)$, то можно брать любой из корней этого уравнения. Мы видим, что склейка принимает вид

$$[(e^{i\varphi} : 1), (a, b)] \sim [(1 : e^{-i\varphi}), (u^{1-2n} a, u^{1-2n} b)], \quad u = e^{-\frac{i\varphi}{2n}},$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

4. Пространства вида $(S^5 \times S^3)/S^1$

Мы введем еще одно семейство семимерных пространств, которые расслаиваются над $\mathbb{C}P^2$ аналогично пространствам Эшенбурга.

Положим

$$E_{n,k} = (S^5 \times S^3)/U(1)$$

где $U(1)$-действие имеет вид

$$((z_1, z_2, z_3), (a, b)) \to ((u^{2n} z_1, u^{2n} z_2, u^2 z_3), (u^k a, u^k b)), \quad |u| = 1,$$

где k — целое число, взаимно простое с $2n$.

Пространство $E_{n,k}$ содержит подмногообразие $M_{n,k} = (S^3 \times S^3)/S^1$, заданное уравнением $z_3 = 0$. Ясно, что $M_{n,k}$ состоит из фактор-классов

$$((z_1, z_2), (a, b)) \sim ((u^{2n} z_1, u^{2n} z_2), (u^k a, u^k b)) \tag{9}$$

Определим отображение

$$\pi : E_{n,k} \to \mathbb{C}P^2 \tag{10}$$

как композицию проекции при тривиальном расслоении $S^5 \times S^3 \xrightarrow{S^3} S^5$ и проекции при $U(1)$-действии на S^5

$$(z_1, z_2, z_3) \xrightarrow{u \in U(1)} (u^{2n} z_1, u^{2n} z_2, u^2 z_3)$$

Теорема 2. *Ограничение π на $M_{n,k}$*

$$M_{n,k} \to \mathbb{C}P^1$$

является локально-тривиальным расслоением со слоем $S^3/\mathbb{Z}_{2n}$ и структурной группой $U(2)/\mathbb{Z}_{2n}$ (при этом действие структурной группы на слое, как и в предыдущем случае, определено через представителя). Его ограничения на диски D_1 и D_2 вида (5) склеиваются на границах дисков по отображению

$$\chi : S^1 \to U(2)/\mathbb{Z}_{2n}; \qquad \chi(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{k}{2n} i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{k}{2n} i\varphi} \end{pmatrix}, \ \varphi \in [0, 2\pi].$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Зафиксируем тривиализации ограничений расслоения на D_1 и D_2 вида (7). Диски склеиваются по общей границе вида (8). Формула (9) для $U(1)$-действия показывает, как склеиваются ограничения тривиальных расслоений на границах дисков:

$$[(e^{i\varphi} : 1), (a, b)] \sim [(u^{2n} e^{i\varphi} : u^{2n}), (u^k a, u^k b)], \quad |u| = 1,$$

где u находится из уравнения

$$u^{2n} e^{i\varphi} = 1.$$

Мы видим, что склейка принимает вид

$$[(e^{i\varphi} : 1), (a, b)] \sim [(1 : e^{-i\varphi}), (u^k a, u^k b)], \quad u = e^{-\frac{i\varphi}{2n}},$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

5. Обобщенные расслоения Зейферта

Чтобы дать строгое математическое определение рассмотренных выше проекций на $\mathbb{C}P^2$ в [4] было введено понятие *обобщенного расслоения Зейферта*:

тройка (E, M, π), где

$$\pi : E \to M$$

— непрерывное отображение E на все пространство M, образует обобщенное расслоение Зейферта (или, для краткости, S–расслоение) с особым локусом Σ, если

1) тройка $(E \setminus \pi^{-1}(\Sigma), M \setminus \Sigma, \pi)$ — расслоение над $M \setminus \Sigma$ со слоем $F/\mathbb{Z}_p$ и структурной группой $G/\mathbb{Z}_p$, где действие $G/\mathbb{Z}_p$ на $F/\mathbb{Z}_p$ индуцируется действием G на F;

2) любая точка $x \in \Sigma$ обладает такой окрестностью V с координатами $x^1, \dots, x^{2l}, x^{2l+1}, \dots, x^n$, что

а) подмногообразие Σ задается уравнениями

$$x^1 = \dots = x^{2l} = 0;$$

б) на произведении $W = V \times U(1) \times F$ задано свободное $U(1)$–действие:

$$(X, Y, u, v) \xrightarrow{e^{i\varphi} \in U(1)} (e^{ip\varphi} \cdot X, Y, e^{iq\varphi} \cdot u, e^{ir\varphi} \cdot v),$$

где
$$X = (x^1, \dots, x^{2l}) = (z^1 = x^1 + ix^2, \dots, z^l = x^{2l-1} + ix^{2l}),$$
$$e^{i\varphi} \cdot X = (e^{i\varphi} z^1, \dots, e^{i\varphi} z^l), \quad Y = (x^{2l+1}, \dots, x^n),$$
$$u \in U(1), \quad e^{i\varphi} \cdot u = e^{i\varphi} u, \quad v \in F, \quad e^{i\varphi} \cdot v = \rho(e^{i\varphi})(v) \in F;$$

в) $\pi^{-1}(V)$ гомеоморфно (эквивариантно относительно G) фактор-пространству W по $U(1)$-действию и
$$\pi([(X, Y, u, v)]) = (X, Y) \in V;$$

3) тройка $(\pi^{-1}(\Sigma), \Sigma, \pi)$ является расслоением над Σ со слоем $F/\mathbb{Z}_q$ и структурной группой $G/\mathbb{Z}_q$, где действие $G/\mathbb{Z}_q$ на $F/\mathbb{Z}_q$ индуцируется действием G на F.

Здесь предполагается, что группа G содержит нормальную подгруппу, изоморфную $U(1)$ (изоморфизм задается отображением $\rho : U(1) \to \rho(U(1)) \lhd G$), а циклические подгруппы вида $\mathbb{Z}_l$ являются подгруппами в $U(1)$. Также предполагается, что числа p, q и r одинаковы для всех точек из M

Проекции (3) задают обобщенные расслоения Зейферта пространств Эшенбурга $W^7_{\bar{n}}$ над $M = \mathbb{C}P^2$ с
$$G = U(2), \quad \Sigma = \mathbb{C}P^1, \quad F = SU(2), \quad p = 2, \quad q = 2n, \quad r = 1 - 2n$$
(теорема 1 [4]).

Теорема 3. *Тройка $(E_{n,k}, \mathbb{C}P^2, \pi)$, где π задано формулой (10), образует обобщенное расслоение Зейферта с*
$$G = U(2), \quad \Sigma = \mathbb{C}P^1, \quad F = SU(2), \quad p = 2, \quad q = 2n, \quad r = k.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть окрестность особого локуса $\mathbb{C}P^1 = \{(z_1 : z_2 : 0)\} \subset \mathbb{C}P^2$. Он покрывается картами $(z_1 : 1 : 0)$ и $(1 : z_2 : 0)$ и, без ограничения общности, мы рассмотрим точку $x = (z_1 : 1 : 0)$. лежащую в первой карте. Положим
$$V = \{(z_1 : 1 : z_3), |z_3| < \varepsilon_0\}.$$
Нормируем однородные координаты так, чтобы они лежали на единичной сфере $S^5 \subset \mathbb{C}^3$:
$$(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{z_1}{\sqrt{1 + |z_1|^2 + |z_3|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2 + |z_3|^2}}, \frac{z_3}{\sqrt{1 + |z_1|^2 + |z_3|^2}} \right).$$
Заметим, что $(X_1 w, X_2 w, X_3) \in S^5$ при $w \in U(1)$.

Рассмотрим произведение
$$W = V \times U(1) \times SU(2)$$
с координатами
$$(z_3, z_1, w, (a, b))$$
и определим на нем $U(1)$-действие:
$$z_3 \to u^2 z_3, \quad z_1 \to z_1, \quad w \to u^{2n} w, \quad (a, b) \to (u^k a, u^k b).$$
Фактор-пространство W по этому действию гомеоморфно фактор-пространству $\pi^{-1}(V)$ по действию, задающему $E_{n,k}$. Действительно, $\pi^{-1}(V)$ параметризуется $X_1 w, X_2 w, X_3, a, b$ и $U(1)$-действие на нем принимает вид
$$((X_1 w, X_2 w, z), (a, b)) \longrightarrow (u^{2n} X_1 w, u^{2n} X_2 w, u^2 z), (u^k a, u^k b)).$$

При этом очевидно, что

$$\pi([X, Y, w, ((a, b)]) = (X, Y) \in V, \quad \text{где } X = z_3, Y = z_1.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. В случае пространств Эшенбурга аналогичные формулы имеют более сложный вид (в [4] это рассуждение было опущено). А именно имеет место

Лемма 1. *Слой расслоения $\widetilde{\pi} : SU(3) \to S^5$ вида (2) над $(x_1, x_2, x_3) \in S^5$, где $|x_3| = \varepsilon < 1$, представляется в виде*

$$\begin{pmatrix} -kx_1\bar{x}_3 & k\bar{x}_2 & x_1 \\ -kx_2\bar{x}_3 & -k\bar{x}_1 & x_2 \\ k^{-1} & 0 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -\bar{b} & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \tag{11}$$

где $k = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$.

Докажем лемму. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & x_3 \end{pmatrix} \in \widetilde{\pi}^{-1}(x_1, x_2, x_3)$ и умножим A справа на $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -\bar{b} & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SU(2) \subset SU(3)$, где $a = \frac{\bar{a}_{31}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, b = -\frac{a_{32}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, получив матрицу

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & x_1 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & x_2 \\ \sqrt{1-\varepsilon^2} & 0 & x_3 \end{pmatrix},$$

где, как следует из построения и условия $\widetilde{A} \in SU(3)$,

$$\tilde{a}_{11} = -\frac{x_1\bar{x}_3}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad \tilde{a}_{21} = -\frac{x_2\bar{x}_3}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad \tilde{a}_{12} = \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad \tilde{a}_{22} = -\frac{\bar{x}_1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Таким образом, $\widetilde{\pi}^{-1}(x_1, x_2, x_3)$ — $SU(2)$-орбита матрицы $\widetilde{A}$ — имеет вид (11).

На множестве $W = V \times U(1) \times S^3 \subset SU(3)$, образованном матрицами вида

$$\begin{pmatrix} -kX_1\bar{X}_3 w & k\bar{X}_2\bar{w} & X_1 w \\ -kX_2\bar{X}_3 w & -k\bar{X}_1\bar{w} & X_2 w \\ k^{-1} & 0 & X_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -\bar{b} & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где V, X_1, X_2, X_3 — те же, что и в доказательстве теоремы 3, $U(1)$-действие из определения пространства Эшенбурга $W^7_{\bar{n}}$ принимает вид

$$X_1 \to X_1, \ X_2 \to X_2, \ X_3 \to u^2 X_3, \ w \to u^{2n} w, \ (a, b) \to (u^{1-2n}a, u^{1-2n}b),$$

где действие на X принимает вид $z_1 \to z_1, z_3 \to u^2 z_3$.

Классы эквивалентности главных расслоений со структурной группой $U(2)/\mathbb{Z}_q$ над произвольным пространством M находятся во взаимно однозначном соответствии с гомотопическими классами отображений

$$f : M \to B(U(2)/\mathbb{Z}_q),$$

где $B(U(2)/\mathbb{Z}_q)$ — классифицирующее пространство этой структурной группы. Характеристические классы таких расслоений есть образы генераторов групп $H^i(B(U(2)/\mathbb{Z}_q); \Lambda)$ относительно индуцированных отображений f^* групп когомологий.

В [4] показано, что в случае $q = 2s$

$$\pi_1(U(2)/\mathbb{Z}_q) = \{\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v\}/2\mathbb{Z}u = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_2$$

для $u = s[\xi] - [\eta]$, $v = (1-s)[\xi] + [\eta]$, а в случае $q = 2s+1$

$$\pi_1(U(2)/\mathbb{Z}_q) = \{\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v\}/Zu = \mathbb{Z}$$

для $u = (2s+1)[\xi] - 2[\eta]$, $v = -s[\xi] + [\eta]$, где гомотопические классы $[\xi]$ и $[\eta]$ заданы следующими отображениями из S^1 в $U(2)/\mathbb{Z}_q$:

$$\xi = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{q}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\varphi}{q}} \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда выводится, что $H^2(B(U(2)/\mathbb{Z}_q);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, причем образующей служит когомологический класс, сопряженный к гомотопическому классу петли v и его образ при f^* был определен как простейший характеристический класс κ (дробный первый класс Черна). Как и первый класс Черна c_1, класс κ $S^3/\mathbb{Z}_q$-расслоения над $\mathbb{C}P^1$ полностью определяется функцией склейки тривиализаций расслоений над дисками, из которых склеивается двумерная сфера $\mathbb{C}P^1$ (теорема 3 в [4]).

Отсюда и из теорем 1 и 2 выводим

Следствие 1. *Над особым локусом* $\mathbb{C}P^1$

$$\kappa = (2n-1)[\mathbb{C}P^1]$$

для ограничения проекции (6) пространства Эшенбурга и

$$\kappa = -k[\mathbb{C}P^1]$$

для ограничения проекции (9) пространства $E_{n,k}$.

Список литературы

[1] J.-Y. Eschenburg, *New examples of manifolds with strictly positive curvature*, Invent. Math., **66** (1982), 469–480. MR0662603

[2] W. Ziller, *Riemannian manifolds with positive sectional curvature*, arXiv:1210.4102.

[3] И.А. Тайманов, *О вполне геодезических вложениях 7-мерных многообразий в 13-мерные многообразия положительной секционной кривизны*, Матем. сборник, **187**:12 (1996), 121–136. MR1442213

[4] И.А. Тайманов, *О многомерном обобщении расслоений Зейферта*, Труды МИАН, (2015) (в печати).

[5] J. DeVito, *The classification of compact simply connected biquotients in dimensions 4 and 5*, Differential Geometry and its Applications, **34** (2014), 128–138. MR3209541

Николай Евгеньевич Русских
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: russkikh.nikolay@gmail.com