S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 999–1020 (2014)

УДК 519.21

MSC 60G50

АСИМПТОТИКА СУПРЕМУМА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ

Д.К. КИМ

Abstract. We consider random walk $X_n, n \geq 0$ with one level of switching $a \leq 0$. Some theorems on the asymptotics of the supremum distribution $\mathbf{P}\left(\sup\limits_n X_n > x\right)$ as $x \to \infty$, $a \to -\infty$ were obtained in Cramer case.

Keywords: random walk with switching, supremum asymptotics.

1. Введение

Пусть $\{\xi_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}, i = 1, 2$ — независимые последовательности независимых случайных величин, одинаково распределенных внутри каждой последовательности. Повсюду в работе полагаем, что $\mathbf{P}(\xi_1^{(1)} > 0) > 0$ и $\mathbf{P}(\xi_1^{(1)} < 0) > 0$. Введем марковское случайное блуждание с одним уровнем переключения $\{X_n, n \geq 0\}$ следующим образом. Пусть a – произвольное число, $a \leq 0$, и $X_0 = 0$. Для $n \geq 1$ положим

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} + \xi_n^{(1)}, & \text{если } X_{n-1} \geq a, \\ X_{n-1} + \xi_n^{(2)}, & \text{если } X_{n-1} < a. \end{cases}$$

Другими словами, распределение каждого последующего скачка случайного блуждания зависит от его положения выше или ниже уровня a. Случайные блуждания такого типа называются блужданиями с одним уровнем переключения и находят применение при описании различных систем обслуживания, моделей хранения запасов и др. Случайные процессы с одним уровнем переключения в дискретном или непрерывном времени изучались в работах [1]-[6].

Kim, D.K., Supremum asymptotics for random walk with switching.

Работа поддержана Министерством Образования и Науки Республики Казахстан (грант 1778/ГФ2) .

Поступила 27 октября 2014 г., опубликована 28 декабря 2014 г.

В частности, в случае $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} < 0$, $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} > 0$ А.А. Боровковым [1] было найдено стационарное распределение такого блуждания. В [2]–[4] в основном изучались вопросы возвратности и эргодичности. В работе Т. Каданковой [5] изучались граничные функционалы для случайного процесса с переключением, образованного обобщенными пуассоновскими процессами. В статье [6] рассматривался процесс Леви с линейным сносом, который изменяет свое значение в зависимости от положения процесса выше или ниже уровня переключения.

Случайные процессы с двумя уровнями переключений изучались в работах Ю.В.Прохорова, Д.В.Гусака, Н.С. Братийчука, В.И.Лотова и Д.К. Кима (см. [7]-[15]). Условия эргодичности и анализ вероятностей больших уклонений цепей Маркова более общего вида содержатся в публикациях А.А.Боровкова и Д.А.Коршунова [16] - [18].

В теореме 1 настоящей работы установлены факторизационные тождества, которым удовлетворяют двойные преобразования Лапласа-Стилтьеса

$$Q_1(z,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{E}\left(e^{\lambda X_n}; X_n \in [a,x], n < N\right), \qquad Re\lambda = 0, \quad |z| < 1,$$

$$Q_2(z,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}\left(e^{\lambda X_n}; X_n < a, n < N\right), \qquad Re\lambda = 0, \quad |z| < 1,$$

а также

$$Q_0(z,\lambda) = \mathbf{E}\left(z^N e^{\lambda X_N}; N < \infty\right), \qquad Re\lambda = 0, \quad |z| \le 1,$$

где

$$N = \inf\{n > 0 : X_n > x\}, \ x > 0$$

(всюду полагаем, что $\inf \varnothing = \infty$). Далее, в теореме 2 в условиях Крамéра изучены аналитические свойства и проведен асимптотический анализ функции $Q_0(z,\lambda)$ для z, близких к единице, при $x \to \infty$, $a \to -\infty$ с выделением главной части и оценкой остаточного члена. Ясно, что в силу очевидного соотношения $Q_0(1,0) = \mathbf{P}(M > x)$, где $M = \sup\limits_{n\ge 0} X_n$, теорема 2 может быть использована для нахождения асимптотики $\mathbf{P}(M > x)$ в тех случаях, когда $M < \infty$.

Пусть $M_n = \max\limits_{k\le n} X_k$. Из соотношений

$$\mathbf{P}\left(M_n > x\right) = \mathbf{P}(N \le n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}\left(M_n > x\right) = \frac{Q_0(z,0)}{1-z}$$

следует, что полученная главная часть для $Q_0(z,\lambda)$ может быть использована для получения асимптотических разложений распределений N и M_n с помощью уже отработанной процедуры контурного интегрирования с применением модификации метода перевала (см. например [19], [20]).

Автор выражает признательность рецензенту за полезные замечания.

2. Предварительные сведения и формулировки результатов

Обозначим

$$f_i(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi_1^{(i)}}, \qquad i = 1,2, \quad Re\lambda = 0.$$

Теорема 1. *Для* $|z| < 1$, $Re\lambda = 0$ *имеет место следующее тождество:*

$$1 - Q_0(z,\lambda) = (1 - zf_1(\lambda))Q_1(z,\lambda) + (1 - zf_2(\lambda))Q_2(z,\lambda). \tag{1}$$

Тем самым получено одно функциональное уравнение с тремя неизвестными функциями $Q_1(z,\lambda), Q_2(z,\lambda), Q_0(z,\lambda)$. Далее это уравнение будет решаться с помощью метода типа Винера-Хопфа. Для этих целей будет использоваться факторизация функций $1 - zf_i(\lambda),\ i = 1,2$ (см.[21]) и известные свойства компонент этой факторизации.

Положим $S_0^{(i)} = 0, S_n^{(i)} = \xi_1^{(i)} + \cdots + \xi_n^{(i)}, i = 1,2,$

$$\eta_+^{(i)} = \inf\{n \geq 1 : S_n^{(i)} \geq 0\},$$

$$\eta_-^{(i)} = \inf\{n \geq 1 : S_n^{(i)} < 0\},$$

$$\chi_\pm^{(i)} = S_{\eta_\pm^{(i)}}^{(i)}, \quad \text{если} \quad \eta_\pm^{(i)} < \infty, \quad i = 1,2.$$

На множествах $\eta_\pm^{(i)} = \infty$ случайные величины $\chi_\pm^{(i)}, i = 1,2$, можно считать неопределенными.

Мы будем использовать компоненты $r_i^+(z,\lambda), r_i^-(z,\lambda)$ факторизационных представлений:

$$1 - zf_i(\lambda) = r_i^+(z,\lambda) r_i^-(z,\lambda), \quad Re\lambda = 0, \quad |z| \leq 1, \tag{2}$$

где

$$r_i^\pm(z,\lambda) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_\pm^{(i)}} e^{\lambda\chi_\pm^{(i)}}; \eta_\pm^{(i)} < \infty), \quad i = 1,2.$$

Обозначим через Λ множество преобразований Лапласа-Стилтьеса (ПЛС) функций ограниченной вариации

$$W(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dU(y),\ Re\lambda = 0,\ \int_{-\infty}^{\infty} |dU(y)| < \infty.$$

Введем обозначения

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dU(y)\right]^D = \int_D e^{\lambda y} dU(y),$$

$$\underset{D}{Var} U = \int_D \mid dU(y) \mid, \quad Var U = \int_{-\infty}^{\infty} \mid dU(y) \mid$$

для любого борелевского $D \subset R$. На множестве функций Λ определим норму

$$\|W\| = \|W(\lambda)\| = Var U = \int_{-\infty}^{\infty} \mid dU(y) \mid.$$

В последующем функция W, а вместе с ней и U могут зависеть от переменной z.

Отметим, что при $|z| < 1$ и $Re\lambda = 0$ функции $\left(r_i^\pm(z,\lambda)\right)^{-1}, i = 1,2$, как функции переменной λ могут быть представлены в виде ПЛС функций ограниченной вариации, все изменение которых сосредоточено на неотрицательной и неположительной полуосях соответственно (см. [19]).

Определим следующие операторы при $|z| < 1$:

$$\mathcal{X}(W)(z,\lambda) = r_1^+(z,\lambda)\left[\frac{W(z,\lambda)}{r_1^+(z,\lambda)}\right]^{(x,\infty)},$$

$$\mathcal{A}(W)(z,\lambda) = r_2^+(z,\lambda) r_1^-(z,\lambda)\left[\frac{W(z,\lambda)}{r_1^-(z,\lambda) r_2^+(z,\lambda)}\right]^{(-\infty,a)}.$$

Эти операторы определены на множестве Λ и принимают значения также в этом множестве.

Заметим, что при $|z| < 1$ функция $Q_1(z,\lambda)$ как функция переменной λ представима в виде ПЛС функции ограниченной вариации, все изменение которой сосредоточено на множестве $[a,x]$, поэтому функция $r_1^-(z,\lambda)Q_1(z,\lambda)$ представима в виде ПЛС функции ограниченной вариации, все изменение которой сосредоточено на множестве $(-\infty,x]$ и функция $\dfrac{r_1^+(z,\lambda)}{r_2^+(z,\lambda)}Q_1(z,\lambda)$ – в виде ПЛС функции ограниченной вариации, все изменение которой сосредоточено на множестве $[a,\infty)$. Тогда, очевидно,

$$\mathcal{X}\left((1-zf_1(\lambda))Q_1(z,\lambda)\right) = r_1^+(z,\lambda)\left[r_1^-(z,\lambda)Q_1(z,\lambda)\right]^{(x,\infty)} = 0,$$

$$\mathcal{A}\left((1-zf_1(\lambda))Q_1(z,\lambda)\right) = r_2^+(z,\lambda)r_1^-(z,\lambda)\left[\frac{r_1^+(z,\lambda)}{r_2^+(z,\lambda)}Q_1(z,\lambda)\right]^{(-\infty,a)} = 0.$$

Для удобства изложения зависимость от переменных z и λ будем иногда опускать. Применив операторы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{A}$ к основному тождеству (1), получим

$$Q_0(z,\lambda) = \mathcal{X}\left(1\right) - \mathcal{X}\left(\left(1-zf_2(\lambda)\right)Q_2(z,\lambda)\right),$$

$$(1-zf_2(\lambda))Q_2(z,\lambda) = \mathcal{A}\left(1-Q_0\right).$$

После подстановки одного тождества в другое получаем

$$Q_0(z,\lambda) = \mathcal{X}\left(1\right) - \mathcal{X}\mathcal{A}\left(1-Q_0\right). \tag{3}$$

Нахождение точных выражений для функций $Q_i(z,\lambda)$ доступно разве что для случайных блужданий весьма частного вида. По этой причине далее займемся поиском асимптотических представлений для функций $Q_0(z,\lambda)$ и $(1-zf_2(\lambda))Q_2(z,\lambda)$ для $z \in Z_\delta = \{z : |z| < 1, |z-1| < \delta\}$ при некотором $\delta > 0$. Суть этих представлений состоит в выделении достаточно просто устроенных главных частей и равномерной по z оценке (по норме) остаточных членов, которые в условиях Краме́ра являются экспоненциально малыми по сравнению с главными частями. Именно такого сорта представления чаще всего бывают полезными для целей дальнейшего асимптотического анализа распределений.

В дальнейшем понадобится ряд более глубоких сведений о факторизации и свойствах компонент факторизации, которые известны из [19].

Пусть выполнены следующие условия:

(A_1). Функции распределения случайных величин $\{\xi_n^{(i)}\}_{n=1}^\infty, i = 1,2$, имеют ненулевые абсолютно непрерывные компоненты.

(A_2). $\mathbf{E}e^{\lambda\xi_1^{(i)}} < \infty, i = 1,2$, для любого $\lambda \in (\lambda_-,\lambda_+)$, где $\lambda_- < 0 < \lambda_+$, причем если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} > 0$, то существует число $-q \in (\lambda_-,0)$ такое, что $\mathbf{E}e^{-q\xi_1^{(1)}} = 1$ и если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} < 0$, то существует $q \in (0,\lambda_+)$ такое, что $\mathbf{E}e^{q\xi_1^{(1)}} = 1$.

В силу сделанных предположений компоненты факторизации обладают свойствами аналитичности в областях $Re\lambda < \lambda_+$ (для функции $r_i^+(z,\lambda)$) и $Re\lambda > \lambda_-$ (для функции $r_i^-(z,\lambda)$). Нетрудно видеть, что тождества (2) остаются верными в полосе $Re\lambda \in (\lambda_-,\lambda_+)$.

Кроме того, при достаточно малом $\delta > 0$ и $z \in Z_\delta \cup \{z = 1\}$ функция $1 - zf_1(\lambda)$ имеет два нуля $\lambda_-^{(1)}(z), \lambda_+^{(1)}(z)$, $\lambda_-^{(1)}(|z|) \le \lambda_-^{(1)}(1) \le 0 \le \lambda_+^{(1)}(1) \le \lambda_+^{(1)}(|z|)$. Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} = 0$, то $\lambda_\pm^{(1)}(1) = 0$. Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} > 0$, то $\lambda_+^{(1)}(1) = 0$ и

$\lambda_-^{(1)}(1) = -q$. Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} < 0$, то $\lambda_+^{(1)}(1) = q$ и $\lambda_-^{(1)}(1) = 0$. Подобным образом, если $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} \geq 0$, то функция $1 - zf_2(\lambda)$ имеет как минимум один нуль $\lambda_+^{(2)}(z)$, $\lambda_+^{(2)}(|z|) \geq 0$, $\lambda_+^{(2)}(1) = 0$.

Введем обозначения (здесь производные функций $r_1^{\pm}$ берутся по второму аргументу):

$$\mu(z) = e^{\lambda_+^{(1)}(z)-\lambda_-^{(1)}(z)}, \quad \mu = \mu(1),$$

$$M_+(z,\lambda) = \frac{1}{(r_1^+)'(z,\lambda_+^{(1)}(z))}\frac{r_1^+(z,\lambda)}{\lambda - \lambda_+^{(1)}(z)}, \quad M_-(z,\lambda) = \frac{1}{(r_1^-)'(z,\lambda_-^{(1)}(z))}\frac{r_1^-(z,\lambda)}{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)},$$

$$R_2^+(z) = \frac{r_2^+(z,\lambda_+^{(1)}(z))}{r_2^+(z,\lambda_-^{(1)}(z))}, \quad \Pi(z) = M_+(z,\lambda_-^{(1)}(z))M_-(z,\lambda_+^{(1)}(z)).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (A_1) *и* (A_2), *тогда для достаточно больших* x *и* $|a|$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для* $z \in Z_\delta \cup \{z = 1\}$, $Re\lambda = 0$ *имеет место представление*

$$Q_0(z,\lambda) = \frac{1 - R_2^+(z)M_-(z,\lambda_+^{(1)}(z))\mu^a(z)}{1 - R_2^+(z)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}\ M_+(z,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z))x} + \varphi(z,\lambda),$$

где для некоторых $c > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *равномерно по* $z \in Z_\delta$

$$\left\|\varphi(z,\lambda)\right\| \leq ce^{-\lambda_+^{(1)}(1)x}\left(e^{-\varepsilon x} + \mu^a e^{\varepsilon a}\right).$$

3. Доказательства теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1.

Используя формулу полной вероятности, имеем для $n \geq 1$

$$\mathbf{P}(X_n \in (y,y+dy), n \leq N) = \mathbf{P}(X_{n-1} + \xi_n^{(2)} \in (y,y+dy), X_{n-1} < a, n-1 < N)$$
$$+ \mathbf{P}(X_{n-1} + \xi_n^{(1)} \in (y,y+dy), X_{n-1} \in [a,x], n-1 < N).$$

Умножим это выражение на $e^{\lambda y}, Re\lambda = 0$, и проинтегрируем:

$$\int_{-\infty}^{x} e^{\lambda y}\mathbf{P}(X_n \in dy, n < N) + \int_{x}^{\infty} e^{\lambda y}\mathbf{P}(X_n \in dy, n = N)$$

$$= f_1(\lambda)\int_a^x e^{\lambda y}\mathbf{P}(X_{n-1} \in dy, n-1 < N) + f_2(\lambda)\int_{-\infty}^{a} e^{\lambda y}\mathbf{P}(X_{n-1} \in dy, n-1 < N).$$

Умножим последнее соотношение на $z^n, |z| < 1$, и просуммируем по $n = 1, 2, \ldots$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{-\infty}^{x} e^{\lambda y}\mathbf{P}(X_n \in dy, n < N) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y}\mathbf{P}(X_n \in dy, n = N)$$

$$= zf_1(\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}\int_a^x e^{\lambda y}\mathbf{P}(X_{n-1} \in dy, n-1 < N)$$

$$+ zf_2(\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}\int_{-\infty}^{a} e^{\lambda y}\mathbf{P}(X_{n-1} \in dy, n-1 < N).$$

Теорема 1 доказана.

В соответствии с [19] для произвольного действительного t на множестве Λ определим следующие подмножества:

$$\Lambda(t) = \{W(\lambda) \in \Lambda : W(\lambda + t) \in \Lambda\},$$

$$\Lambda_b^+(t) = \left\{ W(\lambda) \in \Lambda(t) : W(\lambda) = \int_b^\infty e^{\lambda y} dU(y) \right\},\ b \in \mathbb{R}$$

$$\Lambda_b^-(t) = \left\{ W(\lambda) \in \Lambda(t) : W(\lambda) = \int_{-\infty}^b e^{\lambda y} dU(y) \right\}.$$

Приведем несколько лемм, которые потребуются в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть функция* $h \in \Lambda_{b_1}^+(0)$, $b_1 \ge a$, *тогда для любого* $\beta < 0$

$$\left[\frac{h(\lambda)}{\lambda - \beta}\right]^{(-\infty,a)} = h(\beta)\frac{e^{(\lambda-\beta)a}}{\lambda - \beta}.$$

Доказательство. Так как функция $h(\lambda)$ имеет вид

$$h(\lambda) = \int_{b_1}^\infty e^{\lambda t} dH(t), \quad Re\lambda = 0, \quad Var H < \infty,$$

то

$$\left[\frac{h(\lambda)}{\lambda - \beta}\right]^{(-\infty,a)} = \left[\int_{-\infty}^\infty e^{\lambda t} \left(\int_{\max(b_1,t)}^\infty e^{-\beta(t-y)} dH(y)\right) dt\right]^{(-\infty,a)}$$
$$= \left[\int_{-\infty}^\infty e^{(\lambda-\beta)t} \int_{\max(b_1,t)}^\infty e^{\beta y} dH(y) dt\right]^{(-\infty,a)} = h(\beta)\int_{-\infty}^a e^{(\lambda-\beta)t} dt.$$

□

Лемма 2. *Пусть функция* $h \in \Lambda_{b_2}^-(0)$, $b_2 \le x$, *тогда для любого* $\beta > 0$

$$\left[\frac{h(\lambda)}{\lambda - \beta}\right]^{(x,\infty)} = h(\beta)\frac{e^{(\lambda-\beta)x}}{\lambda - \beta}.$$

Здесь и далее под c и ε будем понимать некоторые положительные константы, причем все они не зависят от z, a и x. Так как в дальнейшем важно будет только существование этих констант, а не их конкретные значения, то в тексте они не будут отличаться друг от друга.

Лемма 3. *Если функция* $W(\lambda) \in \Lambda(-\varepsilon)$, *то существуют* $c > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *такие, что*

$$\left\|[W(\lambda)]^{(-\infty,a)}\right\| \le ce^{\varepsilon a}.$$

Если $W(\lambda) \in \Lambda(\varepsilon)$, *то существуют* $c > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *такие, что*

$$\left\|[W(\lambda)]^{(x,\infty)}\right\| \le ce^{-\varepsilon x}.$$

Лемма 4. *Пусть* $F_1(y)$, $F_2(y)$ *– функции ограниченной вариации. Если* $F(y) = \int_{-\infty}^\infty F_2(y-t)dF_1(t)$, *и все изменение* $F_1(y)$ *сосредоточено на полуоси* (b_1, ∞), $b_1 \ge a$, *а* $F_2(y)$ *– на* $(-\infty, 0)$, *тогда*

$$\underset{(-\infty,a)}{Var} F(y) \le \underset{(-\infty,a-b_1)}{Var} F_2(y) Var F_1(y).$$

Лемма 5. *Пусть $F_1(y)$, $F_2(y)$ – функции ограниченной вариации. Если $F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y-t)dF_2(t)$, и все изменение $F_1(y)$ сосредоточено на полуоси $(0,\infty)$, а $F_2(y)$ – на $(-\infty, b_2)$, $b_2 \le x$, тогда*

$$\underset{(x,\infty)}{Var}\, F(y) \le \underset{(x-b_2,\infty)}{Var} F_1(y) Var F_2(y).$$

Доказательства лемм очевидны.

Лемма 6. *Для всяких функций $g^+(\lambda) \in \Lambda^+_{b_1}(0)$, $g^-(\lambda) \in \Lambda^-_{b_2}(0)$ при $z \in Z_\delta$, $b_1 \ge a$, $b_2 \le x$, имеют место представления*

$$r_1^+(z,\lambda)\left[\frac{g^-(\lambda)}{r_1^+(z,\lambda)}\right]^{(x,\infty)} = M_+(z,\lambda)g^-\left(\lambda_+^{(1)}(z)\right)\, e^{(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z))x} + r_1^+(z,\lambda)\ S^+(z,\lambda),$$

$$r_1^-(z,\lambda)\left[\frac{g^+(\lambda)}{r_1^-(z,\lambda)}\right]^{(-\infty,a)} = M_-(z,\lambda)g^+\left(\lambda_+^{(1)}(z)\right)\, e^{(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z))x} + r_1^-(z,\lambda)\ S^-(z,\lambda),$$

где функция $S^+(z,\lambda) \in \Lambda_x^+(0)$ и

$$\left\|S^+(z,\lambda)\right\| \le ce^{-(\lambda_+^{(1)}(1)+\varepsilon)(x-b_2)}\ \left\|g^-(\lambda)\right\|,$$

функция $S^-(z,\lambda) \in \Lambda_a^-(0)$ и

$$\left\|S^-(z,\lambda)\right\| \le ce^{-(\lambda_-^{(1)}(1)-\varepsilon)(a-b_1)}\ \left\|g^+(\lambda)\right\|.$$

Доказательство. Утверждения леммы сразу же следуют из лемм 1 - 5 и представлений для $\left(r_1^\pm(z,\lambda)\right)^{-1}$ из [22] при $z \in Z_\delta$ для достаточно малых $\delta > 0$:

$$\frac{1}{r_1^\pm(z,\lambda)} = \frac{1}{\left(r_1^\pm\right)'\left(z,\lambda_\pm^{(1)}(z)\right)}\ \frac{1}{\lambda-\lambda_\pm^{(1)}(z)} + T^\pm(z,\lambda), \tag{4}$$

где функция $T^+(z,\lambda) \in \Lambda_0^+(\lambda_+^{(1)}(1)+\varepsilon)$ и $T^-(z,\lambda) \in \Lambda_0^-(\lambda_-^{(1)}(1)-\varepsilon)$. В итоге справедливо соотношение

$$\left\|\left[T^+(z,\lambda)g^-(\lambda)\right]^{(x,\infty)}\right\| \le e^{-(\lambda_+^{(1)}(1)+\varepsilon)(x-b_2)}\ \left\|g^-(\lambda)\right\|.$$

Подобное соотношение справедливо и для $\left[T^-(z,\lambda)g^+(\lambda)\right]^{(-\infty,a)}$. Отметим также, что функции $r_1^\pm(z,\lambda)$ равномерно ограничены по норме при $z \in Z_\delta$. Лемма доказана.

□

Далее будут использоваться вспомогательные функции, определенные для $z \in Z_\delta \cup \{z=1\}$ и любого фиксированного $\gamma > 0$:

$$\omega_1^\pm(z,\lambda) = r_1^\pm(z,\lambda)\frac{\lambda \mp \gamma}{\lambda-\lambda_\pm^{(1)}(z)}.$$

Из [19] известно, что найдется достаточно малое число $\delta > 0$ такое, что для любого $z \in Z_\delta \cup \{z=1\}$ функции $(\omega_1^+(z,\lambda))^{\pm 1} \in \Lambda_0^+(\lambda_+^{(1)}(1)+\varepsilon)$ и функции $(\omega_1^-(z,\lambda))^{\pm 1} \in \Lambda_0^-(\lambda_-^{(1)}(1)-\varepsilon)$.

Доказательство теоремы 2.

Пусть

$$L(z,\lambda) = \frac{1-Q_0(z,\lambda)}{r_2^+(z,\lambda)}, \quad z \in Z_\delta, \quad Re\lambda = 0.$$

Тогда по лемме 6 для $z \in Z_\delta$

$$\mathcal{A}\,(1-Q_0) = r_2^+(z,\lambda)M_-(z,\lambda)L(z,\lambda_-^{(1)}(z))e^{(\lambda-\lambda_-^{(1)}(z))a} + r_2^+(z,\lambda)r_1^-(z,\lambda)S_1^-(z,\lambda), \tag{5}$$

где $S_1^-(z,\lambda) \in \Lambda_a^-(0)$ и

$$\|S_1^-(z,\lambda)\| \le ce^{-(\lambda_-^{(1)}(1)-\varepsilon)a}\|L(z,\lambda)\|.$$

Отметим, что если $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} < 0$, то равномерно по $z \in Z_\delta$

$$\|L(z,\lambda)\| \le c.$$

Подставив (5) в (3), получим

$$Q_0(z,\lambda) = \mathcal{X}(1) - L(z,\lambda_-^{(1)}(z))\; e^{-\lambda_-^{(1)}(z)a}\mathcal{X}\left(r_2^+(z,\lambda)M_-(z,\lambda)e^{\lambda a}\right) - \mathcal{X}\left(r_2^+(z,\lambda)r_1^-(z,\lambda)S_1^-(z,\lambda)\right). \tag{6}$$

Используя лемму 6, нетрудно видеть, что справедливы следующие соотношения:

$$\mathcal{X}(1) = M_+(z,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z))x} + r_1^+(z,\lambda)S_1^+(z,\lambda), \tag{7}$$

$$\mathcal{X}\left(M_-(z,\lambda)e^{\lambda a}\right) = M_-(z,\lambda_+^{(1)}(z))e^{\lambda_+^{(1)}(z)a}M_+(z,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z))x} + r_1^+(z,\lambda)S_2^+(z,\lambda), \tag{8}$$

где $S_i^+(z,\lambda) \in \Lambda_x^+(0)$, $i=1,2$, и равномерно по $z \in Z_\delta$

$$\|S_1^+(z,\lambda)\| \le ce^{-(\lambda_+^{(1)}(1)+\varepsilon)x},$$

$$\|S_2^+(z,\lambda)\| \le ce^{-(\lambda_+^{(1)}(1)+\varepsilon)(x-a)}.$$

Для любого $z \in Z_\delta \cup \{z=1\}$ функция

$$\frac{r_2^+(z,\lambda) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)}{\lambda-\lambda_+^{(1)}(z)} \in \Lambda_0^+(\lambda_+)$$

(см.[19]), поэтому из представления

$$\frac{r_2^+(z,\lambda) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)}{r_1^+(z,\lambda)} = \big(r_2^+(z,\lambda) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\big)\frac{\lambda-\gamma}{\lambda-\lambda_+^{(1)}(z)}\;\frac{1}{\omega_1^+(z,\lambda)}$$

следует, что данная функция для любого $z \in Z_\delta \cup \{z=1\}$ принадлежит множеству $\Lambda_0^+(\lambda_+^{(1)}(1)+\varepsilon)$. Таким образом, в силу леммы 5 следует, что равномерно по $z \in Z_\delta$

$$\left\|\left[\frac{r_2^+(z,\lambda) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)}{r_1^+(z,\lambda)}M_-(z,\lambda)e^{\lambda a}\right]^{(x,\infty)}\right\|$$

$$\le \left\|\left[\frac{r_2^+(z,\lambda) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)}{r_1^+(z,\lambda)}\right]^{(x-a,\infty)}\right\|\left\|M_-(z,\lambda)e^{\lambda a}\right\| \le ce^{-\left(\lambda_+^{(1)}(1)+\varepsilon\right)(x-a)}.$$

Подобным образом легко установить, что для $z \in Z_\delta$

$$\left\|\left[\frac{r_2^+(z,\lambda) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)}{r_1^+(z,\lambda)}r_1^-(z,\lambda)S_1^-(z,\lambda)\right]^{(x,\infty)}\right\|$$

$$\le ce^{-(\lambda_+^{(1)}(1)+\varepsilon)(x-a)} \left\|S_1^-(z,\lambda)\right\|.$$

Тогда из (8) получаем, что

$$\mathcal{X}\big(r_2^+(z,\lambda)M_-(z,\lambda)e^{\lambda a}\big) = r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\mathcal{X}\big(M_-(z,\lambda)e^{\lambda a}\big)$$

$$(9) \qquad +\mathcal{X}\Big(\big(r_2^+(z,\lambda) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\big)M_-(z,\lambda)e^{\lambda a}\Big)$$

$$= r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)M_-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)e^{\lambda_+^{(1)}(z)a}M_+(z,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z))x} + r_1^+(z,\lambda)S_3^+(z,\lambda),$$

где $S_3^+(z,\lambda) \in \Lambda_x^+(0)$ и равномерно по $z \in Z_\delta$

$$\left\|S_3^+(z,\lambda)\right\| \le ce^{-(\lambda_+^{(1)}(1)+\varepsilon)(x-a)}.$$

Кроме того, имеет место представление

$$\mathcal{X}\big(r_2^+(z,\lambda)r_1^-(z,\lambda)S_1^-(z,\lambda)\big) = r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\mathcal{X}\big(r_1^-(z,\lambda)S_1^-(z,\lambda)\big)$$

$$+\mathcal{X}\Big(\big(r_2^+(z,\lambda) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\big)r_1^-(z,\lambda)S_1^-(z,\lambda)\Big)$$

$$= r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)r_1^-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)S_1^-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)M_+(z,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z))x}$$

$$+r_1^+(z,\lambda)S_5^+(z,\lambda) \equiv r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)r_1^-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)S_4^+(z,\lambda) + r_1^+(z,\lambda)S_5^+(z,\lambda),$$

где для $z \in Z_\delta$ $S_i^+(z,\lambda) \in \Lambda_x^+(0)$, $i = 4, 5$, и

$$\left\|S_4^+(z,\lambda)\right\| \le ce^{-\lambda_+^{(1)}(1)(x-a)}\left\|S_1^-(z,\lambda)\right\| \le c\mu^a e^{-\lambda_+^{(1)}(1)x}e^{\varepsilon a}\left\|L(z,\lambda)\right\|,$$

$$\mu = e^{\lambda_+^{(1)}(1)-\lambda_-^{(1)}(1)},$$

$$\left\|S_5^+(z,\lambda)\right\| \le ce^{-(\lambda_+^{(1)}(1)+\varepsilon)(x-a)}\left\|S_1^-(z,\lambda)\right\| \le c\mu^a e^{-\lambda_+^{(1)}(1)x}e^{-\varepsilon(x-a)}\left\|L(z,\lambda)\right\|.$$

Тогда можно записать

$$L\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)\ e^{-\lambda_-^{(1)}(z)a}\mathcal{X}\big(r_2^+(z,\lambda)M_-(z,\lambda)e^{\lambda a}\big) - \mathcal{X}\big(r_2^+(z,\lambda)r_1^-(z,\lambda)S_1^-(z,\lambda)\big)$$

$$= L\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)\ r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)M_-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\mu^a(z)M_+(z,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z))x}$$

$$-r_1^+(z,\lambda)S_6^+(z,\lambda) - r_2^+(z,\lambda_+^{(1)}(z))r_1^-(z,\lambda_+^{(1)}(z))S_4^+(z,\lambda),$$

где для $z \in Z_\delta$ $S_6^+(z,\lambda) \in \Lambda_x^+(0)$ и

$$\left\|S_6^+(z,\lambda)\right\| \le c\mu^a e^{-\lambda_+^{(1)}(1)x}e^{-\varepsilon(x-a)}\left\|L(z,\lambda)\right\|.$$

В итоге соотношение (6) принимает вид

$$(10)\, Q_0(z,\lambda) = \left(1 - \big(1 - Q_0\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)\big)\frac{r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)}M_-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\ \mu^a(z)\right)$$

$$\cdot M_+(z,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z))x} + r_1^+(z,\lambda)S_7^+(z,\lambda) + r_2^+(z,\lambda_+^{(1)}(z))r_1^-(z,\lambda_+^{(1)}(z))S_4^+(z,\lambda),$$

где для $z \in Z_\delta$ $S_7^+(z,\lambda) \in \Lambda_x^+(0)$ и

$$\left\|S_7^+(z,\lambda)\right\| \le ce^{-\lambda_+^{(1)}(1)x}\left(e^{-\varepsilon x} + \mu^a e^{-\varepsilon(x-a)}\left\|L(z,\lambda)\right\|\right).$$

Подставим $\lambda=\lambda_-^{(1)}(z)$ в соотношение (10) и выразим $1-Q_0\bigl(z,\lambda_-^{(1)}(z)\bigr)$:

$$1-Q_0\bigl(z,\lambda_-^{(1)}(z)\bigr)=\frac{r_2^+\bigl(z,\lambda_-^{(1)}(z)\bigr)\bigl(1-M_+\bigl(z,\lambda_-^{(1)}(z)\bigr)\mu^{-x}(z)\bigr)}{r_2^+\bigl(z,\lambda_-^{(1)}(z)\bigr)-r_2^+\bigl(z,\lambda_+^{(1)}(z)\bigr)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}$$
$$+\frac{r_2^+\bigl(z,\lambda_-^{(1)}(z)\bigr)r_1^+\bigl(z,\lambda_-^{(1)}(z)\bigr)S_7^+\bigl(z,\lambda_-^{(1)}(z)\bigr)}{r_2^+\bigl(z,\lambda_-^{(1)}(z)\bigr)-r_2^+\bigl(z,\lambda_+^{(1)}(z)\bigr)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}$$
$$+\frac{r_2^+\bigl(z,\lambda_-^{(1)}(z)\bigr)r_2^+\bigl(z,\lambda_+^{(1)}(z)\bigr)r_1^-\bigl(z,\lambda_+^{(1)}(z)\bigr)S_4^+\bigl(z,\lambda_-^{(1)}(z)\bigr)}{r_2^+\bigl(z,\lambda_-^{(1)}(z)\bigr)-r_2^+\bigl(z,\lambda_+^{(1)}(z)\bigr)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}, \tag{11}$$

где

$$\Pi(z)=M_+(z,\lambda_-^{(1)}(z))M_-(z,\lambda_+^{(1)}(z)).$$

Асимптотическое поведение $\lambda_\pm^{(1)}(z)$, $\mu(z)$, $r_1^\pm(z,\lambda_\mp^{(1)}(z))$, $M_\pm(z,\lambda_\mp^{(1)}(z))$, $\Pi(z)$ при $z\to1$, $z\in Z_\delta$ следует из определения этих функций.

Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)}=0$, то $z=1$ является точкой ветвления второго порядка для $\lambda_\pm^{(1)}(z)$, поэтому при $z\to1$

$$\lambda_\pm^{(1)}(z)=\pm\psi_1^{(1)}\sqrt{1-z}+o\left(\sqrt{1-z}\right),\quad \psi_1^{(1)}=\sqrt{\frac{2}{D\xi_1^{(1)}}},$$

$$\mu(z)=1+2\psi_1^{(1)}\sqrt{1-z}+o\left(\sqrt{1-z}\right),$$
$$r_1^\pm\bigl(z,\lambda_\mp^{(1)}(z)\bigr)=\pm2\psi_1^{(1)}\mathbf{E}\chi_\pm^{(1)}\sqrt{1-z}+o\left(\sqrt{1-z}\right),$$

$$M_\pm\bigl(z,\lambda_\mp^{(1)}(z)\bigr)=1\mp\psi_1^{(1)}\frac{\mathbf{E}\bigl(\chi_\pm^{(1)}\bigr)^2}{\mathbf{E}\chi_\pm^{(1)}}\sqrt{1-z}+o\left(\sqrt{1-z}\right), \tag{12}$$

$$\Pi(z)=1+\psi_1^{(1)}\left(\frac{\mathbf{E}\bigl(\chi_-^{(1)}\bigr)^2}{\mathbf{E}\chi_-^{(1)}}-\frac{\mathbf{E}\bigl(\chi_+^{(1)}\bigr)^2}{\mathbf{E}\chi_+^{(1)}}\right)\sqrt{1-z}+o\left(\sqrt{1-z}\right). \tag{13}$$

Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)}>0$, то при $z\to1$

$$\lambda_+^{(1)}(z)=\frac{1-z}{\mathbf{E}\xi_1^{(1)}}+o(1-z),\quad \lambda_-^{(1)}(z)=-q+o(1),$$

$$r_1^+\bigl(z,\lambda_-^{(1)}(z)\bigr)=1-\mathbf{E}e^{-q\chi_+^{(1)}}+o(1),\quad r_1^-\bigl(z,\lambda_+^{(1)}(z)\bigr)=1-\mathbf{P}\bigl(\eta_-^{(1)}<\infty\bigr)+o(1),$$

$$M_+\bigl(z,\lambda_-^{(1)}(z)\bigr)=\frac{1-\mathbf{E}e^{-q\chi_+^{(1)}}}{q\mathbf{E}\chi_+^{(1)}}+o(1), \tag{14}$$

$$M_-\bigl(z,\lambda_+^{(1)}(z)\bigr)=-\frac{1-\mathbf{P}\bigl(\eta_-^{(1)}<\infty\bigr)}{q\ \mathbf{E}\bigl(\chi_-^{(1)}e^{-q\chi_-^{(1)}};\eta_-^{(1)}<\infty\bigr)}+o(1), \tag{15}$$

$$\Pi(z)=-\frac{1-\mathbf{E}e^{-q\chi_+^{(1)}}}{q\mathbf{E}\chi_+^{(1)}}\frac{1-\mathbf{P}\bigl(\eta_-^{(1)}<\infty\bigr)}{q\ \mathbf{E}\bigl(\chi_-^{(1)}e^{-q\chi_-^{(1)}};\eta_-^{(1)}<\infty\bigr)}+o(1). \tag{16}$$

Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)}<0$, то при $z\to1$

$$\lambda_+^{(1)}(z)=q+o(1),\quad \lambda_-^{(1)}(z)=\frac{1-z}{\mathbf{E}\xi_1^{(1)}}+o(1),$$

$$r_1^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)=1-\mathbf{P}\big(\eta_+^{(1)}<\infty\big)+o(1),\quad r_1^-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)=1-\mathbf{E}e^{q\chi_-^{(1)}}+o(1),$$

$$M_+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)=\frac{1-\mathbf{P}\big(\eta_+^{(1)}<\infty\big)}{q\ \mathbf{E}\big(\chi_+^{(1)}e^{q\chi_+^{(1)}};\eta_+^{(1)}<\infty\big)}+o(1), \tag{17}$$

$$M_-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)=-\frac{1-\mathbf{E}e^{q\chi_-^{(1)}}}{q\mathbf{E}\chi_-^{(1)}}+o(1), \tag{18}$$

$$\Pi(z)=-\frac{1-\mathbf{E}e^{q\chi_-^{(1)}}}{q\mathbf{E}\chi_-^{(1)}}\frac{1-\mathbf{P}\big(\eta_+^{(1)}<\infty\big)}{q\ \mathbf{E}\big(\chi_+^{(1)}e^{q\chi_+^{(1)}};\eta_+^{(1)}<\infty\big)}+o(1). \tag{19}$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)}<0$, $\mathbf{E}\xi_1^{(2)}<0$, то при $z\to1$

$$\begin{gathered} r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\to1-\mathbf{E}\big(e^{q\chi_+^{(2)}};\eta_+^{(2)}<\infty\big),\\ r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)\to1-\mathbf{P}\big(\eta_+^{(2)}<\infty\big), \end{gathered} \tag{20}$$

$$\Big|r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)-r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)\Big|\ge c.$$

2) Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)}=0$, $\mathbf{E}\xi_1^{(2)}<0$, то при $z\to1$

$$\begin{gathered} r_2^+\big(z,\lambda_\pm^{(1)}(z)\big)=1-\mathbf{P}\big(\eta_+^{(2)}<\infty\big)\\ \mp\psi_1^{(1)}\mathbf{E}\big(\chi_+^{(2)};\eta_+^{(2)}<\infty\big)\sqrt{1-z}+o\left(\sqrt{1-z}\right), \end{gathered} \tag{21}$$

$$\left|\frac{\sqrt{1-z}}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)-r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}\right|\le c,$$

$$1-M_+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)\mu^{-x}(z)=\psi_1^{(1)}\left(\frac{\mathbf{E}\big(\chi_+^{(1)}\big)^2}{\mathbf{E}\chi_+^{(1)}}+2x\right)\sqrt{1-z}+o\left(\sqrt{1-z}\right).$$

3) Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)}>0$, $\mathbf{E}\xi_1^{(2)}<0$, то при $z\to1$

$$\begin{gathered} r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\to1-\mathbf{P}\big(\eta_+^{(2)}<\infty\big),\\ r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)\to1-\mathbf{E}\big(e^{-q\chi_+^{(2)}};\eta_+^{(2)}<\infty\big), \end{gathered} \tag{22}$$

$$\Big|r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)-r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)\Big|\ge c.$$

4) Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)}<0$, $\mathbf{E}\xi_1^{(2)}=0$, то при $z\to1$

$$r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)=1-\mathbf{E}e^{q\chi_+^{(2)}}+o(1),\quad r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)=\psi_1^{(2)}\mathbf{E}\chi_+^{(2)}\sqrt{1-z}+o\left(\sqrt{1-z}\right),$$

$$\psi_1^{(2)}=\sqrt{\frac{2}{D\xi_1^{(2)}}},$$

$$\Big|r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)-r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)\Big|\ge c.$$

Напомним, что при $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} \geq 0$ функция $1 - zf_2(\lambda)$ имеет как минимум один нуль $\lambda = \lambda_+^{(2)}(z)$, причем $\lambda_+^{(2)}(z) = \psi_1^{(2)}\sqrt{1-z} + o\big(\sqrt{1-z}\big)$, если $z \to 1$ и $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} = 0$.

5) Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} = 0$, то при $z \to 1$

$$r_2^+\big(z, \lambda_\pm^{(1)}(z)\big) = \big(\psi_1^{(2)} \mp \psi_1^{(1)}\big)\mathbf{E}\chi_+^{(2)}\sqrt{1-z} + o\big(\sqrt{1-z}\big),$$

$$\left|\frac{\sqrt{1-z}}{r_2^+\big(z, \lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}\right| \leq c.$$

6) Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} > 0$, $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} = 0$, то при $z \to 1$

$$r_2^+\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big) \to 0, \quad r_2^+\big(z, \lambda_-^{(1)}(z)\big) \to 1 - \mathbf{E}e^{-q\chi_+^{(2)}},$$

$$\Big|r_2^+\big(z, \lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)\Big| \geq c.$$

7) Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} < 0$, $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} > 0$, то при $z \to 1$

$$r_2^+\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big) = 1 - \mathbf{E}\big(e^{q\chi_+^{(2)}}; \eta_+^{(2)} < \infty\big) + o(1),$$

$$r_2^+\big(z, \lambda_-^{(1)}(z)\big) = \left(\frac{1}{\mathbf{E}\xi_1^{(2)}} - \frac{1}{\mathbf{E}\xi_1^{(1)}}\right)\mathbf{E}\chi_+^{(2)}(1-z) + o(1-z),$$

$$\Big|r_2^+\big(z, \lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)\Big| \geq c.$$

8) Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} > 0$, то при $z \to 1$

$$r_2^+\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big) = -\psi_1^{(1)}\mathbf{E}\chi_+^{(2)}\sqrt{1-z} + o\big(\sqrt{1-z}\big),$$

$$r_2^+\big(z, \lambda_-^{(1)}(z)\big) = \psi_1^{(1)}\mathbf{E}\chi_+^{(2)}\sqrt{1-z} + o\big(\sqrt{1-z}\big),$$

$$\left|\frac{\sqrt{1-z}}{r_2^+\big(z, \lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}\right| \leq c.$$

9) Если $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} > 0$, $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} > 0$, то при $z \to 1$

$$r_2^+\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big) \to 0, \quad r_2^+\big(z, \lambda_-^{(1)}(z)\big) \to 1 - \mathbf{E}e^{-q\chi_+^{(2)}},$$

$$\Big|r_2^+\big(z, \lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)\Big| \geq c.$$

С учетом полученных разложений выражение (11) можно записать в виде

$$1 - Q_0\big(z, \lambda_-^{(1)}(z)\big) = \frac{r_2^+\big(z, \lambda_-^{(1)}(z)\big)\big(1 - M_+\big(z, \lambda_-^{(1)}(z)\big)\mu^{-x}(z)\big)}{r_2^+\big(z, \lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)} + S_1(z), \tag{23}$$

где для $z \in Z_\delta$

$$S_1(z) = r_2^+\big(z, \lambda_-^{(1)}(z)\big)\Big(S_2(z) + r_2^+\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big)S_3(z)\Big),$$

$$|S_2(z)| \leq c\mu^{-x}\big(e^{-\varepsilon x} + \mu^a e^{-\varepsilon(x-a)}\big\|L(z,\lambda)\big\|\big),$$

$$|S_3(z)| \leq c\mu^{a-x}e^{\varepsilon a}\big\|L(z,\lambda)\big\|.$$

После подстановки последнего выражения в (10) получим при $Re\lambda = 0$, $z \in Z_\delta$

$$(24) \qquad Q_0(z,\lambda) = \frac{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)M_-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\ \mu^a(z)}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}$$
$$\cdot M_+(z,\lambda)e^{\left(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z)\right)x} + S_8^+(z,\lambda),$$

где

$$S_8^+(z,\lambda) = -S_1(z)\frac{r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)}\mu^a(z)M_-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)M_+(z,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+^{(1)}(1))x}$$
$$+r_1^+(z,\lambda)S_7^+(z,\lambda) + r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)r_1^-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)S_4^+(z,\lambda).$$

Так как для $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} < 0$

$$\|L(z,\lambda)\| \le c,$$

то для случаев 1), 2), 3) равномерно по $z \in Z_\delta$

$$\big\|S_8^+(z,\lambda)\big\| \le c\left(\left|S_1(z)\frac{r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)}\mu^a(z)e^{-\lambda_+^{(1)}(z)x}\right| + \big\|S_4^+(z,\lambda)\big\| + \big\|S_7^+(z,\lambda)\big\|\right)$$
$$(25) \qquad \le ce^{-\lambda_+^{(1)}(1)x}\left(e^{-\varepsilon x} + \mu^a e^{\varepsilon a}\right).$$

Отметим, что соотношение (24) вместе с оценкой остатка (25) справедливо для любого $z \in Z_\delta \cup \{z=1\}$. Осталось рассмотреть случаи 5) − 9). Напомним, что тогда при $z \in Z_\delta \cup \{z=1\}$ для достаточно малого $\delta > 0$ у функции $1 - zf_2(\lambda)$ существует решение $\lambda = \lambda_+^{(2)}(z)$. Поэтому, если ввести функцию

$$\omega_2^+(z,\lambda) = \frac{r_2^+(z,\lambda)}{\lambda - \lambda_+^{(2)}(z)}(\lambda-\gamma),$$

то она будет обладать подобными свойствами, что и $\big(\omega_1^+(z,\lambda)\big)^{\pm 1}$ (см. [19]).

Рассмотрим далее случаи 5), 6), 9). Из соотношения (24) следует, что

$$L(z,\lambda) = \frac{r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\mu^a(z)}{r_2^+(z,\lambda)}\cdot\frac{M_-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big) - \Pi(z)\ \mu^{-x}(z)}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}$$
$$-\frac{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)M_-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\ \mu^a(z)}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}\cdot\frac{M_+(z,\lambda)e^{\left(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z)\right)x}-1}{r_2^+(z,\lambda)}$$
$$+\frac{S_8^+(z,\lambda)}{r_2^+(z,\lambda)}.$$

Так как равномерно по $z \in Z_\delta$

$$\left\|\frac{\lambda_+^{(2)}(z)}{r_2^+(z,\lambda)}\right\| = \left\|\frac{\lambda_+^{(2)}(z)}{\omega_2^+(z,\lambda)}\ \frac{\lambda-\gamma}{\lambda-\lambda_+^{(2)}(z)}\right\| \le c,$$

то нетрудно получить, что

$$\left\|\frac{r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)}{r_2^+(z,\lambda)}\right\| \le c\left|\frac{r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)}{\lambda_+^{(2)}(z)}\right|,$$

$$\left\| \frac{r_1^+(z,\lambda)}{r_2^+(z,\lambda)} \right\| = \left\| \frac{\omega_1^+(z,\lambda)}{\omega_2^+(z,\lambda)} \; \frac{\lambda - \lambda_+^{(1)}(z)}{\lambda - \lambda_+^{(2)}(z)} \right\| \le c\left(1 + \left| \frac{\lambda_+^{(1)}(z)}{\lambda_+^{(2)}(z)} \right| \right).$$

Отметим, что функция

$$\left(M_+(z,\lambda) e^{\left(\lambda - \lambda_+^{(1)}(z)\right)x} - 1 \right) \frac{\lambda - \gamma}{\lambda - \lambda_+^{(1)}(z)}$$

для любого $z \in Z_\delta \cup \{z = 1\}$ принадлежит множеству Λ, поэтому

$$\left\| \frac{M_+(z,\lambda) e^{\left(\lambda - \lambda_+^{(1)}(z)\right)x} - 1}{r_2^+(z,\lambda)} \right\| \le c \left(1 + \left| \frac{\lambda_+^{(1)}(z)}{\lambda_+^{(2)}(z)} \right| \right).$$

Кроме того, для случая 5) справедлива равномерная по $z \in Z_\delta$ оценка

$$\left| \frac{M_-\left(z, \lambda_+^{(1)}(z)\right) - \Pi(z)\mu^{-x}(z)}{\sqrt{1-z}} \right| \le c.$$

Так как для случаев 5), 6), 9)

$$\left| \frac{\lambda_+^{(1)}(z)}{\lambda_+^{(2)}(z)} \right| \le c,$$

то отсюда сразу же следует равномерная по $z \in Z_\delta$ ограниченность по норме функции $L(z,\lambda)$ для случаев 5), 6), 9) и справедливость для них представления (24) с оценкой остатка (25) для любого $z \in Z_\delta \cup \{z = 1\}$.

Осталось рассмотреть случаи 4), 7), 8).

Умножив левую и правую часть тождества (1) на $\left(\omega_1^-(z,\lambda) r_2^+(z,\lambda)\right)^{-1}$, получим

$$\frac{1 - Q_0(z,\lambda)}{\omega_1^-(z,\lambda) r_2^+(z,\lambda)} = \frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}}{\lambda + \gamma} \frac{r_1^+(z,\lambda)}{r_2^+(z,\lambda)} Q_1(z,\lambda) + \frac{r_2^-(z,\lambda)}{\omega_1^-(z,\lambda)} Q_2(z,\lambda).$$

Так как функция $\dfrac{r_2^-(z,\lambda)}{\omega_1^-(z,\lambda)} Q_2(z,\lambda) \in \Lambda_a^-(0)$ при $z \in Z_\delta$, то в соответствии с леммой 1 имеет место следующее соотношение:

$$r_2^-(z,\lambda) Q_2(z,\lambda) = K_1(z) M_-(z,\lambda) e^{\left(\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)\right)a} + \omega_1^-(z,\lambda) \left[\frac{1 - Q_0(z,\lambda)}{\omega_1^-(z,\lambda) r_2^+(z,\lambda)} \right]^{(-\infty,a)},$$

где $K_1(z)$ – некоторая неизвестная функция.

Из определения функции $\omega_1^-(z,\lambda)$ и (4) следует представление для $z \in Z_\delta$

$$\frac{1}{\omega_1^-(z,\lambda)} = \frac{1}{(r_1^-)'\left(z, \lambda_-^{(1)}(z)\right)} \frac{1}{\lambda + \gamma} + T^-(z,\lambda) \frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda + \gamma},$$

поэтому, опять применив лемму 1, можно записать

$$\left[\frac{1 - Q_0(z,\lambda)}{\omega_1^-(z,\lambda) r_2^+(z,\lambda)} \right]^{(-\infty,a)} = \frac{K_2(z)}{(r_1^-)'\left(z, \lambda_-^{(1)}(z)\right)} \frac{e^{\lambda a}}{\lambda + \gamma}$$

$$+ \left[T^-(z,\lambda) \frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda + \gamma} L(z,\lambda) \right]^{(-\infty,a)},$$

где $K_2(z)$ – некоторая неизвестная функция и для $z \in Z_\delta$

$$\left\| \left[T^-(z,\lambda) \frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda + \gamma} L(z,\lambda) \right]^{(-\infty,a)} \right\|$$
$$= \left\| \left[T^-(z,\lambda) \frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda + \gamma} \frac{\lambda - \gamma}{\lambda - \lambda_+^{(2)}(z)} \frac{1 - Q_0(z,\lambda)}{\omega_2^+(z,\lambda)} \right]^{(-\infty,a)} \right\|$$
$$\le \left\| \left[T^-(z,\lambda) \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} \right]^{(-\infty,a)} \right\| \left\| \big(1 - Q_0(z,\lambda)\big) \frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda - \lambda_+^{(2)}(z)} \right\| \left\| \frac{1}{\omega_2^+(z,\lambda)} \right\|$$
$$\le c e^{-(\lambda_-^{(1)}(1) - \varepsilon)a} \left\| \big(1 - Q_0(z,\lambda)\big) \frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda - \lambda_+^{(2)}(z)} \right\|.$$

Отметим, что равномерно по $z \in Z_\delta$ для случаев 4) и 7)

$$\left\| \frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda - \lambda_+^{(2)}(z)} \right\| \le c,$$

а для случая 8)

$$\left\| \sqrt{1-z}\, \frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda - \lambda_+^{(2)}(z)} \right\| \le c.$$

Таким образом, получаем, что

(26) $$(1 - zf_2(\lambda))Q_2(z,\lambda) = K_3(z) r_2^+(z,\lambda) M_-(z,\lambda) e^{(\lambda - \lambda_-^{(1)}(z))a} + r_2^+(z,\lambda) S_2^-(z,\lambda),$$

где $K_3(z) = K_1(z) + e^{\lambda_-^{(1)}(z)a} K_2(z)$, $S_2^-(z,\lambda) \in \Lambda_a^-(0)$ для $z \in Z_\delta$ и

$$\left\| S_2^-(z,\lambda) \right\| \le c e^{-(\lambda_-^{(1)}(1) - \varepsilon)a} \left\| (1 - Q_0(z,\lambda))\, \frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda - \lambda_+^{(2)}(z)} \right\|.$$

Тогда легко видеть, что

$$Q_0(z,\lambda) = \mathcal{X}(1) - \mathcal{X}\left((1 - zf_2(\lambda))Q_2(z,\lambda)\right)$$
$$= \mathcal{X}(1) - K_3(z) e^{-\lambda_-^{(1)}(z)a} \mathcal{X}\left(r_2^+(z,\lambda) M_-(z,\lambda) e^{\lambda a}\right) - \mathcal{X}\left(r_2^+(z,\lambda) S_2^-(z,\lambda)\right).$$

Так как можно записать

$$\mathcal{X}\left(r_2^+(z,\lambda) S_2^-(z,\lambda)\right) = r_2^+\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big) \mathcal{X}\left(S_2^-(z,\lambda)\right)$$
$$+ \mathcal{X}\left(\left(r_2^+(z,\lambda) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\right) S_2^-(z,\lambda)\right)$$
$$\equiv -r_2^+\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big) S_9^+(z,\lambda) - r_1^+(z,\lambda) S_{10}^+(z,\lambda),$$

где согласно лемме 6 для $z \in Z_\delta$ $S_i^+(z,\lambda) \in \Lambda_x^+(0)$, $i = 9, 10$,

$$\left\| S_9^+(z,\lambda) \right\| \le c e^{-\lambda_+^{(1)}(1)(x-a)} \left\| S_2^-(z,\lambda) \right\|$$
$$\le c \mu^a e^{-\lambda_+^{(1)}(1)x} e^{\varepsilon a} \left\| (1 - Q_0(z,\lambda))\, \frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda - \lambda_+^{(2)}(z)} \right\|,$$
$$\left\| S_{10}^+(z,\lambda) \right\| \le c e^{-\left(\lambda_+^{(1)}(1) + \varepsilon\right)(x-a)} \left\| S_2^-(z,\lambda) \right\|$$

$$\leq c\mu^a e^{-\lambda_+^{(1)}(1)x} e^{-\varepsilon(x-a)} \left\| (1 - Q_0(z,\lambda)) \frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda - \lambda_+^{(2)}(z)} \right\|,$$

то вместе с соотношениями (7), (9) получаем представление

$$Q_0(z,\lambda) = \big(1 - K_3(z) r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big) M_-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\mu^a(z)\big) \tag{27}$$

$$\cdot M_+(z,\lambda) e^{(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z))x} + r_1^+(z,\lambda)\big(S_1^+(z,\lambda) - K_3(z) e^{-\lambda_-^{(1)}(z)a} S_3^+(z,\lambda) + S_{10}^+(z,\lambda)\big)$$
$$+ r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big) S_9^+(z,\lambda).$$

Так как функция $T^-(z,\lambda) \in \Lambda_0^-(\lambda_-^{(1)}(1) - \varepsilon)$, то функция

$$S_2^-(z,\lambda) \in \Lambda_a^-(\lambda_-^{(1)}(1) - \varepsilon)$$

при $z \in Z_\delta$.

Поэтому из соотношения (26) следует, что функция $(1 - zf_2(\lambda))Q_2(z,\lambda)$ аналитична в области $\lambda_-^{(1)}(1) - \varepsilon < Re\lambda < 0$ и непрерывна на границе при $z \in Z_\delta$. Можно выбрать такое малое $\delta > 0$, что при $z \in Z_\delta$ функция $\lambda_-^{(1)}(|z|) > \lambda_-^{(1)}(1) - \varepsilon$ и после подстановки $\lambda = \lambda_-^{(1)}(z)$ в тождество (1) получим

$$1 - Q_0\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) = \big(1 - zf_2\big(\lambda_-^{(1)}(z)\big)\big) Q_2\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big).$$

Из соотношений (26) и (27) следует, что

$$1 - M_+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)\mu^{-x}(z) + K_3(z) r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)$$
$$-r_1^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)\big(S_1^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) + S_{10}^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) - K_3(z) e^{-\lambda_-^{(1)}(z)a} S_3^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)\big)$$
$$-r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big) S_9^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) = r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) K_3(z) + r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) S_2^-\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big).$$

Тогда для всех трех случаев 4), 7), 8) можно записать при $z \in Z_\delta$

$$K_3(z) = \frac{1 - M_+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)\mu^{-x}(z)}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}$$
$$-\frac{r_1^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)} K_3(z) e^{-\lambda_-^{(1)}(z)a} S_3^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)$$
$$-\frac{r_1^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)} \Big(S_1^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) + S_{10}^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)\Big)$$
$$-\frac{r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)} S_9^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)$$
$$-\frac{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)} S_2^-\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big).$$

Отметим, что для случаев 4) и 7)

$$\Big| r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z) + r_1^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) e^{-\lambda_-^{(1)}(z)a} S_3^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)\Big| \geq c$$

и для случая 8)

$$\left| \frac{\sqrt{1-z}}{r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z) + r_1^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) e^{-\lambda_-^{(1)}(z)a} S_3^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)} \right| \leq c.$$

Кроме того, нетрудно видеть, что при $z \in Z_\delta$

$$|S_i^+\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr)| \le \bigl\|S_i^+(z, \lambda)\bigr\|, \quad i = 1, 3, 9, 10,$$

$$|S_2^-\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr)| \le ce^{\varepsilon a}\left\|(1 - Q_0(z, \lambda))\,\frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda - \lambda_+^{(2)}(z)}\right\|.$$

Из того, что

$$|K_3(z)e^{-\lambda_-^{(1)}(z)a}S_3^+\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr))| \le |K_3(z)|\mu^{a-x}e^{-\varepsilon(x-a)},$$

то при достаточно большом значении $x - a$ сразу же получим в случаях 4), 7) оценку $|K_3(z)| \le c$ равномерно по $z \in Z_\delta$.

Так как в случае 8) для любого $z \in Z_\delta$

$$\left|\frac{1 - M_+\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr)\mu^{-x}(z)}{\sqrt{1-z}}\right| \le c,$$

$$\frac{r_2^+\bigl(z, \lambda_\pm^{(1)}(z)\bigr)}{\sqrt{1-z}} \le c, \quad \frac{r_1^+\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr)}{\sqrt{1-z}} \le c,$$

то

$$\begin{aligned} |K_3(z)| &\le c\bigl(1 + |K_3(z)|e^{\lambda_-^{(1)}(1)(x-a)}\|S_3^+(z, \lambda)\| + \|S_9^+(z, \lambda)\| \\ &\quad + \|S_{10}^+(z, \lambda)\| + |S_2^-\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr)|\bigr) \\ &\le c\left(1 + \mu^{a-x}e^{-\varepsilon(x-a)}|K_3(z)| + \left\|(1 - Q_0(z, \lambda))\,\frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda - \lambda_+^{(2)}(z)}\right\|\right). \end{aligned}$$

В итоге для достаточно большого значения $x - a$ при $z \in Z_\delta$

$$|K_3(z)| \le c\left(1 + \left\|(1 - Q_0(z, \lambda))\,\frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda - \lambda_+^{(2)}(z)}\right\|\right)$$

и для $K_3(z)$ справедливо представление при $z \in Z_\delta$ для случаев 4), 7) и 8)

$$K_3(z) = \frac{1 - M_+\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr)\mu^{-x}(z)}{r_2^+\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr) - r_2^+\bigl(z, \lambda_+^{(1)}(z)\bigr)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)} + S_4(z),$$

где

$$\begin{aligned} |S_4(z)| &\le c\bigl(|K_3(z)e^{-\lambda_-^{(1)}(z)a}S_3^+\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr)| + |S_1^+\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr)| + |S_9^+\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr)| \\ &\quad + |S_{10}^+\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr)| + |S_2^-\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr)|\bigr) \\ &\le c\left(e^{-(\lambda_+^{(1)}(1)+\varepsilon)x} + e^{\varepsilon a}\left\|(1 - Q_0(z, \lambda))\,\frac{\lambda - \lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda - \lambda_+^{(2)}(z)}\right\|\right). \end{aligned}$$

Таким образом, если обозначить

$$S_{11}^+(z, \lambda) = S_{10}^+(z, \lambda) - K_3(z)e^{-\lambda_-^{(1)}(z)a}S_3^+(z, \lambda),$$

$$S_{12}^+(z, \lambda) = S_4(z)M_-\bigl(z, \lambda_+^{(1)}(z)\bigr)\mu^a(z)M_+(z, \lambda)e^{(\lambda - \lambda_+^{(1)}(z))x} + S_9^+(z, \lambda),$$

то соотношение (27) можно переписать в виде

$$Q_0(z, \lambda) = \frac{r_2^+\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr) - r_2^+\bigl(z, \lambda_+^{(1)}(z)\bigr)M_-\bigl(z, \lambda_+^{(1)}(z)\bigr)\ \mu^a(z)}{r_2^+\bigl(z, \lambda_-^{(1)}(z)\bigr) - r_2^+\bigl(z, \lambda_+^{(1)}(z)\bigr)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}M_+(z, \lambda)e^{(\lambda - \lambda_+^{(1)}(z))x}$$

$$+r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)S_{12}^+(z,\lambda)+r_1^+(z,\lambda)\big(S_1^+(z,\lambda)+S_{11}^+(z,\lambda)\big),$$

где при $z\in Z_\delta$

$$\big\|S_{11}^+(z,\lambda)\big\|\le c\mu^a e^{-\lambda_+^{(1)}(1)x}e^{-\varepsilon(x-a)}\left(1+\left\|(1-Q_0(z,\lambda))\,\frac{\lambda-\lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda-\lambda_+^{(2)}(z)}\right\|\right),$$

$$\big\|S_{12}^+(z,\lambda)\big\|\le c\mu^a e^{-\lambda_+^{(1)}(1)x}\,|S_4(z)|+\big\|S_9^+(z,\lambda)\big\|$$

$$\le c\mu^a e^{-\lambda_+^{(1)}(1)x}\left(e^{-\varepsilon x}+e^{\varepsilon a}\left\|(1-Q_0(z,\lambda))\,\frac{\lambda-\lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda-\lambda_+^{(2)}(z)}\right\|\right).$$

Отметим, что тогда для случаев 4) и 7)

$$\big\|r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)S_{12}^+(z,\lambda)+r_1^+(z,\lambda)\big(S_1^+(z,\lambda)+S_{11}^+(z,\lambda)\big)\big\|$$
$$\le ce^{-\lambda_+^{(1)}(1)x}\left(e^{-\varepsilon x}+\mu^a e^{\varepsilon a}\right).$$

Тем самым получено утверждение Теоремы 2 для случаев 4) и 7).

Остается рассмотреть случай 8), где для завершения доказательства достаточно показать равномерную ограниченность

$$\left\|\,(1-Q_0(z,\lambda))\,\frac{\lambda-\lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda-\lambda_+^{(2)}(z)}\right\|$$

для любого $z\in Z_\delta$.

Рассмотрим следующее представление

$$(1-Q_0(z,\lambda))\,\frac{\lambda-\lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda-\lambda_+^{(2)}(z)}$$

$$=\frac{\lambda-\lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda-\lambda_+^{(2)}(z)}\cdot\frac{r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\mu^a(z)\big(M_-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)-\Pi(z)\;\mu^{-x}(z)\big)}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)-r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}$$
$$-\frac{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)-r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)M_-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\;\mu^a(z)}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big)-r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}$$
$$\cdot\big(M_+(z,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z))x}-1\big)\frac{\lambda-\lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda-\lambda_+^{(2)}(z)}$$
$$+\frac{\lambda-\lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda-\lambda_+^{(2)}(z)}\big(r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)S_{12}^+(z,\lambda)+r_1^+(z,\lambda)\big(S_1^+(z,\lambda)+S_{11}^+(z,\lambda)\big).$$

Отметим, что в случае 8) равномерно по $z\in Z_\delta$

$$\left\|r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\frac{\lambda-\lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda-\lambda_+^{(2)}(z)}\right\|\le c,$$

$$\left\|r_1^+(z,\lambda)\frac{\lambda-\lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda-\lambda_+^{(2)}(z)}\right\|\le\left\|\omega_1^+(z,\lambda)\frac{\lambda-\lambda_+^{(1)}(z)}{\lambda-\gamma}\,\frac{\lambda-\lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda-\lambda_+^{(2)}(z)}\right\|\le c.$$

и

$$\left\|\big(M_+(z,\lambda)e^{\left(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z)\right)x}-1\big)\frac{\lambda-\lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda-\lambda_+^{(2)}(z)}\right\|\le$$

$$\left\| \frac{M_+(z,\lambda)e^{(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z))x}-1}{\lambda-\lambda_+^{(1)}(z)}(\lambda-\gamma) \right\| \left\| \frac{\lambda-\lambda_+^{(1)}(z)}{\lambda-\gamma}\frac{\lambda-\lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda-\lambda_+^{(2)}(z)} \right\| \le c.$$

Отсюда немедленно следует, что для всех случаев 4), 7) и 8) для достаточно больших x и $|a|$ равномерно по $z \in Z_\delta$

$$\left\| (1-Q_0(z,\lambda))\,\frac{\lambda-\lambda_-^{(1)}(z)}{\lambda-\lambda_+^{(2)}(z)} \right\| \le c.$$

Таким образом, для случаев 4), 7), 8) справедливо представление для любого $z \in Z_\delta \cup \{z=1\}$

$$Q_0(z,\lambda) = \frac{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)M_-\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\ \mu^a(z)}{r_2^+\big(z,\lambda_-^{(1)}(z)\big) - r_2^+\big(z,\lambda_+^{(1)}(z)\big)\Pi(z)\mu^{a-x}(z)}$$

$$\cdot M_+(z,\lambda)e^{\left(\lambda-\lambda_+^{(1)}(z)\right)x} + S_{13}^+(z,\lambda),$$

где $S_{13}^+(z,\lambda) \in \Lambda_x^+(0)$ и равномерно по $z \in Z_\delta$

$$\big\| S_{13}^+(z,\lambda) \big\| \le ce^{-\lambda_+^{(1)}(1)x}\big(e^{-\varepsilon x} + \mu^a e^{\varepsilon a}\big).$$

Теорема 2 доказана.

4. Следствия теоремы 2

Из Теоремы 2 сразу же вытекает ряд следствий для случайных блужданий с $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} < 0$. Введем дополнительные обозначения. Пусть

$$\mathbf{P}\left(\eta_+^{(2)} < \infty\right) = p_+^{(2)}, \quad \mathbf{P}\left(\eta_\pm^{(1)} < \infty\right) = p_\pm^{(1)}.$$

Если $\mathbf{E}|\chi_\pm^{(1)}| < \infty$, то через $\gamma_\pm^{(1)}$ будем обозначать случайные величины с ПЛС

$$\mathbf{E}e^{\lambda\gamma_\pm^{(1)}} = -\frac{1}{\mathbf{E}\chi_\pm^{(1)}}\frac{1-\mathbf{E}e^{\lambda\chi_\pm^{(1)}}}{\lambda}, \qquad Re\lambda = 0,$$

($\pm\gamma_\pm^{(1)}$ принято называть величинами перескока последовательностью $S_n^{(1)}$ через бесконечно удаленный положительный (отрицательный) барьер). При $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} < 0$ будет также использоваться хорошо известное соотношение

$$\frac{1}{r_2^+(1,\lambda)} = \left(1-p_+^{(2)}\right)^{-1}\mathbf{E}e^{\lambda\overline{S}^{(2)}}, \quad \overline{S}^{(2)} = \sup_{n\ge 0} S_n^{(2)}.$$

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (A_1), (A_2), $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} < 0$. *Тогда для некоторого* $\varepsilon > 0$ *при* $x \to \infty$ *и* $a \to -\infty$

$$\mathbf{P}\,(M > x) = \frac{-a+d_1}{x-a+d_1+d_2} + O\left(e^{-\varepsilon x} + e^{\varepsilon a}\right),$$

$$d_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{E}\big(\chi_-^{(2)}\big)^2}{\mathbf{E}\chi_-^{(2)}} - \frac{\mathbf{E}\big(\chi_-^{(1)}\big)^2}{\mathbf{E}\chi_-^{(1)}} - \frac{\mathbf{E}\big(\xi_1^{(2)}\big)^2}{\mathbf{E}\xi_1^{(2)}}\right), \quad d_2 = \frac{\mathbf{E}\big(\chi_+^{(1)}\big)^2}{2\mathbf{E}\chi_+^{(1)}}.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* (A_1), (A_2), $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} < 0$, $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} < 0$. *Тогда для некоторого* $\varepsilon > 0$ *при* $x \to \infty$ *и* $a \to -\infty$

$$\mathbf{P}\left(M > x\right) = d_1 e^{-qx} \frac{1 - d_2 e^{qa}}{1 - d_1 d_2 e^{q(a-x)}} + O\left(e^{-(q+\varepsilon)x} + e^{(q+\varepsilon)a}\right),$$

где

$$d_1 = \frac{1 - p_+^{(1)}}{q\mathbf{E}\left(\chi_+^{(1)} e^{q\chi_+^{(1)}}; \eta_+^{(1)} < \infty\right)}, \quad d_2 = \frac{\mathbf{E}e^{q\gamma_-^{(1)}}}{\mathbf{E}e^{q\overline{S}^{(2)}}}.$$

Следствие 3. *Пусть выполнены условия* (A_1), (A_2), $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} > 0$, $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} < 0$. *Тогда для некоторого* $\varepsilon > 0$ *при* $x \to \infty$ *и* $a \to -\infty$

$$\mathbf{P}\left(M > x\right) = \frac{1 - d_2 e^{qa}}{1 - d_1 d_2 e^{q(a-x)}} + O\left(e^{-\varepsilon x} + e^{(q+\varepsilon)a}\right),$$

где

$$d_1 = \mathbf{E}e^{-q\gamma_+^{(1)}}, \quad d_2 = -\frac{(1 - p_-^{(1)})\mathbf{E}e^{-q\overline{S}^{(2)}}}{q\mathbf{E}\big(\chi_-^{(1)} e^{-q\chi_-^{(1)}}; \eta_-^{(1)} < \infty\big)}.$$

Доказательство следствия 1.

Из разложения (21) и тождества

$$\frac{\mathbf{E}\left(\chi_+^{(2)}; \eta_+^{(2)} < \infty\right)}{1 - p_+^{(2)}} = \frac{\mathbf{E}\left(\chi_-^{(2)}\right)^2}{2\mathbf{E}\chi_-^{(2)}} - \frac{\mathbf{E}\left(\xi_1^{(2)}\right)^2}{2\mathbf{E}\xi_1^{(2)}}$$

для $\mathbf{E}\xi_1^{(2)} < 0$ следует, что при $z \to 1$

$$R_2(z) = 1 - 2\psi_1^{(1)} \frac{\mathbf{E}\left(\chi_+^{(2)}; \eta_+^{(2)} < \infty\right)}{1 - p_+^{(2)}} \sqrt{1-z} + o(\sqrt{1-z})$$

$$= 1 - \psi_1^{(1)} \left(\frac{\mathbf{E}\left(\chi_-^{(2)}\right)^2}{\mathbf{E}\chi_-^{(2)}} - \frac{\mathbf{E}\left(\xi_1^{(2)}\right)^2}{\mathbf{E}\xi_1^{(2)}} \right) \sqrt{1-z} + o(\sqrt{1-z}).$$

Тогда из (12), (13) при $z \to 1$ получаем, что

$$R_2(z) M_-\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big) \mu^a(z) =$$

$$1 + \psi_1^{(1)} \left(2a + \frac{\mathbf{E}\left(\chi_-^{(1)}\right)^2}{\mathbf{E}\chi_-^{(1)}} - \frac{\mathbf{E}\left(\chi_-^{(2)}\right)^2}{\mathbf{E}\chi_-^{(2)}} + \frac{\mathbf{E}\left(\xi_1^{(2)}\right)^2}{\mathbf{E}\xi_1^{(2)}} \right) \sqrt{1-z} + o(\sqrt{1-z}),$$

$$R_2(z)\Pi(z)\mu^{a-x}(z) = 1 + \psi_1^{(1)} \left(2(a-x) + \frac{\mathbf{E}\left(\chi_-^{(1)}\right)^2}{\mathbf{E}\chi_-^{(1)}} \right.$$

$$\left. - \frac{\mathbf{E}\left(\chi_+^{(1)}\right)^2}{\mathbf{E}\chi_+^{(1)}} - \frac{\mathbf{E}\left(\chi_-^{(2)}\right)^2}{\mathbf{E}\chi_-^{(2)}} + \frac{\mathbf{E}\left(\xi_1^{(2)}\right)^2}{\mathbf{E}\xi_1^{(2)}} \right) \sqrt{1-z} + o(\sqrt{1-z}),$$

$$M_+(z, 0) e^{-\lambda_+^{(1)}(z)x} \to 1.$$

Доказательство следствия 2. Для $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} < 0$ имеем, что $\lambda_+^{(1)}(1) = q > 0$, $\lambda_-^{(1)}(1) = 0$, поэтому из соотношений (17), (18), (19), (20) получаем, что при $z \to 1$

$$R_2(z) \to \frac{1 - \mathbf{E}\big(e^{q\chi_+^{(2)}}; \eta_+^{(2)} < \infty\big)}{1 - p_+^{(2)}} = \big(\mathbf{E}e^{q\overline{S}^{(2)}}\big)^{-1},$$

$$1 - R_2(z)M_-\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big)\mu^a(z) \to 1 + \big(\mathbf{E}e^{q\overline{S}^{(2)}}\big)^{-1}\frac{1 - \mathbf{E}e^{q\chi_-^{(1)}}}{q\mathbf{E}\chi_-^{(1)}}e^{qa} = 1 - \frac{\mathbf{E}e^{q\gamma_-^{(1)}}}{\mathbf{E}e^{q\overline{S}^{(2)}}}e^{qa},$$

$$1 - R_2(z)\Pi(z)\mu^{a-x}(z) \to 1 - \frac{\mathbf{E}e^{q\gamma_-^{(1)}}}{\mathbf{E}e^{q\overline{S}^{(2)}}}\frac{1 - p_+^{(1)}}{q\ \mathbf{E}\big(\chi_+^{(1)}e^{q\chi_+^{(1)}}; \eta_+^{(1)} < \infty\big)}e^{q(a-x)},$$

$$M_+(z, 0)e^{-\lambda_+^{(1)}(z)x} \to \frac{1 - p_+^{(1)}}{q\ \mathbf{E}\big(\chi_+^{(1)}e^{q\chi_+^{(1)}}; \eta_+^{(1)} < \infty\big)}e^{-qx}.$$

Следствие 2 доказано.

Доказательство следствия 3.

Для $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} > 0$ имеем, что $\lambda_+^{(1)}(1) = 0$, $\lambda_-^{(1)}(1) = -q < 0$, поэтому из соотношений (14), (15), (16), (22) получаем, что при $z \to 1$

$$R_2(z) \to \frac{1 - p_+^{(2)}}{1 - \mathbf{E}\big(e^{-q\chi_+^{(2)}}; \eta_+^{(2)} < \infty\big)} = \mathbf{E}e^{-q\overline{S}^{(2)}},$$

$$1 - R_2(z)M_-\big(z, \lambda_+^{(1)}(z)\big)\mu^a(z) \to 1 + \mathbf{E}e^{-q\overline{S}^{(2)}}\frac{1 - p_-^{(1)}}{q\ \mathbf{E}\big(\chi_-^{(1)}e^{-q\chi_-^{(1)}}; \eta_-^{(1)} < \infty\big)}e^{qa},$$

$$1 - R_2(z)\Pi(z)\mu^{a-x}(z) \to 1 + \mathbf{E}e^{-q\overline{S}^{(2)}}\mathbf{E}e^{q\gamma_+^{(1)}}\frac{1 - p_-^{(1)}}{q\ \mathbf{E}\big(\chi_-^{(1)}e^{-q\chi_-^{(1)}}; \eta_-^{(1)} < \infty\big)}e^{q(a-x)},$$

$$M_+(z, 0)e^{-\lambda_+^{(1)}(z)x} \to 1.$$

Следствие 3 доказано.

Список литературы

[1] А.А. Боровков, *Предельное распределение для осциллирующего случайного блуждания*, Теория вероятностей и ее применения, **25**:3 (1980), 663–665.

[2] J.H. Kemperman, *The oscillating random walk*, Stoch. Proc. Appl., **2**:1 (1974), 1–29. MR0362500

[3] J. Keilson, L.D. Servi, *Oscillating random walk models for GI/G/I vacation systems with Bernoulli schedules*, J. Appl. Probab., **23** (1986), 790–802. MR0855384

[4] Б.А. Рогозин, С.Г. Фосс, *Возвратность осциллирующего случайного блуждания*, Теория вероятностей и ее применения, **23**:1 (1978), 161–169. MR0494508

[5] T. Kadankova, *Exit problems for oscillating compound Poisson process*, arXiv:1101.5279.

[6] Kyprianou A.E., Loeffen R.L., *Refracted Lévy processes*, Annales De L Institut Henri Poincare-Probabilites Et Statistiques, **46**:1 (2010), 24–44. MR2641768

[7] В.И. Прохоров, *Управление винеровским процессом при ограниченном числе переключений* , Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова, **71** (1964), 82–87. Zbl 0156.18402

[8] Д.В. Гусак, *Об осциллирующих схемах случайного блуждания. 1* , Теория вероятностей и математическая статистика, **39** (1988), 33–39. MR0947928

[9] Д.В. Гусак, *Об осциллирующих схемах случайного блуждания. 2* , Теория вероятностей и математическая статистика, **40** (1989), 11–17. MR1001934

[10] Д.В. Гусак, *Осциллирующие процессы с независимыми приращениями и невырожденной винеровской компонентой*, Укр. мат. журн., **42**:10 (1990), 1415–1421. MR1090534

[11] Н.С. Братийчук, Д.В. Гусак, *Эргодическое распределение осциллирующего процесса с независимыми приращениями*, Укр. мат. журн., **38**:5 (1986), 547–554. MR0870356

[12] В.И. Лотов, *Об осциллирующих случайных блужданиях*, Сиб. мат. журн., **37**:4 (1996), 869–880. MR1643307

[13] Д.К. Ким, В.И. Лотов, *Об осциллирующих случайных блужданиях с двумя уровнями переключений*, Математические труды, **6**:1 (2003), 34–74. MR1985625

[14] Д.К. Ким, В.И. Лотов, *Асимптотика стационарного распределения осциллирующего случайного блуждания*, Сиб. мат. журнал, **45**:5 (2004), 1112–1129. MR2087338

[15] Д.К. Ким, *Асимптотический анализ осциллирующих случайных блужданий*, Математические труды, **8**:2 (2005), 137–167. Zbl 1249.60087

[16] А.А. Боровков, Д.А.Коршунов, *Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 1. Стационарные распределения*, Теория вероятностей и ее применения, **41**:1 (1996), 3–30. MR1404893

[17] А.А. Боровков, Д.А.Коршунов, *Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 2. Достационарные распределения в экспоненциальном случае* , Теория вероятностей и ее применения, **45**:3 (2000), 437–468. MR1967784

[18] А.А. Боровков, Д.А.Коршунов, *Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 3. Достационарные распределения в субэкспоненциальном случае*, Теория вероятностей и ее применения, **46**:4 (2001), 640–657. MR1971825

[19] А.А. Боровков, *Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых*, Сиб. мат. журн., **3**:5 (1962), 645–694. MR0145568

[20] В.И. Лотов, *Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах.1.*, Теория вероятностей и ее применения, **24**:3 (1979), 475–485. MR0541361

[21] А.А. Боровков, *Теория вероятностей* , М.:Эдиториал УРСС, 1999. Zbl 1001.60001

[22] В.И. Лотов, *Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий*, Сиб. мат. журн., **40**:5 (1999), 1095–1108. MR1726854

Дмитрий Константинович Ким
Казахский Национальный Технический Университет им. К.И. Сатпаева,
ТОО “EcoRisk”,
Сатпаева 22,
050013, Алматы, Казахстан
E-mail address: kdk26@mail.ru