

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 11, стр. 975–980 (2014)

УДК 515.162.8

MSC 57M27

БЕСКОНЕЧНАЯ СЕРИЯ УЗЛОВ ТИПА КИШИНО

Ф.Г. КОРАВЛЁВ

ABSTRACT. We construct an infinite series of nontrivial virtual knots \mathcal{K}_n , $n \geq 2$. Each knot in this series is a connected sum of trivial virtual knots. We prove that for each n the genus of \mathcal{K}_n is equal to n . As a consequence, two knots \mathcal{K}_i and \mathcal{K}_j are non-equivalent iff $i \neq j$.

Keywords: Kishino knot, knot in thickened surface, virtual knot, genus of the knot.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Теория виртуальных узлов является одним из обобщений теории классических узлов в трёхмерной сфере S^3 . Она была предложена Кауффманом в 1999 году в работе [1]. Подобно классическим узлам, виртуальные узлы задаются своими диаграммами на плоскости, в которых перекрёстки могут быть двух видов: классические и *виртуальные*. Эти диаграммы рассматриваются с точностью до семи *обобщённых движений Рейдемейстера*: три классических движения Рейдемейстера, три виртуальных движения и одно полувиртуальное (рис. 1).

Утолщённой поверхностью называется прямое произведение $F \times I$ замкнутой ориентируемой поверхности F на отрезок I . В работе [2] доказано, что множество виртуальных узлов (то есть множество классов эквивалентностей диаграмм, рассматриваемых с точностью до обобщённых движений Рейдемейстера) совпадает с множеством узлов в утолщённых поверхностях, рассматриваемых с точностью до операций стабилизации и дестабилизации. Операция *дестабилизации* узла $K \subset F \times I$ состоит в следующем: мы разрезаем многообразие $F \times I$ по неразбивающему вертикальному кольцу A (то есть кольцу,

KORABLEV, Ph.G., INFINITE SERIES OF KISHINO TYPE KNOTS.

© 2014 КОРАВЛЁВ Ф.Г.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности №1.1260.2014/К.

Поступила 3 декабря 2014 г., опубликована 13 декабря 2014 г.

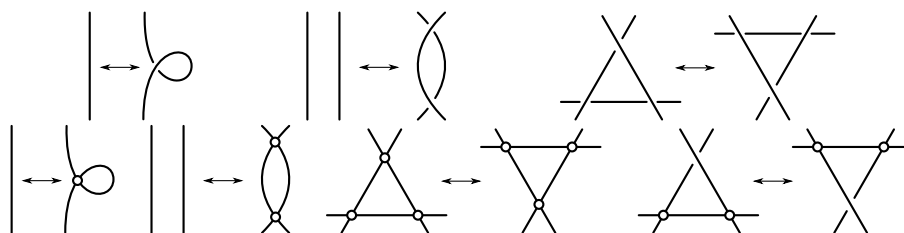


Рис. 1. Семь обобщённых движений Рейдемейстера: три классических движения, три виртуальных и одно полувиртуальное движение.

изотопному кольцу $c \times I \subset F \times I$, где $c \subset F$ — простая замкнутая кривая), не пересекающему узла K , и затем приклеиваем две ручки индекса 2 к копиям кольца A на крае получившегося многообразия (рис. 2). Дестабилизация уменьшает род поверхности F без изменения кривой K . Операция *стабилизации* является обратной для операции дестабилизации.

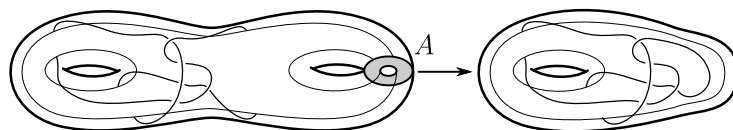


Рис. 2. Дестабилизация узла в утолщенной поверхности рода 2 вдоль кольца A .

Пусть $K \subset F \times I$ — узел в утолщенной поверхности, и пусть $D \subset F$ — его диаграмма на поверхности F . Как и для классических узлов в сфере S^3 , диаграмма узла в утолщенной поверхности получается из проекции узла K на поверхность F указанием в каждом перекрёстке какая из дуг проекции находится выше. *Состоянием* диаграммы $D \subset F$ называется сопоставление каждому перекрёстку диаграммы маркера α или β . Обозначим $\mathcal{S}(D)$ множество всех состояний диаграммы $D \subset F$. Отметим, что если диаграмма содержит n перекрёстков, то $|\mathcal{S}(D)| = 2^n$. Каждому состоянию $s \in \mathcal{S}(D)$ соответствует набор непересекающихся кривых \mathcal{L}_s на поверхности F : он получается в результате выполнения α - или β -разрешений каждого перекрёстка диаграммы, в зависимости от маркера этого перекрёстка в состоянии s (рис. 3).

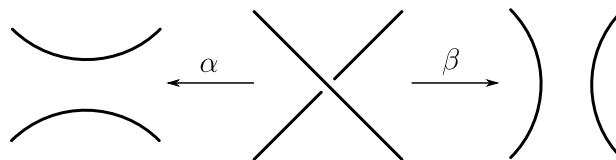


Рис. 3. Два вида разрешений перекрёстка диаграммы.

Скобочным полиномом диаграммы $D \subset F$ называется полином $\langle D \rangle$, определённый следующим образом:

$$\langle D \rangle = \sum_{s \in \mathcal{S}(D)} A^{c(s)} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|s|} \cdot [s],$$

где $c(s)$ — разность числа маркеров α и β в состоянии s , $|s|$ — число тривиальных кривых на поверхности F в наборе \mathcal{L}_s , и $[s]$ — формальная сумма гомологических классов кривых \mathcal{L}_s в группе $H_1(F)$. Скобочный полином является элементом группового кольца группы $H_1(F)$ с коэффициентами в кольце полиномов Лорана $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$. Этот полином был построен в работе [5]. Его модификации использовались в работах [6, 7] для классификации узлов в утолщенном торе.

В работе [4] доказано, что для каждого виртуального узла, его реализация узлом в утолщенной поверхности минимального рода единственна. Род этой поверхности называется *родом* виртуального узла. Один из способов вычисления рода виртуального узла состоит в предъявлении некоторой его реализации узлом в утолщенной поверхности и доказательстве того, что эта реализация не допускает дестабилизаций. Полезной оказывается следующая теорема.

Теорема 1 (2.4 из [5]). Пусть $K \subset F \times I$ — узел в утолщенной поверхности, $D \subset F$ его диаграмма. Обозначим $F = T_1 \# T_2 \# \dots \# T_n$, где T_i — двумерный тор, $i = 1, \dots, n$. Пусть $p_i: F \rightarrow T_i$ — проекция, и $p_i^*: H_1(F) \rightarrow H_1(T_i)$ — индуцированное отображение в гомологиях. Тогда, если для каждого $i = 1, \dots, n$ найдутся два таких состояния $s_k, s_l \in \mathcal{S}(D)$ с ненулевыми коэффициентами в скобочном полиноме $\langle D \rangle$, что наборы \mathcal{L}_{s_k} и \mathcal{L}_{s_l} содержат кривые γ_k и γ_l соответственно, причём индекс пересечений классов гомологий $p_i^*[\gamma_k]$ и $p_i^*[\gamma_l]$ отличен от нуля, то узел $K \subset F \times I$ не допускает дестабилизаций.

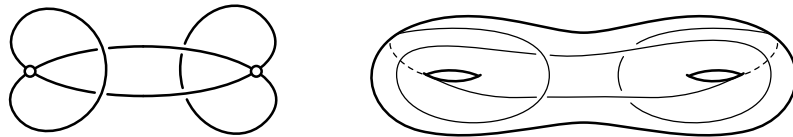


Рис. 4. Узел Кишино. Изображена его диаграмма на плоскости (слева) и реализация узлом в утолщенной поверхности рода 2 (справа).

Узлом Кишино называется виртуальный узел, изображённый на рис. 4. Он обладает рядом замечательных свойств (см. [3]). В частности, он нетривиален и является связной суммой двух тривиальных виртуальных узлов. В настоящей работе строится бесконечное семейство нетривиальных виртуальных узлов, каждый из которых является связной суммой нескольких тривиальных виртуальных узлов. Такие узлы мы называем *узлами типа Кишино*. Для доказательства того, что все узлы в этой серии различны, вычисляется род каждого построенного узла.

2. СЕРИЯ УЗЛОВ

Обозначим \mathcal{T} виртуальный тангл с двумя концами, изображённый на рис. 5, и обозначим \mathcal{K}_n , $n \geq 2$, виртуальный узел, который получается циклической склейкой концов n копий тангла \mathcal{T} . На рисунке 6 изображена диаграмма виртуального узла \mathcal{K}_n на плоскости и его реализация узлом в утолщенной поверхности рода n .



Рис. 5. Тангл \mathcal{T} с двумя концами. Изображена его диаграмма на плоскости (слева) и на проколоте торе (справа).

Из построения следует, что каждый из узлов \mathcal{K}_n , $n \geq 2$ является узлом типа Кишино.

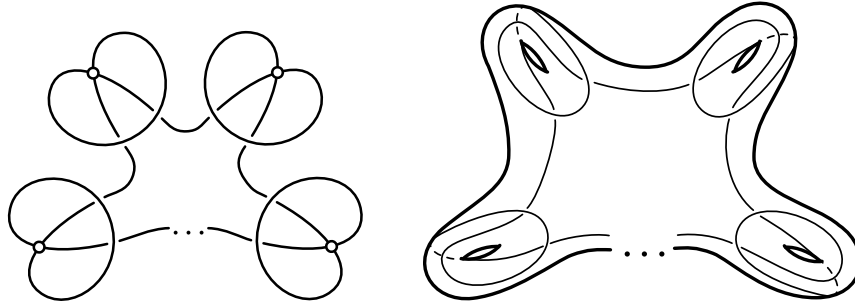


Рис. 6. Узел \mathcal{K}_n , $n \geq 2$. Изображена его диаграмма на плоскости (слева) и реализация узлом в утолщенной поверхности рода n (справа).

Теорема 2. Род виртуального узла \mathcal{K}_n , $n \geq 2$, равен n .

Доказательство. Пусть D_n — диаграмма на поверхности $F = T_1 \# \dots \# T_n$, изображённая на рис. 6 (справа). Из теоремы 1 следует, что для доказательства настоящей теоремы достаточно показать, что среди состояний $\mathcal{S}(D_n)$ диаграммы D_n найдутся состояния $s_1, s_2 \in \mathcal{S}(D_n)$, удовлетворяющие двум условиям:

- (1) Коэффициенты при $[s_1]$ и $[s_2]$ в скобочном полиноме $\langle D_n \rangle$ отличны от нуля;
- (2) Найдутся такие кривые $\gamma_1, \gamma_2 \subset F$ в наборах \mathcal{L}_{s_1} и \mathcal{L}_{s_2} соответственно, что их индекс пересечений в каждом торе T_i , $i = 1, \dots, n$, отличен от нуля.

Занумеруем классические перекрёстки тангла \mathcal{T} так, как изображено на рис. 5. Тогда, если виртуальный узел \mathcal{K}_n представляется в виде комбинации n копий $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ тангла \mathcal{T} , то состояние диаграммы D_n удобно задавать набором из n пар символов α и β . При этом набор

$$(a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n), \text{ где } a_i, b_i \in \{\alpha, \beta\}, i = 1, \dots, n$$

задаёт следующее состояние диаграммы D_n : в тангле \mathcal{T}_i первому перекрёстку сопоставляется маркер a_i , а второму — b_i .

Выберем состояние $s_1 \in \mathcal{S}(D_n)$, соответствующее набору $(\alpha\beta, \alpha\beta, \dots, \alpha\beta)$, а состояние $s_2 \in \mathcal{S}(D_n)$, соответствующее набору $(\beta\alpha, \beta\alpha, \dots, \beta\alpha)$ (рис. 7).

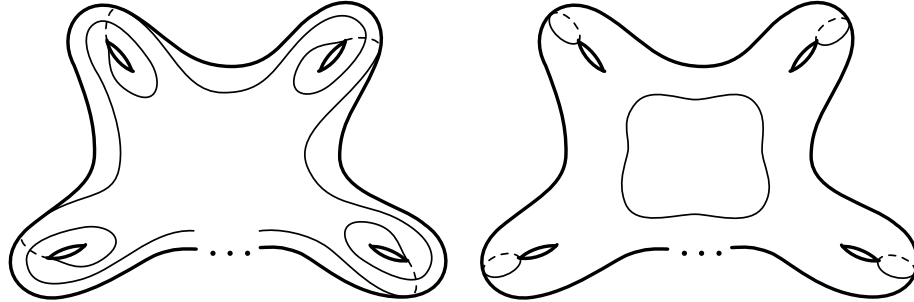


Рис. 7. Наборы кривых \mathcal{L}_{s_1} (слева) и \mathcal{L}_{s_2} (справа).

Заметим, что каждый из наборов кривых \mathcal{L}_{s_1} и \mathcal{L}_{s_2} соответствует только одному состоянию из множества $\mathcal{S}(D_n)$. Следовательно, коэффициент при $[s_1]$ в скобочном полиноме $\langle D_n \rangle$ равен 1, а коэффициент при $[s_2]$ в скобочном полиноме $\langle D_n \rangle$ равен $-A^2 - A^{-2}$. Более того, абсолютное значение индекса пересечений единственной кривой из набора \mathcal{L}_{s_1} с каждой нетривиальной кривой из набора \mathcal{L}_{s_2} равно 2. Следовательно, состояния s_1 и s_2 удовлетворяют обоим условиям (1) и (2), и значит их можно выбрать в качестве искомым. \square

Из теоремы 2, в частности, следует, что узлы \mathcal{K}_i и \mathcal{K}_j , $i, j \geq 2$, различны тогда и только тогда, когда $i \neq j$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. H. Kauffman, *Virtual Knot Theory*, European Journal of Combinatorics, **20**:7 (1999), 663–690. MR1721925
- [2] J. S. Carter, S. Kamada, M. Saito, *Stable equivalences of knots on surfaces and virtual knot cobordisms*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, **11** : 3 (2002), 311–322. MR1905687
- [3] T. Kishino, S. Satoh, *A note on classical knot polynomials*, Journal of Knot Theory and its Ramifications, **13** : 7 (2004), 845–856. MR2101229
- [4] G. Kuperberg, *What is a Virtual Link?*, Algebraic and Geometric Topology, **3**: 20 (2003), 587–591. MR1997331
- [5] H. A. Dye, L. H. Kauffman, *Minimal surface representations of virtual knots and links*, Algebraic & Geometric Topology, **5** (2005), 509–535. MR2153118
- [6] А. А. Акимова, С. В. Матвеев, *Классификация узлов малой сложности в утолщенном торе*, Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, **12** : 3 (2012), 10–21. Zbl 1289.57002
- [7] A. Akimova, S. Matveev, *Classification of genus 1 virtual knots having at most five classical crossings*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, **23** : 6 (2014), 1450031-1–1450031-19. MR3253963

Филипп Глебович Кораблёв
Челябинский государственный университет,
ул. Бр. Кашириных 192,
454000, Челябинск, Россия
E-mail address: korablev@csu.ru