S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.1–С.293 (2015)
DOI 10.17377/semi.2015.12.089

ТРУДЫ
VI МЕЖДУНАРОДНОЙ МОЛОДЕЖНОЙ
ШКОЛЫ-КОНФЕРЕНЦИИ
“ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ”

Под редакцией С. И. Кабанихина и М. А. Шишленина

2015

Содержание

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. C.5–C.14 (2015) УДК 550.4
MSC 45A05

О РЕКОНСТРУКЦИИ ВОЗРАСТНЫХ СПЕКТРОВ

Д.В. АЛЕКСЕЕВ

Abstract. Problem of age spectrum reconstruction at ^{40}Ar/^{39}Ar dating has been consider. This problem comes to solution of Fredholm integral equation of the first kind. Numerical solution of this equation algorithm has been devised with a glance feature problem. It has been showed that digitization of linear integral equation can simplify regularizing.

Keywords: linear integral equation, ^{40}Ar/^{39}Ar dating.

1. Введение

На сегодняшний день аргон-аргоновый метод датирования является одним из наиболее востребованных методов определения возраста горных пород и минералов. Данный метод привлекателен тем, что позволяет не только определять возраст образца, но и восстанавливать его термическую историю. Аргон-аргоновый метод датирования используется во многих лабораториях мира (Англии, Японии и т.д. [1, 2, 3])

Суть аргон-аргонового датирования заключается в следующем. В минерале, содержащем калий, с течением времени накапливается ^{40}Ar, который образуется за счёт спонтанного радиоактивного распада ^{40}K. Навеску образца облучают в ядерном реакторе потоком быстрых нейтронов, в результате чего, в ней образуется ^{39}Ar количество которого пропорционально количеству ^{40}K. Возраст образца определяется по изотопному составу аргона. Аргон выделяется с помощью методики ступенчатого отжига: температуру навески образца, помещенной в вакуумную камеру масс-спектрометра, повышают в несколько этапов,

---

Alekseev, D.V., About reconstruction of age spectrum.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования и науки. РФ (государственное задание №2014/139 – проект №825).

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

анализируя изотопный состав газа, выделенного на каждой из ступеней нагрева. Разным ступеням нагрева могут соответствовать разные значения возраста. В результате данной процедуры получают зависимость значения возраста от доли выделенного ^{39}Ar - возрастной спектр. Возрастной спектр аппроксимируется ступенчатой функцией, каждая ступень которой соответствует этапу выделения аргона. Как правило, в возрастном спектре присутствует несколько последовательных ступеней которым отвечает одно и то же значение возраста (возрастное плато), это значение и является возрастом образца [4].

Возрастной спектр легко вычисляется по зависимости изотопного отношения ^{40}Ar/^{39}Ar от доли выделенного ^{39}Ar. Пусть $I(n)$ - истинная зависимость изотопного отношения ^{40}Ar/^{39}Ar от доли выделенного ^{39}Ar; $G(n)$ - гладкая непрерывная функция аппроксимирующая измеряемую зависимость изотопного отношения ^{40}Ar/^{39}Ar от доли выделенного ^{39}Ar; $f(n)$ - гладкая непрерывная функция аппроксимирующая зависимость полуширины ступени дегазации образца (по доле выделенного ^{39}Ar) от доли выделенного ^{39}Ar. Истинная зависмость $I(n)$ связанна с измеряемой зависимотью $G(n)$ уравнением Фредголма первого рода:

$$G(n) = \int_{-\infty}^{\infty} V(n,n')I(n')dn', \tag{1}$$

где

$$V(n,n') = \frac{\eta(n'-n+f(n)) - \eta(n'-n-f(n))}{2f(n)}, \tag{2}$$

$\eta(x)$ - функция Хэвисайда. Таким образом, на практике имеют место искажения возрастных спектров, обусловленные усреднением истинной зависимости $I(n)$ при измерениях. На сколько могут быть велики данные искажения показывает следующий пример.

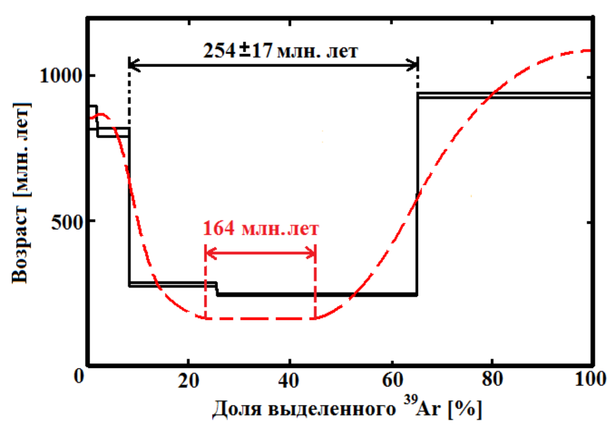


Рис. 1. Возрастной спектр пироксена

На рисунке 1 чёрной сплошной линией обозначен экспериментальный возрастной спектр пироксена (лаборатория Изотопно-аналитической геохимии ИГМ

СО РАН, автор образца Афанасьев В.П.). Усреднение изотопного состава аргона, по доле выделенного ^{39}Ar, имевшее место при измерении возрастного спектра пироксена, преобразует возрастной спектр, обозначенный красной пунктирной линией, в возрастной спектр, совпадающий в пределах погрешности с возрастным спектром пироксена. Таким образом, возрастной спектр, обозначенный красной пунктирной линией, представляет собой теоретическую модель истинного возрастного спектра пироксена. Сравнивая представленные возрастные спектры, нетрудно прийти к выводу, что усреднение зависимости $I(n)$ при измерениях, может приводить к существенным искажениям возрастного спектра. Данный пример является далеко не единственным, аналогичные возрастные спектры можно найти, например, в работах [5, 6, 7].

Подавление описанных искажений за счёт увеличения количества ступеней дегазации затруднительно по ряду технических причин. Основная трудность заключается в отсутствии надежного контроля над количеством аргона, выделяемого на той или иной ступени дегазации. Кроме того, увеличение количества ступеней дегазации приводит к уменьшению количества газа на каждой из них и, как следствие, росту погрешности измерений. Увеличение средней массы навесок образцов крайне не желательно, например, из-за увеличения риска повреждения коллекторов масс-спектрометра.

Повышение качества измерения возрастных спектров является весьма актуальной методической задачей. Кроме того, существует ряд других методов геохронологических и геохимических исследований предполагающих ступенчатое выделение анализируемого вещества (например, [8]). Описанная проблема является общей для всех этих методов. В современной литературе данная проблема не обсуждалась [см. все приведённые выше ссылки]. Данная работа посвящена разработке метода численной реконструкции истинных характеристик изотопных систем образцов горных пород и минералов при ступенчатом выделении анализируемого вещества.

2. Особенности задачи

Ядро интегрального уравнения (1) - $V(n, n')$ представляет собой прямоугольное окно усреднения переменной ширины. Зависимость полуширины данного окна усреднения от доли выделенного ^{39}Ar - $f(n)$ заранее неизвестна и произвольна, что обусловлено отсутствием надежного контроля над количеством аргона, выделяемого на той или иной ступени дегазации.

Интегральное уравнение (1) может быть сведено к системе линейных алгебраических уравнений путём замены интеграла квадратурной суммой и изменением значений n. Из-за того, что окно усреднения имеет строго прямоугольную форму, матрица полученной системы уравнений будет иметь ленточную структуру, при этом ненулевые части каждой строки данной матрицы будут состоять из равных элементов. В результате этого, при выполнении прямого хода метода Гаусса, большая часть диагональных элементов данной матрицы обратится в ноль. Это означает, что количество базисных уравнений, входящих в полученную систему уравнений, существенно меньше количества неизвестных. В связи с этим, непосредственная регуляризация и численное решение интегрального уравнения (1) (например, [9, 10]) затруднительно - получаемое решение во многих случаях неустойчиво. В связи с этим для решения уравнения (1) был создан специальный численный алгоритм.

3. Дискретизация задачи

Алгоритм численного решения интегрального уравнения (1) может быть организован в следующей последовательности: дискретизация задачи – сведение интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений (с заданной степенью точности); регуляризация полученной системы уравнений; и решение. Рассмотрим первую часть алгоритма.

Дискретизация задачи обычно предполагает переход от бесконечно малых величин и интегралов к конечным приращениям и квадратурным суммам. В рассматриваемой задаче функция $I(n)$ имеет смысл и определена на интервале $[0,1]$. Разобьём данный интервал на K равных частей точками n'_0, n'_1,...,n'_q,..., n'_K. Пусть функция $G(n)$ определена на интервале $[a,b]$. Разобьём данный интервал на K равных частей точками n_0, n_1,...,n_p,..., n_K. Кроме того, введём следующие обозначения: $I(\overline{n'_q})$ - среднее значение функции $I(n)$ на интервале $[n'_{q-1},n'_q]$; $\varDelta n'$ - ширина интервалов $[n'_{q-1},n'_q]$; $G(\overline{n_p})$ – среднее значение функции $G(n)$ на интервале $[n_{p-1},n_p]$; $\varDelta n$ - ширина интервалов $[n_{p-1},n_p]$; $V(\overline{n_p},\overline{n'_q})$ - среднее значение функции $V(n,n')$ в квадрате $[n_{p-1},n_p]\times[n'_{q-1},n'_q]$. В этом случае интегральное уравнение (1) можно заменить следующей системой уравнений:

$$G(\overline{n_p}) = \sum_q V(\overline{n_p},\overline{n'_q}) I(\overline{n'_q}) \varDelta n'. \tag{3}$$

Пусть $i(n)_l$ - функциональный базис, индекс l указывает номер функции, входящей в данный функциональный базис; F_s — система линейных функционалов, индекс s указывает номер функционала; i^0_l — коэффициент разложения истинной зависимости $I(n)$ в ряд Фурье по функциональному базису $i(n)_l$, индекс l указывает номер коэффициента. Заменяя в уравнении (1) истинную зависимость $I(n)$ на сумму первых $(N+1)$ членов её разложения в ряд Фурье по функциональному базису $i(n)_l$; действуя на обе части полученного равенства линейным функционалом F_s; а также, изменяя значения индекса s, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$F_s\left[G(n)\right] = \sum_{l=0}^{N} i^0_l \cdot F_s\left[\int_{-\infty}^{\infty} V(n,n') i(n')_l dn'\right]. \tag{4}$$

Рассмотрим пространство кусочно-постоянных функций заданных на интервале $[0,1]$ и сохраняющих постоянные значения на интервалах $[n'_{q-1},n'_q]$. Скалярное произведение определим как интеграл от произведения функций по интервалу $[0,1]$, норму - как корень квадратный из скалярного произведения функции на себя. Решение уравнения (1) будем искать в виде функции, принадлежащей данному пространству. В качестве базиса $i(n)_l$ выберем следующую ортонормированную систему функций (систему прямоугольных импульсов):

$$p'_q(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\varDelta n'}}, & n \in [n'_{q-1},n'_q] \\ 0, & n \notin [n'_{q-1},n'_q] \end{cases}. \tag{5}$$

Линейный функционал F_s определим следующим образом:

$$F_s\left[y(n)\right] = (p_{p=s}(n), y(n)), \tag{6}$$

где

$$p_p(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\Delta n}}, & n \in [n_{p-1}, n_p] \\ 0, & n \notin [n_{p-1}, n_p] \end{cases}, \tag{7}$$

круглые скобки обозначают скалярное произведение, в пространстве функций $G(n)$ скалярное произведение определим как интеграл от произведения функций по интервалу $[a, b]$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что при указанном выборе базиса $i(n)_l$ и системы линейных функционалов F_s равенства (3) и (4) эквивалентны. В связи с этим возникает следующий вопрос: можно ли за счёт выбора системы линейных функционалов F_s и базиса $i(n)_l$ получить систему линейных алгебраических уравнений регуляризация которой будет проще регуляризации системы уравнений (3).

Начнём с выбора системы линейных функционалов F_s. Представим равенство (1) в следующем виде:

$$G = \sum_l i_l^0 \cdot L(i_l), \tag{8}$$

где G — измеряемая зависимость $G(n)$; i_l – базисная функция $i(n)_l$; L - линейный интегральный оператор уравнения (1).

Пусть выбран некоторый базис i_l, кроме того, предположим, что в пространстве функций G определена операция скалярного умножения. Поскольку функция $I(n)$ заменяется разложением по конечномерному базису i_l, из равенства (8) следует, что G можно рассматривать как элемент конечномерного эвклидова пространства. В конечномерном эвклидовом пространстве действие линейного функционала на произвольный элемент G можно представить как скалярное умножение элемента G на некоторый фиксированный элемент данного пространства. Таким образом, необходимо выбрать систему функций, на которые скалярно умножаются обе части равенства (8) при получении системы уравнений (4). Из (8) следует, что количество базисных уравнений, входящих в систему уравнений (4), не больше размерности линейной оболочки системы функций $L(i_l)$. Чтобы количество базисных уравнений было максимальным, скалярное умножение равенства (8) должно выполняться на линейно независимые функции. Система функций $p_p(n)$ линейно независима, поэтому увеличение числа базисных уравнений, за счёт выбора функционала, не представляется возможным. Не смотря на это, за счёт выбора линейного функционала, систему уравнений (4) можно сделать более удобной для решения. Из (8), а также неравенства Коши-Буняковского следует, что за счёт выбора линейного функционала можно увеличить вес диагональных элементов матрицы данной системы уравнений, при этом, чтобы вес диагональных элементов был максимальным, линейный функционал можно определить следующим образом:

$$F_s\left[y(n)\right] = (L(i_{l=s}), y(n)). \tag{9}$$

Перейдём к выбору базиса по которому осуществляется дискретизация задачи. В первую очередь отметим, что речь идёт не столько о выборе базиса, сколько о выборе конечномерного пространства в котором решается задача. Из общих соображений ясно, что базис следует выбирать таким образом, чтобы ряд, в виде которого представляется функция $I(n)$ достаточно быстро сходился, то есть, чтобы при заданном уровне погрешности, пространство, в котором решается задача, имело наименьшую размерность. Кроме того, базис удобно выбирать так, чтобы решения, заведомо не представляющие интереса, чаще всего быстропеременные решения, по возможности не входили в пространство порождаемое выбранным базисом. С формальной точки зрения, при заданном уровне погрешности, критерии выбора базиса можно сформулировать следующим образом: $N \longrightarrow min$; $rang\,[L(i_l)] \longrightarrow max$.

На практике, ширина окна усреднения, как правило, значительно больше ширины интервалов на которых функции $p'_q(n)$ отличны от нуля. Ясно, что в противном случае решение уравнения (1), по сути, не имеет большого смысла. Линейная независимость системы функций $p'_q(n)$ обусловлена локализацией данных функций вдоль оси n. Действие интегрального оператора на данные функции, из-за большой ширины окна усреднения, приводит к расширению интервалов на которых данные функции отличны от нуля, что, в свою очередь, нарушает линейную независимость этих функций. Последнее обстоятельство и приводит к уменьшению числа базисных уравнений, входящих в систему уравнений (4). Таким образом, в качестве базиса удобнее использовать систему функций, линейная независимость (ортогональность) которых обусловлена не локализацией вдоль оси n, а каким либо иным фактором, например, знакопеременностью: базис функций Уолша, системы ортогональных многочленов и т. д. В рассматриваемой задаче, из физических соображений, ясно, что функция $I(n)$ является гладкой и непрерывной, поэтому в качестве базиса была выбрана система гладких непрерывных функций, в частности, ортонормированный тригонометрический базис.

4. Примеры дискретизации

Покажем на конкретном примере, что выбор системы линейных функционалов F_s и базиса, по которым выполняется дискретизация задачи, позволяет упростить регуляризацию решения. В представленном примере функции $G(n)$ и $f(n)$ аппроксимируют экспериментальные данные, полученные при аргон-аргоновом датировании образца долерита (Аналитический центр ИГМ СО РАН, автор образца Делпомдор Ф.). Исходные экспериментальные данные приведены в работе [11].

На рисунке 2а в виде трёхмерной диаграммы представлена матрица системы уравнений (3). Матрица имеет ленточную структуру, ненулевые части каждой строки состоят из одинаковых элементов. Большой вес первых элементов данной матрицы обусловлен малой шириной первой ступени дегазации образца, такие ступени, чаще всего, имеют большую погрешность измерений. Как уже отмечалось, регуляризация полученной системы уравнений затруднительна. На рисунке 2б представлена матрица системы уравнений (4). В качестве базиса исползуется ортонормированный тригонометрический базис, система функционалов F_s определена по формуле (9). При заданном уровне погрешности системы уравнений (3) и (4) имеют разный размер. Сравнение представленных примеров дискретизации (одной и той же задачи) показывает, что выбирая базис и систему линейных функционалов F_s, можно значительно увеличить

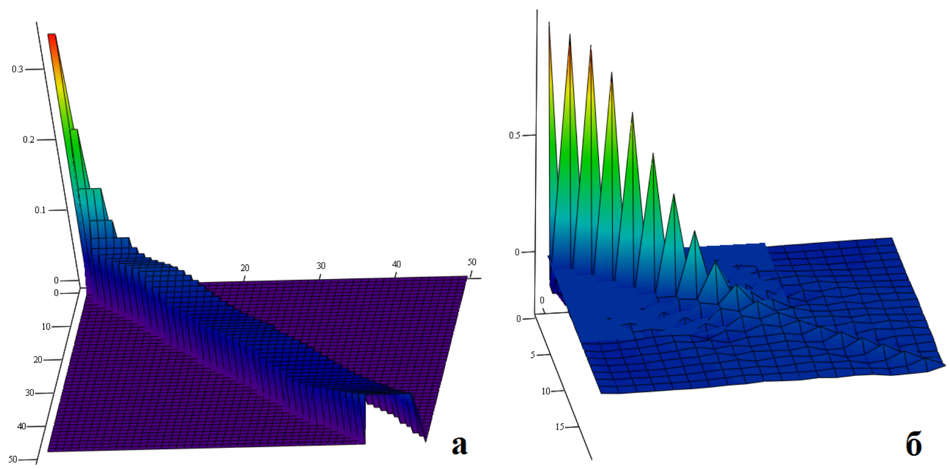


Рис. 2. Матрицы систем уравнений (3) - (а) и (4) - (б)

количество базисных строк и вес диагональных элементов матрицы получаемой системы уравнений.

5. Регуляризация и решение

В целом, суть предложенного алгоритма заключается в следующем. Интегральное уравнение (1) сводится к системе линейных алгебраических уравнений (4). Далее выполняется регуляризация и решение полученной системы уравнений. По полученным значениям коэффициентов i_l^0, путём суммирования ряда Фурье, вычисляется функция $I(n)$. Возрастной спектр легко вычисляется по полученной функции $I(n)$.

Представленная дискретизация уравнения (1) существенно упрощает регуляризацию решения. Система уравнений (4) может быть регуляризованна одним из существующих методов. Алгоритм регуляризации, используемый в данной работе описан в [12].

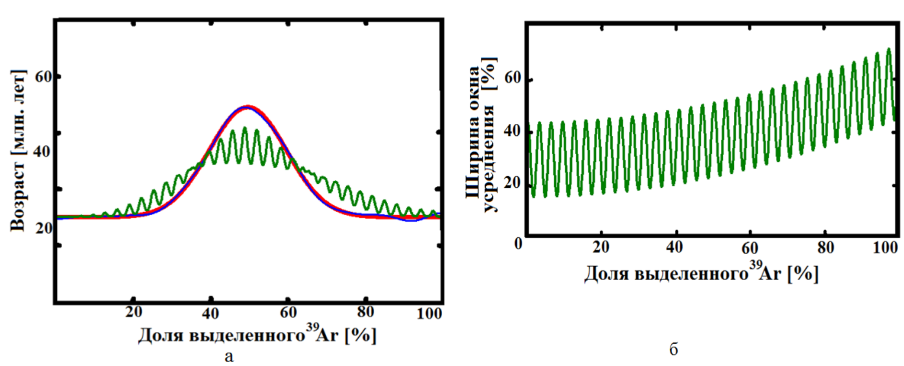


Рис. 3. Численный пример

На рисунке 3 представлен численный пример демонстрирующий устойчивость предложенного алгоритма. Красной линией обозначена модель истинной зависимости $I(n)$, зелёной линией - модель измеряемой зависимости $G(n)$, синим обозначена зависимость $I(n)$, полученная в результате решения интегрального уравнения. Зависимость $f(n)$ представлена на рисунке 4б.

6. Обобщение алгоритма: интерпретация причин некорректности и физическая регуляризация

Система уравнений (4), с учётом выбора системы линейных функционалов согласно формуле (9), имеет следующий вид:

$$(G, L(i_s)) = \sum_{l=0}^{N} i_l^0 \cdot (L(i_s), L(i_l)). \tag{10}$$

Причинам некорректности задачи можно дать следующую, вполне наглядную, интерпретацию. Имеется пространство функций I с базисом i_l, в результате действия оператора L, данное пространство преобразуется в пространство функций G, порождаемое системой функций $L(i_l)$. Поскольку матрица системы уравнений (10) - матрица Грамма, некорректность задачи означает, что система функций $L(i_l)$ линейно зависима - размерность пространства функций G меньше размерности пространства функций I. Таким образом, в результате действия оператора L, проекция истинной зависимости $I(n)$ на некоторое подпространство пространства функций I (подпространство, порождаемое линейно независимыми решениями однородной задачи) обращается в ноль - информация о данной проекции утеряна.

Обобщение предложенного алгоритма заключается в следующем. Выполняется ступенчатая дегазация нескольких навесок одного и того же образца. При дегазации каждой следующей навески изменяется зависимость $f(n)$ и, следовательно, оператор L. Для каждой навески составляется система уравнений (4). Разным навескам одного и того же образца соответствует одна и та же истинная зависимость $I(n)$, поэтому полученные системы уравнений объединяются в одну систему уравнений. Данная система уравнений решается методом наименьших квадратов. Регуляризация решения, то есть восполнение информации об истинной зависимости $I(n)$, утерянной при первом измерении, достигается за счёт проецирования данной зависимости в разные подпространства пространства функций I.

Процесс накопления экспериментальных данных может быть оптимизирован следующим образом. При дегазации первой навески образца зависимость $f(n)$ произвольна, при дегазации последующих навесок возникает возможность выполнять измерения с заданной зависимостью $f(n)$. Пусть $L^{(k)}$ - оператор соответствующий дегазации k - ой навеске образца, $I_{(m)}^{(k)}$ - линейно независимые решения однородной задачи $L^{(k)}(I) = 0$. Зависимость $f(n)$ и, следовательно, оператор $L^{(k)}$, для каждой следующей навески выбирается таким образом, чтобы $L^{(k+1)}(I_{(m)}^{(k)}) \neq 0$. Для каждого оператора $L^{(k)}$ функция $f(n)$ может быть определена путём вычисления значений этой функции в дискретном наборе точек на оси n, в каждой из этих точек необходимо добиться локального выполнения упомянутого условия $L^{(k+1)}(I_{(m)}^{(k)}) \neq 0$.

7. Заключение

В представленной работе рассмотрена задача реконструкции истинных возрастных спектров при аргон-аргоновом датировании. Реконструкция других характеристик изотопных систем образцов горных пород и минералов при поэтапном выделении анализируемого вещества выполняется аналогичным образом. Реконструкция возрастного спектра сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. С учётом специфики рассматриваемой задачи предложен алгоритм численного решения данного уравнения. Показано, что выбор способа дискретизации линейного интегрального уравнения позволяет добиться существенного упрощения регуляризации решения. Предложенный алгоритм успешно протестирован на ряде численных и экспериментальных примеров. Предложен метод физической регуляризации решения, основанный на накоплении экспериментальных данных. Реконструкция возрастных спектров позволяет существенно увеличить надёжность и информативность аргон-аргонового датирования.

Автор данной работы выражает благодарность к.г.-м.н. Травину Алексею Валентиновичу за предоставленные экспериментальные данные, а также ряд ценных советов и замечаний.

References

[1] N. Challandes, D. Marquer, I. Villa, *Dating the evolution of C-S microstructures a combined $^{40}Ar/^{39}Ar$ step-heating and UV laserprobe analysis of the Alpine Roffna shear zone*, Chemical Geology, **197** (2003), 3–19.

[2] S. Flude, R. Burgess ,D.W. Mc Garvie, *Silicic volcanism at Ljosufjoll, Iceland: Insights into volution and eruptive history from $^{40}Ar/^{39}Ar$ dating*, Journal of Volcanology and Geothermal Research, **169** (2008), 154–175.

[3] O. Ishizuka, K. Uto, M. Yuasa, A.G. Hochstaedter, *Volcanism in the earliest stage of back-arc rifting in the Izu-Bonin arc revealed by laser-heating $^{40}Ar/^{39}Ar$ dating*, Journal of Volcanology and Geothermal Research, **120** (2003), 71–85.

[4] P. Dickin, *Radiogenic isotope geology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[5] G.D. Vincenzo, S. Rocchi, F. Rossetti, F. Storti, *$^{40}Ar/^{39}Ar$ dating of pseudotachylytes: the effect of clast-hosted extraneous argon in Cenozoic fault-generated friction melts from the West Antarctic Rift System*, Earth and Planetary Science Letters, **223** (2004), 349–364.

[6] F. Negro, J. Sigoyer, B. Goffe, O. Saddiqi, I.M. Villa, *Tectonic evolution of the Betic-Rif arc: New constraints from $^{40}Ar/^{39}Ar$ dating on white micas in the Temsamane units (External Rif, northern Morocco)*, Lithos, **106** (2008), 93–109.

[7] A.A. Gibsher, V.G. Malkovets, A.V. Travin, E.A. Belousova, V.V. Sharygin, Z. Konc, *The age of camptonite dikes of the Agardag alkali-basalt complex (western Sangilen): results of $^{40}Ar/^{39}Ar$ and U/Pb dating*, Russian Geology and Geophysics, **53** (2012), 763–765.

[8] Farley K.A., Flowers R.M., *(U-Th)/Ne and multidomain (U-Th)/He systematics of a hydrothermal hematite from eastern Grand Canyon*, Earth and Planetary Science Letters, **359-360** (2012), 131–140.

[9] A.B. Vasileva, N.A. Tihonov, *Integral equations*, Moscow University Press, Moscow, 1989.

[10] N.S. Bahvalov, N.P. Jidkov, G.M. Kobelkov, *Numerical methods*, Binom. Knowledge laboratory, Moscow, 2008.

[11] F. Delpomdor, U. Linnemann, A. Boven, A. Gartner, A. Travin, C. Blanpied, A. Virgone, H. Jelsma, A Preat, *Depositional age, provenance, and tectonic and paleoclimatic settingsof the late Mesoproterozoic–middle Neoproterozoic Mbuji-MayiSupergroup, Democratic Republic of Congo*, Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecolog, **389** (2013), 4–34.

[12] D.V. Alekseev, A.V. Travin, *Reconstruction of isotopic system description of geological material sample at $^{40}Ar/^{39}Ar$ dating*,Conference proceedings: Actual problem of modern calculus and applied mathematics, Novosibirsk, (2015), 36–42.

Daniil Vladimirovich Alekseev
Sobolev Institute of Geology and Mineralogy,
pr. Koptyuga, 3,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: a.daniil.v@yandex.ru

S ⓔ MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.15–С.20 (2015) УДК 519.642
MSC 45D05,23A30

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ТЕСТОВЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА I РОДА

А.С. АПАРЦИН

Abstract. The paper presents a technique for studying the stability of solutions to the linear nonclassical Volterra equations of the first kind. Lower bounds of error are obtained for any numerical method in calculation involving both single and double precision for some test equation.

Keywords: nonclassical Volterra equations, test examples, instability, lower estimates of error.

1. Введение

При моделировании процессов старения и замены отмирающих элементов развивающейся системы новыми важную роль играет балансовое интегральное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $x(s)$ – элементы системы, возраст которых в момент времени s равен $t-s$, $K_i(t,s)$ – коэффициент эффективности элементов i-ой возрастной группы G_i ($x(s) \in G_i$, если $t-s \in [t-a_{i-1}(t), t-a_i(t)$),

$$a_0(t) \equiv t > a_1(t) > ... > a_n(t) \geq 0 \ \ \forall t > 0; \ \ a_i(0) = 0, \ \ a_i'(t) \geq 0, \ a_1'(0) < 1, \tag{2}$$

Apartsyn, A.S., To study the stability of solutions of test nonclassical Volterra equations of the first kind.

Работа поддержана РФФИ (грант 15-01-01425а).

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

а правая часть $y(t)$ интерпретируется как некоторый интегральный показатель уровня развития системы. Например, в [1] применительно к электроэнергетической системе России в качестве $y(t)$ принята суммарная располагаемая мощность электростанций.

В отличие от стандартных уравнений Вольтерра I рода, в (1) переменными являются как верхние, так и нижние пределы интегрирования. Следуя [2], будем называть уравнение (1) неклассическим.

Случай $n = 1$ в (1) детально исследован в [2]. Для $n \geq 2$ теория уравнений типа (1) с условиями (2) еще только создается. В частности, в [3], [4] получены достаточные условия корректности по Адамару задачи (1), (2) на паре $(C_{[0,T]},\ \overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]})$.

Цель данной статьи – продемонстрировать специфику уравнений (1), (2) на простейших тестовых примерах.

2. Случай $K_i(t,s) \equiv const$

Примем далее $a_i(t) = \alpha_i t$, $1 = \alpha_0 > \alpha_1 ... > \alpha_n = 0$ и положим $K_i(t,s) = \beta_i$, $\beta_1 \neq 0$, так что (1) имеет вид

$$\beta_1 \int\limits_{\alpha_1 t}^{t} x(s)ds + \sum_{i=2}^{n} \beta_i \int\limits_{\alpha_i t}^{\alpha_{i-1} t} x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

где $y'(t) \in C_{[0,T]}$, $y(0) = 0$. Удобно представить (3) в операторной форме:

$$(V_1 + \Delta V_1)x = y, \tag{4}$$

$$\Delta V_1 x = \sum_{i=2}^{n} \beta_i \int\limits_{\alpha_i t}^{\alpha_{i-1} t} x(s)ds. \tag{5}$$

Результаты [3], [4] являются прямым следствием известной теоремы функционального анализа (см., например, [5], стр. 212) об ограниченности обратного к линейному ограниченному оператору $V_1 + \Delta V_1$, действующему на паре банаховых пространств (B_1, B_2), если обратный к оператору V_1 ограничен и

$$||\Delta V_1||_{B_1 \to B_2} < \frac{1}{||V_1^{-1}||_{B_2 \to B_1}}. \tag{6}$$

Легко видеть, что в случае $B_1 = C_{[0,T]}$, $B_2 = \overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]}$ оценка (6) для операторов из (4), (5) имеет вид

$$\sum_{i=2}^{n} |\gamma_{i-1}|\alpha_{i-1} \equiv \sum_{i=2}^{n} |\beta_{i-1} - \beta_i|\alpha_{i-1} < 1. \tag{7}$$

Переход с помощью дифференцирования от (3) к эквивалентному функциональному уравнению

$$x(t) = \sum_{i=2}^{n} (\beta_{i-1} - \beta_i)\alpha_{i-1} x(\alpha_{i-1} t) + y'(t) \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

показывает, что условие (7) обеспечивает сжатие оператора

$$Wx = \sum_{i=2}^{n} W_i x \equiv \sum_{i=2}^{n} \gamma_{i-1}\alpha_{i-1}x(\alpha_{i-1}t), \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

действующего в $C_{[0,T]}$. Перестановочность операторов W_i позволяет получить формулу обращения (8) и ее интересные частные случаи [6]. Если, например, $n=2$ и согласно (7) $|\gamma_1|\alpha_1 = |\beta_1-\beta_2|\alpha_1 < 1$, то решение (8) имеет вид

$$\bar{x}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (\gamma_1\alpha_1)^j \; y'(\alpha_1^j t). \tag{10}$$

Примем для удобства условие нормировки $\beta_1 = 1$, и так как ниже мы ограничимся случаем $n=2$, то заменим β_2 на β, γ_1 на γ, α_1 на α. Таким образом, условие

$$|1-\beta|\alpha < 1 \tag{11}$$

гарантирует корректность уравнения

$$\int_{\alpha t}^{t} x(s)ds + \beta \int_{0}^{\alpha t} x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{12}$$

на паре $(C_{[0,T]},\ \overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]})$, то есть существование, единственность и устойчивость непрерывного решения (12) для $y(t) \in C^{(1)}_{[0,T]})$, $y(0)=0$ при любом $T<\infty$.

Предположим теперь, что условие (11) не выполнено. Пусть

$$(1-\beta)\alpha = 1 \tag{13}$$

и $y(t) = \lambda t$, $\lambda = const$. Непосредственная проверка показывает, что решением уравнения (12) при этом является однопараметрическое семейство функций

$$x_c(t) = -\frac{\lambda \ln t}{\ln \alpha} + c, \tag{14}$$

теряющих непрерывность на левом конце отрезка $[0,T]$. Обобщение этого результата для $n>2$ можно найти в [6], [7].

Ситуация принципиально меняется, если предположить, что $x(0)=0$ (при моделировании развивающейся системы с момента ее возникновения это условие является важной априорной информацией) и $y(t) \in C^{(2)}_{[0,T]}$, $y(0)=y'(0)=0$, поскольку, несмотря на равенство (13), ряд (10) по-прежнему является равномерно сходящимся и уравнение (12) корректно поставлено на паре $(\overset{\circ}{C}_{[0,T]}, \overset{\circledcirc}{C}{}^{(2)}_{[0,T]})$ (если, например, $y(t) = \frac{\lambda t^2}{2}$, то легко проверить, что единственное решение (12) $\bar{x}(t) = \frac{\lambda t}{1-\alpha}$). Случай, когда

$$(1-\beta)\alpha > 1, \tag{15}$$

но существует такое натуральное $k \geq 2$, что

$$(1-\beta)\alpha^k = 1, \tag{16}$$

рассмотрен в [6], [7]. В [6] также исследована ситуация, когда в (16) k является дробным.

В заключение этого раздела подчеркнем, что в случае постоянных ядер K_i свойства оператора W в (9) целиком определяют параметры α_i, β_i, и эти свойства не зависят от того, на каком временном промежутке $[0,T]$ рассматривается уравнение (8).

В следующем разделе на простейшем тестовом примере будет показано, что для переменных ядер ситуация в корне иная.

3. Случай переменных ядер

Вновь полагая $n=2$, рассмотрим интегральное уравнение

$$\int\limits_{\alpha t}^{t} x(s)ds + \int\limits_{0}^{\alpha t}(1-\delta s)x(s)ds = t - \frac{\alpha^2\delta t^2}{2}, \quad t\in[0,T], \quad \delta>0. \tag{17}$$

Легко проверить, что решением (17), а также эквивалентного функционального уравнения

$$x(t) = \alpha^2\delta t x(\alpha t) + 1 - \alpha^2\delta t, \quad t\in[0,T], \tag{18}$$

является $\bar{x}(t)=1$, каково бы ни было $T<\infty$.

Заметим, что оператор $Wx(t)=\alpha^2\delta t x(\alpha t)$ является сжимающим лишь при $t<\frac{1}{\alpha^2\delta}$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $\tilde{x}(t)$ *– приближенное решение (17) ((18)), погрешность которого* $|\varepsilon^*| = |1-\tilde{x}(T^*)|$ *в точке*

$$T^* = \frac{1}{\alpha^2\delta} \tag{19}$$

сколь угодно мала. Тогда каково бы ни было наперед заданное (сколь угодно большое) число $\bar{\varepsilon}$, *найдется такое* $T\le\overline{T}$, *где*

$$\overline{T} = \frac{1}{\delta\alpha^{2+i}}, \tag{20}$$

$$i = \left\lceil -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2\log(\bar{\varepsilon}/|\varepsilon^*|)}{\log\alpha}}\ \right\rceil \tag{21}$$

($\lceil\cdot\rceil$ *– ближайшее целое справа), что*

$$|\widetilde{\varepsilon}(T)| = |1-\tilde{x}(T)| \ge \bar{\varepsilon}. \tag{22}$$

Доказательство. В силу рекурсии (18) для $t>T^*$ имеем:

$$\tilde{x}(t) = \alpha^{\frac{i^2+3i}{2}}(\delta t)^i \tilde{x}(\alpha^i t) + 1 - \alpha^{\frac{i^2+3i}{2}}(\delta t)^i, \quad i=1,2,\dots. \tag{23}$$

Положим $\overline{T} = \frac{T^*}{\alpha^i}$ (по (19) тогда $\overline{T}$ совпадает с (20)) и найдем такое i, что $|\widetilde{\varepsilon}(\overline{T})| = \bar{\varepsilon}$. Если в (23) положить $t=\overline{T}$, то

$$\tilde{x}(\overline{T}) = \alpha^{\frac{i^2+3i}{2}}(\delta\overline{T})^i \tilde{x}(T^*) + 1 - \alpha^{\frac{i^2+3i}{2}}(\delta\overline{T})^i. \tag{24}$$

С учетом (20) $(\delta\overline{T})^i = \frac{1}{\alpha^{i^2+2i}}$, поэтому (24) дает

$$\tilde{x}(\overline{T}) - 1 = \alpha^{-\frac{i^2+i}{2}}\varepsilon^*,$$

откуда

$$-\frac{i^2+i}{2} = \frac{\log(|\widetilde{\varepsilon}(\overline{T})|/|\varepsilon^*|)}{\log\alpha}. \tag{25}$$

Заменив в (25) $|\widetilde{\varepsilon}(\overline{T})|$ на $\overline{\varepsilon}$, найдем положительный корень квадратного уравнения

$$i^2 + i + \frac{2\log(\overline{\varepsilon}/|\varepsilon^*|)}{\log\alpha} = 0. \tag{26}$$

Взяв от него целую часть с избытком, получим по (21) такое целое i, которое обеспечивает неравенство (22). Теорема доказана. □

Следствие 1. *Для данных δ, α и $\overline{\varepsilon}$ никакой численный метод при вычислениях на компьютере с погрешностью округления ε^* не может дать в точке $t = \overline{T}$ погрешность численного решения интегрального уравнения (17), меньшую $\overline{\varepsilon}$.*

В таблице 1 приведены полученные по формулам (20), (21), значения $\overline{T}$, соответствующие вычислениям с одинарной и двойной точностью.

Таблица 1. $\delta = 10^2$

	$\overline{\varepsilon} = 10^9$, $\varepsilon^* = 10^{-9}$		$\overline{\varepsilon} = 10^{19}$, $\varepsilon^* = 10^{-19}$	
α	i	$\overline{T}$	i	$\overline{T}$
0,9	28	0,2358	41	0,9280
0,8	19	1,0842	28	8,0779
0,7	15	4,2986	22	52,197
0,6	13	21,268	19	455,85
0,5	11	81,920	16	2621,4
0,4	10	596,05	14	23283
0,3	8	1693,5	12	$2{,}1 \cdot 10^5$
0,2	7	19531	10	$2{,}4 \cdot 10^6$
0,1	6	$1 \cdot 10^6$	9	$1 \cdot 10^9$

Замечание 1. Существенную зависимость $\overline{T}$ от величины α с точки зрения моделирования развивающихся систем можно объяснить важной ролью границы между группой молодых элементов системы и другими возрастными группами.

References

[1] A.S. Apartsyn, I.V. Sidler *Using the nonclassical Volterra equations of the first kind to model the developing systems*, Automation and Remote Control, **74**(6) (2013), 899–910.

[2] A.S. Apartsyn *Nonclassical Linear Volterra Equation of the First Kind*, Utrecht-Boston, 2003.

[3] A.S. Apartsyn *On the theory of nonclassical Volterra equations of the first kind*, Abstract of the 4-th Inverse Problems, Design and Optimization Symposium (IPDO-2013), Albi, France, June 26-28, 2013. A6353AA.

[4] A.S.Apartsyn *On some classes of linear Volterra integral equations*, Abstract and Applied Analysis, **24** (2014) Article ID532409.-http://dx.doi.org/10.1155/2014/532409.

[5] L.V. Kantorovich, G.P. Akilov *Functional Analysis*, Moscow, 1977.

[6] A.S. Apartsyn *Inverse formulae and their finite-dimensional analogies for some classes Volterra equations with piecewise smooth kernels*, Proceedings of International Conference "Actual Problems of the Computational and Applied Mathematics - 2015", Novosibirsk, 2015, 62–69.

[7] A.S. Apartsyn *Study of the nonclassical Volterra equations of the first kind with piecewise smooth kernels*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2015 (to appear).

Anatoly Solomonovich Apartsyn
Melentiev Energy Systems Institute SB RAS,
Lermontov str., 130,
664033, Irkutsk, Russia
E-mail address: apartsyn@isem.irk.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.21–С.24 (2015) УДК 517.957:536.2

К СВОЙСТВАМ ИНВАРИАНТНО ГРУПОВЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ИСТОЧНИКОМ

М. АРИПОВ, Ш.А. САДУЛЛАЕВА, О.И. САХОБИДИНОВА

Abstract. In this paper we demonstrate the properties of solutions of the heat equation with gradient nonlinearity with absorption or source. The asymptotic of the self-similar solutions den siding on value of numerical parameters established.

Keywords: self-similar solutions, nonlinear heat conduction, filtering liquid and gas, convection diffusion, asymptotic behavior, blow-up regime.

Задача (1) встречается во многих приложениях и описывает, например процессы реакции-диффузии, нелинейной теплопроводности, фильтрации жидкости и газа при воздействие конвективного переноса со скоростью $v(t)$ и источника с мощностью $\gamma(t)u^{\beta}$ (см. [1], [2] и приведенную там литературу). Уравнение (1) без источника при $p = 2$ (в этом случае уравнение носит также название уравнение пористой среды) [9-10] используется как модель для описания распространения тепловых волн в плазме, где тепловые волны осуществляют механизм передачи энергии со сверхзвуковой скоростью, а в случае $l = m = 1$ оно носит название $p-$ Лаплас уравнение [1]-[4]. (Исследованию частных случаев задачи (1) посвящено огромное количество работ [1-4].)

Из-за вырождения уравнения при $u = 0$, $\nabla u = 0$ в некоторой области естественно следует ожидать, что может иметь место явление конечной скорости распространения возмущения (КСРВ) и локализация решения [1-4].

В настоящей работе на основе инвариантно группового (приближенно автомодельного) анализа доказана глобальная разрешимость и не разрешимость зада-

Aripov, M., Sadullaeva, Sh. A., Sahobidinova, O. I. Properties of the group invariant solutions of the Cauchy problem for degenerate parabolic equations with double nonlinearity and a source.

Поступила 1 июля 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

чи, дан способ установления значение критической экспоненты типа Фужита, получено асимптотическое поведение решения с компактным носителем и исчезающих на бесконечности решений. Исследовано влияние скорости конвективного переноса к эволюции процесса описываемой задачей (1). В зависимости от значения числовых параметров, предложены начальные приближения необходи- мых для проведения численных расчетов, приводящие к быстрой сходимости к точному решению.

Приведем некоторые результаты, справедливые для задачи (1) без источника.

Неожиданным результатом для решений задачи (1) без источника является разрушение носителя за конечное время (РНКВ), которое было установлено впервые при $p = 2$ и $N \geq 3$ в [3]. В этом направлении отметим еще результаты из [4], [5]. В случае $\gamma(t) = 1$ известно, что решение задачи (1) не всегда существует глобально во времени. Более точно: если $\beta > \beta_* = m(p-2)+l+p/N$ и начальная функция мала в некотором смысле, то решение существует глобально по времени [2]. Если же $\beta < \beta_* = m(p-2)+l+p/N$, $1 < \beta \leq \beta_*$, то любое нетривиальное решение задачи (1) взрывается за конечное время [2-6].

Определение 1. *Будем говорить, что $u(x,t)$ есть обобщениое решение задачи (1) в $Q_T = R^N \times (0,T)$, если $0 \leq u(t,x)$, $u^{m-1}(t,x)| \bigtriangledown u|^{p-2} \bigtriangledown u \in C(Q_T)$ и удовлетворяет задаче (1) в смысле интегрального тождества.*

Введем функции

$$u(t,x) = \bar{u}\,(t)\, w\,(t,\eta)\,,\ \eta = x - \int_0^t v(y)dy,\ w(t,\eta) = f(\xi),\ \xi = |\eta|\,/\tau(t)^{1/p}, \quad (2)$$

$$\bar{u}\,(t) = (T + (\beta-1)\int_0^t \gamma\,(\eta)\,d\eta)^{-\frac{1}{\beta-1}},\ \tau\,(t) = \int_0^t \bar{u}^{p+m+l-3}\,(\eta)\,d\eta,$$

$$\bar{f}\,(\xi) = (a - b\xi^{\frac{p}{p-1}})_+^{\frac{p-1}{m(p-2)+l-1}},\ b = (m(p-2)+l-1)/(p^{-p}/lm^{p-2})^{1/(p-1)},$$

$$(a)_+ = \max{(0,a)}\,,\ u_+(t,x) = \bar{u}(t)\bar{f}(\xi).$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$\gamma(t)\tau(t)\bar{u}^{\beta-(m(p-2)+l)} < \frac{N}{p},\quad u(0,x) \leq u_+(0,x),\ x \in R^N.$$

Тогда для глобального решения задачи (1) имеет место оценка

$$u(t,x)\ \leq u_+(t,x)\ \text{в}\ \ Q_T = R^N \times (0,T), \qquad T > 0. \quad (3)$$

Отметим, что критическое значение экпоненты типа Фужита определяется из выражения

$$\gamma(t)\tau(t)\bar{u}^{\beta-(m(p-2)+l)} = \frac{N}{p}. \quad (4)$$

Из (4) при $\gamma(t) = 1$ вытекает все ранее известные критические значения, полученные Х. Фужита ($\beta > 1 + \frac{2}{N}$)[1], А. А. Самарский, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, В. А. Галактионов ($\beta > m + \frac{2}{N}$) [1], Галактионов В. А.($\beta > p - 1 + \frac{p}{N}$) [1], Pan Zheng, Chunlai Mu, Dengming Liu, Xianzhong Yao, Shouming Zhou ($\beta > m(p-2) + l + \frac{p}{N}$) [3], Арипов М [3], $\gamma(t)\tau(t)\bar{u}^{\beta-(m+p-2)} < \frac{N}{p}$.

Отметим,что из оценки (3) вытекает также свойство КСРВ для решение задачи (1).

Теперь изучим асимптотику инвариантно группового (автомодельного) решения. Учитивая преобразование (2) для функции $f(\xi)$ имеем следующее приближенно автомодельное уравнение

$$\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{df^m}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^l}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{p}\frac{df}{d\xi}+\gamma\left(t\right)\tau\left(t\right)\bar{u}^{\beta-(m+p+l-3)}\left(f+f^{\beta}\right)=0, \quad (4)$$

Пусть в (4) $\gamma(t) = 1$.

Теорема 2. *Пусть* $\beta > 1,\ m(p-2) + l - 1 > 0$. *Тогда решение с компактным носителем уравнения (4) при* $\eta \to \infty$ ($\eta = -\ln(a - b\xi^{p/(p-1)})$) *имеет асимптотические представление*

$$f(\xi) = (1/p)(1/bp)^p[(m(p-2)+l)/(p-1)]^{p-1}\bar{f}(\xi)\ (1+o(1)),$$

где $\bar{f}(\xi)-$ *определенная выше функция.*

Теорема 3. *Пусть* $b < 0,\ \beta > 1,\ m(p-2) + l - 1 < 0$. *Тогда асимптотика исчезающих на бесконечности решений уравнения (4) при* $\xi \to \infty$ *имеет вид* $f(\xi) = A\bar{f}(\xi)(1+0(1))$, *где постоянная* A *определяется из решения некоторого нелинейного алгебраического уравнения.*

References

[1] A.A. Samarskii, S.P. Kurdyumov, A.P. Mikhailov, V.A. Galaktionov, *Regimes for quasilinear parabolic equations*, Nauka, Moscow, 1987.

[2] Pan Zheng, Chunlai Mu, Dengming Liu, Xianzhong Yao, and Shouming Zhou, *Blow-Up Analysis for a Quasilinear Degenerate Parabolic Equation with Strongly Nonlinear Source*, Abstract and Applied Analysis, **2012** (2012), 109546.

[3] M. Aripov, *Method of the standard equation for the solution of the nonlinear value problem*, Fan, Tashkent, 1988.

[4] M. Aripov, Sh.A. Sadullaeva, *On the global solvability of the Cauchy problem for the diffusion reaction equation with double non-linearity*, Doklady Academii Nauk of Republic of Uzbekistan, **4** (2011), 9–11.

[5] M. Aripov, *Asymptotic of the solution of the non-Newton polytrophic filtration equation*, ZAMM, **80**(3) (2000), 767–768.

[6] M. Aripov, Sh.A. Sadullaeva, *To solutions of one non divergent type parabolic equation with double nonlinearity*, Advances and Progress in Analysis, (2010), 12–18.

[7] M. Aripov, Sh. A. Sadullaeva, *To properties of solutions to reaction-diffusion equation with double nonlinearity with distributed parameters*, Journal Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **6** (2013), 157–167.

[8] A.F. Tedeev, *Conditions for the time global existence and nonexistence of a compact support of solutions to the Cauchy problem for quasilinear degenerate parabolic equations*, Siberian Mathematical Journal, **45**(1) (2004), 155–164.

[9] Z.Q. Wu, J.N. Zhao, J.X. Yin, H.L. Li., *Nonlinear Diffusion Equations*, World Scientific, Singapore, 2001.

[10] J.L. Vazquez, *The Porous medium equation*, Mathematical theory, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2007.

Mersaid Aripov
Uzbekistan National University,
University str.,
100174, Tashkent, Uzbekistan
E-mail address: mirsaidaripov@mail.ru

Shahlo Sadullaeva Azimbaevna
Tashkent University of information technologies,
Amir Temur str.,
100084, Tashkent, Uzbekistan
E-mail address: orif_sh@list.ru

Ozodahon Sahobidinova Isamidinovna
Uzbekistan National University,
University str.,
100174, Tashkent, Uzbekistan
E-mail address: sahobidinova@mail.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.25–С.32 (2015) УДК 519.6

MSC 65K05

ПРОГРАММНАЯ ПЛАТФОРМА НИМФА НА СТРУКТУРЕ ДАННЫХ ЛОГОС ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДАХ

О.И. БУТНЕВ, В.А. ПРОНИН, М.Л. СИДОРОВ, С.С. КОЛЕСНИКОВ, В.Ю. КУЗНЕЦОВ, А.Д. ЯРУЛЛИН, Ю.Н. ДЕРЮГИН, И.В. ГОРЕВ, П.А. МАШЕНЬКИН

Abstract. The paper presents the materials on the oil deposit modeling using the NIMFA program package. The package structure, the equations of the „Black Oil“ model and test results are presented. The paper is focused on the NIMFA results comparison with the results of commercial codes. It also discusses the issues of deposit modeling in the parallelization mode using the NIMFA complex.

Keywords: NIMFA program complex, „Black Oil“ model, multiphase filtration, finite volume method, MPI parallelization, 3D unstructured grids.

1. Введение

Разработка месторождений углеводородов представляет собой комплексную проблему, для успешного решения которой требуется привлечение знаний и опыта, накопленных в различных областях науки и инженерной практики. Объекты нефтегазовой отрасли имеют ряд особенностей: большие размеры по площади, достигающие сотен квадратных километров, сложную структуру пластов и сложные физические процессы, проходящие при их разработке.

Butnev O.I, Pronin V.A., Sidorov M.L., Kolesnikov S.S., Kuznetsov V.Yu, Yarullin A.D., Deryugin Yu.N., Gorev I.V., Mashenkin P.A., NIMFA software platform based on LOGOS data structure for simulations of multiphase flow in geological media.

Поступила 5 августа 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

Также при решении задач данной отрасли дополнительную трудность вызывает разномасштабность моделируемых объектов. Приведенные выше особенности накладывают специфические требования к математическим методам их моделирования.

На данный момент для моделирования процессов фильтрации в геологических пластах применяются в основном зарубежные коммерческие программные продукты, такие как ECLIPSE компании Schlumberger (США) [1], IMEX компании CMG (Кананда) [2]. Российские программные продукты в практике математического моделирования процессов нефтедобычи практически не используются. Однако, зарубежные программные продукты имеют дорогостоящую лицензию. В связи с этим остро встает вопрос о разработке отечественных пакетов программ для решения задач фильтрации с применением суперкомпьютерных технологий.

Необходимость внедрения современных методов математического моделирования определяется существенным ухудшением структуры запасов нефти и газа в РФ. Вследствие этого возникает задача, связанная с повышением нефтеотдачи, для решения которой необходима разработка принципиально новых технологий воздействия на пласт при добыче нефти, которые могут быть смоделированы только с использованием новых быстродействующих суперкомпьютеров. Следует отметить, что отработка данных технологий путем только практических экспериментов является весьма дорогостоящей, а получаемые результаты при таких тестах очень ограничены.

Для обеспечения устойчивого экономического развития России требуется создать технологический паритет отечественных предприятий нефтегазовой отрасли с лидерами мирового рынка. Суперкомпьютерные технологии – один из ключевых факторов конкурентоспособности отечественной нефтегазовой отрасли. Важной сферой применения таких технологий в математическом моделировании для задач фильтрации является решение проблем прогнозирования, контроля и управления процессами разработки пластов с целью повышения их нефтеотдачи, - в этом состоит и основное коммерческое использование программных продуктов. Одним из таких программных комплексов является пакет программ НИМФА [3], разрабатываемый в РФЯЦ ВНИИЭФ. Данный комплекс включает в себя:

- Подготовку цифровой (виртуальной) модели нефтегазового месторождения;
- Расчет подготовленной модели на СуперЭВМ по технологии удаленного доступа;
- 3D визуализацию и отображение графиков полученных после расчета данных.

2. Модель „Black Oil“

Система уравнений фильтрации, решение которой проводится в комплексе НИМФА, записана по модели „Black Oil“ (модель нелетучей нефти) [4]. Данная модель является наиболее распроненной в области математического моделирования нефтяных месторождений. Она предполагает наличие трех фаз: нефть, вода и газ. Вода и нефть не смешиваются между собой и не обмениваются массами. Газ предполагается растворимым в воде и нефти. «Черная нефть» позволяет описывать основные этапы разработки нефтяных месторождений, а также вторичные методы [5].

Система дифференциальных уравнений сохранения массы, описывающая трехфазное трехмерное течение жидкости в пористой среде по модели „Black Oil“, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) = -\bigtriangledown\left(\frac{\vec{W}_o}{B_o}\right) + q_o, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) = -\bigtriangledown\left(\frac{\vec{W}_w}{B_w}\right) + q_w, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} + \frac{\phi R_{sw} S_w}{B_w}\right) = -\bigtriangledown\left(\frac{R_{so}\vec{W}_o}{B_o} + \frac{R_{sw}\vec{W}_w}{B_w} + \frac{\vec{W}_g}{B_g}\right) \\ +R_{so}q_o + R_{sw}q_w + q_g.\end{aligned} \tag{3}$$

Уравнения движения (скорость фильтрации) описываются на основе закона Дарси:

$$\vec{W}_\alpha = -\lambda_\alpha(\bigtriangledown p_\alpha - \gamma_\alpha \bigtriangledown h), \tag{4}$$

где α – индекс фазы (нефть, вода или газ), λ_α – коэффициенты проводимости соответствующей фазы – имеют вид:

$$\lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha} K}{\mu_\alpha}. \tag{5}$$

Для замыкания системы уравнений (1)–(4) необходимы следующие соотношения:

$$p_o - p_w = P_{cow}(S_o, S_w), \tag{6}$$

$$p_g - p_o = P_{cog}(S_o, S_g), \tag{7}$$

$$S_o + S_w + S_g = 1. \tag{8}$$

В формулах (1)–(8) введены следующие обозначения: S_α, B_α, q_α, p_α, μ_α – насыщенность, объемный коэффициент, расход, давление, вязкость, относительная проницаемость фазы α, K – проницаемость породы, h – глубина, $\gamma_\alpha = \rho_\alpha g$ – весовая функция фазы (ρ_α – плотность фазы, g – ускорение свободного падения).

3. Метод IMPES

Дискретизация уравнений, описанных в предыдущем разделе, проводится с помощью метода конечных объемов на неструктурированной сетке [6]. Слагаемые, содержащие оператор дивергенции, после интегрирования и применения формулы Остроградского-Гаусса становятся интегралами по поверхности конечного объема. Вычисление потоков через грань осуществляется с помощью метода „отложенной коррекции“, подробно описанного в [4]

Наиболее трудоемким элементом численного решения системы уравнений многофазной фильтрации является многократное решение системы линейных алгебраических уравнений. Количество вычислений существенно снижается при уменьшении количества уравнений для каждого расчетного блока, а, следовательно, и общей размерности линейной системы. При использовании IMPES-метода (Implicit Pressure Explicit Saturation) количество уравнений для каждого блока, решаемых неявно, сокращается до одного, что приводит к значительной экономии вычислительных ресурсов. Суть метода заключается в следующем [4]:

- в результате линейной комбинации уравнений фильтрации (1)–(3) выводится одно уравнение для расчета давления, которое решается неявно;
- с учетом найденных значений давления явно рассчитываются распределения насыщенностей.

В то же время явное вычисление насыщенностей требует ограничения шага по времени для обеспечения устойчивости решения.

Система линейных алгебраических уравнений для давления решается с помощью библиотеки параллельных решателей LParSol [7].

4. Примеры расчет задач с помощью комплекса НИМФА

Расчеты в комплексе НИМФА осуществляются на трехмерной пластовой модели. Вначале рассматриваются две трехфазные задачи SPE-1 и SPE-7 из набора тестов общества инженеров-нефтяников. В первом тесте коллектор представляет собой прямоугольный параллелепипед, длина и ширина которого равны 3048 метров. Кровля расположена на глубине 2537 метров, подошва на глубине 2568 метров. Моделируемый объект состоит из трех пропластков, с разными свойствами породы. Область покрывается прямоугольной сеткой с шагом 304.8 метра по осям X и Y, по оси Z размеры сеточных блоков соответствуют высотам пропластков: 6, 9 и 15 метров соответственно. В противоположных по диагонали угловых блоках установлены две скважины с заданным дебитом (добывающая и нагнетающая). Более подробно постановка задачи изложена в [8].

Для сравнения результатов с решением коммерческих комплексов на рисунках 1 , 2 приведено наложение графиков решения, полученного по комплексу НИМФА на изображения решений из статьи [8].

Видно хорошее качественное совпадение решений.

Во втором тесте резервуар представлен прямоугольным параллелепипедом. Расчетная сетка – 9x9x6 ячеек. Проводится моделирование горизонтальной скважины, длина которой равна 274,32 м. Скважина расположена в верхнем пропластке. Период моделирования – 1500 дней. Более подробно постановка задачи изложена в [9] Сравнения результатов с решением коммерческих комплексов представлено на рисунке 3.

Результаты расчета данного теста хорошо согласуются с расчетами по коммерческим комплексам (рис. 3), это хорошо видно при наложении графика решения, полученного с помощью комплекса НИМФА, на графики из статьи [9]

С помощью комплекса программ были проведены расчеты модели реальных месторождений в водонапорном режиме и с геологическим разломом.

Расчетный период моделирования первого месторождения составляет 71 год. Геометрические размеры резервуара составляют 5.1x3.7x0.027 км. начальное распределение нефтенасыщенности показано на рисунке 4. В задаче установлено 12 скважин.

На рисунке 5 показан результат решения – график суммарной добычи нефти.

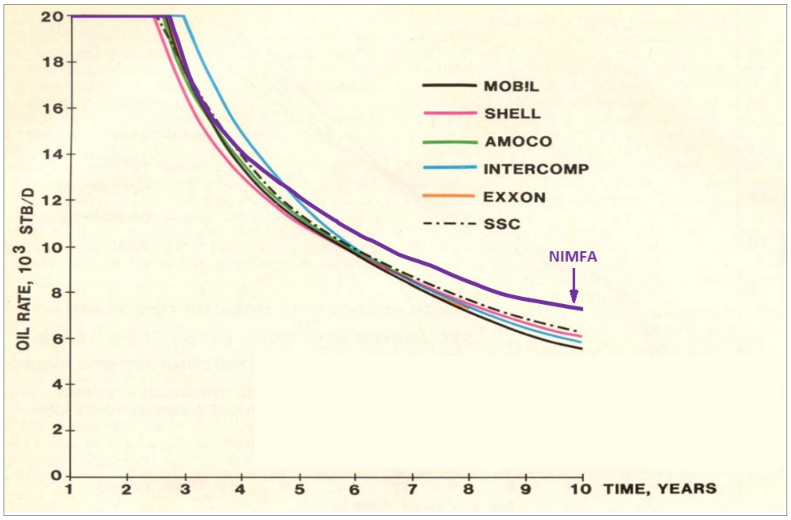


Рис. 1. Дебит нефти добывающей скважины.

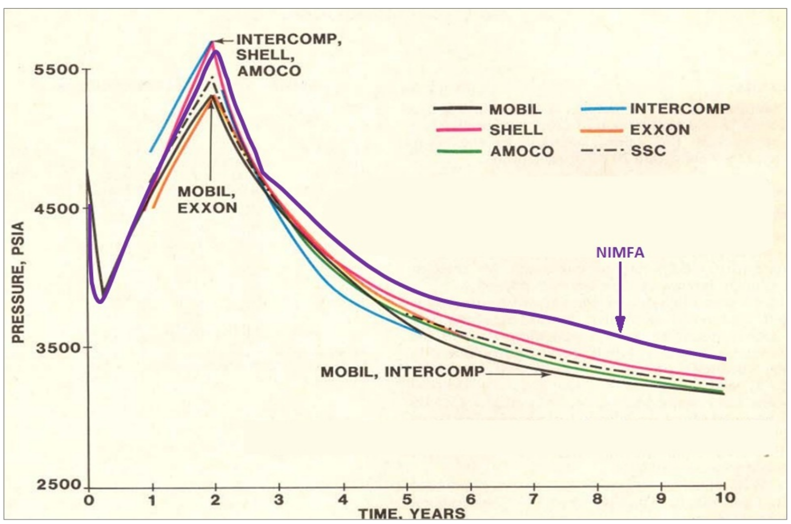


Рис. 2. Давление в блоке с добывающей скважиной.

Расчет данной задачи также проводился в параллельном режиме. На рисунке 6 представлен график ускорения счета. С использованием расчетной сетки объемом в 1 млн. активных ячеек на 192 ядрах Супер ЭВМ время расчета от суток уменьшилось до 12 мин.

Расчетный период во второй задаче с реальным месторождением составляет 43 года. В задаче установлено 146 скважин (28 из них нагнетающих). Объем расчетной сетки – 303 тыс. ячеек (265,5 тыс. активных ячеек). Стратегия скважин определяется 13 летней историей разработки месторождения. На рисунке

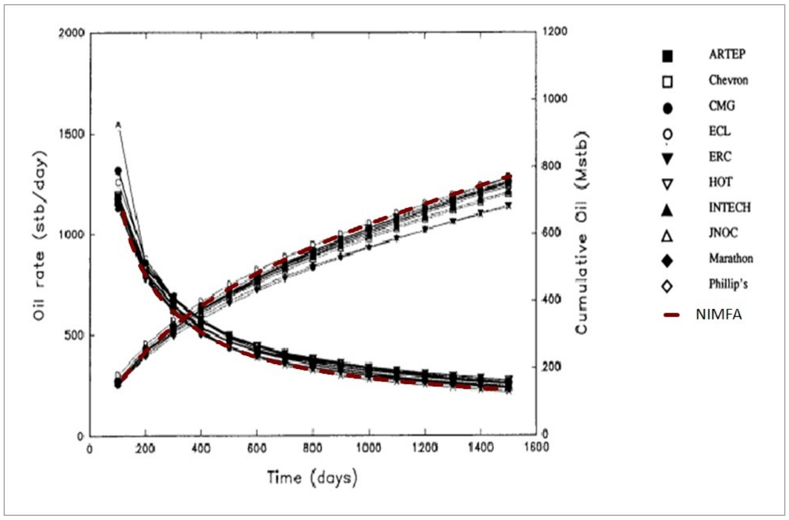


Рис. 3. Добыча нефти (накопленная и на скважине-продюссере).

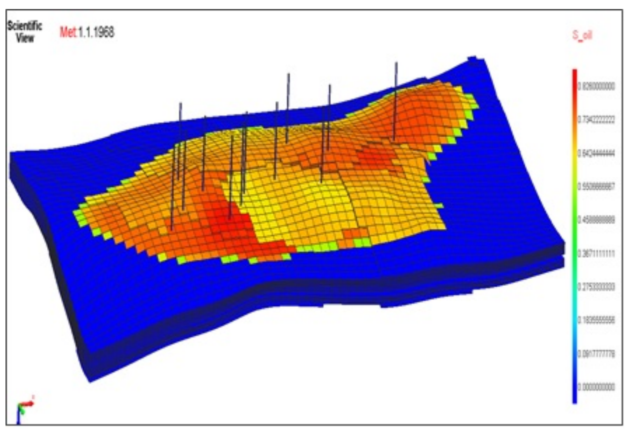


Рис. 4. Распределение насыщенности нефти.

7 показано начальное распределение нефтенасыщенности, геометрия задачи и расстановка скважин.

Следующий рисунок демонстрирует решение данной задачи, полученное с помощью комплекса НИМФА – это график суммарной добычи нефти с месторождения.

Таким образом, в настоящий момент создан отечественный программный комплекс НИМФА, позволяющий проводить расчеты задач многофазной фильтрации (по модели „Black Oil“) в параллельном режиме. Результаты расчетов согласуются с результатами, полученными по коммерческим программным продуктам.

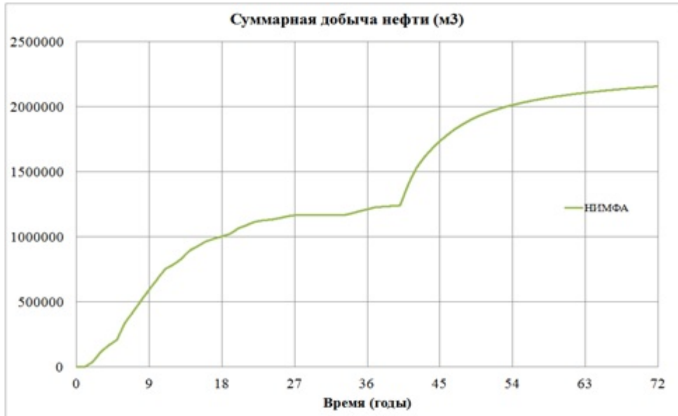


Рис. 5. Добыча нефти.

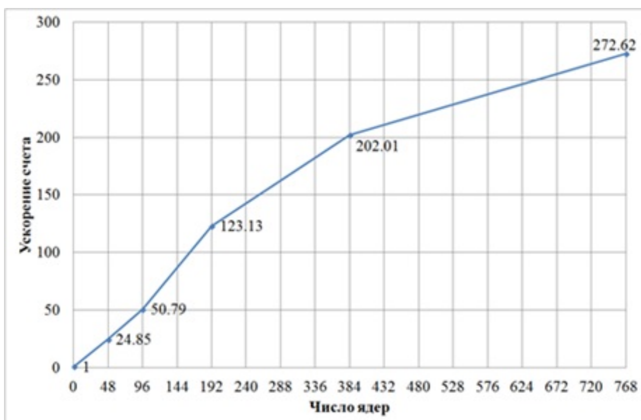


Рис. 6. Ускорение в параллельном режиме.

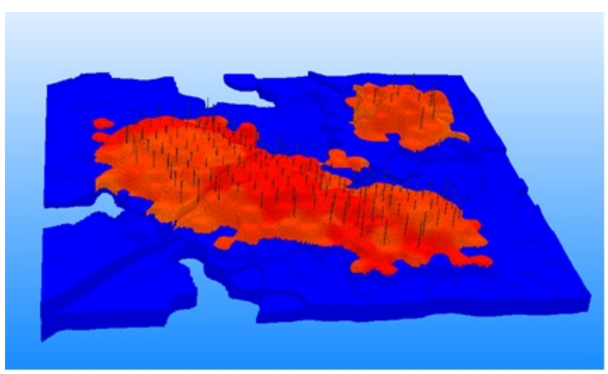


Рис. 7. Распределение насыщенности нефти.

Рис. 8. Добыча нефти.

References

[1] Official site of Schlumberger [electronic resource]. Access mode: http://www.sis.slb.ru/

[2] Official site of Computer Modeling Group Ltd. [electronic resource]. Access mode: http://www.cmgl.ca/software/imex2014

[3] O.I. Butnev, V.A. Pronin, M.L. Sidorov, S.S. Kolesnikov, V.Yu. Kuznetsov, *Software package NIMFA-2 for solving the multi-phase filtration with the use of supercomputer technologies*, Proceedings of the XIV International conference „Supercomputing and Mathematical Modeling“, RFNC – VNIIEF, Sarov, (2012), 112–119.

[4] A.D. Yarullin, *Methods of calculating the three-phase filter on multiprocessor computers*, Scientific notes USU. Ser.: Mathematics and Information Technology, **1**(5) (2013), 144–164.

[5] R.D. Kanevskaya, *Mathematical modeling of hydrodynamic processes of development of hydrocarbon deposits*, Institute of Computer Science, Moscow – Izhevsk, (2002).

[6] K.D. Nikitin, *Nonlinear finite volume method for the two-phase filtration problems*, Math modeling, **22** (2010), 131–147.

[7] A.Yu. Artemyev, Yu.G. Bartenev, Yu.A. Bondarenko, et al., *Library of sparse linear systems solvers*, Proceedings RFNC – VNIIEF, Sarov, **7** (2004), 80–95.

[8] A. Odeh, *Comparison of Solutions to a Tree-Dimensional Black-Oil Reservoir Simulation Problem*, JPT, **33** (1981), 13–25.

[9] L. Ngheim, D.A. Collins, R. Sharma, *Seventh SPE Comparative Solution Project: Modeling of Horizontal Wells in Reservoir Simulation*, SPE 21221, (1991), 17–20.

Butnev O.I, Pronin V.A., Sidorov M.L., Kolesnikov S.S., Kuznetsov V.Yu, Yarullin A.D., Deryugin Yu.N., Gorev I.V., Mashenkin P.A.

Institute of Theoretical and Computational Physics, Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics

Mira Ave, 37,

607188, Sarov, Nizhny Novgorod region, Russia

E-mail address: `OIButnev@vniief.ru, A.D.Yarullin@itmf.vniief.ru`

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.33–С.41 (2015) УДК 004.75
MSC 68M14

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ ГОМОМОРФНОГО ШИФРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ

Н.И. ЧЕРВЯКОВ, М.Г. БАБЕНКО, Н.Н. КУЧЕРОВ

Abstract. In this paper the new scheme of homomorphic encryption based on polynomial residue number system is proposed. To solve the issues of information security polynomial residue number system is used. A new algorithm for recovery of the polynomial from residue number system based on recursive pairing is presented. That allows reducing the amount of multiplication operation units from $O\left(n^2\right)$ to $O\left(n \log n\right)$. That allows to significantly increase the speed of decryption of information.

Keywords: polynomial residue number system, homomorphic encryption, cloud computing.

1. Введение

Использование облачных вычислений позволяет получать существенные функциональные и экономические преимущества при решении вычислительно сложных задач [8]. С другой стороны, облачные технологии требуют особых подходов к построению системы защиты, с необходимостью обеспечивать конфиденциальность, целостность и корректность полученных результатов. Гомоморфные шифры используют для обеспечения конфиденциальности информации [11]. Для решения вопросов защиты информации, определения и исправления ошибок применим полиномиальную систему остаточных классов (ПСОК). В качестве оснований ПСОК предлагается использовать двучлены вида $m_\alpha\left(x\right) = x^d - \alpha$ из $F_p\left[x\right]$.

Chervyakov, N.I., Babenko, M.G., Kucherov, N.N., Development of homomorphic encryption scheme based on polinomial residue number system.

Поступила 1 июля 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

В качестве оснований СОК используем двучлены вида $m_\alpha(x) = x^d - \alpha$. Многочлены $m_{\alpha_1}(x)$, $m_{\alpha_2}(x)$, $\ldots, m_{\alpha_n}(x)$ попарно взаимно просты если для всех $i \neq j$ выполняется условие $|\alpha_i - \alpha_j|_p \neq 0$.

Так как остаток от деления многочлена x^m на многочлен $m_\alpha(x) = x^d - \alpha$ над простым полем F_p равен:

$$r_{m,\alpha} = \alpha^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} x^{|m|_d}, \tag{1}$$

то используя формулу 1 мы можем за линейное время найти остаток от деления многочлена $A(x)$ на $m_\alpha(x) = x^d - \alpha$. Вычисляя остатки от деления многочлена $A(x)$ на попарно взаимно простые многочлены $m_{\alpha_1}(x)$, $m_{\alpha_2}(x)$, $\ldots, m_{\alpha_n}(x)$ можно выполнить параллельно и независимо друг от друга. Следовательно, для вычисления представления многочлена $A(x)$ в полиномиальной системе остаточных классов (ПСОК) требует не более чем $\deg(A(x)) \cdot n$ модульных сложений и умножений.

2. Прямое преобразование из двоичного кода в код полиномиальной системы классов вычетов

Для реализации вычислительного процесса с использованием полиномиальной системы классов вычетов (ПСКВ) необходимо осуществить преобразование из позиционного кода в модулярный и обратно. Согласно [1, 2, 9] такие операции являются немодульными и относятся к классу позиционных операций, которые являются наиболее трудоемкими в непозиционной системе классов вычетов. Как правило, немодульные процедуры реализуют с помощью последовательности модульных операций.

Одной из первых немодульных процедур, необходимой для функционирования процессора класса вычетов, является реализация прямого преобразования позиционных кодов в код ПСКВ расширенного поля Галуа F_p [3, 4, 5].

Как известно, представление операнда в позиционном счислении определяется следующим образом

$$A(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

где a_j – элементы поля F_p; $j = 0, \ldots, r$.

Для перевода из позиционной системы счисления (ПСС) в непозиционную, заданную взаимно простыми основаниями $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$, необходимо выполнить операции деления на модули $p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Образование остатка $\alpha_i(x)$ в этом случае осуществляется следующим образом

$$\alpha_i(x) = A(x) - \left[\frac{A(x)}{p_i(x)}\right] p_i(x),$$

где $\left[\frac{A(x)}{p_i(x)}\right]$ – наименьшее целое от деления $A(x)$ на основание $p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Все множество методов перевода из ПСС в систему классов вычетов можно свести к нескольким основным группам. Как показано в работах [3, 6, 7] основой первой группы методов перевода составляет теорема, согласно которой вычисление остатка осуществляется с помощью итерационного алгоритма. Для этого необходимо определить остатки от деления на p_j степеней основания, которые дадут набор чисел C_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. Если остаток от деления степени основания C_i превосходит половину модуля p_j, то в качестве значения C_i необходимо взять число, дополняющее до значения p_j, со знаком минус. Значения C_i, можно знать заранее и они являются константами для выбранной системы счисления. Количество разрядов C_i определяется разрядностью исходного числа . Затем цифры исходного числа умножаются на соответствующие числа C_i, полученная сумма определяется

$$A_i = A_k C_k + \ldots + A_1 C_1 + A_0 C_0 < A_k S^k \ldots + A_1 S^1 + A_0.$$

По значению A_1, можно узнать каков остаток от деления числа A на p_i. Если A_i имеет количество разрядов больше, чем p_i, то вновь цифры числа A_i необходимо умножить на числа C_i, причем полученная сумма будет $A_2 < A_1$.

По значению A_2 можно узнать каков остаток от деления числа A на p_i. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не получится число A_1, разрядностью равной или меньшей разрядности p_j. По данному числу и определяется остаток от деления A на p_j.

При работе в поле F_p для представления операндов в качестве весовых коэффициентов используются значепия C_i, то есть

$$a_i = C_i = \left|2^i\right|^+_{p_i} = 2^i, \forall i \in [0, r]\,.$$

Таким образом, для получения требуемого вычета $\alpha_i = |A|^+_{p_i}$ предлагается использовать повторение вычислительной модели

$$|A|^+_{p_i} = \sum_{i=0}^{k} \left|2^i\right|^+_{p_i} \{a\,(j)\}^{[i]}\,.$$

Методы прямого перевода из позиционного кода в модулярный код, составляющие вторую группу, реализуют различные алгоритмы последовательного умножения и суммирования. В основу данных методов положены формула Горнера и ее различные модификации. Наиболее полная информация о данных методах представлена в работе [6]. Суть данного метода сводится к последовательному вычислению остатка по модулю p_j согласно следующего алгоритма: производится умножение старшего разряда числа на основание системы счисления, в которой представлено это число, затем суммирование полученного результата со значением следующего разряда по модулю p_j, затем умножение полученного результата на основание системы счисления по модулю p_j, и т.д. до младшего разряда исходного позиционного числа.

Вычислительные процессы четвертой группы методов перевода чисел из ПСС в непозиционную систему реализуют различные варианты метода непосредственного суммирования. В работе [7] был сделан вывод о нецелесообразности использования данного метода из-за необходимости хранения большого числа констант, используемых для перевода из позиционного кода в модулярный.

Однако применение ПСКВ позволяет взглянуть на данную проблему с другой точки зрения. Преобразование исходного $A\,(x)$, заданного в расширенном поле F_p, в ПСКВ осуществляется с помощью набора констант, являющихся эквивалентами степеней оснований 2^i и коэффициентов при соответствующих степенях оснований a_i представленных в системе классов вычетов [4, 5].

Перевод из позиционного двоичного кода в ПСКВ осуществляется в соответствии с выражением

$$\alpha_i \equiv A(x) \bmod p_i(x) = \sum i = 0^k a_i(x) x^i \bmod p_i(x), i = 1, 2, \ldots, n.$$

Для получения $A(x)$ в системе классов вычетов с основаниями $p_1 A(x)$, $p_2 A(x)$, $\ldots, p_n A(x)$ необходимо получить в этой системе значения $a_i A(x) x^i \bmod p_i A(x)$. В этом случае остаток по модулю $p_i A(x)$ определяется

$$\alpha_i(x) = \left| \sum_{i=0}^{k} \left(a_i' x^i \bmod p_i(x) \right) \right|_p^+, \tag{2}$$

где $a_i' = a_i \bmod p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В соответствии с выражением 2, перевод $A(x)$ из ПСС в непозиционную можно свести к суммированию по модулю двух величин $\left(a_i' x^i\right) \bmod p_i(x)$ в соответствии с заданным полиномом $A(x)$.

3. Методы перевода из полинамиальной сиситемы остаточных классов в позиционную систему счисления

Наряду с прямым преобразованием из позиционного кода в модулярный существует и обратный перевод, позволяющий по величине n-мерного вектора $A(z) = (\alpha_1(z), \ldots, \alpha_n(z))$ получить двоичное представление полинома. В настоящее время известны два основных способа перевода непозиционного кода классов вычетов в ПСС:

(1) на основе ортогональных базисов с использованием Китайской теоремы об остатках (КТО);
(2) на основе перевода в обобщенную полиадическую систему (ОПС).

Задача восстановления заданного полинома $A(z) \in F_p$ по совокупиости его остатков $(\alpha_1(z), \alpha_2(z), \ldots, \alpha_n(z))$ является одной из актуальных, так как от ее решения во многом зависит эффективность функционирования непозиционного процессора.

3.1. Перевод непозиционного кода на основе китайской теоремы об остатках.

Применение КТО обеспечивает однозначное отображение одномерных величин в многомерные. Задача перевода n-мерного представления полинома $A(z) \in F_p$ к позиционному виду представляется следующим образом: для заданного набора модулей $p_i(Z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ необходимо осуществить преобразование n-мерного образа $A(z) = (\alpha_1(z), \alpha_2(z), \ldots, \alpha_n(z))$ в систему с основанием $P(z) = \prod_{i=1}^{n} p_i(z)$ так, чтобы выполнилось условие

$$A(z) = \alpha_1(z) B_1(z) + \alpha_2(z) B_2(z) + \cdots + \alpha_n(z) B_n(z), \tag{3}$$

где $B_i(z)$ – базисы системы; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ортогональные базисы $B_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ПСКВ расширенного поля Галуа F_p можно представить в следующем виде $B_1(z) = (1, 0, 0, \ldots, 0), B_2(z) = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, B_n(z) = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Вычисление значений ортогональных базисов ПСКВ производится по формуле:

$$B_i(z) = \begin{cases} 0 \bmod p_u(z), u \neq i \\ 1 \bmod p_u(z), u = i \end{cases}, \tag{4}$$

где $B_i(z) = m_i(z)\prod_{u=1,u\neq i}^{n} p_u(z)$; $m_i(z)\cdot\prod_{u=1,u\neq i}^{n} p_u(z) \equiv 1 \bmod p_i(z)$.

Ниже приведем алгоритм нахождения ортогональных базисов $B_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ для системы ПСКВ для поля Галуа F_p.

(1) Па первом этапе осуществляется вычисления значения $P_i^*(z) = \frac{P(z)}{p_i(z)} = = \prod_{u=1,u\neq i}^{n} p_u(z)$

(2) Так величина $P_i^*(z)$ составлена из множителей, взаимно простых с $p_i(z)$, то определяется значение остатка $\delta_i(z) = rest\left(\frac{P_i^*}{p_i(z)}\right)$.

(3) В соответствии с условием 4 выбирается значение $m_i(z)$, такое, что выполняется условие $m_i(z)\,\delta_i(z) \bmod p_i(z) \equiv 1$.

(4) Вычисляется значение ортогонального базиса $B_i(z) = m_i(z)\,P_i^*(z)$.

3.2. **Реализация преобразований из полиномиальной системы классов вычетов в обобщенную полиадическую систему.**

Преобразование из ПСКВ в ПСС базируется на применении ОПС. Введение промежуточной смещанной системы счисления, позволяет представлять число A в виде

$$A = a_1 + a_2p_1 + a_3p_1p_2 + \cdots + a_np1\ldots p_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_kq_{k-1}, \tag{5}$$

где a_k – цифры в полиадической системе счисления; $q_k = q_{k-1}p_k$ – вес цифры в ОПС (смещанный базис).

Если обеспечить соответствие между основаниями ОПС и основаниями системы классов вычетов, то справедливо равенство

$$A = (a_1(z), a_2(z), \ldots, a_n(z)) = [a_1(z), a_2(z), \ldots, a_n(z)]\,. \tag{6}$$

Тогда на основании 6 можно сделать вывод о возможности перевода кода классов вычетов в кодовую последовательность ОПС. Причем вся процедура перевода должна осуществляться в модулярной арифметике.

В большинстве случаев применяют методы, базирующиеся на рекурентном алгоритме вычисления коэффициентов. В работах [4, 7] представлен метод перевода в позиционную систему счисления с использованием коэффициентов ОПС, согласно которому

$$\begin{gathered} Q_1 = (1, 1, \ldots, 1)\,; \\ Q_2 = (0, q_{2,2}, q_{2,3}, \ldots, q_{2,n})\,; \\ \cdots \\ Q_n = (0, 0, 0, \ldots, q_{n,n})\,; \end{gathered},$$

где a_k определяется по рекуррентной формуле

$$\begin{gathered} \alpha_1 \equiv a_1\,(\mathrm{mod} p_1)\,; \\ \alpha_2 \equiv a_1 + a_2q_{2,2}\,(\mathrm{mod} p_2)\,; \\ \cdots \\ \alpha_n \equiv a_1 + a_2q_{2,n}\,(\mathrm{mod} p_2) + a_nq_{n,n}\,(\mathrm{mod} p_n)\,; \end{gathered},$$

где w_k – формальная обратная величина k-ого основания по j-ому основанию ($j \neq k$); a_{k-1} – набор остатков по всем модулям, номера которых выше номера $k-1$; $k = 1, \ldots, n$.

При этом все операции по вычислению коэффициентов a_k производятся в системе остаточных классов.

3.3. Предлагаемый метод восстановления многочленов.

Теорема 1. *Пусть* $m_1 = x^n - \alpha$, $m_2 = x^{vn} - \beta \in F_p[x]$, $\alpha \neq \beta$, p *– простое число,* $k = \left|\frac{1}{\alpha^v - \beta}\right|_p$, *и* $F \xrightarrow{COK} (f_1(x), f_2(x))$.
Тогда $F = f_2(x) + |k(f_1(x) - f_2(x))|_{m_1} m_2$.

Доказательство.

1. Покажем что: $F \bmod m_1(x) = f_1(x)$.
$$\left|f_2(x) + |k(f_1(x) - f_2(x))|_{m_1} m_2\right|_{m_1}$$
$$\equiv \left||f_2(x)|_{m_1} + \left||k(f_1(x) - f_2(x))|_{m_1} m_2\right|_{m_1}\right|_{m_1}$$
$$\equiv \left||f_2(x)|_{m_1} + \left|\left|\left|\frac{1}{\alpha^v - \beta}\right|_p (f_1(x) - f_2(x))\right|_{m_1} m_2\right|_{m_1}\right|_{m_1}$$
$$\equiv \left||f_2(x)|_{m_1} + \left|\left|\frac{1}{\alpha^v - \beta}\right|_p f_1(x) m_2\right|_{m_1} - \left|\left|\frac{1}{\alpha^v - \beta}\right|_p f_2(x) m_2\right|_{m1}\right|_{m_1}$$
$$\equiv \left||f_2(x)|_{m_1} + \left|\left|\frac{1}{\alpha^v - \beta}\right|_p f_1(x)(\alpha^r - \beta)\right|_{m_1} - \left|\left|\frac{1}{\alpha^v - \beta}\right|_p f_2(x)(\alpha^r - \beta)\right|_{m_1}\right|_{m_1}$$
$$\equiv \left||f_2(x)|_{m_1} + |f_1(x)|_{m_1} - |f_2(x)|_{m_1}\right|_{m_1} \equiv \left||f_1(x)|_{m_1}\right|_{m_1} \equiv |f_1(x)|_{m_1}$$
2. Покажем, что $\deg(F(x)) < \deg(m_1(x) \cdot m_2(x))$
$$\deg\left(f_2(x) + |k(f_1(x) - f_2(x))|_{m_1} m_2\right)$$
$$\leq \max\left\{\deg f_2(x); \deg\left(|k(f_1(x) - f_2(x))|_{m_1} m_2\right)\right\}$$
$$\leq \max\{vn - 1; n - 1 + vn\} = vn + n - 1 < \deg(m_1(x)) \deg(m_2(x)).$$
Следовательно по Китайской теореме об остатках

$$F(x) = f_2(x) + |k(f_1(x) - f_2(x))|_{m_1} m_2$$

□

Замечание.(к теореме 1.) Если $v = 1$, то формула в теореме 1 примет вид:
$$F = f_2(x) + k \cdot (f_1(x) - f_2(x)) \cdot m_2(x) \text{ над } F_p.$$

3.4. Примеры восстановления значения многочленов.

Пусть полиномиальная система остаточных классов задана многочленами $p_1 = x^2 - 1$, $p_2 = x^2 - 2$, $p_3 = x^2 - 5$, $p_4 = x^2 - 6$ над F_7 и многочлен представлен в виде $A(x) \xrightarrow{\text{СОК}} (x + 1, x + 2, x + 3, x + 4)$.

1. Восстановим значение многочлена на базе КТО.

Вычислим основание системы $P(x) = \prod_{i=1}^{4} p_i(x) = x^8 + 2x^4 + 4$ над F_7.
Найдем ортогональные базисы:
$\frac{P(x)}{p_1(x)} = x^6 + x^4 + 3x^2 + 3$ над F_7;
$B_1(x) = \left|\frac{1}{x^6 + x^4 + 3x^2 + 3}\right|_{x^2 - 1} \left(x^6 + x^4 + 3x^2 + 3\right) = x^6 + x^4 + 3x^2 + 3$ над F_7;
$\frac{P(x)}{p_2(x)} = x^6 + 2x^4 + 6x^2 + 5$ над F_7;
$B_2(x) = \left|\frac{1}{x^6 + 2x^4 + 6x^2 + 5}\right|_{x^2 - 2} \left(x^6 + 2x^4 + 6x^2 + 5\right) = 3x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1$ над F_7;
$\frac{P(x)}{p_3(x)} = x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 2$ над F_7;
$B_3(x) = \left|\frac{1}{x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 2}\right|_{x^2 - 5} \left(x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 2\right) = 4x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 1$ над F_7;

$\frac{P(x)}{p_3(x)} = x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 4$ над F_7;

$B_4(x) = \left|\frac{1}{x^6+6x^4+3x^2+4}\right|_{x^2-6} \left(x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 4\right) = 6x^6 + x^4 + 4x^2 + 3$ над F_7;

$A(x) = B_1(x)\alpha_1(x) + B_2(x)\alpha_2(x) + B_3(x)\alpha_3(x) + B_4(x)\alpha_4(x)$
$= (x+1)\left(x^6 + x^4 + 3x^2 + 3\right) + (x+2)\left(3x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1\right)$
$+ (x+3)\left(4x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 1\right) + (x+4)\left(6x^6 + x^4 + 4x^2 + 3\right)$
$= x^6 + x^2 + x + 6$ над F_7.

2. Найдем значение многочлена с использованием обобщенной полиадической системы счисления.

$Q_1(x) = 1 \xrightarrow{\text{СОК}} (1,1,1,1)$;

$Q_2(x) = |p_1(x)|_7 = \left|x^2 - 1\right|_7 \xrightarrow{\text{СОК}} (0,1,4,5)$;

$Q_3(x) = |p_1(x)\,p_2(x)|_7 = \left|x^4 + 4x^2 + 2\right|_7 \xrightarrow{\text{СОК}} (0,0,5,6)$;

$Q_4(x) = |p_1(x)\,p_2(x)\,p_3(x)|_7 = \left|x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 4\right|_7 \xrightarrow{\text{СОК}} (0,0,0,6)$;

Вычислим коэффициенты w:

$w_1 = 1$, $w_2 = 1$, $w_3 = \left|\frac{1}{5}\right|_7 = 3$, $w_4 = \left|\frac{1}{6}\right|_7 = 6$.

$a_1(x) = \alpha_1(x) = x + 1$;

$a_2(x) = |(\alpha_2(x) - a_1(x)) \bmod p_2(x)|_7 = |x + 2 - x - 1|_7 = 1$;

$a_3(x) = |(\alpha_3(x) - a_1(x)\,q_{1,3} - a_2(x)\,q_{2,3})\,w_3 \bmod p_3(x)|_7$
$|(x + 3 - (x+1)\cdot 1 - 1\cdot 4)\cdot 3|_7 = 1$;

$a_4(x) = |(\alpha_4(x) - a_1(x)\,q_{1,4} - a_2(x)\,q_{2,4} - a_3(x)\,q_{3,4})\,w_4 \bmod p_4(x)|_7 =$
$|(x + 4 - (x+1)\cdot 1 - 1\cdot 5 - 1\cdot 6)\cdot 6|_7 = 1$;

$A(x) = a_1(x)\,Q_1(x) + a_2(x)\,Q_2(x) + a_3(x)\,Q_3(x) + a_4(x)\,Q_4(x)$
$= \left|(x+1)\cdot 1 + 1\cdot\left(x^2+6\right) + 1\cdot\left(x^4 + 4x^2 + 2\right) + 1\cdot\left(x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 4\right)\right|_7$
$= x^6 + x^2 + x + 6$.

3. Вычислим значения многочлена с использованием теоремы 1 и метода рекурсивного сдваивания.

(1) Пусть $m_1 = p_1 = x^2 - 1$, $m_2 = p_4 = x^2 - 6$, тогда $k = \left|\frac{1}{1-6}\right|_7 = \left|\frac{1}{2}\right|_7 = 4$,
$F(X) = x + 4 + 4\cdot(x + 1 - x - 4)\left(x^2 - 6\right) = x + 4 + 2x^2 + 2 = 2x^2 + x + 6$ над F_7;

(2) Пусть $m_1 = p_2 = x^2 - 2$, $m_2 = p_3 = x^2 - 5$, тогда $k = \left|\frac{1}{2-5}\right|_7 = \left|\frac{1}{4}\right|_7 = 2$,
$F(X) = x + 3 + 2\cdot(x + 2 - x - 3)\left(x^2 - 5\right) = x + 3 + 5x^2 + 3 = 5x^2 + x + 6$ над F_7

(3) Пусть $m_1 = p_1 \cdot p_4 = x^4 - 1$ над F_7, $m_2 = p_2 \cdot p_3 = x^4 - 4$ над F_7, тогда $k = \left|\frac{1}{1-4}\right|_7 = \left|\frac{1}{4}\right|_7 = 2$,
$F(X) = 5x^2 + x + 6 + 2\left(2x^2 + x + 6 - 5x^2 - x - 6\right)\left(x^4 - 4\right) = x^6 + x^2 + x + 6$ над F_7.

Следовательно, $A(x) = x^6 + x^2 + x + 6$ над F_7.

4. Метод контроля результата облачных вычислений в полиномиальной системе остаточных классов

Пусть имеется k рабочих и r контрольных оснований полиномиальной системы остаточных классов заданных над конечным полем F_p удовлетворяющих двум условиям:

(1) $\deg(m_1(x)) \le \deg(m_2(x)) \le \ldots \le \deg(m_k(x)) \le \deg(m_{k+1}(x)) \le \ldots \le$
$\le \deg(m_{k+r}(x))$,

(2) $\gcd(m_i(x), m_j(x)) = 1$ для всех $i \neq j$, где $n = k + r$.

Результатом облачных вычислений является многочлен $A \xrightarrow{\text{СОК}} (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$, где $\deg(A(x)) < \deg(M_{\text{раб}}(x))$ и для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется $\alpha_i = |A(x)|_{m_i(x)}$ и $M_{\text{раб}} = \prod_{i=1}^{k} m_i(x)$.

Теорема 2. *Если в результате вычислений произошла ошибка не более чем в r вычислительных каналах, то* $\deg(A(x)) \geq \deg(M_{раб}(x))$.

Доказательство. Пусть произошла ошибка при вычислений i-ом вычислительном канале, тогда мы можем записать это в виде

$\bar{A}(x) = A(x) + E(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)) + (0, 0, \ldots, \epsilon_i, 0, \ldots, 0)$
$= (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \bar{\alpha_1}(x), \ldots, \alpha_n(x))$, где $E(x) = M_i(x) \cdot \left|\frac{\epsilon_i(x)}{M_i^{-1}(x)}\right|_{m_i(x)}$ и

$M(x) = \prod_{i=1}^{n} m_i(x)$, $M_i = \frac{M(x)}{m_i(x)}$.

Так как $\deg(M_i(x)) \geq \deg(M_{\text{раб}}(x))$ то, $\deg\left(\bar{A}(x)\right) \geq \deg(M_{\text{раб}}(x))$. Значит, если произошла ошибка в одном вычислительном канале, то теорема верна.

Рассмотрим второй случай если, произошла ошибка в s каналах с порядковыми номерами $i_1, i_2, \ldots, i_s$, где $s \leq r$. Тогда построим полиномиальную систему остаточных классов, которая состоит из $n - s + 1$ основания: $j_1, j_2, \ldots, j_{n-s}$ порядковые номера оснований в которых не произошла ошибка и $m'_{j_{n-s+1}}(x) = \prod_{t=1}^{s} m_{i_t}(x)$, следовательно в построенной полиномиальной системе остаточных классов произошла одна ошибка в $n - s + 1$-ом вычислительном канале и значит, согласно случаю 1 будет выполняться условие

$$\deg\left(\bar{A}(x)\right) \geq \deg(M_{\text{раб}}(x)).$$

□

5. Заключение

В статье предлжена новая схема гомоморфного шифрования на основе полиномиальной системы остаточных классов. Для решения вопросов защиты информации используется полиномиальная система остаточных классов. Предложен новый алгоритм восстановления многочлена из системы остаточных классов основанный на рекурсивном сдваивании, позволяющий уменьшить количество операции модульного умножения с от $O\left(n^2\right)$ до $O(n \log n)$, что позволяет существенно увеличить скорость алгоритма дешифрования информации.

References

[1] I.J. Akushskii, D.M. Yuditskii, *Machine arithmetic in residual classes*, Soviet radio, Moscow, 1968.

[2] V.M. Amerbaev, *Theoretical foundations of computer arithmetic*, Nauka, Alma-Ata, 1976.

[3] N. Chervyakov, *Development of Information Security's Theoretical Aspects in Cloud Technology with the Use of Threshold Structures*, Engineering and Telecommunication (EnT), 2014 International Conference on., IEEE (2014), 38–42.

[4] N.I. Chervyakov et al., *The Effective Neural Network Implementation of the Secret Sharing Scheme with the Use of Matrix Projections on FPGA*, Advances in Swarm and Computational Intelligence, Springer International Publishing (2015), 3–10.

[5] N.I. Chervyakov, I.A. Kalmykov, V.A. Galkina, *Elements of the application of computer mathematics and neuroinformatics*, FIZMATLIT, Moscow, 2003.

[6] N.I.Chervyakov, P.A. Sahnyuk, A.V. Shaposhnikov, S.A. Rodionov, *Modular parallel computing structure of the neuroprocessor systems*, FIZMATLIT, Moscow, 2003.

[7] N.I. Chervyakov, A.V. Shaposhnikov, P.A. Sahnyuk, A.N. Makokha, *Neurocomputers in residual classes*, Radiotekhnika, Moscow, 2003.

[8] C. Gentry, *Computing arbitrary functions of encrypted data*, Commun. ACM, **53**(3) (2010), 97–105.

[9] R. Gregory, *Base conversion in the RNS*, BBT, **17** (1977), 286–302.

[10] G. Kuna, *Large scale integrated circuit and modern signal processing ed.*, Radio i svyaz, Moscow, 1989.

[11] M.A. Soderstrand, W.K. Jenkins, G.A. Jullien, F.J. Taylor, *Residue number system arithmetic: modern applications in digital signal processing*, IEEE Press, Piscataway, NJ, USA, 1986.

Chervyakov Nikolay Ivanovich
North-Caucasus Federal University,
Pushkin Street, 1,
355009, Stavropol, Russia
E-mail address: k-fmf-primath@stavsu.ru

Babenko Mikhail Grigorevich
North-Caucasus Federal University,
Pushkin Street, 1,
355009, Stavropol, Russia
E-mail address: mgbabenko@ncfu.ru

Kucherov Nikolay Nikolaevich
North-Caucasus Federal University,
Pushkin Street, 1,
355009, Stavropol, Russia
E-mail address: nik.bekesh@mail.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. C.42–C.48 (2015) УДК 519.622.1
MSC 34C05

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ

Д.М. ЧЕРЕНКОВ, С.В. ЗУЕВ

Abstract. For non-correct (unstable or with more than one solution) Cauchy problem a model of the dynamical system is constructed in terms of the probability for the system to be in a certain state. Such a description might be useful for forecasting and safety problems, where the system has nonlinear nature and, in particular, in case of dynamic chaos.

Keywords: nonlinear forecasting, probabilistic dynamics.

1. Введение

Работа посвящена развитию идеи описания динамических систем общего вида (в том числе нелинейных) методом временных рядов. Моделирование хаотичных динамических систем с помощью временных рядов подробно рассмотрено в работе [1]. Дальнейшее развитие идеи применения временных рядов в описании сложных и хаотичных систем сделано в работах [3] – [5]. Описание применения временных рядов для моделирования хаотичных систем есть и в русскоязычной литературе — см., например, [2].

В известных в литературе подходах моделирование системы осуществляется путем построения временного ряда состояний системы из некоторого известного начального состояния. В данной работе рассмотрен предлагаемый авторами подход к описанию эволюции динамической системы и соответствующая вычислительная модель. Подход основан на определении состояния исследуемой динамической системы в терминах вероятности получения при измерении в указанный промежуток времени значений наблюдаемых в заданных интервалах. Такое описание применимо с целью получения полезных результатов даже

Cherenkov, D.M., Zuev, S.V., Probabilistic approach to an non-correct Cauchy problem.

Поступила 1 июня 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

тогда, когда задача Коши поставлена некорректно и имеет либо неустойчивое решение, либо более одного решения. Строго говоря, подход применим не для задачи Коши, а для ее модификации и, соответственно, для модификации краевой задачи. Сравним формулировки собственно задачи Коши и предлагаемую модификацию для случая, когда обычная задача Коши является некорректной. Выберем случай динамической системы первого порядка (для систем высших порядков изменения очевидны из существующей теории).

Классическая задача Коши для динамической системы первого порядка:

Определение 1. *Пусть имеется функция двух переменных $f(x,t)$, определенная и непрерывная в некоторой области $U \in \mathbf{R}^2$. Рассмотрим множество кривых $x = x(t)$ в области U, таких что*

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = f(x,t). \tag{1}$$

Задача нахождения среди указанных кривых таких, которые удовлетворяют условию

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где t_0 и x_0 — заданные числа, называется задачей Коши.

Модифицированная задача Коши для динамической системы первого порядка в случае некорректной классической задачи Коши:

Определение 2. *Пусть имеется функция двух переменных $f(x,t)$, определенная и непрерывная в некоторой области $U \in \mathbf{R}^2$. Рассмотрим множество кривых $x = x(t)$ в области U, таких что*

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = f(x,t). \tag{3}$$

Задачу нахождения среди указанных кривых таких, которые удовлетворяют условию

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \tau] : x(t) \in [x_0, x_0 + \xi] \tag{4}$$

где t_0, τ, x_0 и ξ — заданные числа, назовем модифицированной задачей Коши.

Решением модифицированной задачи Коши для системы первого порядка будет пучок кривых, которые проходят через прямоугольник с вершинами (t_0, x_0), $(t_0, x_0+\xi)$, $(t_0+\tau, x_0)$, $(t_0+\tau, x_0+\xi)$, который далее для краткости будем обозначать $[t_0, t_0 + \tau, x_0, x_0 + \xi]$, имея в виду, что прямоугольник построен на соответствующих прямых. Пучок будем параметризовать *интегральным параметром*, который обозначим через μ, то есть пучок — это множество кривых $x(t, \mu)$, где t — параметр кривой.

Для практического решения дифференциальных уравнений и, соответственно, моделирования динамических систем, важен вопрос, который можно было бы назвать модифицированной краевой задачей: если заданы условия модифицированной задачи Коши $[t_0, t_0+\tau, x_0, x_0+\xi]$, известна функция $f(x,t)$, а также целевые диапазоны переменных t и x: $T = [t_b, t_e]$ и $X = [x_b, x_e]$, соответственно, то с какой вероятностью кривая, являющаяся решением модифицированной задачи Коши, достигнет прямоугольника $X \otimes T$?

Эффективный вычислительный алгоритм, позволяющий найти эту вероятность для любых входящих данных, позволил бы строить прогнозы движения произвольных динамических систем. Правда, результаты таких прогнозов будут давать вероятностное описание движения в том смысле, что будет известна лишь вероятность достижения тех или иных значений наблюдаемых. Но если найденные вероятности окажутся достаточно высокими, то такое описание будет весьма полезно, так как по построению оно универсально и не зависит от корректности задачи Коши.

2. Постановка задачи

Рассмотрим произвольную динамическую систему

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, t), \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{5}$$

Поставим следующую модифицированную краевую задачу. Пусть задана область S начального состояния:

$$S = \{(x_1, \dots, x_n, t) : x_1 \in [x_{10}, x_{10} + \xi_1], \dots, x_n \in [x_{n0}, x_{n0} + \xi_n], t \in [t_0, t_0 + \tau]\}. \tag{6}$$

Пусть задана область F конечного состояния:

$$F = \{(x_1, \dots, x_n, t) : x_1 \in [x_{1f}, x_{1f} + k_1\xi_1], \dots, x_n \in [x_{nf}, x_{nf} + k_n\xi_n], t \in [t_f, t_f + m\tau]\}, \tag{7}$$

где целые числа $k_1, ..., k_n, m$ характеризуют объем конечной области в единицах объема начальной области, а именно $V(S) = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n \cdot \tau$, а $V(F) = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n \cdot mV(S)$.

Очевидно, результатом решения модифицированной задачи Коши для системы (5) с начальным состоянием (6) будет пучок кривых, проходящих через область S и удовлетворяющих уравнениям (5). Часть кривых из этого пучка может пройти через область F и тогда у динамической системы, начавшей движение из состояния S, появится шанс достичь состояния F. Ясно, что система достигнет состояния F с вероятностью, равной 1, тогда и только тогда, когда все без исключения кривые пучка пройдут через область F. В ином случае вероятность обнаружения системы в состоянии F (конечно, при условии, что она была в состоянии S) будет меньше 1. Естественной мерой вероятности обнаружить систему в состоянии F при условии ее нахождения в состоянии S является отношение количества кривых, проходящих и через область S, и через область F, к количеству кривых, проходящих через область S. Требуется лишь определить как считать "количество кривых".

Предложение 1. *Пусть $\dot{x} = f(x,t)$, $x(t_0) = x_0$ — классическая задача Коши для ОДУ 1-го порядка. Если точка (x_0, t_0) не особая для функции $f(x,t)$, то интегральная кривая, являющаяся решением этой задачи, и константа интегрирования μ обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x,t)$ взаимно-однозначно соответствуют друг другу с точностью до линейного преобразования μ.*

Доказательство. Так как точка (x_0, t_0) не особая, то в ее окрестности всегда можно найти другую неособую точку (x_r, t_r) такую, что существует кривая $x = x(t)$, соединяющая две эти точки, состоящая лишь из неособых точек функции $f(x,t)$. Постоим интеграл вдоль этой кривой:

$$\int_{t_r}^{t_0} \dot{x} dt = x_0 + x_r = x_0 + \mu.$$

Выбор другой точки x_r приведет к величине $\mu + c$ вместо μ, но не повлияет на параметризацию интегральной кривой. Наконец, замена переменной x в уравнении $\dot{x} = f(x,t)$ даст другие координаты той же начальной точки: $(\tilde{x}_0, t_0)$, что приведет к другой величине константы интегрирования $\tilde{\mu}$:

$$\int_{t_r}^{t_0} \dot{\tilde{x}} dt = \tilde{x}_0 + \tilde{x}_r = \tilde{x}_0 + \tilde{\mu}.$$

Так как в качестве t можно взять натуральный параметр, то очевидно, что значения интегралов должны быть пропорциональны вне зависимости от выбора точки (x_r, t_r), то есть $\tilde{\mu} = \frac{\tilde{x}_0}{x_0}\mu$. Таким образом, замена переменной приводит к умножению μ на константу, а смещение реперной точки (x_r, t_r) — к аддитивной константе в μ. Ни то, ни другое не влияет на параметризацию интегральной кривой, то есть соответствует одному и тому же множеству точек кривой, что и требовалось доказать. □

Из предложения 1 следует, что распределение $\mu(x)$ в одномерной задаче Коши в начальный момент времени линейно по μ. Таким образом, на начальный момент времени, для неособой точки, можно считать распределение начальных условий линейной функцией параметра интегрирования μ, отнесенного к неособой реперной точке (x_r, t_r), связанной с начальной точкой неособой кривой. На этом основании в качестве критерия "количества кривых"мы использовали длины интервалов интегральных параметров μ в начальные моменты времени.

Построим интервалы значений интегральных параметров для переменных x_i из системы (5). Сначала для начального состояния:

$$I_{00}^i = \left[\min_{\alpha_i} \mu_{00}^{i\alpha_i}, \max_{\alpha_i} \mu_{00}^{i\alpha_i}\right], \tag{8}$$

где $i = 1, \ldots, n$, $\mu_{00}^{i\alpha_i}$ обозначает интегральный параметр кривой из пучка кривых $x_i(t,\mu)$, проходящих через объем S в плоскости (x_i, t), такой, что она проходит через вершину номер α_i многогранника S. Индекс 00 обозначает начальный момент времени, начальное значение координаты x_i.

Такое же построение для конечного состояния дает:

$$I_{jk_i}^i = \left[\min_{\alpha_i} \mu_{jk_i}^{i\alpha_i}, \max_{\alpha_i} \mu_{jk_i}^{i\alpha_i}\right], \tag{9}$$

где $\mu_{jk_i}^{i\alpha_i}$ обозначает интегральный параметр кривой из пучка кривых $x_i(t,\mu)$, проходящих через объем F в плоскости (x_i, t), такой, что она проходит через вершину номер α_i многогранника F. Индекс jk_i обозначает момент времени $t_0 + j\tau$ и значение координаты $x_{i0} + k_i\xi_i$ для соответствующей вершины многогранника F.

В соответствии со сделанным выше выводом о критерии "количества кривых"определим вероятность попадания системы в состояние F при условии, что она начала движение из состояния S, как

$$P(S,F) = \frac{\prod_i L(I_{00}^i \cap I_{jk_i}^i)}{\prod_i L(I_{00}^i)}, \tag{10}$$

где $L(I)$ обозначает длину интервала I. Далее построим алгоритм для вычисления $P(S,F)$.

3. Численный метод

Мы приведем алгоритм для системы второго порядка. Для систем более высокого порядка алгоритм строится по аналогии. Нашей задачей будет определить вычислительную сложность алгоритма в зависимости от размерности системы и от промежутка времени между начальным и конечным состоянием. Программная реализация на данный момент существует для систем первого порядка.

В случае системы второго порядка, постановка задачи (5)-(7) примет вид

$$\dot{x} = f(x, y, t), \qquad \dot{y} = g(x, y, t). \tag{11}$$

Область S начального состояния:

$$S = \{(x, y, t) : x \in [x_0, x_0 + \xi], y \in [y_0, y_0 + \eta], t \in [t_0, t_0 + \tau]\}. \tag{12}$$

Область F конечного состояния для простоты выберем тех же размеров, что и S:

$$F = \{(x, y, t) : x \in [x_f, x_f + \xi], y \in [y_f, y_f + \eta], t \in [t_f, t_f + \tau]\}. \tag{13}$$

Линеаризуем функции $x(t, \mu)$ и $y(t, \nu)$, задающие пучки кривых, удовлетворяющие уравнениям (11). Тогда для вершин параллелепипеда S найдем:

$$\mu^1_{00} = \mu^2_{00}, \quad \mu^3_{00} = \mu^0_{00}, \quad \mu^5_{00} = \mu^6_{00}, \quad \mu^7_{00} = \mu^4_{00}$$

$$x(t_0 + \tau, \mu^2_{00}) = x_0 + f(x_0, y_0, t_0)\tau + \frac{\partial x(t_0, \mu^0_{00})}{\partial \mu}(\mu^2_{00} - \mu^0_{00}) = x_0,$$

$$x(t_0, \mu^4_{00}) = x_0 + \frac{\partial x(t_0, \mu^0_{00})}{\partial \mu}(\mu^4_{00} - \mu^0_{00}) = x_0 + \xi,$$

$$x(t_0 + \tau, \mu^6_{00}) = x_0 + f(x_0, y_0, t_0)\tau + \frac{\partial x(t_0, \mu^0_{00})}{\partial \mu}(\mu^6_{00} - \mu^0_{00}) = x_0 + \xi. \tag{14}$$

и

$$\nu^4_{00} = \nu^0_{00}, \quad \nu^5_{00} = \nu^1_{00}, \quad \nu^6_{00} = \nu^2_{00}, \quad \nu^7_{00} = \nu^3_{00}$$

$$y(t_0 + \tau, \nu^1_{00}) = y_0 + g(x_0, y_0, t_0)\tau + \frac{\partial y(t_0, \nu^0_{00})}{\partial \nu}(\nu^1_{00} - \nu^0_{00}) = y_0,$$

$$y(t_0 + \tau, \nu^2_{00}) = y_0 + g(x_0, y_0, t_0)\tau + \frac{\partial y(t_0, \nu^0_{00})}{\partial \nu}(\nu^2_{00} - \nu^0_{00}) = y_0 + \eta,$$

$$y(t_0, \nu^3_{00}) = y_0 + \frac{\partial y(t_0, \nu^0_{00})}{\partial \nu}(\nu^3_{00} - \nu^0_{00}) = y_0 + \eta. \tag{15}$$

Из соотношений (14) получаем:

$$-\frac{f(x_0, y_0, t_0)\tau}{\mu^2_{00} - \mu^0_{00}} = \frac{\xi - f(x_0, y_0, t_0)\tau}{\mu^6_{00} - \mu^0_{00}} = \frac{\xi}{\mu^4_{00} - \mu^0_{00}}. \tag{16}$$

Разобьем интервалы $[x_0, x_f]$, $[t_0, t_f]$, на отрезки длиной ξ, τ, соответственно. Точки деления обозначим x_k и t_j, соответственно, $k = 0, ..., M$, $j = 0, ..., N$, $x_M = x_f$, $t_N = t_f$. Тогда такую же пару уравнений можно получить при любых фиксированных j, k для μ^α_{kj} и найти соотношения между интегральными параметрами в любом промежуточном состоянии:

$$\frac{\mu^2_{kj} - \mu^0_{kj}}{\mu^6_{kj} - \mu^2_{kj}} = \frac{\mu^6_{kj} - \mu^4_{kj}}{\mu^4_{kj} - \mu^0_{kj}} = -\frac{\tau f(x_k, y_0, t_j}{\xi}, \tag{17}$$

где вместо y_0 может находится и другое значение y. Величины μ_{00}^0 и μ_{00}^4 найдем численным интегрированием к точке (x_0, y_0, t_0) из подходящим образом выбранной точки γ (неособой и допускающей неособую траекторию в точку (x_0, y_0, t_0)):

$$(18)\quad \mu_{00}^0 = x_0 - \int_\gamma^{t_0} f(x(\zeta), y(\zeta), \zeta)d\zeta, \quad \mu_{00}^4 = x_0 + \xi - \int_\gamma^{t_0} f(x(\zeta)+\xi, y(\zeta), \zeta))d\zeta.$$

Далее, с помощью равенств (16) находим μ_{00}^2 и μ_{00}^6. Для дальнейших вычислений удобно обозначить

$$\pi_{jkl} \equiv \frac{\tau f(x_k, y_l, t_j)}{\xi}.$$

Процедура вычисления интегральных параметров в конечном состоянии F подразумевает последовательное вычисление этих параметров от состояния S до F последовательно через такие граничащие состояния, которые выбираются каждый раз для следующего интервала времени последовательным перебором от состояния с теми же координатами x, y "вниз"по x до достижения нулевых вероятностей после ненулевых или до установленного ограничения (обычно 2 ячейки), затем "вверх"по тому же правилу, затем так же по y. После этого выбирается следующий период времени и вычисления по x и по y производятся вновь.

Таким образом, после того как определены все интегральные параметры начального состояния S, требуется найти параметры состояния, характеризуемого промежутком времени $[t_0+\tau, t_0+2\tau]$ и теми же, что и у S интервалами координат $[x_0, x_0+\xi]$, и $[y_0, y_0+\eta]$. Поскольку пока мы делаем вычисления только для x, вычислим группу параметров μ_{01}^α. Из взаимного расположения многогранников состояний (то есть, из точек их соприкосновения), находим:

$$\mu_{01}^0 = \mu_{00}^1, \quad \mu_{01}^3 = \mu_{00}^2, \quad \mu_{01}^7 = \mu_{00}^6, \quad \mu_{01}^4 = \mu_{00}^5.$$

В соответствии с (14), имеем

$$\mu_{01}^1 = \mu_{01}^2, \quad \mu_{01}^5 = \mu_{01}^6, \quad \mu_{01}^3 = \mu_{01}^0, \quad \mu_{01}^7 = \mu_{10}^4.$$

Тем самым, для определения всех значений μ_{01}^α нужны только μ_{01}^2 и μ_{01}^6, которые можно найти из (17):

$$(19)\quad \begin{aligned} \mu_{01}^2 &= \mu_{01}^0(1+\pi_{100}) - \pi_{100}\mu_{01}^4, \\ \mu_{01}^4 &= \pi_{100}\mu_{01}^0 - \mu_{01}^4(\pi_{100}-1). \end{aligned}$$

Величины ν_{01}^α можно найти тем же способом. Тем самым, построены все интегральные параметры следующего состояния и может быть вычислена вероятность для него по формуле (10).

Далее можно переходить к состоянию с вершинами $(x_0-\xi, y_0, t_0+\tau)$, $(x_0-\xi, y_0+\eta, t_0+\tau)$, $(x_0, y_0, t_0+\tau)$, $(x_0, y_0+\eta, t_0+\tau)$, $(x_0-\xi, y_0, t_0+2\tau)$, $(x_0-\xi, y_0+\eta, t_0+2\tau)$, $(x_0, y_0, t_0+2\tau)$, $(x_0, y_0+\eta, t_0+2\tau)$, то есть сместиться по x "вниз". Такими смещениями можно вычислить вероятность любого состояния в промежутке времени $[t_0+\tau, t_0+2\tau]$ и затем перейти к следующему промежутку времени. В конце концов, выполнение алгоритма завершится при достижении состояния F и определении вероятности попадания в него.

4. Оценка сложности алгоритма

В начале алгоритма выполняются n процедур численного интегрирования. Их сложность не имеет отношения к вычисляемой нами, поэтому будем считать, что она не влияет на нашу оценку. Далее вычисляются интегральные параметры начального состояния. Это занимает 2^{n+1} операций, где n — размерность динамической системы. Для следующего периода времени требуется построить как минимум неизмененное состояние и по одному состоянию вниз и вверх для каждого измерения. При построении каждого следующего состояния вычисляется только n новых параметров. Число состояний, которые необходимо построить для следующего периода времени равно 3^n, то есть для обработки периода, следующего сразу за начальным, нужно $O(n3^n)$ операций. Далее каждое состояние с ненулевой вероятностью продолжается с применением $O(n3^n)$ операций. В максимуме таких состояний может быть 3^n и тогда каждый следующий шаг будет умножать число операций на 3^n. Получается, что в целом алгоритм имеет сложность $O(Mn3^{Mn})$.

Порядок сложности получается почти таким же, как в случае $Mn-$мерного быстрого преобразования Фурье. Остается надежда на то, что, как и для преобразования Фурье, удастся построить эффективный квантовый алгоритм для решения модифицированной краевой задачи для произвольной динамической системы.

References

[1] J.D. Farmer, J.J. Sidorowich, *Evolution, Learning, and Cognition*, ed. Y. C. Lee, Singapore, World Scientific Press, (1988), 277–302.

[2] A.Yu. Loskoutov, A.S.Mikhailov, *Foundation of the comlicated system theory*, Institute of Computer Research, Izhevsk, (2007), 428–461.

[3] K. Kaneko, *Pattern dynamics in spatiotemporal chaos*, Physica D, **34** (1989), 1–41.

[4] H.D.I. Abarbanel, R.Brown, J.J. Sidorowich, L.S.Tsimring, *The analysis of observed chaotic data in physical systems*, Rev. Mod. Phys., **64**(5) (1993), 1331–1393.

[5] M.E. Davies, *Reconstructing attractors from filtered time series*, Physica D, **101**(3-4) (1997), 195–206.

Danil Mikhailovich Cherenkov
Belgorod State Technological University named after V.G.Shoukhov,
ul. Kostyukova, 46,
308012, Belgorod, Russia
E-mail address: jokcik@yandex.ru

Sergei Valentinovich Zuev
Belgorod State Technological University named after V.G.Shoukhov,
ul. Kostyukova, 46,
308012, Belgorod, Russia
E-mail address: sergey.zuev@bk.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.49–С.58 (2015)

УДК 519.633
MSC 65M32

СРАВНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

М.С. ЕРЕМЕЕВА

Abstract. The article is devoted to the numerical solution of the Dirichlet problem for the wave equation, where the boundary conditions and the displacement of the string (membrane) at the initial and finite time are given. One and two dimensional cases are implemented. The effectiveness of some common iterative methods is compared for one- and two-dimensional cases. Solution of the Dirichlet problem with noisy input data using iterative methods is presented. For smoothing noisy data second derivative operator is used.

Keywords: inverse problem, wave equation, Dirichlet problem, variational iterative methods, difference scheme, data smoothing.

Итерационные методы широко используются для численного решения обратных задач математической физики. В частности, их применение к задаче с обратным временем для параболического уравнения второго порядка рассмотрено в работе [1]. Сравнение эффективности итерационных методов для решения ретроспективной задачи уравнения теплопроводности проводилось в [2]. В данной работе рассматривается численное решение задачи Дирихле для волнового уравнения с заданными граничными условиями, смещением струны (мембраны) в начальный и конечный моменты времени. Задача относится к классу условно корректных задач математической физики [3,4]. Решение данной обратной задачи можно свести к минимизации целевого функционала, соответствующего обратной задаче [5]. Задача минимизации функционала, в свою очередь, решается с помощью итерационных методов [6]. Итерационные методы решения можно разделить на: стационарные (метод простых итераций

Eremeeva, M.S., Comparison of iterative solving methods for hyperbolic equation Dirichlet problem.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 13-01-00719.

Поступила 1 июня 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

– Ландвебера) и вариационного типа. Последние бывают двухслойными и трехслойными [7]. Исследованию устойчивости и сходимости итерационных методов Ландвебера и скорейшего спуска при решении задачи Дирихле для волнового уравнения, а также их численной реализации посвящены работы [8,9]. Итерационное решение задачи Дирихле методом сопряженных градиентов, а также сглаживание зашумленных входных данных описано в работах [10,11]. Обратная задача для волнового уравнения с заданными граничными условиями, скоростью струны в начальный момент и смещением в конечный момент времени рассмотрена в [12]. В работе проведено сравнение эффективности следующих итерационных методов: скорейшего спуска, минимальных невязок и сопряженных градиентов. Расчеты проводились для одномерной и двумерной задач, для задачи с входными данными, заданными с погрешностью, и сглаживание подобных данных для одномерной задачи.

1. Постановка задачи

Рассматриваемая модельная задача определена в прямоугольной области:

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), \quad 0 < x_\alpha < L, \quad \alpha = 1, 2\}.$$

и описывается гиперболическим уравнением второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

смещение $u(x, t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям:

$$u(x, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Известно смещение в начальный и конечный моменты времени:

$$u(x, 0) = \nu(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3}$$

$$u(x, T) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{4}$$

Необходимо найти решение $u(x, t)$ и определить скорость смещения точек в начальный момент времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{5}$$

которое с заданной точностью удовлетворит поставленному условию (4).

Разностная задача

Сначала рассмотрим прямую задачу, заданную уравнением (1), граничным условием (2) и начальными (3),(5). На равномерной сетке $\omega = \{x_{ij} = (ih, jh),$ $0 < i, j < N, \quad Nh = L\}$ введем разностный оператор:

$$Au = -\sum_{\alpha=1}^{2}(k_\alpha(x)u_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad x \in \omega.$$

Тогда уравнению (1) поставим в соответствие дифференциально-разностную схему:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + Au = 0, \quad x \in \omega_h, \quad 0 \leqslant t < T,$$

с дополнительными условиями:

$$u(0) = \nu, \quad u(T) = \varphi, \quad x \in \overline{\omega}_h.$$

В конечномерном сеточном гильбертовом пространстве H скалярное произведение и норму зададим соотношениями:

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} yvh, \quad ||y|| = (y, y)^{1/2}.$$

Обозначим через u^n разностное решение на момент времени $t^n = n\tau$, где $\tau > 0$ – шаг по времени, $n = 0, 1, ..., M$. Запишем явную разностную схему:

$$\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} + Au^n = 0, \quad n = 1, ..., M-1, \tag{6}$$

$$u^0 = \nu, \quad u^n = \varphi, \quad x \in \overline{\omega}_h. \tag{7}$$

Операторная формулировка

Запишем прямую задачу (1)–(3), (5) в операторном виде. В финальный момент времени смещение φ получит вид:

$$\varphi = \mathcal{A}\psi + \mathcal{B}\nu, \tag{8}$$

при известных начальных условиях ν и ψ. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – соответственно операторные полиномы оператора А.

Поскольку в вычислительном эксперименте предполагаем $\nu(x) = 0$, то слагаемое $\mathcal{B}\nu_k$ можно опустить и операторная формулировка (8) принимает вид:

$$\varphi = \mathcal{A}\psi. \tag{9}$$

Условием выхода из итерационного цикла будет:

$$\frac{||r_k||}{||\varphi||} = \frac{||\mathcal{A}\psi_k - \varphi||}{||\varphi||} \leq \varepsilon. \tag{10}$$

Итерационные методы

Проведено сравнение различных итерационных методов решения задачи Дирихле для волнового уравнения струны (мембраны). Искомой функцией является неизвестное начальное условие – скорость смещения в начальный момент времени (5). Строится последовательность приближенных решений, пока точность не достигнет желаемой. Использованы как двух-, так и трехслойные итерационные методы.

Двухслойная итерационная схема представима в виде:

$$\frac{\psi_{k+1} - \psi_k}{\lambda_{k+1}} + \mathcal{A}\psi_k = \varphi, \quad k = 0, 1, ..., \tag{11}$$

ψ_{k+1} – следующее приближение искомой функции, λ_{k+1} – итерационный параметр, r_k – невязка:

$$r_k = \mathcal{A}\psi_k - \varphi, \quad k = 0, 1, ... \tag{12}$$

В зависимости от способа вычисления итерационного параметра λ_{k+1} получаем тот или иной итерационный метод. Так, если $\lambda_{k+1} = \lambda$ не зависит от номера итерации k, метод называется *методом простой итерации* (Ландвебера [6]). При

$$\lambda_{k+1} = \frac{(Dr_k, z_k)}{(Dr_k, r_k)}, \quad k = 0, 1, ..., \tag{13}$$

получаем семейство итерационных двухслойных методов вариационного типа в зависимости от выбора оператора D. При $D = \mathcal{A}$ имеем *метод скорейшего спуска.* $D = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ – *метод минимальных невязок.*

Для *трехслойных* итерационных методов вариацонного типа приближения вычисляются по следующей схеме:

$$B\psi_{k+1} = \alpha_{k+1}(B-\lambda_{k+1}\mathcal{A})\psi_k+(1-\alpha_{k+1})B\psi_{k-1}+\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\varphi, \quad k = 1, 2, ..., \tag{14}$$

$$B\psi_1 = (B - \lambda_1\mathcal{A})\psi_0 + \lambda_1\varphi, \quad \psi_0 \in H, \tag{15}$$

где B – предобуславливатель. Итерационные параметры α_{k+1}, λ_{k+1} определяются формулами:

$$\lambda_{k+1} = \frac{(D\omega_k, z_k)}{(D\omega_k, \omega_k)}, \quad k = 0, 1, ..., \tag{16}$$

$$\alpha_{k+1} = \Big(1 - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\frac{(D\omega_k, z_k)}{(D\omega_{k-1}, z_{k-1})} \cdot \frac{1}{\alpha_k}\Big)^{-1}, \quad k = 1, 2, ..., \alpha_1 = 1, \tag{17}$$

где ω_k – поправка, определяется как решение операторного уравнения:

$$B\omega_k = r_k. \tag{18}$$

В статье рассмотрены следующие методы: минимальных невязок (MinRes), скорейшего спуска (MSS), сопряженных градиентов (CG).

Общий алгоритм итерационного процесса выглядит следующим образом [10]:

0. Выбираем для $\psi(x)$ начальное приближение, в проведенном эксперименте, например, нулевое. Для трехслойных схем также вычисляем r_0 (12), ω_0 (18), λ_1 (16) и вычисляем первую итерацию ψ_1 (15);

1. Для каждого нового приближения вычисляем невязку по формуле (12);

2. При достижении достаточной точности (10) завершаем итерационный процесс;

3. Решается уравнение для поправки (18);

4. Находим итерационные параметры λ_{k+1}, α_{k+1} для трехслойных схем (16), (17), λ_{k+1} для двухслойных (13).

5. Подставив полученные параметры в (11) или (14), получим новое приближение искомой функции.

2. Одномерная задача

Рассмотрим одномерную задачу восстановления начальных условий для задачи колебания струны. Требуется определить функцию $u \in C^2((0, L) \times (0, T))$, удовлетворяющую уравнению (1) и граничным и дополнительным условиям (2)–(4):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T,$$
$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad 0 < x < L,$$
$$u(x, 0) = \nu(x), \quad x \in \overline{\Omega},$$
$$u(x, T) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

При решении прямой задачи в процессе итераций использовалась явная схема:

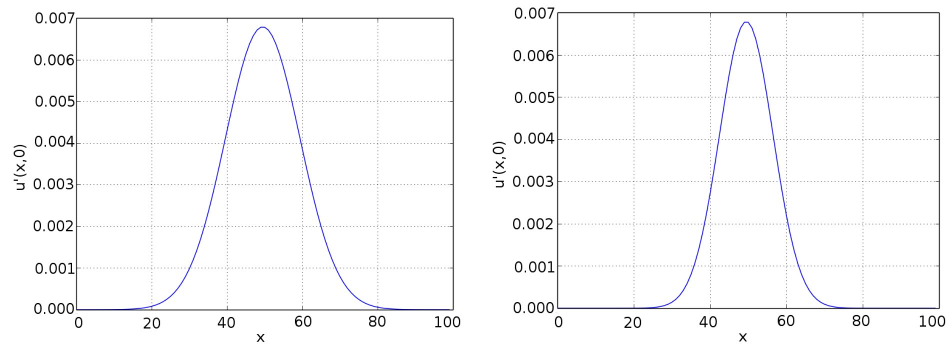
$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}, \quad n = 1, 2, ..., N.$$

За точное решение $\nu(x)$ обратной задачи примем численное решение соответствующей прямой задачи с заданными начальными условиями:

$$u(x,0) = \nu(x) = 0,$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = e^{-\gamma(x\pi - \frac{L\pi}{2})^2}.$$

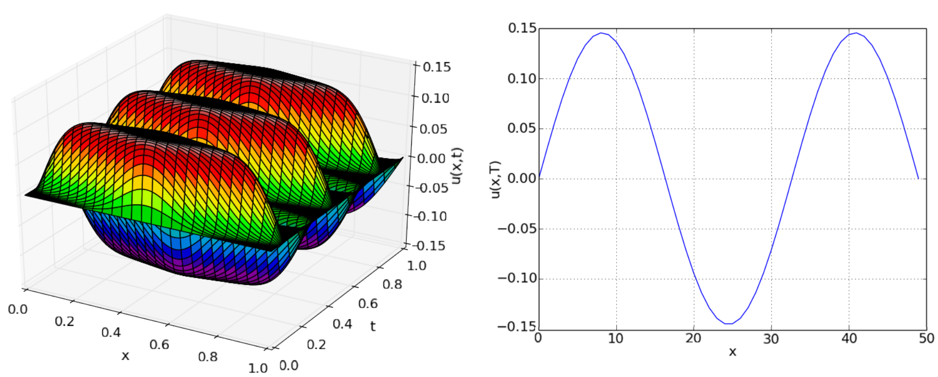
Здесь γ – коэффициент масштаба для рассматриваемой функции нормального распределения. В вычислительных экспериментах $\gamma = 50$ и 100 (Рис. 1).



$u_t(x,0)$. $\gamma = 50$. $u_t(x,0)$. $\gamma = 100$.

Рис. 1. Восстанавливаемая функция скорости смещения струны.

Расчеты проводились для размеров сетки $N = 50, 100, 200$ с точностью $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$. Размер рассматриваемой области $L = 1.0$. Пространственный шаг берем $h = L/N$, шаг по времени – $\tau = 0.95h/\sqrt{2}$. На рис. 2 изображено полученное точное решение: слева – значение смещения по пространству и времени, справа – смещение струны на конечный момент времени.

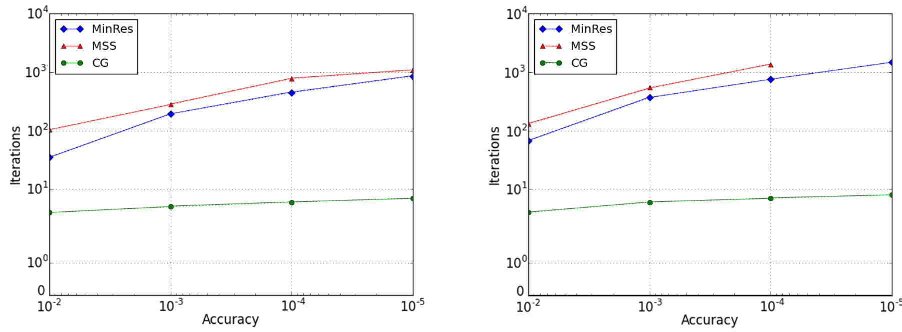


$u(x,t)$ $u(x,T)$

Рис. 2. Точное решение.

Результаты

На рис. 3 представлены сравнительные графики сходимости различных методов для размеров сетки $N = 50, 100$ соответственно ($\gamma = 50$). По вертикальной оси отложена логарифмическая шкала количества итераций, по горизонтальной – заданная точность решения.



$N = 50$ $N = 100$

Рис. 3. Зависимость количества итераций от точности.

Приведем таблицу результатов вычислительного эксперимента для рассмотренных методов, при различных сетках и точности для $\gamma = 50$ (табл.1) и $\gamma = 100$ (табл.2). В таблице прочерки означают отсутствие сходимости. По полученным данным наблюдается быстрая сходимость метода сопряженных градиентов. Метод скорейшего спуска дает медленную сходимость или ее отсутствие для больших сеток при большой точности. Используя метод минимальных невязок имеем приемлемую скорость сходимости для небольшой точности. Каждый из методов затрачивает приблизительно равное время на одну итерацию, так как каждое приближение вкючает в себя одно решение прямой задачи. На рис. 4 представлены ошибки решения при использовании метода сопряженных градиентов при $N = 100$, $\gamma = 50$.

		Кол-во итераций				Время счета			
	Метод$\backslash\varepsilon$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
N=50	MinRes	35	192	447	852	4.11	21.82	53.00	95.91
	MSS	104	280	777	1084	11.17	31.22	85.60	121.01
	CG	4	5	6	7	0.45	0.59	0.70	0.81
N=100	MinRes	67	366	754	1470	28.60	161.7	346.53	634.89
	MSS	130	542	1357	-	60.57	241.56	565.6	-
	CG	4	6	7	8	1.85	2.62	3.09	3.59
N=200	MinRes	37	1075	2895	7125	67.49	1882.45	5076.18	12455.18
	MSS	1433	-	-	-	2541.74	-	-	-
	CG	4	6	7	8	7.15	10.94	12.66	14.56

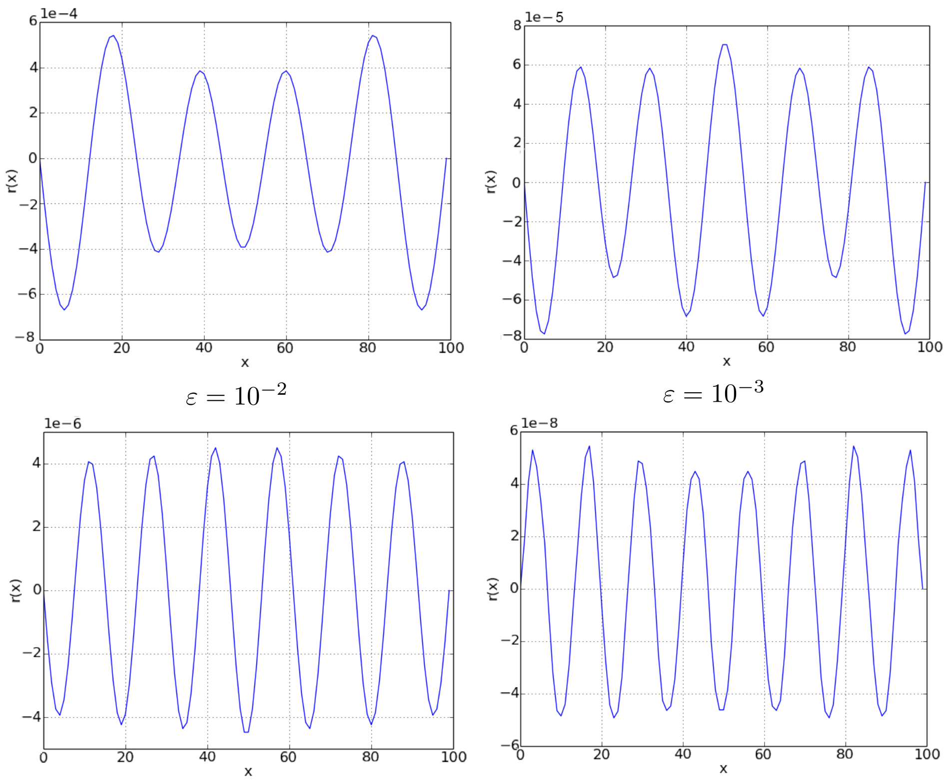
Таблица 1. Скорость расчета одномерной задачи для различных методов сеток и точности при $\gamma = 50$.

3. Погрешность входных данных

Рассмотрим одномерную задачу с входными данными φ, заданными с погрешностью. После генерации псевдоточного решения к значению в конечный момент времени φ добавим возмущение:

		Кол-во итераций				Время счета			
	Метод\\ε	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
N=50	MinRes	57	390	2244	5152	6.33	40.63	237.84	511.56
	MSS	3205	3235	5020	5089	393.35	395.15	604.85	614
	CG	5	6	8	9	0.46	0.55	0.78	0.91
N=100	MinRes	201	670	1696	3625	92.21	293.48	743.53	1613.61
	MSS	2685	-	-	-	1476.97	-	-	-
	CG	6	8	8	9	3.16	4.12	4.12	4.54
N=200	MinRes	113	1614	4333	10988	208.93	2938.17	7855.23	19895.45
	MSS	81	-	-	-	150.09	-	-	-
	CG	5	7	9	12	9.43	13.44	17.02	22.16

Таблица 2. Скорость расчета одномерной задачи для различных методов сеток и точности при $\gamma = 100$.



$\varepsilon = 10^{-2}$ $\quad$ $\varepsilon = 10^{-3}$

$\varepsilon = 10^{-4}$ $\quad$ $\varepsilon = 10^{-5}$

Рис. 4. Ошибка решения при различной точности.

$$\varphi_\delta = \varphi + \delta\sigma(x)\varphi,$$

где $\sigma(x)$ – псевдослучайные величины, равномерно распределенные на интервале $[-1, 1]$, а δ – уровень погрешности входных данных. Точность решения задается равной δ. Полученное решение сравнили с решением, полученным после сглаживания зашумленных входных данных:

$$\varphi = D\varphi_\delta = a\varphi_{\delta xx} + \varphi_\delta, \quad a = h^2/2. \tag{19}$$

Вычислительный эксперимент проводился для погрешности $\delta = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$, что соответствует $1, 0.1, 0.01\%\%$. Расчеты проводились на равномерной пространственной сетке с $N = 100$. Результаты счета представлены на табл. 3. Поскольку генератор случайных чисел каждый раз дает разные возмущения, в таблице приведены средние значения трех экспериментов для каждого из методов и при разной точности.

		Кол-во итераций			Время счета		
	Метод\ ε	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
I	MinRes	41.3	243.6	615.6	5.61	33.55	81.95
I	MSS	489.3	780.6	1955.3	65.48	106.3	258.84
I	CG	4	5	6	0.54	0.71	0.85
II	MinRes	40	218.3	489.3	5.49	33.96	57.23
II	MSS	390.6	712.6	1845.6	51.81	98.36	248.32
II	CG	4	5	6	0.66	0.8	0.95

Таблица 3. Сравнение скорости расчета задач с возмущенными (I) и слаженными (II) данными.

Сглаживание данных дает незначительное увеличение времени счета, которое не зависит от метода решения и количества итераций. При этом среднее количество итераций для двухслойных методов уменьшается.

4. Двумерная задача

В этом разделе рассмотрим двумерную постановку задачи и применим описанные итерационные методы.

Требуется определить функцию $u \in C^2((0,L)\times(0,L)\times(0,T))$, удовлетворяющую уравнению (1) и дополнительным условиям (2)–(3).

Для соответствующей прямой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad 0 < t \le T, \quad x \in \Omega, \tag{20}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{21}$$

$$u(x,0) = \nu(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{23}$$

использована явная разностная схема:

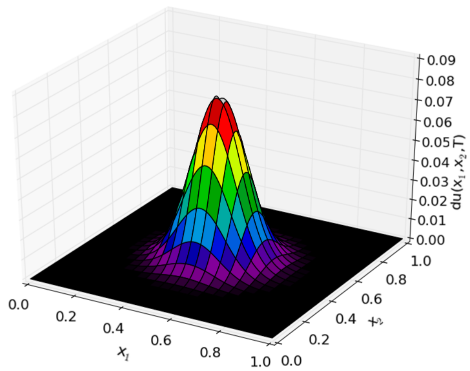
$$\frac{u^{n+1}_{i,j} - 2u^n_{i,j} + u^{n-1}_{i,j}}{\tau^2} = \frac{u^n_{i-1,j} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u^n_{i,j-1} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i,j+1}}{h^2}. \tag{24}$$

За точное решение $\nu(x)$ обратной задачи примем численное решение соответствующей прямой задачи с заданными начальными условиями [9]:

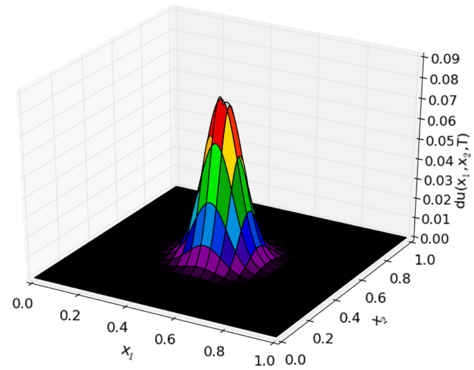
$$u(x,0) = \nu(x) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = e^{-\gamma((x_1\pi - \frac{L\pi}{2})^2 + (x_2\pi - \frac{L\pi}{2})^2)}, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Здесь γ – некоторая заданная константа. В вычислительных экспериментах $\gamma = 50$ и 100 (Рис. 5). Расчеты проводились для размеров сетки $N = 50 \times 50$,



$u_t(x, 0)$. $\gamma = 50$



$u_t(x, 0)$. $\gamma = 100$

Рис. 5. Восстанавливаемая функция скорости смещения.

100×100 с точностью $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$; $L = 1.0$. Пространственный шаг берем $h = L/N$, шаг по времени – $\tau = 0.95h/\sqrt{2}$.

Результаты

Приведем таблицу результатов вычислительного эксперимента для разных методов, сеток и точности при $\gamma = 50$ и 100 (табл. 4, 5 соответственно).

		Кол-во итераций			Время счета		
	Метод\\ε	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
50×50	MinRes	15	60	203	61.70	235.73	788.4
	MSS	79	141	2109	309.02	548.7	8169.79
	CG	5	8	12	19.22	30.74	46.1
100×100	MinRes	129	707	2285	9259.42	51257.5	161275.34
	MSS	2685	-	-	1476.97	-	-
	CG	5	7	18	257.17	415.89	1288.31

Таблица 4. Скорость расчета двумерной задачи для различных сеток и точности при $\gamma = 50$.

		Кол-во итераций			Время счета		
	Метод\\ε	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
50×50	MinRes	25	126	3188	101.4	495.6	12480.97
	MSS	121	-	-	476.47	-	-
	CG	5	11	35	19.43	42.96	137.06
100×100	MinRes	30	70	-	2336.52	5880.02	-
	MSS	3016	-	-	1654.96	-	-
	CG	5	8	48	377,37	604.15	3621.69

Таблица 5. Скорость расчета двумерной задачи для различных сеток и точности при $\gamma = 100$.

В таблице прочерки означают отсутствие сходимости. Вычислительный эксперимент показал, что для двумерной задачи метод сопряженных градиентов дает лучшие результаты как по количеству итераций, так и по времени сходимости. В поставленной задаче метод скорейшего спуска дает медленную сходимость или ее отсутствие при большой точности. Используя метод минимальных невязок имеем приемлемую скорость сходимости для небольшой точности, но при определенных входных данных метод начинает расходится.

Автор благодарен профессору Васильеву В.И. за постановку задачи и конструктивные замечания и советы.

References

[1] A.A. Samarskij, P.N. Vabishhevich, V.I. Vasil'ev, *Iterative solution of a retrospective inverse problem of heat conduction*, Mathematical modelling, **9**(5) (1997), 119–127.

[2] M.S. Eremeeva, *Comparison of Iterative Solving Methods of Inverse Retrospective Heat-Conduction Problem*, Herald of NEFU, **12**(1) (2015), 15–24.

[3] S.I. Kabanihin, *Inverse and Ill-posed problems*, Publishing Center "Academy Moskva, 2008.

[4] S.I. Kabanikhin, *Inverse and ill-posed problems: theory and applications*, De Gruyter, Berlin, 2012.

[5] A.B. Bakushinskij, A.V. Goncharskij, *Iterative methods for ill-posed problems solving*, Nauka, Moskva, 1989.

[6] A.A. Samarskij, P.N. Vabishhevich, *Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics*, URSS, Moskva, 2007.

[7] V.I. Vasil'ev, V.V. Popov, M.S. Eremeeva, A.M Kardashevskij, *Iterative Solution of a Nonclassical Problem for the Equation of String Vibrations*, Herald of the Bauman Moscow State Technical University, **3** (2015), 77–87.

[8] S.I. Kabanikhin, M.A. Bektemesov, D.B. Nurseitov, O.I. Krivorotko, A.N. Alimova, *An optimization method in the Dirichlet problems for the wave equation*, Journal of inverse and ill-posed problems, **20**(2) (2012), 193–211.

[9] A.N. Alimova, *Comparative analysis of methods, convergence and stability in ill-posed problems for hyperbolic equations* (Doctoral dissertation), Almaty, 2013.

[10] P.N. Vabishhevich, V.I Vasil'ev, *Iterative solution of the Dirichlet problem for a parabolic equation*, Proceedings of the Tenth International Conf., Kazan', (2014), 162–166.

[11] V.I. Vasil'ev, A.M. Kardashevskij, V.V. Popov, *Solution of the Dirichlet problem for the equation of string vibration with conjugate gradient method*, Herald of NEFU, **12**(2) (2015), 43–50.

[12] A.A. Samarskij, E.S. Nikolaev, *Methods for solving finite-difference equations*, Nauka, Moskva, 1978.

Maya Semenovna Eremeeva
North-Eastern Federal University,
Kulakovskogo st., 42,
677000, Yakutsk, Russia
E-mail address: maya.eremeeva@gmail.com

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.59–С.62 (2015) УДК 517.948
MSC 47A52

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

А.А. ЕРШОВА, В.П. ТАНАНА

Abstract. This paper considers a one-dimensional Fredholm integral equation of type I with a closed kernel having a solution in the class W_2^1 with homogeneous boundary conditions of the first kind at the point a. The problem is reduced to a new integral equation for the derivative of the desired solution. The resulting integral equations are subjected to finite-dimensional approximation of a special form which allows using variational regularization of Tikhonov's method with the choice of the regularization parameter according to the generalized discrepancy principle to reduce the problem to a special system of linear algebraic equations. An apriori estimate of the accuracy of the resulting finite-stable approximate solution is also carried out taking into account the accuracy of the finite-dimensional approximation of the problem.

Keywords: regularization, integral equation, regularization parameter.

1. Введение

Многочисленные практически важные задачи приводят к некорректно поставленным задачам, как, например, уравнениям Фредгольма первого рода. При численном решении некорректных задач возникает проблема дискретизации. Одним из способов дискретизации является конечноразностный, при котором нахождение приближенного решения сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. [1]

К настоящему моменту получено большое число результатов, посвященных доказательству сходимости конечномерных аппроксимаций к регуляризованному решению.

Ershova, A.A., Tanana V.P., An approximate solution of the inverse problem of Solid State Physics.

Поступила 13 октября 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

Наряду с решением вопроса о сходимости конечномерных аппроксимаций, важную роль играет получение оценки погрешности.

В данной статье рассмотрен численный алгоритм решения интегральных уравнений первого рода в пространстве L_2. Этот алгоритм использует метод регуляризации А.Н. Тихонова с параметром, выбранным из принципа невязки. Один из таких подходов к получению оценок может быть основан на использовании эквивалентности обобщенного принципа и обобщенного метода невязки.

Использование данного подхода проиллюстрировано на примере задачи определения фононного спектра кристалла по его теплоемкости. Исследованы возможности выявления „тонкой структуры“ фононного спектра.

2. Постановка задачи

Связь энергетического спектра бозе-системы с ее теплоемкостью, зависящей от температуры, описывается интегральным уравнением первого рода

$$Sn(s) = \int_a^b K(s,t)ds = \frac{f(t)}{t}; 0 \le t < \infty, \tag{1}$$

где $K(s,t) = \frac{s^2}{2t^3 sh^2\left(\frac{s}{2t}\right)}, n(s) \in L_2(0,\infty), \frac{f(t)}{t} \in L_2(0,\infty), n(s)-$ спектральная плотность кристалла, а $f(t)$ - его теплоемкость, зависящая от температуры.

Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ существует точное решение $n_0(s)$ уравнения (1), которое принадлежит множеству M, где

$$M = \left\{ n(s) : n(s), n^{'}(s) \in L_2[a,b], n(a) = 0 \right\},$$

а $n^{'}(s)$ - производная по s.

Пусть точное значение $f_0(t)$ нам неизвестно, а вместо него даны $f_\delta(t) \in L_2(0,\infty), \delta > 0$ такие, что $\left\| \frac{f_\delta(t)}{t} - \frac{f_0(t)}{t} \right\|$.

Требуется по f_δ, δ и M определить приближенное решение $n_\delta(t)$ оценить его уклонение от точного решения $n_0(t)$ в метрике пространства $L_2[a,b]$.

Заметим, что единственность решения уравнения (1) доказана в [2].

Введем оператор B, отображающий пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$, по правилу

$$n(s) = Bu(s) = \int_a^s u(\varsigma)d\varsigma; u(s) \in L_2[a,b], Bu(s) \in L_2[a,b]$$

и оператор C, для которого

$$Cu(s) = ABu(s); u(s) \in L_2[a,b], Cu(s) \in L_2(0,\infty).$$
$$Cu(s) = \int_a^b P(s,t)u(s)ds, \text{где}$$
$$P(s,t) = \int_b^s K(\varsigma,t)d\varsigma.$$

Предположим, что для численного решения уравнения (1) оператор C заменим конечномерным оператором C_n, для которого h_n может быть определена из соотношения $\|C_n - C\| \le h_n$.

Определим функцию $N(t)$ формулой

$$N(t) = \max_{a \leqslant s \leqslant b} \left| \frac{s^2}{2t^3 sh^2\left(\frac{s}{2t}\right)} \right| \le \frac{b^2}{2t^3 sh^2\left(\frac{a}{2t}\right)}$$

Из непрерывности $K(s,t)$ следует непрерывность $N(t)$. Кроме того

$$\|N(t)\|_{L_2(0,\infty)}{}^2 = \frac{b^4}{4}\int_0^\infty \frac{1}{t^6 sh^4\left(\frac{a}{2t}\right)}dt.$$

При $t \to \infty, N^2(t)\ \left(\frac{\sqrt{2}b}{a}\right)^4 \frac{1}{t^2}$, а при $t \to 0, N(t) \to 0$. Таким образом, $N(t) \in L_2(0,\infty)$.

Для определения оператора C_n разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей и введем функции $\overline{K}_i(t)$ и $K_n(s,t)$ формулами

$$\overline{K}_i(t) = K(\overline{s}_i, t),$$

где $\overline{s}_i = \frac{s_i+s_{i+1}}{2}, s_{i+1} = a + \frac{(i+1)(b-a)}{n}, s_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, i = 0,1,...,n-1$, а

$$K_n(s,t) = \overline{K}_i(t); s_i \le s < s_{i+1}, t \in [c,\infty), i = 0,1,...,n-1.$$

Определим конечномерный оператор C_n формулой

$$C_n v(s) = \textstyle\int_a^b K_n(s,t)v(s)ds; t \in [c,\infty),$$

где C_n отображает пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[c,\infty)$.

Таким образом,

$$\|C_n - C\| \le \|N(t)\|_{L_2} \tfrac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{n} = h_n.$$

3. Регуляризующий алгоритм решения уравнения (1)

Для решения (1) воспользуемся методом регуляризации А.Н. Тихонова первого порядка

$$inf\left\{\left\|C_n u(s) - \frac{f_\delta(t)}{t}\right\|^2 + \alpha\int_a^b [u(s)]^2 ds : u(s) \in X_n\right\}, \alpha > 0, \tag{2}$$

где X_n - подпространство кусочно постоянных функций.

Обозначим через $\overline{f}_{\delta,n}(t)$ функцию, принадлежащую пространству $L_2(0,\infty)$, определяемую формулой

$$\overline{f}_{\delta,n}(t) = pr\left[\tfrac{f_\delta(t)}{t}, R(C_n)\right],$$

то есть, являющейся метрической проекцией в пространстве $L_2(0,\infty)$ функции $\frac{f_\delta(t)}{t}$ на множестве значений оператора C_n.

Значение парметра регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\,(C_n, f_\delta(t), h_n, \delta)$ в задаче (2) выберем из условия

$$\left\|C_n u^\alpha_{\delta h_n}(s) - \overline{f}_{\delta,n}(t)\right| = \left\|u^\alpha_{\delta h_n}(s)\right\| h_n + \delta, \tag{3}$$

где $u^\alpha{}_{\delta h_n}(s)$-решение вариационной задачи (2).

Известно, что при условии $\left\|\overline{f}_{\delta,n}(t)\right\| > \delta + \|n_0'(s)\|\, h_n$ существует единственное решение $\overline{\alpha}\,(C_n, f_\delta(t), h_n, \delta)$ уравнения (3).

Если решение $u_{\delta h_n}^{\overline{\alpha}(C_n,f_\delta(t),h_n,\delta)}(s)$ обозначить через $u_{\delta h_n}(s)$, то приближенное решение $n_{\delta h_n}(s)$ уравнения (1) будет иметь вид $n_{\delta h_n}(s) = Bu_{\delta h_n}(s)$.

Уравнение (3) в R^n примет вид

$$\left\{\int\limits_0^\infty \left[\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{K}_i(t)\overline{u}_i^\alpha - \frac{C_{\delta,n}(t)}{t}\right] dt\right\}^{1/2} = h_n\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}\left(\overline{u}_i^\alpha\right)} + \delta.$$

4. Оценка погрешности приближенного решения

Перейдем к оценке погрешости приближенного решения в метрике пространства $L_2[a,b]$.

Введем функцию

$$\omega(\sigma,r)=\sup_n\left\{\|n(s)\|_{L_2}:n(s)\in M_r,\|Sn(s)\|\leq\sigma\right\},$$

где $M_r=B\overline{S}_r,\sigma>0,r>0$, а S определен (1). Получим неравенство

$$\|n_{\delta h_n}(s)-n_0(s)\|_{L_2[a,b]}\leqslant 2\omega\Big(\sigma+2rh_n,r\Big).$$

В работе [3] было получено, что $\omega(\sigma,r)\leqslant r\Big(1+\frac{1}{\pi}\ln^2\left(\frac{r}{4\sigma}\right)\Big)^{-1/2}$.

Для приближенного решения $u_{\delta h_n}(s)$ имеет место оценка

$$\|n_{\delta h_n}(s)-n_0(s)\|_{L_2[a,b]}\leqslant 2r\Big(1+\frac{1}{\pi}\ln^2\left(\frac{r}{4\big(\sigma+2rh_n\big)}\right)\Big)^{-1/2},$$

где $n_{\delta h_n}(s)$– приближенное решение уравнения (1).

References

[1] A.N. Tikhonov, *On the solution of ill-posed problems and regularization method*, Reports of the Academy of Sciences, **151** (1963), 501–504.

[2] V.P. Tanana, A. I. Sidikova *An error estimate for the regularizing algorithm based on the generalized discrepancy principle in solving integral equations*, Journal computational Methods and programming, **16** (2015), 1–9.

[3] V.P. Tanana, A. A. Erygina *An error estimate for the regularization method of A.N. Tikhonov for solving an inverse problem of physics of solids*, Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki, **2** (2014), 125–136.

Ershova Anna Alexandrovna, Tanana Vitaly Pavlovich
South Ural State University,
pr. Lenina, 76,
454080, Chelyabinsk, Russia
E-mail address: anya.erygina@ya.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.63–С.73 (2015)

УДК 550.834, 550.344
MSC 86A22, 11Y35

ВОЛНОВОЙ МЕТОД ПОДАВЛЕНИЯ КРАТНЫХ ВОЛН ДЛЯ МОРСКИХ ДАННЫХ ДЛЯ СРЕД ПРОИЗВОЛЬНОГО СТРОЕНИЯ

А.Г. ФАТЬЯНОВ

Abstract. A wave method for suppression of multiple waves for sea data that does not require knowledge of a depth-velocity medium model has been developed. The method is constructed so as to completely suppress multiple waves in the case of a layer in a half-space. This is the principle distinction from the existing methods. In particular, this leads to the fact that no a priori data about the medium structure is required and the depth-velocity medium model is considered unknown. The efficiency of the method for arbitrary 3D plane-layered media is demonstrated both theoretically and numerically. Examples of the method application to real media showing a substantial decrease in the multiple wave amplitudes without distortion of the dynamics of useful reflections are given.

Keywords: analytical modeling, synthetic sea data, suppression of multiple waves, processing real data.

1. Введение

При обработке сейсмических данных в процессе поиска и разведки месторождений углеводородов первичной задачей является ослабление кратных волн-помех, делающих невозможной интерпретацию полезных отражений. В работе развит метод подавления кратных волн для морских данных, не требующий использования глубинно-скоростной модели среды. Получены формулы подавления кратных волн для вертикальной компоненты и давления. Данный метод

Fatyanov, A.G., A wave method for multiple waves suppression for sea data for any complex subsurface geometries.

Поступила 1 сентября 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

является дальнейшим развитием метода подавления кратных волн для наземных данных, разработанного ранее в [9]- [10].

Вопросам распознавания и предсказания кратных волн посвящены многочисленные теоретические и экспериментальные работы. В работе [4] дан подробный обзор методов и приёмов, существующих на то время, решения данной проблемы. За прошедшее время появился ряд новых методов подавления кратных волн, но полностью решить данную проблему не удалось. В настоящее время метод подавления кратных волн от свободной поверхности (SRME) считается наиболее эффективным методом, который основан на моделировании (предсказании) кратных волн. Он, однако, имеет существенное ограничение, он не может подавлять внутренне кратные отражения [1], [3]. Это принципиальное ограничение не позволяет использовать SRME для сред со сложным глубинно-скоростным строением.

Метод подавления кратных волн для морских данных строится аналогично случаю наземных данных. Его конструирование производится исключительно на основе методов математической геофизики. В основу метода подавления кратных волн для твердой среды положен следующий принцип. Требуется его точное совпадение с полем однократных волн в случае слоя на полупространстве. Такой принцип конструирования метода подавления кратных волн даёт для него простое соотношение в спектральной области, что, в свою очередь, приводит к минимальным вычислительным затратам. В данной работе этот метод обобщен на случай жидкой среды расположенной на твердой среде с произвольным глубинно-скоростным строением. Качество метода подавления для многослойных сред было исследовано с помощью аналитического моделирования [2], [7], [8]. Для количественной оценки эффективности метода для сложных моделей сред был использован программный модуль аналитического моделирования волновых полей в случае жидкого слоя. Жидкий слой расположен над твердой средой. Твердая среда состоит из произвольного количества слоёв. Мощности слоёв, их упругие и неупругие коэффициенты и частоты могут быть произвольными величинами. При этом при расчетах не возникает сеточной дисперсии, так как не используются сеточные методы. Разработанные программные модули позволяют проводить моделирование на персональных компьютерах без использования технологии высокопроизводительных вычислений с минимальными программными, операционными и аппаратными требованиями. Проведённое аналитическое моделирование показало сходимость и устойчивость предложенного волнового метода подавления кратных волн для морских данных. Показано также, что данный метод существенно ослабляет внутренне кратные отражения. Приведены примеры обработки реальных данных. Они показали хорошее качество подавления кратных, в том числе и частично-кратных, волн для реальных наземных сейсмограмм без искажения амплитуд и фаз целевых отражений.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Математическая постановка задачи моделирования сейсмических волновых полей формулируется в декартовой системе координат следующим образом:

определить компоненты вектора смещения для неупругой трансверсально-изотропной среды, которые удовлетворяют следующей системе уравнений в смещениях u_i и напряжениях σ_{ij}.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + f_x \cdot f(t), \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + f_y \cdot f(t), \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + f_z \cdot f(t) \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями при t=0

$$u_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} = u_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} = u_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0,$$

и граничными данными при z=0

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с компонентами тензора деформаций ε_{ij} известными соотношениями закона Гука с анизотропными коэффициентами c_{ij}. В основу теории расчёта волн в анизотропных неупругих средах взяты соотношения упругого последействия Вольтерра. А именно, анизотропные коэффициенты c_{ij} заменяются интегральными операторами C_{ij} [5].

$$C_{ij} x \equiv c_{ij} x(t) - c^1_{ij} \cdot \int\limits_{-\infty}^{t} h_{ij}(t-\tau) x(\tau) d\tau. \tag{3}$$

Здесь c^1_{ij} - величины, определяющие уровень анизотропного поглощения. Функции последействия (ядра) $h_{ij}(\xi)$ определяют спектральный состав поглощения. Упругие и неупругие коэффициенты c_{ij}и c^1_{ij} являются произвольными кусочно-постоянными функциями переменной z (глубины). Для замкнутого описания анизотропного поглощения вводятся дополнительные физические параметры поглощения (декременты поглощения квазипродольных и квазипоперечных волн), которые определяются по величинам c^1_{ij} [5].

Жидкая среда в работе рассматривается как частный случай упругой среды, в которой $\mu = 0$ и $v_s = 0$ [6]. Для описания состояния жидкости используются следующие характеристики упругой среды: вектор смещения $\overrightarrow{u}$ и компонента тензора напряжения σ_{zz}. Переход к общепринятой характеристике жидкости, давлению p, осуществляется следующим известным способом:

$$p = -\sigma_{zz}. \tag{4}$$

Далее, для целей подавления кратных волн для морских данных рассматривается источник с осевой симметрией типа “центра расширения”. Этот источник моделирует взрывное воздействие. В этом случае в цилиндрической системе координат (r, z) отличны от нуля только компоненты $u_r(r, z, t)$ и $u_z(r, z, t)$. Краевые условия на поверхности воды и на границе жидкость−земля выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}\big|_{z=0} &= 0, \\ [u_z] = [\sigma_{zz}] = \tau^-_{rz}\big|_{z=h} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $z = 0$ — свободная поверхность жидкости, $z = h$ — глубина дна, скачок $[a] = a^- - a^+$, a^+ — значение величины a при $z = h$ со стороны жидкости, a^- - значение величины a при $z = h$ со стороны твердого тела.

В дальнейшем, для построения решения, применяются известные преобразования Фурье-Бесселя по переменным (r, t), и в спектральной области (k, ω) осуществляется переход к потенциалам продольных и поперечных волн φ и ψ:

$$u_r = -k \cdot \varphi - \frac{d\psi}{dz} = -k \cdot \varphi, \quad u_z = \frac{d\varphi}{dz} + k \cdot \psi = \frac{d\varphi}{dz}, \tag{6}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \frac{du_z}{dz} + k\lambda u_r = -\rho\omega^2\varphi = -p.$$

Нахождение потенциала φ, а тем самым по (6) всех искомых компонент поля, осуществляется аналитическим методом [2], [7], [8].

Далее приведем его основные этапы применительно к нахождению решения в жидком слое. Вводится вспомогательная функция α в случае произвольной изотропной упругой слоистой среды. Эта функция удовлетворяет при $z = h$следующему условию:

$$\frac{d\varphi^+}{dz} = \alpha \cdot \varphi^+. \tag{7}$$

Из (5) и (6) получим значение, например, вертикальной компоненты смещения u_z для произвольного положения источника $d > 0$ и приёмника z[2]

$$u_z(z, k, \omega) = \frac{F(\omega)}{4\pi c^2} \left\{ \frac{e^{-\nu|z-d|} + q \cdot e^{-\nu(2h-z-d)}}{1 + q \cdot e^{-2\nu h}} \right\} (1 + e^{-2\nu z}) \text{при} \quad z < d,$$

$$u_z(z, k, \omega) = \frac{F(\omega)}{4\pi c^2} \left\{ \frac{e^{-2\nu d} + q \cdot e^{-2\nu(h-d)}}{1 + q \cdot e^{-2\nu h}} \right\} \text{при} \quad z = d, \tag{8}$$

$$u_z(z, k, \omega) = \frac{F(\omega)}{4\pi c^2} \left\{ \frac{-e^{-\nu(z-d)} + q \cdot e^{-\nu(2h-z-d)}}{1 + q \cdot e^{-2\nu h}} \right\} (1 - e^{-2\nu d}) \text{при} \quad z > d.$$

Здесь $\nu = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}$, c - скорость звука в жидкости, $q = (\nu - \alpha)/(\nu + \alpha)$ - спектральный коэффициент отражения, учитывающий свойства жидкости и твёрдой земли, h - мощность жидкого слоя, $F(\omega)$ - спектр входного сигнала $f(t)$ из (1).

Выражение для давления p и компоненты u_r будут иметь следующий вид:

$$p(z, k, \omega) = \rho \cdot \frac{F(\omega)}{4\pi c^2} \cdot \frac{\omega^2}{\nu} \left\{ \frac{e^{-\nu|z-d|} + q \cdot e^{-\nu(2h-z-d)}}{1 + q \cdot e^{-2\nu h}} \right\} (1 - e^{-2\nu z}) \tag{9}$$

$$u_r(z, k, \omega) = -\frac{F(\omega)}{4\pi c^2} \cdot \frac{k}{\nu} \left\{ \frac{e^{-\nu|z-d|} + q \cdot e^{-\nu(2h-z-d)}}{1 + q \cdot e^{-2\nu h}} \right\} (1 - e^{-2\nu z}) \tag{10}$$

Отметим, что эти формулы справедливы для произвольного строения твёрдой Земли.

3. ВОЛНОВОЙ МЕТОД ПОДАВЛЕНИЯ КРАТНЫХ ВОЛН ДЛЯ МОРСКИХ ДАННЫХ

В морских работах приемник часто располагают на дне жидкого слоя. Рассмотрим сначала этот случай. Вертикальная компонента u_z для произвольного положения источника $d > 0$ и приёмника $z = h > d$, расположенного на дне, дается выражением (8):

$$u_z(z,k,\omega) \equiv u_0 = u_p \cdot \frac{-1+q}{1+qe^{-2\nu h}}, \quad u_p = \frac{F(\omega)}{4\pi c^2}(e^{-\nu(h-d)} + e^{-\nu(h+d)}). \tag{11}$$

В [2] получена формула для однократных волн в жидком слое u_z^{pri} :

$$u_z^{pri}(z,k,\omega) = u_p \cdot (-1+q)(1-qe^{-2\nu h}). \tag{12}$$

В (11)-(12) c – скорость звука в жидкости, $\nu = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}$, $q = (\nu - \alpha)/(\nu+\alpha)$ – спектральный коэффициент отражения, учитывающий свойства жидкости и твёрдой земли, u_p - прямая волна от источника, h- мощность жидкого слоя и координата приемника. $F(\omega)$ – спектр входного сигнала $f(t)$. Решение для подавления кратных волн для морских данных ищется в виде:

$$u_1 = u_1(a_1 u_p + a_2 u_0 + a_3 u_0^2)/(a_4 u_p + a_5 u_0 + a_6 u_0^2) \tag{13}$$

Неизвестные коэффициенты $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ определяются из условия, чтобы (13) точно совпадало с полем однократных волн (12) в жидком слое. В результате получены следующие значения для коэффициентов:

$$a_2 = -(e+1)(e-1)u_p, \quad a_3 = -2e(e+1),$$

$$a_4 = u_p, a_5 = -2eu_p, \quad a_6 = e^2, e = \exp(-2\nu h). \tag{14}$$

В формуле (13) $u_0(\kappa,\omega)$- пространственно-временной спектр зарегистрированного волнового поля при $z = h$, u_p - прямая волна от источника. Отметим нелинейный характер формулы подавления кратных волн (12) и её независимость от глубинно-скоростной модели среды.

При практических работах приемник не всегда располагают на дне. Рассмотрим случай, когда координата приемника z >d. Из (9) получим выражение для давления.

$$p(z,k,\omega) = u_p \left\{ \frac{e^{-\nu|z-d|} + q \cdot e^{-\nu(2h-z-d)}}{1+q \cdot e^{-2\nu h}} \right\}. \tag{15}$$

$$u_p = \rho \cdot \frac{F(\omega)}{4\pi c^2} \cdot \omega^2 \cdot (1 - e^{-2\nu d})/\nu.$$

Из (15) получим выражение для однократных волн в этом случае.

$$p = u_p \left(e^{-\nu(z-d)} - qe^{-\nu(2h+z-d)} + qe^{-\nu(2h-z-d)} \right). \tag{16}$$

Отбрасывая в (16) волны спутники, получим.

$$p^{pri} = u_p \left(e^{-\nu(z-d)} + qe^{-\nu(2h-z-d)} \right). \tag{17}$$

Решение для подавления кратных волн для давления ищется в виде:

$$p_1 = u_p \frac{a_1 u_p + a_2 p_0}{a_3 u_p + a_4 p_0}. \tag{18}$$

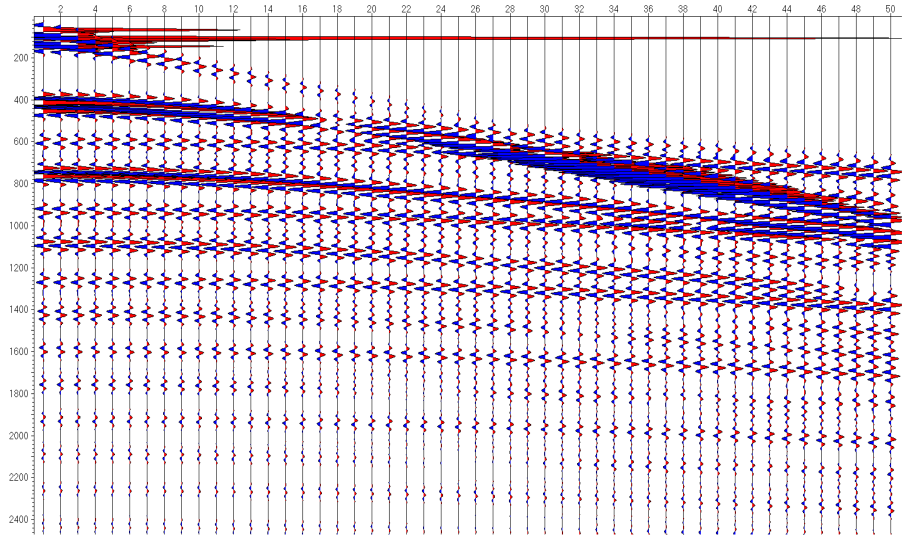


Рис. 1. Синтетическое поле компоненты Uz для двух слоев.

Из требования совпадения (18) и (17) получим коэффициенты $a_1 - a_4$.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = a_3(1 - e^{-2\nu z}),$$

$$a_3 = 1, \quad a_2 = -a_3 e^{-\nu(z+d)}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18) окончательно получим формулу для подавления кратных.

$$p_1 = u_p(1 - e^{-2\nu z})\frac{p_0}{u_p - e^{-\nu(z+d)}p_0}. \tag{20}$$

Здесь, также как и раньше, $p_0(\kappa, \omega)$- пространственно-временной спектр давления на глубине z, u_p - прямая волна от источника. Аналогично выводятся формулы в случае, когда приемник находится выше источника (z<d).

В выражении для подавления кратных (13), (14) содержится параметр h. А h есть не что иное, как величина (мощность) жидкого слоя. Можно предположить, что формула подавления кратных зависит от мощности слоя. Это не так. Параметр h вошел в выражение для подавления кратных потому, что приемник располагался на дне. В выражении (20) приемник не располагается на дне. И в формулу (20) параметр h не вошел.

С помощью обратного преобразования Фурье-Бесселя определяются все поля в физической области для произвольных r,z,t.

4. АНАЛИЗ ВОЛНОВОГО МЕТОДА ПОДАВЛЕНИЯ КРАТНЫХ ВОЛН ДЛЯ СИНТЕТИЧЕСКИХ И РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Формулы подавления кратных волн для морских данных (13) и (20) получены из очень простого принципа точного их совпадения с полем однократных волн для случая жидкого слоя на полупространстве. Возникает вопрос о возможности её применения для сложных моделей сред. Для выяснения этого были проведены численные эксперименты. В качестве примера работы ме-

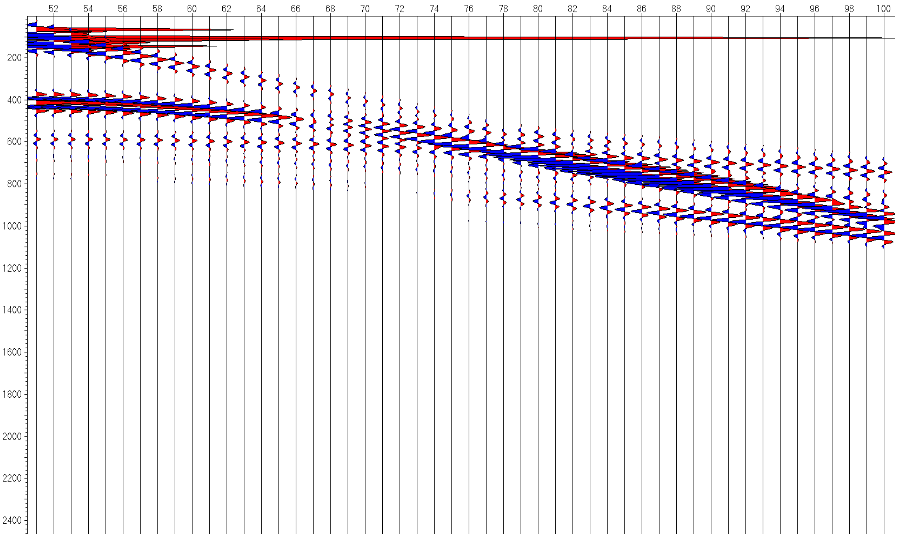


Рис. 2. Подавление кратных волн для поля на рис. 1.

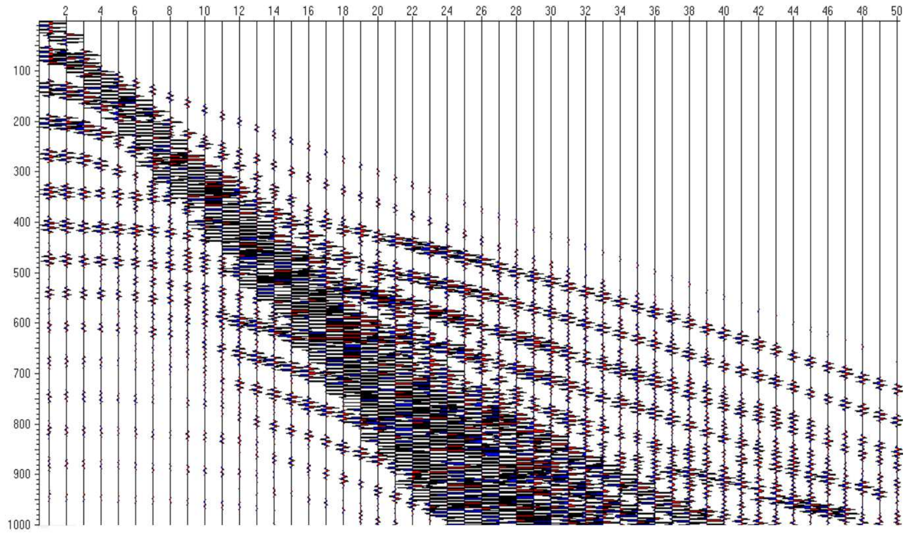


Рис. 3. Синтетическое поле давления для двух слоев.

тода для модельных сред на рисунке 1 приведёно полное поле вертикальной компоненты в случае двух слоев. При этом верхний слой – жидкий. На рисунке 2 приведен результат подавления кратных волн по формуле (13) с коэффициентами из (14). По вертикали приведено время в миллисекундах. Из сравнения рисунков 1 и 2 видно хорошее качество подавления кратных волн. На рисунке 3 приведен результат аналитического моделирования поля давления при наличии жидкого и более высокоскоростного твердого слоев. Поглощение в твердой среде отсутствует. На рисунке 4 приведен результат подавления кратных.

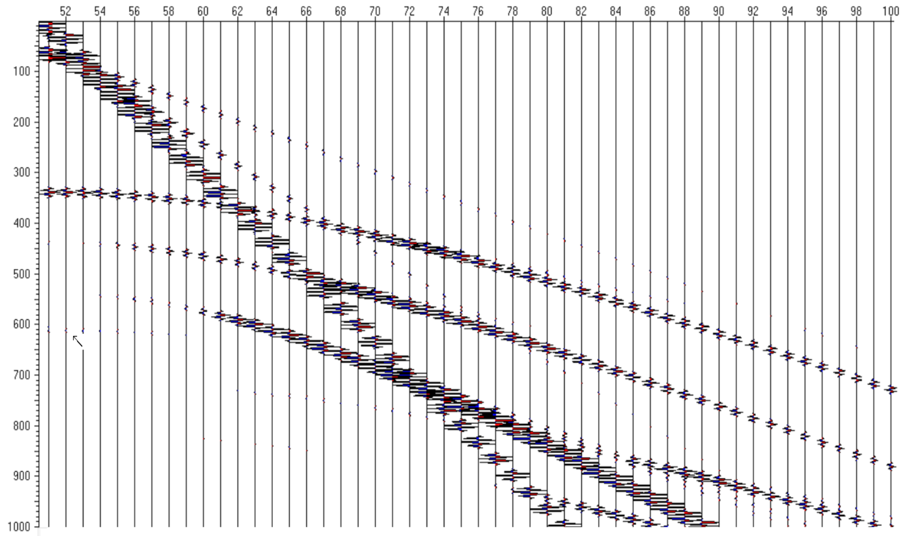


Рис. 4. Подавление кратных волн для поля на рис. 3.

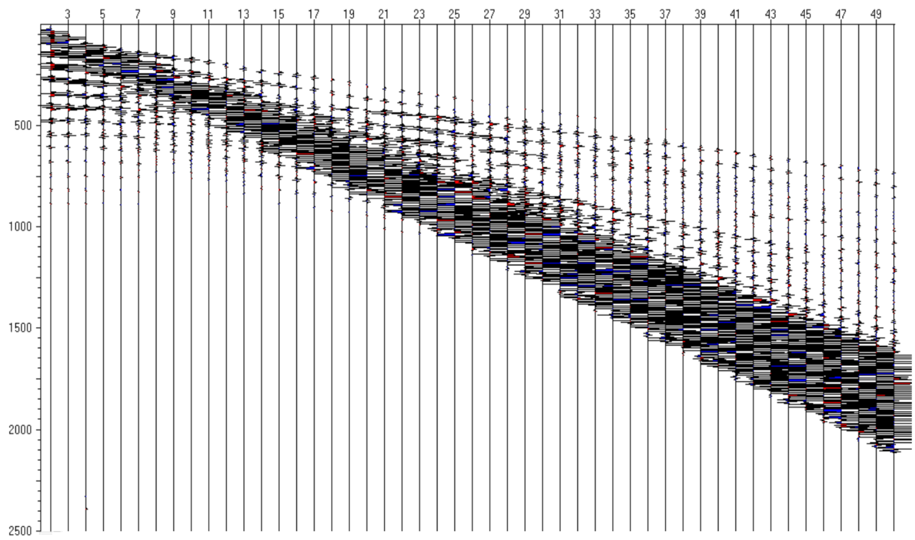


Рис. 5. Модельное поле давления. Наличие поглощения в твердой среде.

Стрелкой обозначена внутренне – кратная волна в твердом слое. Из сравнения рисунков 3 и 4 видно, что она стала в несколько раз меньше. На рисунке 5 приведено поле давления при наличии поглощения в твёрдой среде. На рисунке 6 приведен результат подавления кратных. При этом для наглядности волновые поля умножены на время. Из рисунка 6 видно отличное подавление кратных волн. На сейсмограмме практически остаются только 3 однократные волны от

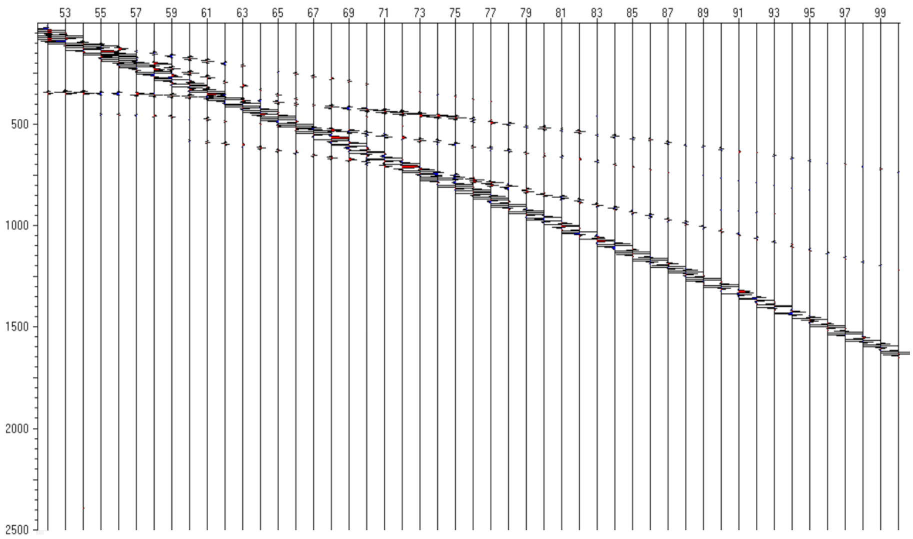


Рис. 6. Подавление кратных волн для поля на рис.5.

твёрдого слоя (PP, PS, SS) и однократная волна от жидкого слоя. Т.е. в случае поглощающей среды эффект подавления проявляется гораздо лучше.

Таким образом, возникает возможность подавления кратных волн без проведения скоростного анализа (подбора скоростной модели). Все заложено в формуле подавления однократных волн. При этом автоматически учитывается поглощение в твёрдой среде, анизотропия и т.п. Проведённое аналитическое моделирование показало сходимость и устойчивость предложенного волнового метода для произвольных моделей твёрдой Земли. Показано также, что данный метод существенно ослабляет внутренне кратные отражения. Модель твёрдой среды при этом не используется, она является неизвестной для данного метода. Для иллюстрации возможности метода подавления кратных волн без использования глубинно-скоростной модели среды проведена дообработка промышленного временного разреза. По временному разрезу глубинно-скоростную модель среды получить нельзя. Т.е. здесь в чистом виде будут продемонстрированы возможности нового метода подавления кратных волн.

На рисунке 7 приведен промышленный временной разрез. На рисунке 8 приведен результат подавления кратных. Волновая картина стала существенно чище. Из геологии региона точно известно, что волна обозначенная стрелкой слева является однократной, а справа – кратной (По данным и с разрешения ОАО “НК “Роснефть”). Из рисунка 8 видно, что кратная волна полностью подавилась, а однократная осталась практически неизменной. Промышленный временной разрез строился на основании современных достижений с использованием промышленного пакета ProMAX. Тем не менее, применение нового метода и программного модуля, созданного на его основе, позволило существенно повысить качество обработки [11].

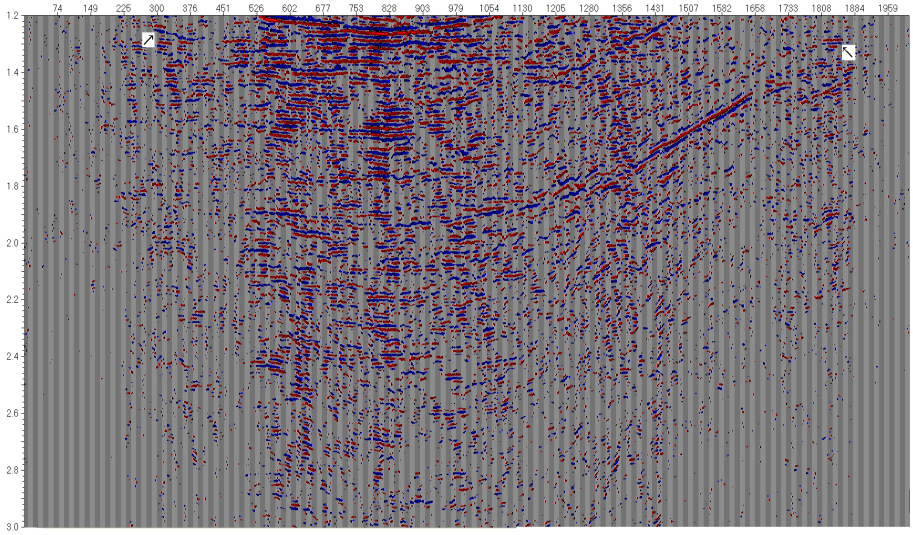


Рис. 7. Реальный промышленный временной разрез.

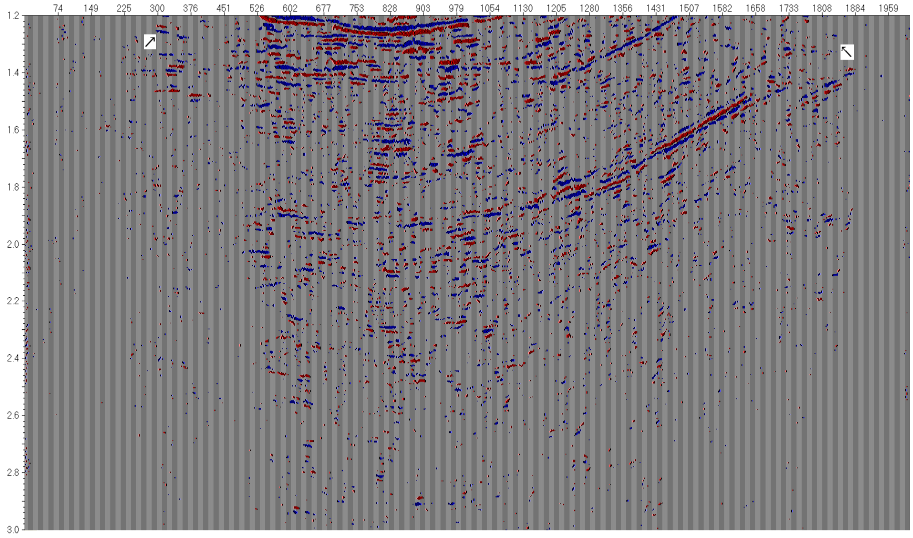


Рис. 8. Результат подавления кратных для разреза на рис. 7.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развит метод подавления кратных волн для морских данных, не требующий использования глубинно-скоростной модели среды. Данный метод является дальнейшим развитием метода подавления кратных волн для наземных данных, разработанного ранее. Получены формулы подавления кратных волн для вертикальной компоненты и давления. Метод разработан на основе подходов математической геофизики и протестирован на теоретических и реальных данных.

Проведённое численное моделирование показало устойчивость метода. Результаты моделирования также показали, что разработанный метод хорошо подавляет кратные (в том числе и внутренне кратные) отражения для произвольных моделей сред и не искажает динамику полезных отражений. Приведены результаты обработки для реального промышленного разреза. Применение данного метода показало существенное подавление кратных волн. Этот результат показывает, что кратные волны можно давить и без проведения скоростного анализа (подбора скоростной модели). Все заложено в формуле подавления кратных волн. При этом автоматически учитывается поглощение в твёрдой среде, анизотропия и т.п.

References

[1] Yu. P. Ampilov, *From Seismic Interpretation to Modeling and Evaluation of Oil and Gas Deposits*, Spektr, Moscow, (2008).

[2] V.Yu. Burmin and A.G. Fat'yanov, *Analytical Modeling of Wave Fields at Extremely Long Distances and Experimental Research of Water Waves*, Izvestiya, Physics of the Solid Earth, **45** (2009), 4, 43–55.

[3] M. C. Denisov, Tekhnologii Seismorazvedki, **1** (2009), 18–35.

[4] E.A. Kozlov, *Identification and Suppression of Multiple Waves in Prospecting Seismology*, Nedra, Moscow, 1982.

[5] A.G. Fatyanov, *Non-stationary seismic wave fields in non-homogeneous anisotropy media with energy absorption*, Preprint/AN SSSR. SO, Comp. Center, Novosibirsk, **857**, 1989.

[6] L. A. Molotkov, *Matrix method in the theory of wave propagation in layered and elastic fluids*, Nauka, Leningrad, 1984.

[7] A. G. Fatyanov, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **310**(2) (1990), 323–327.

[8] Alexey G. Fatyanov, *Mathematical Simulation of Wave Fields in Media with Arbitrary Curvilinear Boundaries*, Applied Mathematics Letters, **18** (2005), 1216–1223.

[9] A. G. Fatyanov, Tekhnologii Seismorazvedki, **2** (2010), 16–22.

[10] A. G. Fatyanov, *Wave Method for Multiple Wave Suppression Without Knowledge of a Depth-Velocity Medium Model*, Doklady Earth Sciences, **435** (2010), 1535–1538.

[11] A. G. Fatyanov et. al., *Program for multiple waves suppression for a stack 2D seismic data*, Rospatent, Moscow, **2015616216**, 2015.

Alexey Gennadievich Fatyanov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
pr. Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: fat@nmsf.sscc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.74–С.81 (2015) УДК 004.942
MSC 92D25

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ САМООРГАНИЗАЦИИ В БИОЛОГИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

А.М. ФЕДОТОВ, С.Г. ЛОМАКИН

Abstract. In the following work were analyzed transfer of information threshold models (ideas, excitement, an infection, etc.) in the social and biological communities represented by a network of cellular automaton. Two types of models are considered: model of diffusion of innovations and Naming Game model. The analysis of both models gave similar pictures of distribution of new ideas in community.

Keywords: cellular automata, Naming Game, diffusion of innovations, dissemination of ideas in society, dynamics of innovation.

Введение

В данной статье мы рассмотрим процессы динамики распространения новой информации (экспансии идей или инноваций) в социуме (популяции людей — на множестве взаимодействующих агентов — автоматов) с точки зрения балансовых соотношений (законов сохранения).

У информации есть огромный потенциал воздействия на общественное мнение. С появлением интернета объем передаваемой информации увеличился, вместе с ним увеличилась и доступность. Однако, изобилие получаемой информации превышает нашу потребительскую способность. Информация должна конкурировать за наше ограниченное внимание. Исследование динамики распространения новой информации (экспансии идей или инноваций) в социальных и биологических сообществах крайне важно для многих областей. Динамика распространения инноваций тесно связанна с массовым сознанием и определяется происходящими в социальной системе информационными процессами

Fedotov, A.M., Lomakin, S.G., Modelling of processes of self-organization in biological and social systems.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

и находится в непосредственном взаимодействии с социальными процессами в государстве, регионе, существенно влияя на их развитие [1].

Для исследования динамики распространения новой информации в социуме (на множестве взаимодействующих агентов - автоматов) было рассмотрено две модифицированные модели: модель «Диффузии инноваций» [2] и модель «Naming Game» [3, 4, 5, 6], рассматривающая экспансию мнений в графе социальных взаимодействий, чьи вершины — индивиды (агенты), каждый из которых имеет список мнений.

1. Модель «диффузии инноваций»

Развитие политических процессов в обществе явно связано с информационной конкуренцией различных политических сил. При этом очевидно значение корректного прогнозирования влияния тех или иных информационных акций на формирование политической ориентации населения. Поскольку процессы распространения и конкуренции политических идей можно рассматривать как разновидности инновационных процессов в инфосоциальной системе, естественно предположить, что возможно корректное качественное описание динамики процессов распространения мнений с применением модели «диффузии инноваций». Диффузия — это «процесс, в ходе которого новое с течением времени по определенным каналам распространяется среди членов социальной системы» [1]. Известен целый ряд работ, в которых показано, что модели диффузии инноваций могут корректно описывать динамику распространения и замещения технологий, товаров, распространения новых методов обучения, динамику уровня криминальных процессов и т.п. [1].

Динамика распространения новых идей (инноваций) в социальной системе может быть описана динамической системой, выведенной из балансовых соотношений. Рассмотрим сообщество численностью N. Предположим, что каждый член сообщества (агент) может контактировать с каждым (т.е. мы имеем полный граф коммуникаций). Обозначим через y – число агентов с инновационной идеей «А». Будем считать, что агент с идеей контактирует с n агентами за единичный интервал времени, который с вероятностью k_1 делится инновационной идеей, при этом: $k_1 = k_0 p$, где k_0 – вероятность принятия идеи при одном контакте по теме инновации, p – вероятность контакта агентов по теме инновации. Иначе говоря, такой агент за единичный интервал времени распространяет инновационную идею «А»: $k_1 n$ агентам (точнее, $k_1 n$ есть математическое ожидание числа принявших идею). Вероятность общения агента с инновационной идей с агентом без идей равна y/N, вероятность принятия идеи в результате общения есть произведение этой вероятности на k_1. Следовательно, вероятность принятия идеи хотя бы один раз за n контактов может быть приближено выражена формулой:

$$q \approx k_1 n \frac{y}{N}.$$

Математическое ожидание числа принявших идею от ранее принявших агентов за единичный интервал времени равно произведению q на число агентов без инновационных идей: $q(N - y)$. При этом математическое ожидание изменения числа, принявших идею за единичный интервал времени, описывается следующим уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = a\frac{(N-y)}{N}y, \tag{1}$$

где $a = k_1 n$ – вероятность принятия инновационной идеи одним агентом за единичный интервал времени; y – число агентов, принявших инновацию; N – максимально возможное число агентов, способных принять инновацию.

Если обозначить через $f(t) = y/N$ – плотность агентов, воспринимающих новую идею, то для плотности получим следующее уравнение:

$$\frac{df(t)}{dt} = a\frac{(1-f(t))}{f(t)}. \tag{2}$$

Это уравнение впервые выписал Пьер Ферхюльст [7] в 1838 году для описания динамики роста популяции, назвав его уравнением логистического роста или логистическим уравнением. Уравнение (2) имеет аналитическое решение:

$$f(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-f_0}{f_0}e^{-at}}$$

где f_0 – плотность агентов в момент времени $t = t_0 = 0$ (начальное условие), принявших новую идею. Функция $f(t)$ определяет динамику во времени относительной численности членов социальной системы, принявших распространяемую информацию. Это уравнение обладает двумя важными свойствами: при малых $f(t)$ плотность возрастает экспоненциально, при больших — приближается к определенному пределу (см. рис.1).

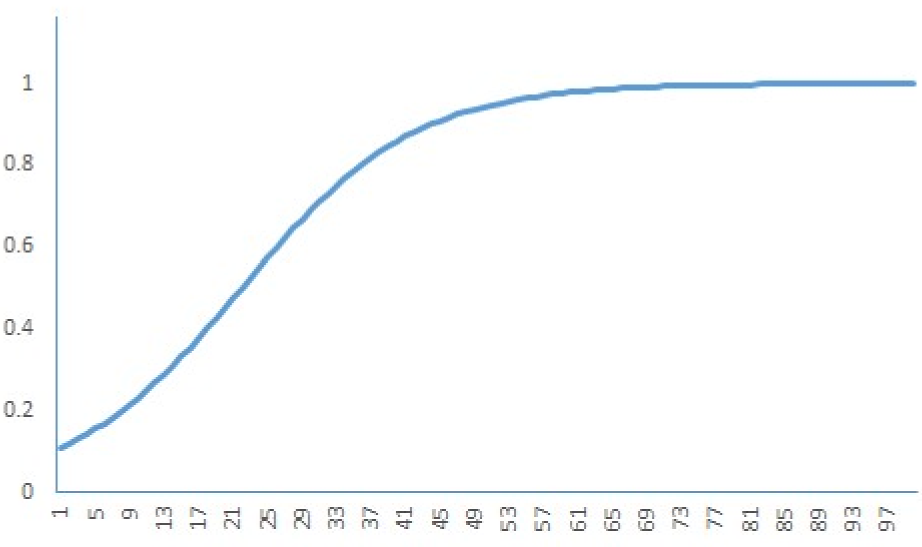


Рис. 1. Динамика распространения инноваций

Отметим, что при $t \to \infty f(t) \to 1$, что является уровнем насыщения. Решение уравнения (2) описывается логистической кривой (S-образной кривой роста) (см. рис. 1). Э. Роджерс [2] описывает концепцию S-образной кривой роста (логистическая кривая), характеризующей распространение новой идеи (диффузии инноваций), следующим образом: «Сначала всего несколько индивидов принимают новую идею, затем инновация принимается большим количеством индивидов, и, наконец, темпы принятия замедляются».

2. Модель Naming Game

Также как и предыдущем случае рассмотрим сообщество агентов численностью N. В модели «Naming Game» предполагается, что агенты, находящиеся в вершинах некоторого графа, могут обмениваться идеями между собой. У каждого агента есть словарь идей, которыми он обменивается со своими соседями по определённым правилам.

В упрощенном варианте Naming Game [3], предполагается, что каждый член сообщества (агент) может контактировать с каждым (т.е. мы имеем полный граф коммуникаций), агенты попарно взаимодействуют для достижения согласия. Основные алгоритмические правила Naming Game [3-6]: выбирается пара соседних узлов оратор и слушатель. Оратор озвучивает идею из своего списка. Если у слушателя в списке есть эта идея, то оба участника оставляют только ее, иначе слушатель пополняет свой словарь идей. Для простоты мы будем использовать термин "слово"в дальнейшем для обозначения идеи. Приведенные правила представлены на рис. 2.

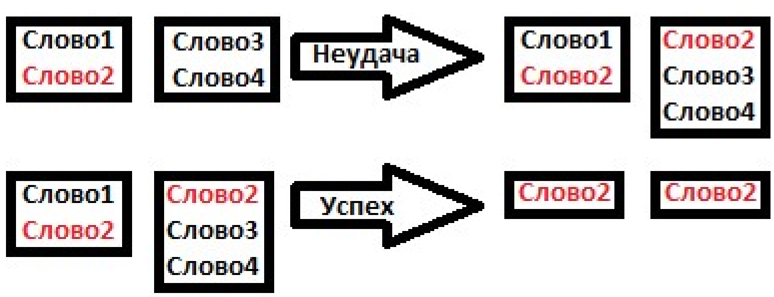


Рис. 2. Схема правил Naming Game

В начале «словарь» у всех пуст. Каждый ход выбирается оратор, который будет говорить «слово» из своего списка. Если список пустой, то оратор выдумывает «слово». Если у слушателя это слово есть в «словаре», то он удаляет остальные слова, иначе добавляет это слово в словарь. Если хотя бы у одного слушателя в списке было это слово, то оратор оставляет только его в своем списке.

В первый момент времени словари были пусты. Со временем словари будут расширяться пока у каждого агента в словаре не будет хотя бы одно слово. После, с ходом времени разногласие будет уходить. Рис. 3 показывает динамику изменения словарей у агентов.

Рассмотрим динамику распространения новой идеи (экспансию слов) в модели Naming Game. Предположим, что все слова одинаковые и оратора может услышать каждый слушатель с вероятностью k (вообще говоря, обратно пропорциональной расстоянию между ними). Тогда можно записать следующие

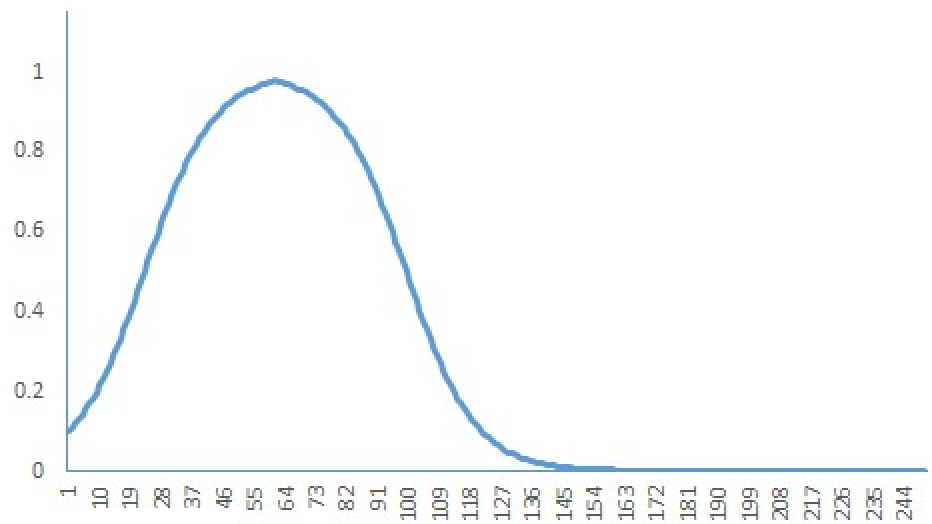


Рис. 3. Динамика словарей в Naming Game на полном графе

балансовые соотношения [8] для плотности агентов f_a с инновационной идеей:

$$\begin{cases} 1 = & f_a + f_{null} \\ \dfrac{df_a}{dt} = & k * f_a * f_{null} \end{cases}$$

где f_a – плотность агентов с непустым словарем, f_{null} – плотность агентов с пустым словарем, k – коэффициент распространения слов. Выразим f_{null} через f_a и подставим во второе уравнение:

$$\frac{df_a}{dt} = k * f_a * (1 - f_a)$$

Полученное уравнение имеет вид уравнения Ферхюльста (2), используемое нами для описания «диффузии инноваций». Добавляя в модель условие, что с вероятностью g агент может забыть слово из своего словаря, мы получаем уравнение, аналогичное (2), для плотности агентов с ненулевым словарем.

$$\frac{df_a}{dt} = k * f_a * (1 - f_a) - g * f_a.$$

Не смотря на различные правила передачи сообщений в двух разных моделях распространения инноваций мы имеем на полном графе взаимодействий одинаковую динамику.

3. Анализ распространения слов в модели Naming Game

Рассмотрим динамику распространения новой идеи (экспансию слов) в модели Naming Game. Рассмотрим сетку размерами $L \times M$, где каждый узел является агентом. Предположим, что все слова одинаковые. Введем параметр T, который показывает время жизни идеи. То есть, если какой-то узел не получал о идеи никакой информации в течении времени T, то она удаляется из списка идей. Теперь вместо одного слушателя, слушателями будут все соседи оратора. В данной модели оратора может услышать каждый слушатель с вероятностью обратно пропорциональной расстоянию между ними. На рис. 4 приведен результат численного моделирования данного процесса:

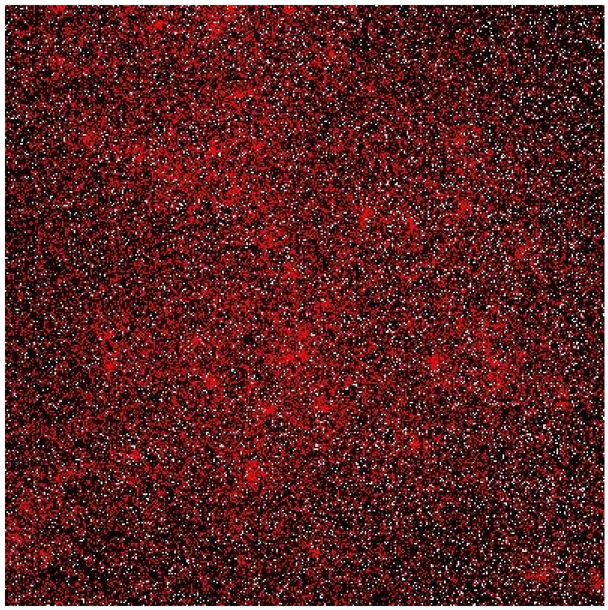


Рис. 4. Распределение слов на двумерной сетке.

При моделировании данных процессов был обнаружен факт «пятнистости» — распределение агентов по пространству не является однородным, с течением времени агенты с одинаковыми идеями объединяются в устойчивые группы. Аналоги этих процессов проглядываются в моделях динамики биологический популяций. Явление «пятнистости» в биологических популяциях широко описано в специальной литературе [10].

4. Модель клеточных автоматов для «диффузии инноваций»

Для простоты анализа пусть экспансия происходит на отрезке прямой. Обозначим за $F(x,t)$ функцию, которая описывает состояние агентов в каждый момент времени t в каждой точке x. Функция $F(x,t)$ принимает следующие значения:

$$F(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{если словарь агента } x \text{ не пуст,} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Для начала рассмотрим случай, когда все агенты взаимодействуют со всеми. Словарь может измениться только если один из агентов поделится словом с другим. Тогда в следующий момент времени состояние можно выразить как:

$$F(x,t+\Delta t) = \sigma(F(x,t) + \sum_{i}^{N} k_i(x) F(x_i,t))$$

где
$$\sigma(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \geq 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
и
$$k_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если i-й агент взаимодествовал с } x, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
Данное уравнение преобразуется до:
$$\frac{df(t)}{dt} = a(1 - f(t))f(t).$$
Полученное уравнение имеет вид уравнения Ферхюльста (2), используемое нами для описания «диффузии инноваций». Аналогичный вывод получается и для агентов, расположенный в узлах плоской сетки.

Таким образом, имея полный граф взаимодействия мы приходим к выводу, новый идеи распространяются согласно «закону диффузии инноваций».

5. Модель клеточных автоматов на плоскости

Рассмотрим случай, когда агент взаимодействует только со своими соседями. Тогда в следующий момент времени состояние можно выразить как:
$$F(x, t + \Delta t) = \sigma(F(x, t) + k_1 F(x - 1, t) + k_2 F(x + 1, t)) \tag{3}$$
где
$$\sigma(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \geq 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
и k_1 и k_2 вероятность взаимодействия с левым и правым соседом соответственно. При $k_1 = k_2$ можно заметить, что уравнение (4) является разностной схемой для диффузионного уравнения с каталитическим членом. Это уравнение было исследовано А. Н. Колмогоровым [11], который получил решения в виде бегущих плоских волн, что говорит о возможности появления устойчивых пространственных структур в сообществе автоматов. Преобразуем (3):
$$F(x, t + \Delta t) = F(x, t) + (1 - F(x, t))\sigma(k_1 F(x - 1, t) + k_2 F(x + 1, t))$$
$$\frac{\Delta F(x, t)}{\Delta t} = (1 - F(x, t))\sigma(k_1 F(x - 1, t) + k_2 F(x + 1, t)).$$
Данное уравнение преобразуется до:
$$\frac{df(t)}{dt} = a(1 - f(t))f(t).$$
где $f(t)$ – плотность общего числа слов в момент времени t.

Рассмотрим случай с условием забывания слов:
$$\frac{df(t)}{dt} = a(1 - f(t))f(t) - gf(t)$$
Запишем это уравнение как:
$$\frac{df(t)}{dt} = af - \beta f^2.$$
Решение будет выглядеть так:
$$f(t) = a/(\beta + (a - \beta f_0)/f_0 e^{-at})$$
где $f_0 = f(0)$.

Отметим, что при $t \to \infty$, $f(t) \to a/\beta$. При $a/\beta \geq 1$ у всех агентов будет не пустой словарь. В случае, если $0 < a/\beta < 1$ распределение агентов, принявших инновацию, является неоднородным и в системе будут образовываться пространственные структуры.

Заключение

Исследование двух разных моделей распространения идей в обществе в условиях забывания идей показало качественно одинаковое поведение сообщества автоматов. Главный вывод состоит в том, что общество, при возникновении новой идеи, не воспринимает ее равномерно одинаково, а может распадаться на группы воспринимающих новую идею и невоспринимающих.

References

[1] V.A. Minaev, A.S. Ovchinsky, S.V. Skryl, S.N. Trostyansky, *How to manage the mass consciousness: the current models*, Moscow, RosNOU, ISBN 978-5-89789-089-7, 2013.

[2] E. Rogers, *Diffusion of Innovations*, 4 ed., New York: Free Press, 1995.

[3] A. Baronchelli, M. Felici, E. Caglioti, V. Loreto, L. Steels, *Evolution of Opinions on Social Networks in the Presence of Competing Committed Groups*, J. Stat. Mech., 2006.

[4] L. Dallsta, A. Baronchelli, A. Barrat, V. Loreto, *Non-equilibrium dynamics of language games on complex networks*, 2006.

[5] Q. Lu, G. Korniss, B.K. Szymanski, *Naming games in two-dimensional and small-world-connected random geometric networks*, 2008.

[6] A. Baronchelli, *Role of feedback and broadcasting in the naming game*, Phys. Rev. E 83, **046103** (2011), arXiv:1009.4798v2.

[7] P. F. Verhulst, *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*, Correspondance mathematique et physique, **10** (1838), 113-121.

[8] S. G. Lomakin, A. M. Fedotov, *The model of self-organization in agent-based systems with the transmission of information*, System Analysis and Information Technologies (SAIT 2013). Proc. of V International Conference, Krasnoyarsk, ISBN 978-5-9904056-3, **1** (2013), 243–247.

[9] J. von Neumann, *Theory of Self-Reproducing Automata*, Univeristy Of Illinois Press, 64-87, 1966.

[10] A.I. Lobanov , *Model of cellular automata, Computer Research and Modeling*, **2** (2010), no. 3, 273-293.

[11] A.A. Lyapunov, *Biogeocenosis and mathematical modeling*, Nature, **10** (1971), 38-41.

[12] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii, Piskunov N. S., *The study of the diffusion equation coupled with an increase in the amount of substance, and its application to a biological problem*, Bul. MSU. Ser. Mathematics and Mechanics, **1** (1937), 1–26.

Anatolii Mikhailovich Fedotov
Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk,
6 Acad. Lavrentjev Ave,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: fedotov@nsc.ru

Sergey Gennadievich Lomakin
Novosibirsk State University, Novosibirsk,
2 Pirogova Str.,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: sir_ejik@mail.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.82–С.89 (2015) УДК 544.431.8

MSC 34C15

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 7-СТАДИЙНОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ БЕЛОУСОВА-ЖАБОТИНСКОГО

Р.Д. ИКРАМОВ, С.А. МУСТАФИНА

Abstract. The 7-stage model of the Belousov-Zhabotinski reaction proposed by R. J. Field, R.M. Noyes, E. Koros including organic reactants is considered in this paper.

Keywords: oregonator, oscillations, Belousov-Zhabotinskii reaction, BZ-reaction, oscillating reactions

1. Введение

Реакция Белоусова-Жаботинского широко известна своими длинными последовательностями и разновидностями колебаний. Реакция демонстрирует устойчивые колебания в закрытой системе, бистабильности, двойные колебания, а также сложные периодические режимы [1]. В 1959 г. Б.П. Белоусов обнаружил, что в процессе реакции окисления лимонной кислоты броматом, катализируемой ионами церия (III), в сернокислом растворе наблюдается длительно повторяющиеся колебания отношений концентраций ионов церия (IV) и церия (III). В 1954 г. подобные колебания были получены Жаботинским в той же системе, но с участием малоновой кислоты в качестве восстановителя. Впоследствии А.М. Жаботинский показал, что колебания реакция может осуществляться и в том случае, если лимонная кислота будет заменена малоновой или любой другой кислотой с активной метиленовой группировкой, редокс-пара $Ce(IV)/Ce(III)$ будет заменена парой $Mn(II)/Mn(III)$ или ферроин/ферринн [2].

Ikramov, R.D., Mustafina S.A., Mathematical modeling of the 7-phase model of the Belousov-Zhabotinski reaction.

Поступила 15 мая 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

2. Постановка прямой задачи

Американские ученые Р. Филд, Р. Нойес, Е. Керош разработали первый механизм реакции Белоусова-Жаботинского в 1972 году для объяснения природы колебаний. Данный механизм получил название «Орегонатор» в честь штата, в котором они работали – Орегон [3].

Один из механизмов данной реакции, предложенный Филдом, Керошем, Нойесом, включающий в себя также и органическую стадию, имеет вид [4]:

$$
\begin{aligned}
&Br^- + HOBr + H^+ \to Br_2 + H_2O,\\
&HBrO_2 + Br^- + H^+ \to 2HOBr,\\
&BrO_3^- + Br^- + 2H^+ \to HBrO_2 + HOBr,\\
&2HBrO_2 \to BrO_3^- + HOBr + H^+,\\
&BrO_3^- + HBrO_2 + H^+ \to 2BrO_2\cdot + H_2 0,\\
&BrO_2\cdot + Ce(III) + H^+ \to HBrO_2 + Ce(IV),\\
&2Ce(IV) + CH_2(COOH)_2 + BrCH(COOH)_2 \to fBr^- + products.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Система дифференциальных уравнений, соответствующая представленному выше механизму, будет иметь вид:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{d[Br^-]}{dt} = 0.5fR1 - R2 - R3 - R4,\\
&\tfrac{d[HOBr]}{dt} = R5 + R3 + 2R2 - R4,\\
&\tfrac{d[H^+]}{dt} = R6 - R2 + R5 - 2R3 - R7 - R4,\\
&\tfrac{d[HBrO_2]}{dt} = -R6 - R2 - R5 + R3 + R7,\\
&\tfrac{d[BrO_3]}{dt} = -R6 + R5 - R3,\\
&\tfrac{d[Ce(III)]}{dt} = R1 - R7,\\
&\tfrac{d[Ce(IV)]}{dt} = -R1 + R7,\\
&\tfrac{d[CH_2(COOH)_2]}{dt} = -R1,\\
&\tfrac{d[BrO_2\cdot]}{dt} = 2R6 - R7,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&R1 = k_7[CH_2(COOH)_2][Ce(IV)],\ R2 = k_2[HBrO_2][Br^-][H^+],\\
&R3 = k_3[BrO_3][Br^-][H^+],\ R4 = k_1[Br^-][HOBr][H^+],\\
&R5 = k_4[HBrO_2][HBrO_2],\ R6 = k_5[BrO_3][HBrO_2][H^+],\\
&R7 = k_6[BrO_2\cdot][Ce(III)][H^+].
\end{aligned}
$$

Кинетические константы k_i принимают следующие значения [5]:

$$
\begin{aligned}
&k_1 = 8\cdot 10^9 M^{-2}s^{-1},\\
&k_2 = 10^6 M^{-2}s^{-1},\\
&k_3 = 2M^{-3}s^{-1},\\
&k_4 = 2\cdot 10^3 M^{-3}s^{-1},\\
&k_5 = 10M^{-2}s^{-1},\\
&k_6 = 6\cdot 10^5 M^{-2}s^{-1},\\
&k_7 = 1M^{-1}s^{-1}.
\end{aligned}
$$

3. Численный эксперимент и анализ результатов

Результаты интегрирования системы (2) с начальными условиями (моль) $[Br^-]_0 = 6.25\cdot 10^{-4}$, $[HOBr]_0 = 1\cdot 10^{-6}$, $[H^+]_0 = 2$, $[HBrO_2]_0 = 1\cdot 10^{-6}$, $[BrO_3^-]_0 = 6.25\cdot 10^{-2}$, $[BrO_2\cdot]_0 = 1\cdot 10^{-6}$, $[Ce(III)]_0 = 1\cdot 10^{-6}$, $[Ce(IV)]_0 =$

$2 \cdot 10^{-3}$, $[CH_2(COOH)_2]_0 = 0.275$, $F = 2$ представлены на рисунках (1) – (9). Шаг интегрирования $h = 10^{-3}$. Интегрирование производилось L-устойчивым методом Розенброка с действительными коэффициентами, так как в силу большого разброса значений констант скоростей система дифференциальных уравнений (2) имеет большой коэффициент жесткости. Вследствие этого интегрирование явными и A-устойчивыми методами не будет эффективным с малым шагом.

По рисункам видно, что в системе присутствуют автоколебания концентраций реагентов, система с течением времени монотонно стремится к равновесию. Осцилляции концентраций реагентов Br^- , $HBrO_2$ характеризуются затухающими со временем колебаниями с постепенным увеличением периода колебаний. Концентрации H^+, малоновой кислоты, BrO_3^- монотонно стремятся к своим стационарным состояниям.

Валентность катализатора Ce периодически меняется с 3 на 4 и наоборот. Эти изменения хорошо наблюдаются на рис. (6) – (7), где частота и периоды совпадают – колебания «противоположны».

Результаты интегрирования совпадают с результатами, описанными в работе [5].

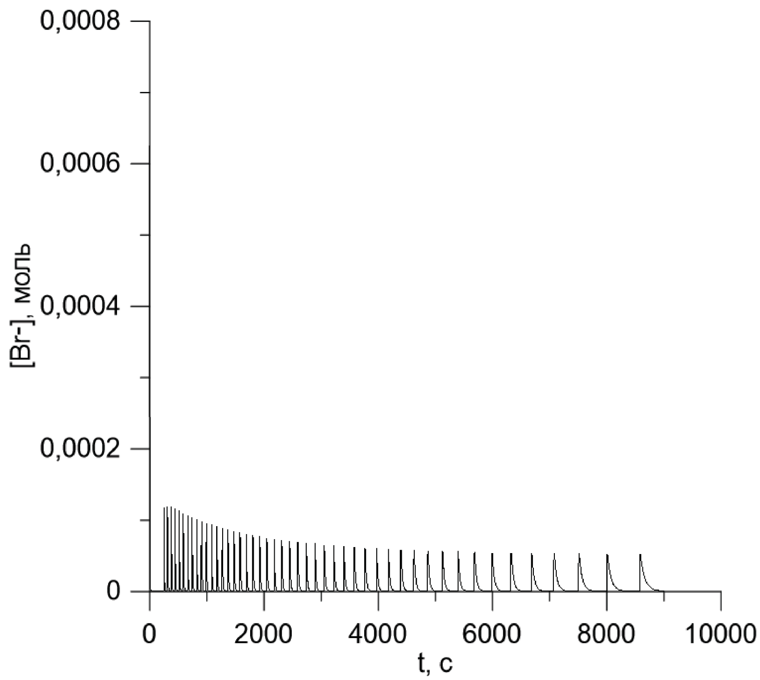


Рис. 1. *Зависимость концентрации Br^- от времени*

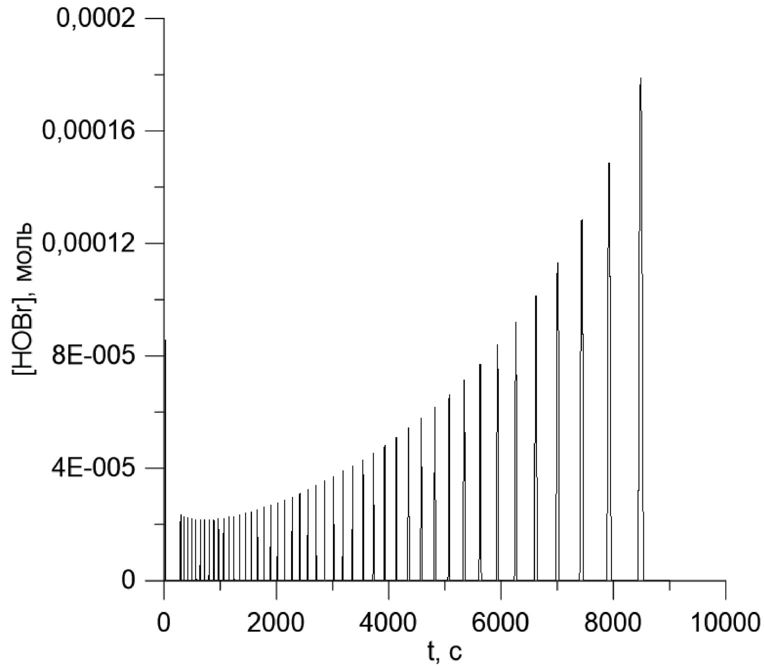


Рис. 2. *Зависимость концентрации $HOBr$ от времени*

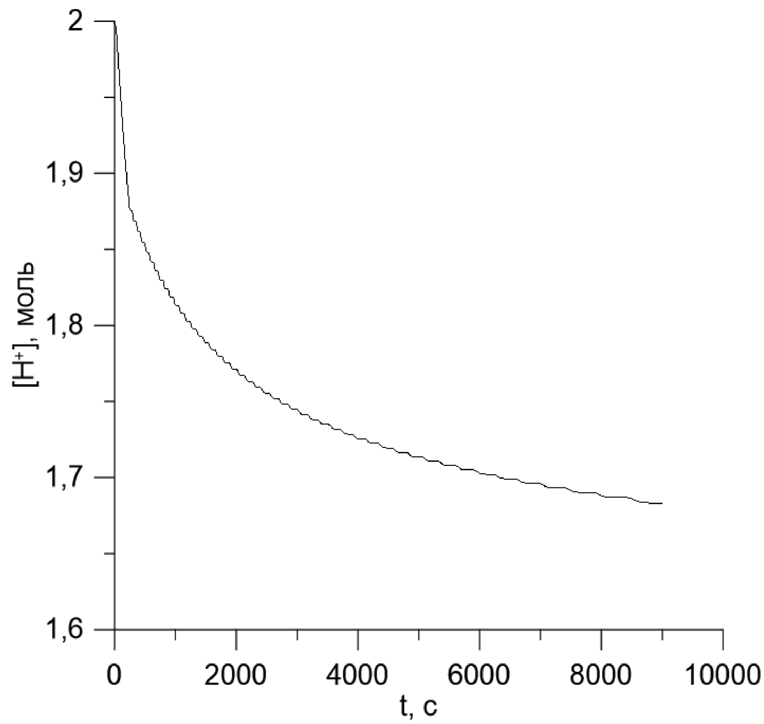


Рис. 3. *Зависимость концентрации H^+ от времени*

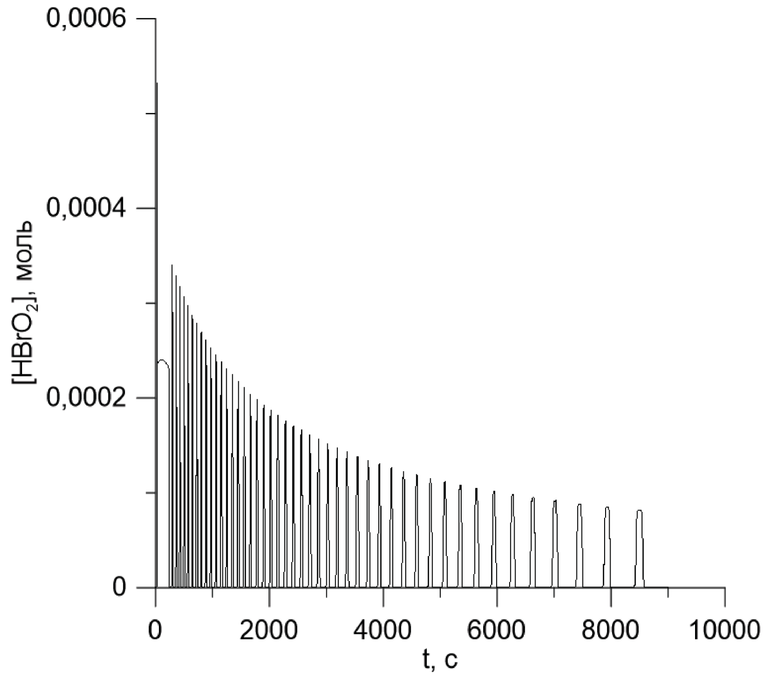


Рис. 4. *Зависимость концентрации* $HBrO_2$ *от времени*

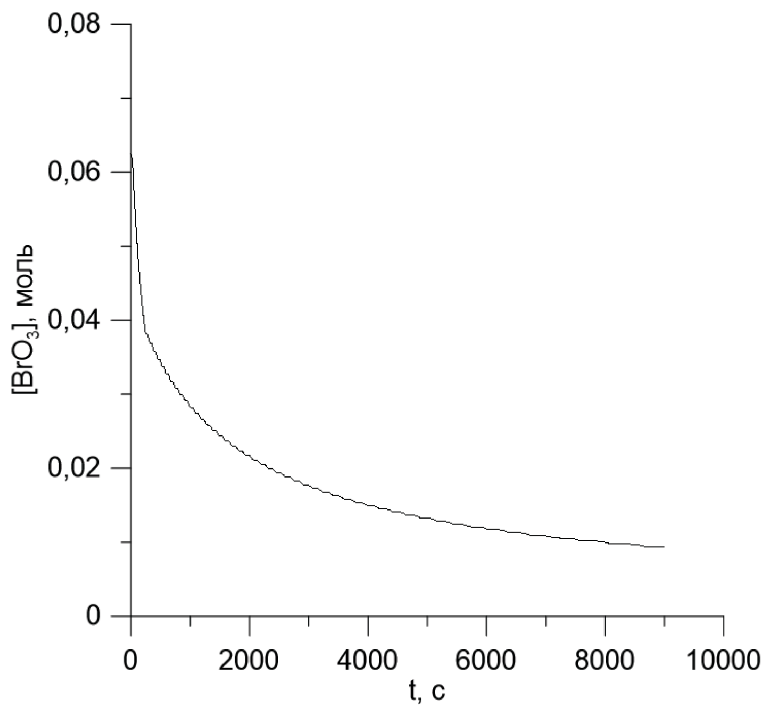


Рис. 5. *Зависимость концентрации* BrO_3^- *от времени*

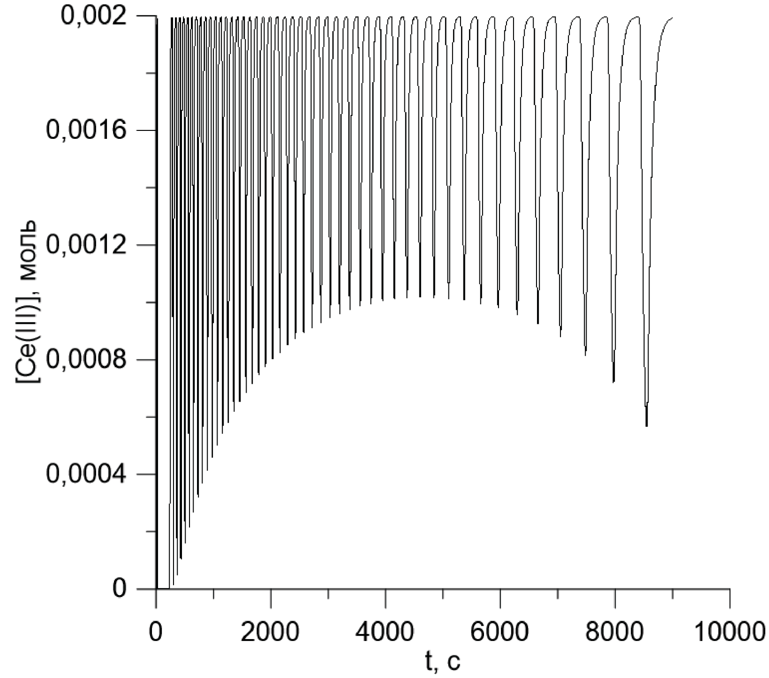


Рис. 6. *Зависимость концентрации* $Ce(III)$ *от времени*

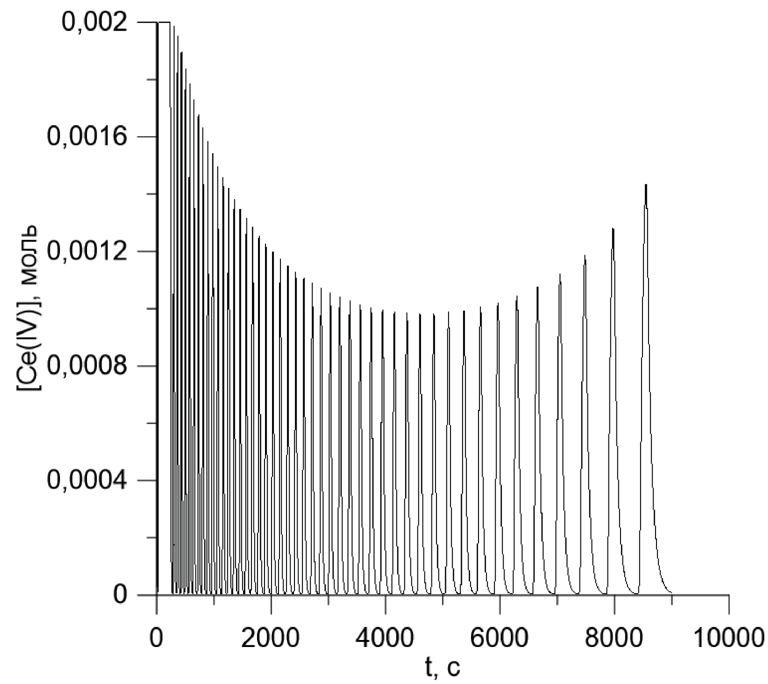


Рис. 7. *Зависимость концентрации* $Ce(IV)$ *от времени*

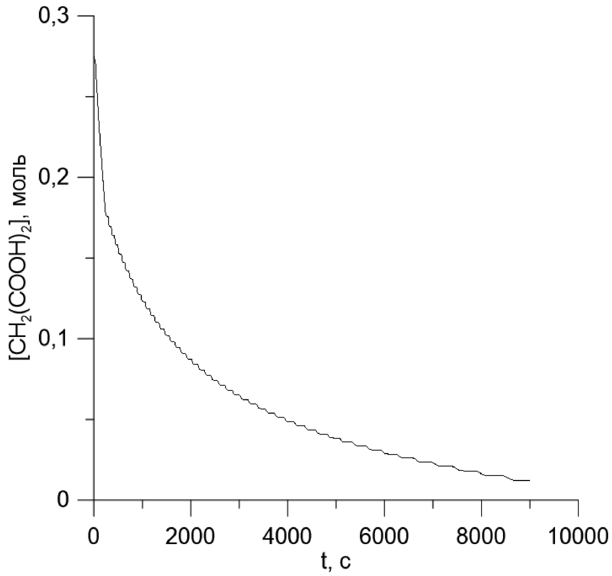


Рис. 8. *Зависимость концентрации* $CH_2(COOH)_2$ *от времени*

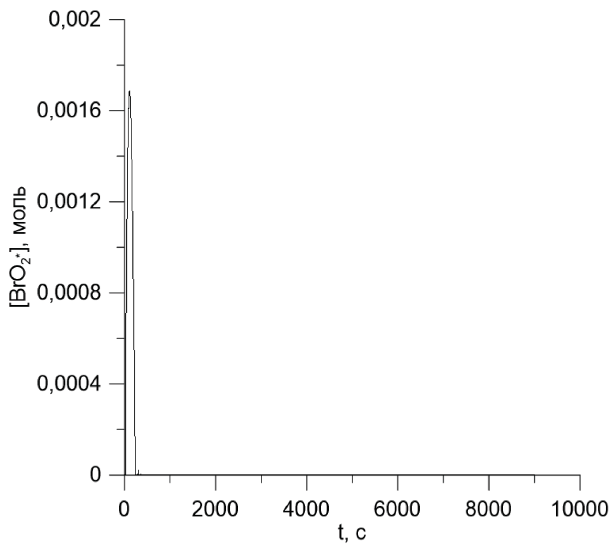


Рис. 9. *Зависимость концентрации* BrO_2 *от времени*

References

[1] O. Garel, D. Garel, *Oscillatory chemical reactions*, Moscow, Mir, 1986, (in Russian).
[2] A.M. Jabotinsky, *Concentration fluctuations*, Moscow, Nauka, 1974 (in Russian).
[3] R.J.Field, E. Koros, R.M. Noyes, *Oscillations in chemical systems. II. Through analysis of temporal oscillations in the bromate-cerium-malonic acid system* , J. Am. Soc., **94** (1972), 8649–8664.
[4] C. R. Gray, *An Analysis of the Belousov-Zhabotinskii reaction*, Undergraduate Math Journal, **3** (2002), 1–15.
[5] M. T. Scot, *Employing Complex Kinetic Diagrams to Understand the Belousov-Zhabotinskii Reaction*, The Mathematica Journal, **8** (2001), 114–125.

Rustam Djamolovich Ikramov, Svetlana Anatolievna Mustafina
Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
pr. Lenina, 37,
453103, Sterlitamak, Russia
E-mail address: rustam_ikramov@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.90–С.96 (2015) УДК 519.622.2
MSC 13A99

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭПИДЕМИОЛОГИИ

А.И. ИЛЬИН, С.И. КАБАНИХИН, О.И. КРИВОРОТЬКО, Д.А. ВОРОНОВ,
В.Н. КАШТАНОВА

Abstract. The problem of parameter identification for mathematical model of Tuberculosis spread using additional information about susceptible, latent infectious, infected and non-infected individuals is numerically investigated. The inverse problem is numerically solved by the Nelder-Mead algorithm. It is shown that Nelder-Mead method allows one to determine eight parameters of above model, namely transmissibility parameter, rate of Tuberculosis epidemics, mortality rate of population due to Tuberculosis, the probability of infection propagation, etc., with accuracy of 10^{-13} during 251 iterations (10 seconds using AMD A10-5750M APU 2.50 GHz).

Keywords: inverse problem, epidemiology, ordinary differential equation system, Nelder-Mead algorithm, Tuberculosis parameter identification.

1. Введение

Существует много опасных инфекционных заболеваний (туберкулез, оспа, грипп и др.). Несмотря на то, что в большинстве случаев они излечимы, важно спрогнозировать развитие эпидемии в отдельно взятом регионе, чтобы оптимально составить план мероприятий по выявлению и лечению больных.

Ilyin A.I., Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I., Voronov D.A., Kashtanova V.N., Numerical algorithms for solving of direct and inverse problems in epidemiology.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации.

Поступила 22 декабря 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

Одним из наиболее эффективных методов является исследование математической модели, описывающей процессы распространения инфекции в популяции. Такие модели описываются системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых характеризуют особенности популяции и развития болезни. С целью уточнения модели для конкретной популяции необходима качественная оценка параметров модели (или их комбинаций) [1].

Первыми работами, в которых была построена и развита целостная математическая модель эпидемиологии туберкулеза (включающая описание процессов заражения, развития латентной инфекции и болезни и дальнейшего распространения инфекции), были статьи Ганса Ваалера (Hans Waaler) с соавторами [2, 3, 4, 5, 6, 7], опубликованные в 60-70-ые годы 20-го века. В последующие годы разработкой моделей (естественной динамики туберкулеза, с врачебным вмешательством, взаимодействия с другими смертельно опасными заболеваниями и т.д.) и качественной оценкой их параметров по статистическим данным занималась группа исследователей под руководством Салли М. Блоуэр (Sally M. Blower) [8, 9, 10, 11, 12]. В настоящее время создаются на основе предыдущих работ новые модели с надстройкой на реальные данные [13, 14], учитывающие особенности популяции, в особенности российских регионов.

В разделе 2 приведены постановки прямой и обратной задач для математической модели распространения естественной динамики туберкулезной болезни. В разделе 3 представлены результаты численного решения обратной задачи методом Нелдера-Мида.

2. Постановка прямой и обратной задач

Рассмотрим задачу Коши для математической модели распространения эпидемии туберкулеза, разработанной группой исследователей под руководством С.М. Блоуэр [8]:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS}{dt} = \Pi - \beta T_i S - \mu S, \\
\dfrac{dL}{dt} = (1-p)\beta T_i S - (\delta + \mu) L, \\
\dfrac{dT_i}{dt} = p f_F \beta T_i S + f_S \delta L + \rho R - (\mu + \mu_T + \alpha) T_i, \\
\dfrac{dT_n}{dt} = p(1-f_F)\beta T_i S + (1-f_S)\delta L + \rho R - (\mu + \mu_T + \alpha) T_n, \\
\dfrac{dR}{dt} = \alpha(T_i + T_n) - (2\rho + \mu) R, \\
S(0) = S_0,\ L(0) = L_0,\ T_i(0) = T_{i_0},\ T_n(0) = T_{n_0},\ R(0) = R_0.
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

В модели (2.1) вся популяция разделена на чувствительных (S), носителей латентной инфекции (L), инфекционных больных индивидов (T_i) и неинфекционных больных индивидов (T_n). Кроме того, вводится группа спонтанно самоизлечившихся индивидов (R), моделирующая процессы спонтанного самоизлечения активных форм туберкулеза с возможным рецидивом болезни. Описание параметров модели приведено в таблице 1.

Таблица 1. Параметры модели (2.1).

Величина	Описание	Единицы	Значение
П	приток молодежи в модельную популяцию	чел/год	зависит от популяции
β	параметр трансмиссивности	(чел·год)$^{-1}$	0.04
$1/\mu$	средняя ожидаемая продолжительность жизни	год	зависит от популяции
p	доля недавно инфицированных, развивающих болезнь в течение 1 года	-	0.3
δ	константа скорости развития болезни	год$^{-1}$	0.004
f_F	вероятность развития инфекционной формы болезни при быстром прогрессировании	-	0.85
f_S	вероятность развития инфекционной формы болезни при эндогенной активации	-	0.85
2ρ	константа скорости развития рецидива туберкулеза	год$^{-1}$	0.01
μ_T	смертность, вызываемая туберкулезной болезнью	год$^{-1}$	0.139
α	константа скорости спонтанного самоизлечения	год$^{-1}$	0.058

Предположим, что в моменты времени t_k о функциях $S(t)$, $L(t)$, $T_i(t)$, $T_n(t)$, $R(t)$ получена дополнительная (статистическая) информация:

$$
\begin{array}{llll}
S(t_k) = S_k, & k = 1, ..., K_1, & L(t_k) = L_k, & k = 1, ..., K_2, \\
T_i(t_k) = T_{i_k}, & k = 1, ..., K_3, & T_n(t_k) = T_{n_k}, & k = 1, ..., K_4, \\
R(t_k) = R_k, & k = 1, ..., K_5. & &
\end{array} \tag{2.2}
$$

Обратная задача (2.1) - (2.2), состоит в определении вектора параметров $\Theta := (\beta, p, \delta, f_F, f_S, \rho, \mu_T, \alpha)^T \in \mathbb{R}^8$ по дополнительной информации (2.2):

$$\Phi^{(k)} := (S_k, L_k, T_{i_k}, T_{n_k}, R_k)^T \in \mathbb{R}^K, \ K := K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5.$$

Запишем обратную задачу (2.1) - (2.2) в векторном виде:

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t), \Theta), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$X(t_k) = \Phi^{(k)}. \tag{2.4}$$

Здесь $X = (S, L, T_i, T_n, R)^T$, $X_0 = (S_0, L_0, T_{i_0}, T_{n_0}, R_0)^T$, F - заданная вектор-функция.

Решение обратной задачи (2.3) - (2.4) сводится к нахождению минимума целевого функционала

$$J(\Theta) = \sum_{k=0}^{K} |X(t_k; \Theta) - \Phi^{(k)}|^2.$$

Численное решение задачи $\min J(\Theta)$ определяется итерационным методом Нелдера-Мида [15], алгоритм которого представлен на Рисунке 2.1.

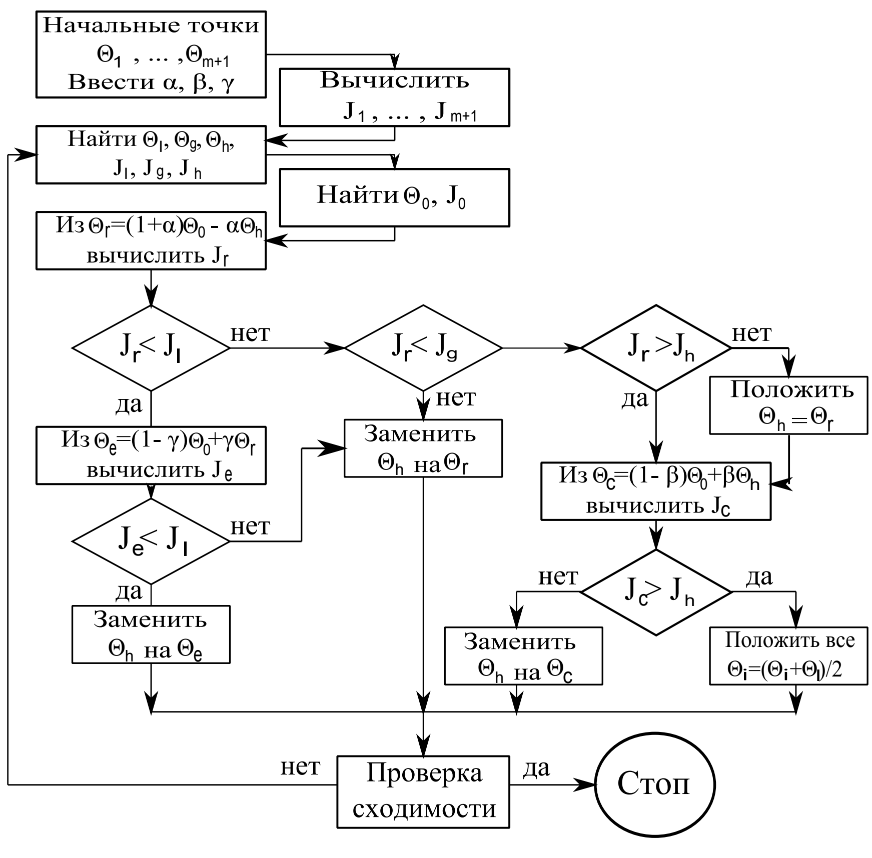


Рис. 2.1. Блок-схема алгоритма Нелдера-Мида.

3. Численный эксперимент

Рассмотрим равномерную сетку $t_j = jh_t,\ h_t = \frac{T}{N_t},\ T = 3$ года, $N_t = 300$. Задаем начальные данные и параметры Π и μ, соответствующие среднестатистической деревне в России (население 500 человек и ожидаемая продолжительность жизни 70 лет), в которую прибыл один человек, болеющий открытой формой туберкулеза:

$$S(0) = 500,\ L(0) = 0,\ T_i(0) = 1,\ T_n(0) = 0,\ R(0) = 0\ \Pi = 7,\ \mu = 1/70.$$

Также предполагаем, что там нет туберкулезного диспансера, из этого следует, что нет эффективных программ лечения туберкулеза. Т.е. распространение туберкулезной болезни в этой деревне можно описать с помощью модели (2.1).

Выбираем вектор точных параметров Θ, взятые из таблицы 1. Решая прямую задачу Коши (2.3) с параметрами Θ методом Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации, получаем синтетические данные $\Phi^{(k)}$, распределенные равномерно по отрезку $(0,T)$. Чтобы максимально приблизиться к реальным условиям, предположим, что данные известны только для функций $T_i(t), T_n(t), R(t)$, т.к. собрать точные статистические данные о количестве латентно инфицированных (а соответственно и чувствительных) людей в реальной жизни практически невозможно. Выбираем начальный симплекс из девяти точек $P_m \in \mathbb{R}^8$, $m = \overline{1,9}$, где $P_m = \Theta + 0.01m$ и коэфициенты $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 2$, предложенные в статье [15].

Рассмотрим зависимость относительной ошибки от количества дополнительной информации (рисунок 3.1). По рисунку видно, что оптимально брать 3 измерения за 3 года, больше 8-ми измерений мы не рассматриваем, т.к. столько статистической информации собрать за 3 года в реальных условиях затруднительно.

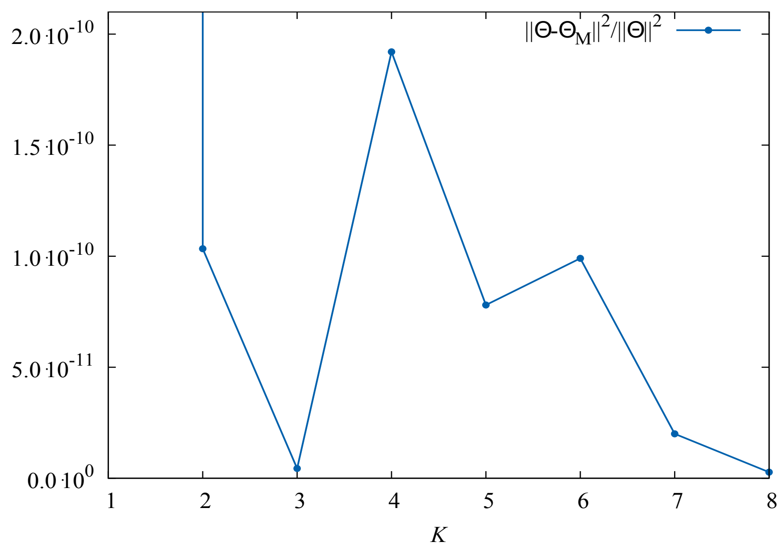


Рис. 3.1. Зависимость относительной ошибки $\frac{|\Theta-\Theta_M|^2}{|\Theta|^2}$ от количества дополнительной информации K, M - количество итераций.

Результаты численного решения обратной задачи (2.3) - (2.4) с дополнительными данными, вычисленными раз в год, получены с точностью $\varepsilon = 10^{-13}$, т.е. $J(\Theta) < \varepsilon$, за $M = 251$ итераций. Причем относительная ошибка между точным и вычисленным решением: $\frac{|\Theta-\Theta_M|^2}{|\Theta|^2} = 4.4 \cdot 10^{-12}$.

Таким образом, за приемлемое количество итераций (около 250) и времени вычислений 10 секунд машинного времени на процессоре AMD A10-5750M APU 2.50 GHz метод Нелдера-Мида определяет искомые восемь параметров Θ, характеризующие распространение туберкулеза в выбранной среднестатистической деревне (население 500 человек, средне ожидаемая продолжительность жизни 70 лет и нет туберкулезного диспансера), с заданной точностью.

References

[1] S.I. Kabanikhin, *Inverse and ill-posed problems*, Novosibirsk: Siberian science publishing, 2009.

[2] H.T. Waaler, A. Geser, S. Andersen, *The use of mathematical models in the study of the epidemiology of tuberculosis*, Am. J. publ. Health, **52** (1962), 1002–1013.

[3] H.T. Waaler, *Cost-benefit analyses of BCG vaccination under various epidemiological situations*, Bull. int. Union Tuberc, **41** (1968), 42–52.

[4] H.T. Waaler, *A Dynamic Model for the Epidemiology of Tuberculosis. American Review of Respiratory Disease*, **98** (1968), 591–600.

[5] H.T. Waaler, M.A. Piot, *The use of an epidemiological model for estimationg the effectiveness of tuberculosis control measures. Sensitivity of the effectiveness of tuberculosis control measures to the coverage of the population*, Bulletin of the World Health Organization, **41** (1969), 75–93.

[6] H.T. Waaler, M.A. Piot, *The use of an epidemiological model for estimationg the effectiveness of tuberculosis control measures. Sensitivity of the effectiveness of tuberculosis control measures to the coverage of the population*, Bulletin of the World Health Organization, **43** (1970), 1-16.

[7] H.T. Waaler, G.D. Gothi, G.V.J. Baily, S.S. Nair, *Tuberculosis in rural South India. A study of possible trends and the potential impact of antituberculosis programmes*, Bulletin of the World Health Organization, **51** (1974), 263-271.

[8] S.M. Blower, A.R. McLean, T.C. Porco, P.M. Small, P.C. Hopewell, M.A. Sanchez, A.R. Moss, *The intrinsic transmission dynamics of tuberculosis epidemics*, Nature Medicine, **1** (1995), № 8, 815–821.

[9] S.M. Blower, P.M. Small, P.C. Hopewell, *Control strategies for tuberculosis: new models for old problems*, Science, **273** (1996), 497–500.

[10] S.M. Blower, T.C. Porco, *Quantifying the Intrinsic Transmission Dynamics of Tuberculosis*, Theoretical Population Biology, **54** (1998), 117–132.

[11] S.M. Blower, T.C. Porco, T. Lietman, *Tuberculosis: The Evolution of Antibiotic Resistance and the Design of Epidemic Control Strategies*, USA: Vanderbilt Press, 1998.

[12] S.M. Blower, T.C. Porco, P.M. Small, *Amplification Dynamics: Predicting the Effect of HIV on Tuberculosis Outbreaks*, Journal of Aquired Immune Deficiency Syndromes, **28** (2001), 437-444.

[13] M.I. Perelman, G.I. Marchuk, S.E. Borisov, B.Ya. Kazennukh, K.K. Avilov, A.S. Karkach, A.A. Romanyukha, *Tuberculosis epidemiology in Russia: the mathematical model and data analysis*, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, **19** (2004), (4), 305–314.

[14] K.K. Avilov, A.A. Romanyukha, *Mathematical modeling of the spread of tuberculosis and identifying patients*, Automation and Remote Control, **9** (2007), 145–160.

[15] J.A. Nelder, R. Mead, *A simplex method for function minimization*, Computer Journal, **7** (1965), 308-313.

Aleksandr Ivanovich Ilyin
Joint Stock Company "Scientific Center for Anti-Infectious Drugs",
75V Al-Farabi ave.,
Almaty Republic of Kazakhstan
E-mail address: scaid@mail.ru

Sergey Igorevich Kabanikhin
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

Olga Igorevna Krivorotko, Dmitrii Andreevich Voronov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: krivorotko.olya@mail.ru, dmitriy.voronov.89@gmail.com

Victoriya Nicolaevna Kashtanova
Novosibirsk State University,
Pirogova Str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: VikaKashtanova@yandex.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.97–С.103 (2015) УДК 519.62
MSC 76M12

ЗАДАЧА ПРОДОЛЖЕНИЯ И ФРАКТАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

С.И. КАБАНИХИН, М.А. БЕКТЕМЕСОВ, М.А. ШИШЛЕНИН

Abstract. We consider the continuation problem and its relationship to fractal sets.

Keywords: continuation problem, fractal set.

1. Введение

По традиции все научные законы описываются в терминах определенного множества математических функций и конструкций, и своим развитием они обязаны как математической простате, так и способности служить моделью для основных характеристик изучаемого явления природы. Научный закон, определенный при помощи алгоритма, может, однако, принимать любую непротиворечивую форму. Поэтому изучение многих сложных систем, которые не поддавались исследованию традиционными математическими методами, стало возможным с использованием вычислительных моделей и появлением мощных компьютеров.

Количественные закономерности строения геофизических и геохимических полей на математическом уровне описываются уравнениями в частных производных второго порядка. Так, гравитационное и магнитное поле описываются уравнением Пуассона-Лапласа, электромагнитное — уравнениями Максвелла, сейсмические поля — уравнениями теории упругости, концентрационные поля — уравнением диффузии. Основополагающей в задачах продолжения является теорема Коши–Ковалевской. Существование и однозначность аналитического продолжения гравитационного поля и поля концентраций газов или

Kabanikhin, S.I., Bektemesov, M.A., Shishlenin, M.A., Continuation problem and fractal sets.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, Министерства образования и науки Республики Казахстан и Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 14–01–31182 и 15–01–09230).

Поступила 1 августа 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

химических элементов гарантируются этой теоремой. Это означает, что определение пространственного положения источников аномалий газов или химических элементов подчинено тем же законам, что и определение источников гравитационных, магнитных и электрических аномалий. При условии аналитичности коэффициентов, уравнения геофизических и геохимических полей имеют единственное аналитическое решение. Аналитичность коэффициентов уравнений означает гладкость изменения физических свойств изучаемых сред и источников соответствующего поля, что гарантируется природой. Из этого следует, что аналитическое продолжение наблюденного поля с поверхности в нижнее полупространство является истинным и единственным решением соответствующих уравнений, и, следовательно, в полной мере описывает изучаемое поле.

Методам аналитического продолжения геофизических полей с профилей измерений в нижнее полупространство посвящено много работ ведущих геофизиков. Однако, в процессе многочисленных исследований, было выявлено явление распадения поля в окрестности особых точек свидетельствующее о катастрофической неустойчивости применяемых подходов, явившееся препятствием для практического применения метода. Причина этого состоит в несоответствии описания изучаемых полей линейными математическими моделями: представление полей в виде рядов или интегралов типа Коши порождает существенную некорректность, которая объясняется тем, что поле, имеющее особенности в нижнем полупространстве, принципиально не может адекватно описываться линейной конструкцией

Так исследуя свойства корректности эволюционных задач, были обнаружены фрактальные свойства относительной погрешности различных конечно-разностных схем решения задачи Коши:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \lambda u, \quad \lambda = x + \mathrm{i}y, \qquad t \in (0, T), \tag{1}$$

$$u(0) = 1. \tag{2}$$

При рассмотрении связей фракталов с корректностью задач математической физики было выявлено, что при определенном цифровом кодировании картина распределения относительной погрешности удивительно точно совпадает с цветовой радугой, порождаемой поверхностью CD компакт-диска. В данной работе мы приводим результаты математического и компьютерного анализа указанных явлений.

Во многих случаях математические эксперименты, выполняемые на компьютере, могут подсказать новые идеи, которые затем доказываются традиционными математическими методами.

Так с помощью сравнительно несложной программы были получены цветные картинки области устойчивости разностной задачи Коши в терминах оператора перехода в комплексной плоскости [3, 4, 5].

Компьютер можно превратить в своеобразный микроскоп и наблюдать с его помощью за поведением границы областей. Теоретически можно “разглядывать” любую часть множества при любом увеличении. Изучение полученной конфигурации приводит к предположению, что она является фракталью.

2. Устойчивость в терминах оператора перехода

Произвольная двухслойная схема в терминах оператора перехода имеет вид

$$(Pu)_j = \frac{u_{j+1} - R_j u_j}{\tau} = f_j,. \tag{3}$$

или

$$u_{j+1} = R_j u_j + \tau f_j. \tag{4}$$

Здесь $R_j \in L(H)$ есть оператор перехода с j-го на $(j+1)$-й слой. Классическое условие устойчивости в терминах оператора перехода записывается следующим образом

$$||R_j|| \leq 1 + c_0\tau, \qquad j = 0, \ldots, N-1, \tag{5}$$

где число c_0 не зависит от τ. Известно, что из условия (5) вытекает оценка устойчивости по правой части и начальным данным [6]. В работе [6] в теореме 7.1 утверждается, что введенное определение финитной устойчивости является расширением классического определения устойчивости. И показано, насколько понятие финитной устойчивости шире классического определения устойчивости.

Пусть оператор R не зависит от j. Тогда условие финитной устойчивости в терминах оператора перехода записывается в виде неравенства

$$\tau^2 \mathrm{Re} R \geq \frac{(\mathrm{Im} R)^2}{s_0}, \tag{6}$$

где s_0 — произвольное сколь угодно большое число.

В частности, при $R = R^*$ условие (6) переходит в условие $R \geq 0$.

Если $[\mathrm{Re}R, \mathrm{Im}R] = 0$, т.е. оператор R — нормален, то условие (5) означает, что спектр оператора R лежит в круге $|\lambda| \leq 1 + c_0\tau$. А условие (6) добавляет к этому множеству хвост в виде внутренности параболы на комплексной плоскости (см. Рис. 1) [7, 8]:

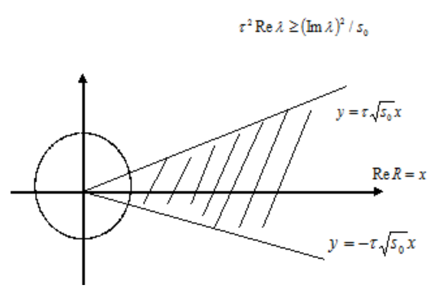


Рис. 1. Зона устойчивости

3. Построение фрактального изображения на основе дифференциальных уравнений

Для задачи Коши

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \lambda u, \quad \lambda = x + \mathrm{i}y, \qquad t \in (0, T), \tag{7}$$

$$u(0) = 1 \tag{8}$$

не представляет трудности найти точное решение:

$$u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{9}$$

Обозначим

$$u_j = u(t_j), \tag{10}$$

где $t_j = j\tau$, $j = 1, \ldots, N$, $T = \tau N$.

Тогда в терминах разностной функции рассмотрим явную разностную схему:

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\tau} = \lambda u_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{11}$$

$$u_0 = 1. \tag{12}$$

Разностное решение вычисляется итерационно

$$u_{j+1} = (1 + \lambda\tau)u_j = \ldots = (1 + \lambda\tau)^j. \tag{13}$$

Тогда для комплексного числа

$$z = (1 + \tau\lambda) + \mathrm{i}\tau b \equiv x + \mathrm{i}y,$$

относительная погрешность разностного и точного решения имеет вид

$$p = \frac{|z^N - \mathrm{e}^{(z-1)N}|}{|\mathrm{e}^{(z-1)N}|}.$$

Строится шкала разбиения погрешности, при этом, например, задавая $\varepsilon = 0.1$, каждому вычисленному p ставим в соответствие определенный цвет из спектра, состоящего из 16 цветов. Например, при $0 \le p < \varepsilon$ точке комплексной плоскости соответствует черный цвет, при $\varepsilon \le p < 0.2$ точке (x, y) соответствует красный цвет, затем — оранжевый и т.д. до белого цвета.

Таким образом, на плоскости вырисовывается определенное изображение, при котором можно изучить область устойчивости разностной задачи Коши в терминах оператора перехода, но по краям областей изображение причудливым образом повторяется. Если рассмотреть отдельный участок области при увеличении, он будет выглядеть сам как большая область, то есть будет самоподобен. Например, на рисунках 2 и 3 наблюдается довольно сложная динамика: на границе процесс хаотичен настолько, насколько это возможно. Это происходит за счет того, что в рассматриваемое множество точек комплексной плоскости входят хаотические и периодические точки, при этом хаотические притягиваются к периодическим.

Теперь рассмотрим задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{Z}, \qquad t \in (0, T), \tag{14}$$

$$u(0) = 0, \tag{15}$$

$$u(1) = 1. \tag{16}$$

Обозначим $u^i = u(t_i)$, $t_i = i\tau$, $i = 0, \ldots, N$.

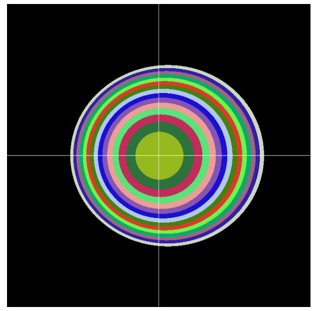


Рис. 2. Область устойчивости

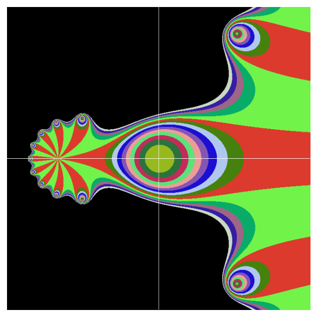


Рис. 3. Фрактал в виде хвоста параболы

Распишем разностный аналог (14)—(16):

$$\frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i+1}}{\tau^2} = \lambda u^i, \qquad u^0 = 0, \qquad u^N = 1. \tag{17}$$

Положив

$$u^{i+1} - Ru^i = \tau w^i, \quad u^0 = 0,$$
$$w^{i+1} - Sw^i = 0, \quad w^0 = 1.$$

Имеем итерационную формулу

$$w^{i+1} = S^{i+1} w^0,$$

$$u^{i+1} = R^{i+1} u^0 + \sum_{l=1}^{i+1} R^{l-1} S^{i+1-l} w^0.$$

Тогда решение на N слое будет

$$u^N = R^N u^0 + \sum_{l=1}^{N} R^{l-1} S^{N-l} u^1 = R^N u^0 + \sum_{l=1}^{N} S^{N-2l+1} u^1, \tag{18}$$

где операторы имеют вид:

$$R = 1 + \frac{\tau^2}{2}\lambda + \frac{\tau}{2}\sqrt{4\lambda + \tau^2\lambda^2},$$

$$S = 1 + \frac{\tau^2}{2}\lambda - \frac{\tau}{2}\sqrt{4\lambda + \tau^2\lambda^2}.$$

И, соответственно, точное решение задачи (14)—(16)

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \mathrm{sh}(\sqrt{\lambda} t). \tag{19}$$

Далее вычисляя относительную погрешность точного решения (19) и разностное решение (18), раскрасив плоскость $\lambda = x + iy$ соответствующими цветами, можно заметить, что при определенном цифровом кодировании картина распределения относительной погрешности удивительно точно совпадает с цветовой радугой, порожденной поверхностью компакт диска (см. Рис. 4 и 5).

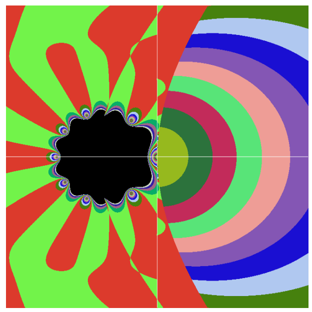


Рис. 4. Распределение погрешности

Рис. 5. Поверхность CD

References

[1] Б. Мандельброт, *Фрактальная геометрия природы*, Москва- Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

[2] Х-О. Пайтген, П.Х. Рихтер, *Красота фракталов. Образы комплексных систем*, М.: Мир, 1993.

[3] М.А. Бектемесов, *Получения наглядного изображения области устойчивости и сходимости решение практических задач с помощью компьютера*, Тезисы докладов: Республиканской межвузовской конференции. КазГПУ им.Абая, А-Ата, 1991.

[4] М.А. Бектемесов, *О фрактальном множестве и области устойчивости разностной задачи Коши в терминах оператора перехода в комплексной плоскости*, Материалы школы-семинара по математике и механике, посвященная 60–летию член-корр. НАН РК Касымова К.А., Алматы, 1995.

[5] М.А. Бектемесов, А.Р. Турганбаева, *О фрактальном множестве*, Тезисы докладов Междунар. Научно-методич. Конференция "ММ ИТОН", Алматы: АГУ им.Абая, 1998.
[6] А.А. Самарский, *Теория разностных схем*, М: Наука, 1977.
[7] А.Л. Бухгейм, *Введение в теорию обратных задач*, Новосибирск: Наука. Сиб. Отд-ние, 1988.
[8] М.А. Бектемесов, *Условия устойчивости в терминах оператора перехода*, Вестник КазГУ. Серия мат., мех., инф., **2** (1995).

Sergey Igorevich Kabanikhin
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

Maktagali Bektemesov
Al-Farabi Kazakh National University,
71 al-Farabi Ave.,
050040, Almaty, Kazakhstan
E-mail address: altynna@mail.ru

Maxim Alexandrovich Shishlenin
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug avenue,
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: mshishlenin@ngs.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.104–С.113 (2015) УДК 517.962.2
MSC 65M32

АНАЛИЗ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

А.Т. МАМАТКАСЫМОВА, А.Д. САТЫБАЕВ

Abstract. One-dimensional inverse problems arising in electromagnetic processes time data and similar surfaces are developed in this article. Developed finite-difference solution algorithm and numerical completion of given task and obtained solving graphics of direct and inverse problems, also they were analyzed.

Keywords: Electromagnetic processes, the system of Maxwell's equations, inverse problem, finite difference method, numerical algorithm, numerical completion, graphics solutions.

Постановка задачи. Многие электромагнитные процессы описываются системой уравнений Максвелла. Рассмотрим задачу для полной системы уравнений Максвелла в случае точечного источника, в простейшем виде анизотропии

$$\left.\begin{aligned} rotH = \varepsilon\frac{\partial E}{\partial t} + \sigma\cdot E + j, \\ rotE = -\mu\cdot\frac{\partial H}{\partial t},\, x\in R^3,\, x_3\neq 0,\, t\in R_+, \end{aligned}\right\}$$

$$(E,H)\,|_{t<0} \equiv 0,$$

$$[E_j]_{x_3} = 0,\ [H_j]_{x_3=0} = 0,\ j = 1,2.$$

Здесь $E = (E_1, E_2,\ E_3)^*$, $(H = H_1, H_2, H_3)^*$ - электрическая и магнитная напряженность, [] — означает скачок функции в точке $x = 0$, ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость, σ- электропроводимость, j - точечный источник, ε, μ, σ -диагональная матрица.

Mamatkasymova, A.T., Satybaev, A.D., Analysis of solution algorithm for the inverse problem for Maxwell's equations.

Поступила 1 сентября 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

Преобразуя вышеуказанную задачу по методике С.И.Кабанихина [1, стр.189] получим следующую задачу

$$(1)\qquad \Big(\frac{\partial}{\partial t}+K\cdot\frac{\partial}{\partial z}+M\Big)\cdot W+R\cdot\delta\big(z-z_0,t\big),z\neq 0$$

$$(2)\qquad W|_{t<0}\equiv 0$$

$$(3)\qquad \left[(ZW)_j\right]_{z=0}=0, j=1,2,4,5$$

Z,K,M - некоторые матрицы, R- вектор, если раскрыть, то формула (3) имеет вид

$$(4)\qquad \left[\frac{1}{\sqrt{\bar\varepsilon}}+\big(W_(1)+W_(2)\big)\right]|_{z=0}=0,\left[\frac{1}{\sqrt{\bar\mu}}\left(W_(1)-W_(2)\right)\right]|_{z=0}=0$$

В данной статье задача (1)-(4) приведена к задаче с данными на характеристиках с одной единственной области, и создан алгоритм решения обратной задачи, проведены численные расчеты, получены графики решения прямой и обратной задачи.

Рассмотрим тот случай электромагнитных процессах, когда источником является ток в достаточном длинном кабеле, направленный вниз по оси x_3 , Изменение тока проведено достаточно глубоко.

Тогда получим следующую задачу [1]

$$\varepsilon\frac{\partial E_3}{\partial t}-\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+\frac{\partial H_1}{\partial x_2}+\sigma*E_3+p(t)\theta(t)=0,$$
$$\mu\frac{\partial H_1}{\partial t}+\frac{\partial E_3}{\partial x_2}=0,$$
$$\mu\frac{\partial H_2}{\partial t}+\frac{\partial E_3}{\partial x_1}=0,$$

с начальными условиями

$$(E_3,H_1,H_2)|_{t<0}\equiv 0$$

Продифференцируя первое уравнение этой системы по t, продифференцируя второе уравнения по x_3, а третье уравнение системы продифференцируя по x_1 и поставляя друг к другу, а также выделяя особенности уравнения по методике В.Г.Романова [2] и выпрямляя характеристики уравнения решая задачу Эйконала получим задачу следующего вида [3]

$$(5)\qquad V''_{zz}(z,t)=V''_{tt}(z,t)-g(z)V'_z(z,t)+\frac{\bar\sigma(z)}{\bar\varepsilon(z)}V'_t(z,t)+\frac{p'_t(t)}{\bar\varepsilon(z)},\ (z,t)\in\Delta(T),$$

$$(6)\qquad V(z,t)|_{z=t}=S(z),\ z\in[0,T],$$
$$g(z)=\frac{\bar\sigma(z)}{\bar\varepsilon(z)}-\frac{1}{S(z)}\left(\frac{p(t)}{\bar\varepsilon(z)}-2S'_z(z)\right).$$

Здесь $p(t)$ - распределенный ток в кабеле, $\bar\varepsilon(z)$, $\bar\mu(z)$ диэлектрическая и магнитная проницаемость, $\bar\sigma(z)$- электропроводимость, область $\Delta(T)=\{(z,t):\ t\in(0,T),\ t<z<T-t\}$, функция $S(z)$ определена по формуле

$$(7)\qquad S(z)=\frac{p(0)}{\bar\varepsilon(0)}+\frac{1}{2}\int_0^z\frac{p(\xi)}{\bar\varepsilon(\xi)}d\xi+\frac{1}{2}\int_0^z r(\xi)S(\xi)d\xi,\ z\in(0,T).$$
$$r(\xi)=\frac{\bar\mu'(\xi)}{\bar\mu(\xi)}-\big(\varepsilon(\xi)\mu(\xi)\big)'_\xi-\frac{\bar\sigma(\xi)}{\bar\varepsilon(\xi)}.$$

Отсюда, имеем

(8) $$p(z) = \{2S'(z) + r(z)S(z)\}\,\varepsilon(z).$$

Задаем дополнительную информацию для обратной задачи уравнений Максвелла в виде времени подобной поверхности.

(9) $$V(z,t)|_{z=0} = f(t),\ t \in [0,T].$$

Обратная задача заключается в определении функции $p(t)$ - распределенный ток в кабеле, при известных функциях $\bar{\varepsilon}(z)$, $\bar{\mu}(z)$, $\sigma(z)$.

Численное решение. Введем сеточную область.

$$\Delta(T) = \left\{(z_i,t_k):\ h = \frac{T}{N},\ t_k = kh,\ k = \overline{0,N};\ z_i = ih,\ i = \overline{k,N-k}\right\}$$

Построим разностный аналог задачи (5)-(6), (7)-(8), (при этом отбрасываем малые члены) используя метод обращения разностных схем:

(10) $$V_{i+1}^k = V_i^{k+1} - V_i^{k-1} + V_{i-1}^k - g_i \cdot \frac{V_i^k - V_{i-1}^k}{h} + \\ +\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\cdot\frac{V_i^k - V_i^{k-1}}{h} + 2\frac{p^k - p^{k-1}}{h\varepsilon_i},\ (z_i,t_k \in \Delta_h(T).$$

(11) $$V_i^i = S_i;\ i = \overline{0,N/2}$$

$$g_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} - \frac{1}{S_i}\cdot\left(\frac{p^i}{\varepsilon_i} - 2\frac{S_i - S_{i-1}}{h}\right).$$

(12) $$S_i = \frac{p_0}{\varepsilon_0} + \sum_{l=0}^{i-1}\frac{p_l}{\varepsilon_l}\cdot h + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{i-1} r_l S_l \cdot h,\ i = \overline{1,N/2}.$$

(13) $$V_0^k = f^k;\ k = \overline{0,N}.$$

$$r_l = \frac{\mu_l - \mu_{l-1}}{\mu_l \cdot h} - \frac{\varepsilon_l\mu_l - \varepsilon_{l-1}\mu_{l-1}}{h} - \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l}.$$

(14) $$p_i = \frac{2(S_i - S_{i-1})}{h}\cdot\varepsilon_i + r_i S_i \varepsilon_i,\ \ i = \overline{1,N}.$$

Решение разностной задачи (9)-(14) сходится к точному решению дифференциальной задачи (5)-(9) при определенных условиях относительно шага сетки. Это показана в работе [5]

Алгоритм:

- по формуле (12) к V_0^k, $k = 0, N$ присваиваются значении f^k, вычисленная дополнительная информация при решении прямой задачи (9)-(14) (на рис.1 обозначена $\circ$);
- второму слою V_1^k, $k = \overline{1, N-1}$ присваиваются значения $\frac{(f^{k+1}+f^{k-1})}{2}$ (на рис.1 обозначена $\diamond$). Эта формула выведена из формулы Тейлора;
- вычисляется формула (12) и определяется значение S_0, $S = \frac{p_0}{\varepsilon_0}$, отсюда $p_0 = S_0 \cdot \varepsilon_0$;
- вычисляется по формуле (12)$S_1 = \frac{p_0}{\varepsilon_0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p_0}{\varepsilon_0}\cdot h$;

- вычисляется по формуле (14) $p_1 = \left(S - \frac{p_0}{\varepsilon_0}\right) \cdot 2 \cdot \frac{\varepsilon_1}{h}$;
- начиная с $i = 3$ слоя, в начале вычисляется V_{i+1}^k по формуле (10) (на рис.1. обозначена через *);
- по формуле (11) определяется значение $S_i = V_i^i$, $i = \overline{3, N}$ данные на характеристиках;
- вычисляется интегральное уравнение второго рода, т.е. определяется (14) S_i, $i = \overline{3, N}$; по формуле (12);
- и в каждом слое определяется неизвестная функция $p(z)$, т.е. вычисляется формула (14) и находятся значении p_i, $i = \overline{3, N}$.

В начале функции $\bar{\varepsilon}(z)$, $(\bar{\mu})z$, $\sigma(z)$ были равны к единице.Отметим, что эти функции можно взять как различные тестовые функции (рис.7).

По вышеуказанному алгоритму вычислена обратная задача и она реализована на компьютере с помощью языка Delphi.

Обратная одномерная задача для уравнения Максвелла (5)-(9) численно реализованы для функции $\bar{\varepsilon}(z)$, $\bar{\mu}(z)$, $\sigma(z)$- в следующего вида и определена функция $p(t)$, глубина вычисления $z = 4$.

Одномерная обратная задача (9)-(14) вычислена в области указанной рис.1. $T = 4$, $N = 200$, $h = T/N = 0,02$, h- шаг сетки.

В полученных рисунках 2-9 выведены графики функции $f(t) = V(0,t)$ - дополнительная информация для обратной задачи, $p(t)$ и $p\nu(t)$, при $t = z$- точная и приближенная вычисленная функция. Во всех рисунках шаг сетки $h = 0,02$

Относительная погрешность решения обратной задачи уравнения Максвелла составляет 1%:11%.

Таблица 1.

№	№	ФУНКЦИИ			
		$p(t)$	$\sigma(z)$	$\mu(z)$	$\varepsilon(t)$
1	рис.2	$2,1 - cos^2(12,56t)$	1	1	1
2	рис.3	3^x Ступенчатая функция	1	1	1
3	рис.4	$3 - 0,2 * cos^2(25,12t)$	1	1	1
4	рис.5	Импульсная функция	1	1	1
5	рис.6	$3 - 0,2 * cos^4(6,28t)$	1	1	1
6	рис.7	$2,1 - cos^2(3,14t)$	$1,6 - cos^2(12,56z)$	1	1
7	рис.8	$2,1 - cos^2(12,56t)$	$1,6 - cos^2(6,28z)$	1	1
8	рис.9	$2,1 - cos^2(3,14t)$	$1,6 - cos^2(12,56z)$	1	1

Устойчивость решения обратной задачи уравнения Максвелла проверялась следующим образом:

- Измельчали шаги сетки и проверялись значения в соответствующих точках сетки;
- К дополнительной информации обратной задачи задавались случайные числа и проверялись решения обратной задачи;
- Измельчая шаги сетки, увеличивали точность решения обратной задачи уравнения Максвелла.

При решении одномерной обратной задачи Максвелла исследованы и проанализированы следующие возможности разработанного алгоритма и программы:

А. Какие могут быть функции $p(t)$ - распределенный ток в кабеле, который определяется при решении обратной задачи. Относительно этой функции мы взяли в виде косинусобразной, ступенчатой и мгновенной функции. Относительные погрешности составляют от 1% до 11%.

Б. Допустимые ошибки в дополнительной информации для обратной задачи. При вычислении обратной задачи последовательно задавали ошибки в виде процентах: $1\%, 2\%, 3\%, 5\%, 7\%, 8\%, 10\%$. Анализ показал, что у дополнительной информации обратной задачи уравнения Максвелла ошибки должны составляться от 1% до 5%.

В. Глубина вычисления по z**.** Переменная $z \in [0, T]$, T - время, а шаг сетки по z равно $h_z = \frac{T}{N}$, N- фиксированное положительное число. В численных расчетах мы относительно T взяли 4 условных единиц (у.е.), т.е. $T = 4$ у.е. Значение T можно увеличивать, но при этом необходимо увеличивать значение N, что и дает увеличение машинной времени.

Г. Численная устойчивость алгоритма. Для проверки устойчивости алгоритма мы последовательно увеличивали шаг сетки $h_z = 0,1; 0,2; 0,3$ и.т.д., при этом относительная погрешность в одинаковых соответствующих точках не различна, мало отличается друг от друга, следовательно, созданный нами алгоритм устойчив.

Проверка устойчивости также проводилась следующим образом:

1) измельчали шаг сетки и сравнивались полученные результаты и погрешность в соответствующих точках;

2) дополнительным информациям обратной задачи задавались малые ошибки и проводились расчеты.

Д. Разрешающая способность алгоритма. Оценка между точным и приближенным решениями обратной задачи уравнения Максвелла имеет вид:

$$\max_{i=\overline{0,N}} |p_i - p\nu_i| \leq \frac{h_z}{2} ||V||_{C^4(\overline{\triangle(T)})} \tag{15}$$

Т.о. точность относительной погрешности $\frac{p_i - p\nu_i}{p_i} \cdot 100\%$ зависит от величины шага дискретизации и от нормы решения прямой задачи . Указанная зависимость изучена нами при различных расчетах составленной программы. Анализ показал, что уменьшение шага дискретизации h_z положительно влияет на точность решения обратной задачи $||V||_{C^4(\overline{\triangle(T)})}$.

Например, уменьшение шага в 10 раз, дает уменьшение относительной погрешности 8-10 раз. Увеличение значения решения прямой задачи отрицительно влияет на точность решения обратной задачи уравнения Максвелла, что и потверждает оценку (15).

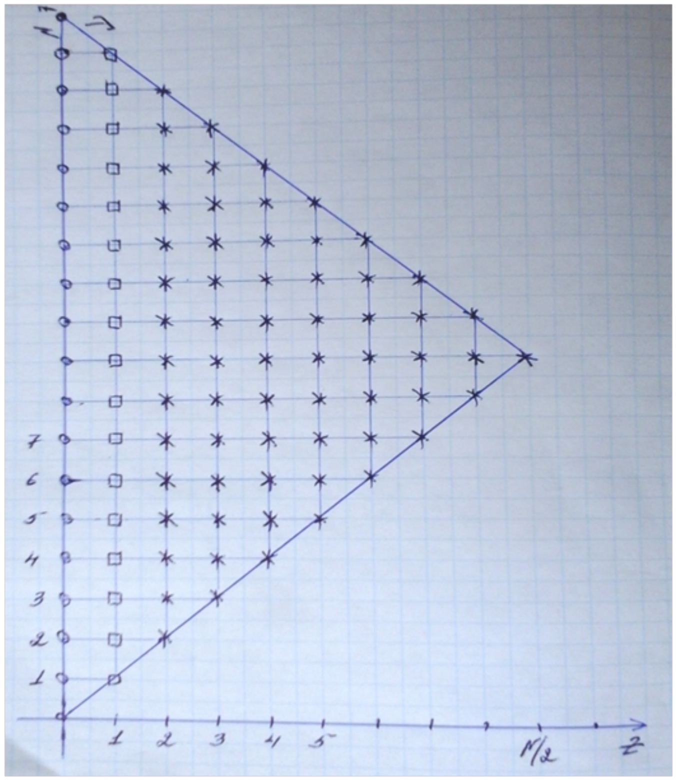


Рис. 1. Область вычисления обратной задачи. $T = 4$, $N = 200$, $h = 0,02$

References

[1] V.G. Romanov, S.I. Kabanikhin, *Inverse problems geoelectrics*, Moscow: Nauka, 1991.
[2] V.G.Romanov, *Stability in inverse problems*, Moscow, 2005.
[3] A.D. Satybaev, *Regularized finite difference solution of inverse problems of hyperbolic type*, Osh:Osh regional printing house, 2001.
[4] A.D. Satybaev, G.A. Kaldibaeva, T. Asilbekov, *Numerical realization of a one-dimensional linear and inverse thermoelasticity problem with instant source*, Vestnik Kaz. NPU, Almaty, **38(2)** (2012), 139–146.
[5] A.D. Satybaev, A.T. Mamatkasymova, *Inverse problem of Maxwell's equations with the current distribution in the cable*, Journal "Известия ВУЗов", **3** (2014), 7–19.

Mamatkasymova Aliima Torojanovna, Satybaev Abdugani Junusovich
Osh Technological University,
str.Isanova, 81,
714018, Osh, Kyrgyzstan
E-mail address: mamatkasymova1973@mail.ru, abdu-satybaev@mail.ru

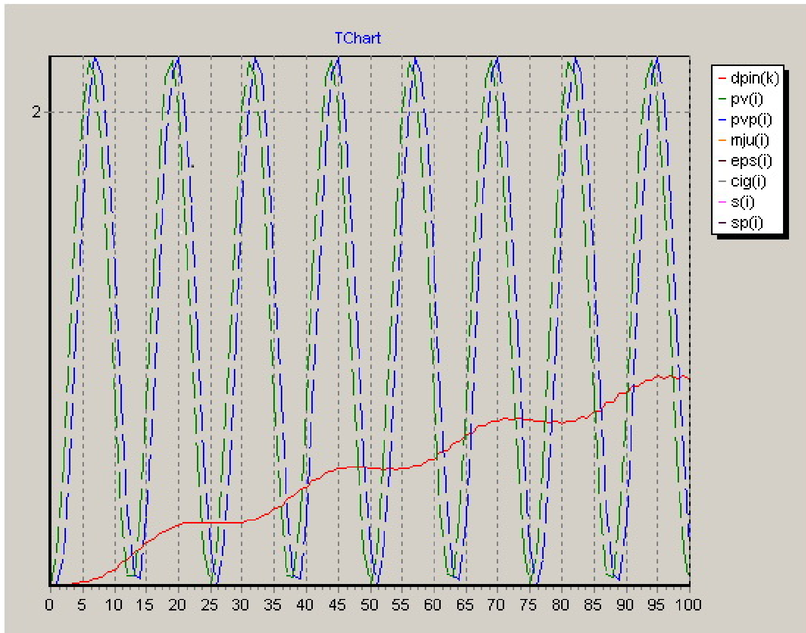


Рис. 2. Графики функции $dopin[\tau]$- дополнительная информация для обратной задачи; $p(t) = 2.1 - cos^2(12,56t)$; при $\sigma(z) = 1.0$; $\mu(z) = 1.0$; $\varepsilon(z) = 1.0$; $h = 0.02$.

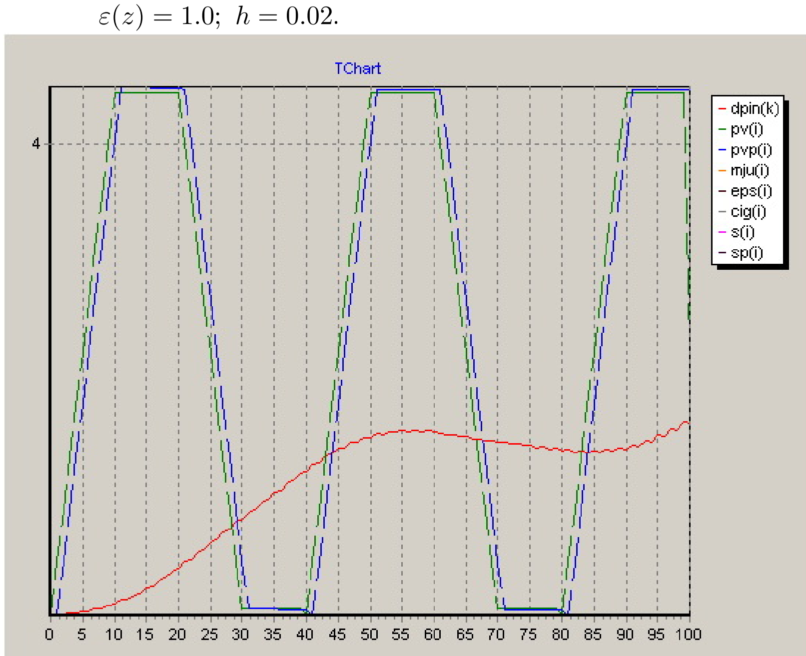


Рис. 3. Графики функции $dopin[\tau]$- дополнительная информация для обратной задачи; $p(t) = 3^x$ ступенчатая фунция; при $\sigma(z) = 1.0$; $\mu(z) = 1.0$; $\varepsilon(z) = 1.0$; $h = 0.02$.

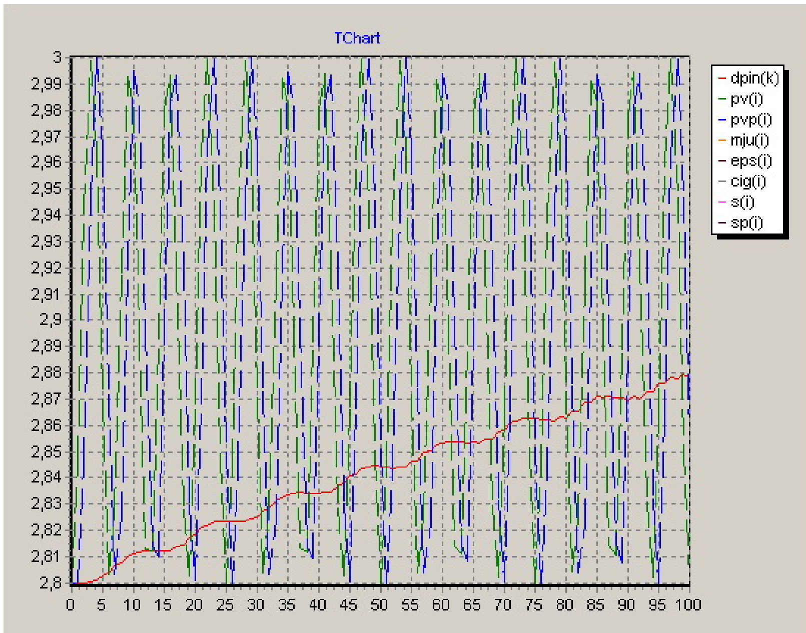


Рис. 4. Графики функции $dopin[\tau]$- дополнительная информация для обратной задачи; $p(t) = 3 - 0.2cos^2(25.12t)$; при $\sigma(z) = 1.0$; $\mu(z) = 1.0$; $\varepsilon(z) = 1.0$; $h = 0.02$.

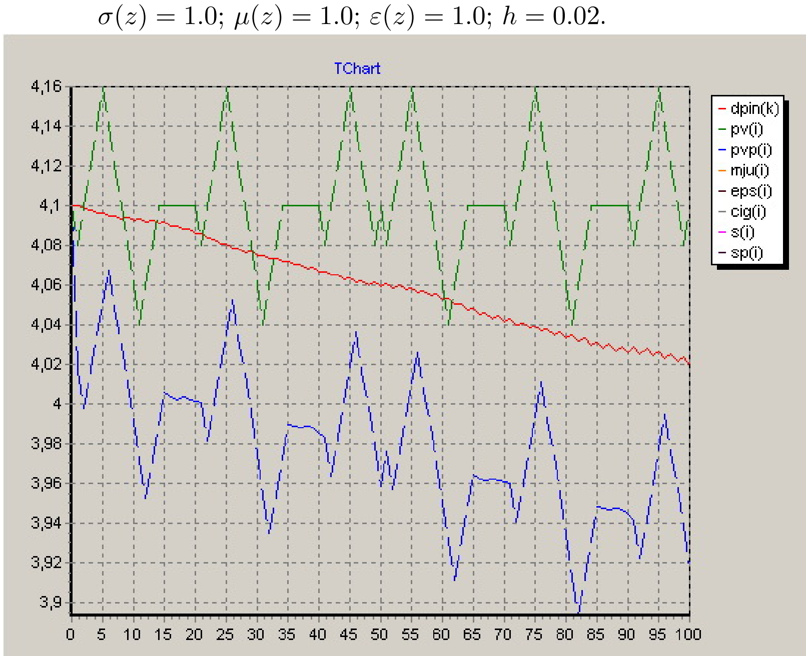


Рис. 5. Графики функции $dopin[\tau]$- дополнительная информация для обратной задачи; Импульсная функция; при $\sigma(z) = 1.0$; $\mu(z) = 1.0$; $\varepsilon(z) = 1.0$; $h = 0.02$.

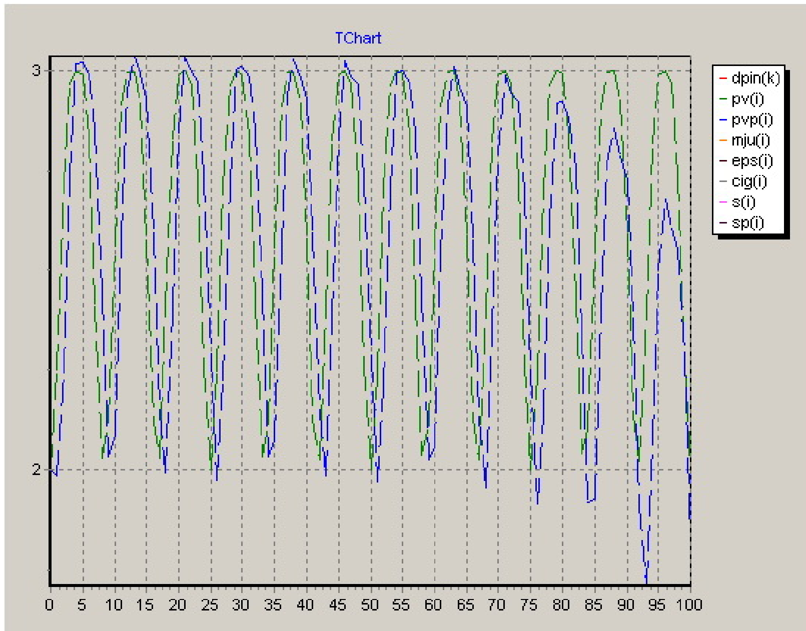


Рис. 6. Графики функции $dopin[\tau]$- дополнительная информация для обратной задачи; $p(t) = 3 - 0,2cos^4(6,28t)$; при $\sigma(z) := 1.0; \mu(z) := 1.0; \varepsilon(z) := 1.0$; $h = 0.02$.

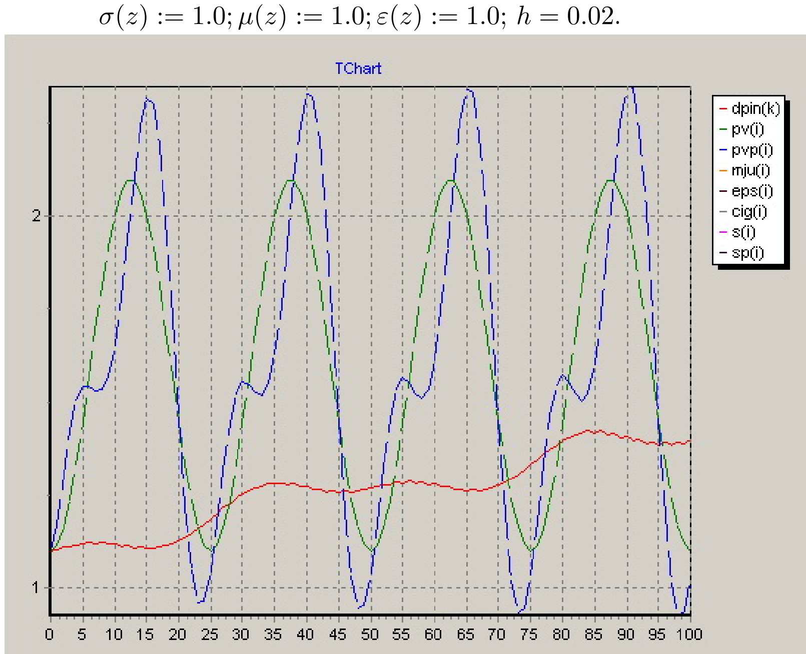


Рис. 7. Графики функции $dopin[\tau]$- дополнительная информация для обратной задачи; $p(t) = 2,1 - cos^2(3.14t)$; при $\sigma(t) = 1,6 - cos^2(z)$; $\mu(z) = 1.0$; $\varepsilon(z) = 1.0$; $h = 0.02$.

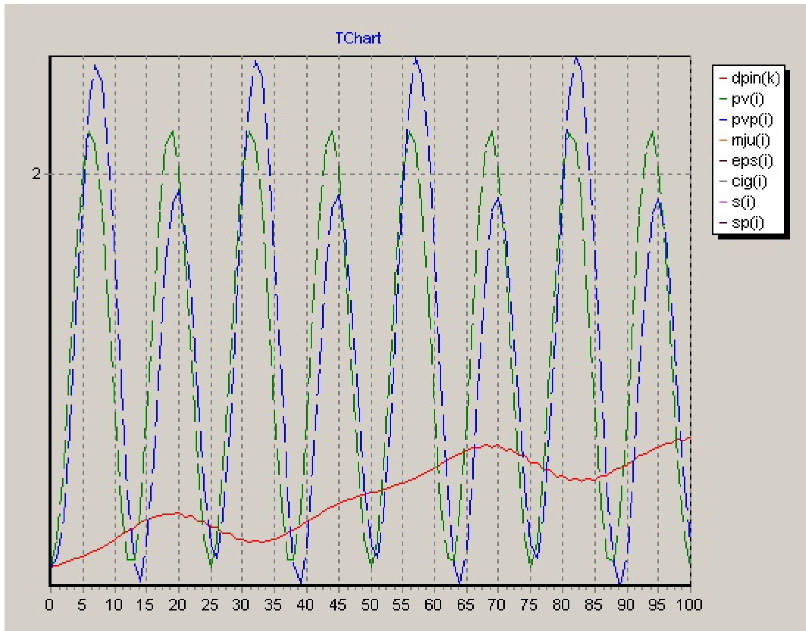


Рис. 8. Графики функции $dopin[\tau]$- дополнительная информация для обратной задачи; $p(t) = 2,1 - cos^2(12,56z)$; при $\sigma(t) = 1,6 - cos^2(6,28z)$; $\mu(z) = 1.0$; $\varepsilon(z) = 1.0$; $h = 0.02$.

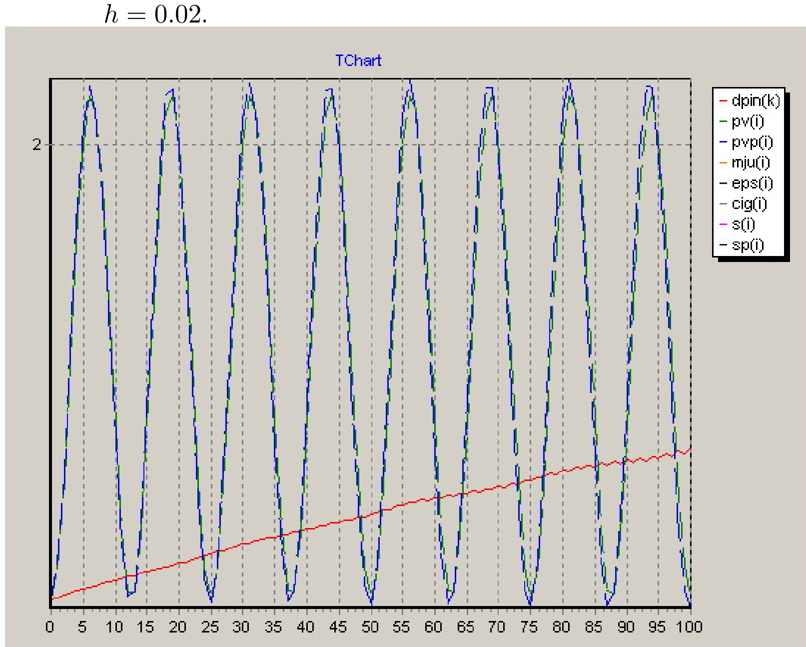


Рис. 9. Графики функции $dopin[\tau]$- дополнительная информация для обратной задачи; $p(t) = 2,1 - cos^2(3,14t)$; при $\sigma(z) = 1,6 - cos^2(12,56z)$; $\mu(z) = 1.0$; $\varepsilon(z) = 1.0$; $h = 0.02$.

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.114–С.122 (2015) УДК 519.62
MSC 65Q10

ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРОСТЕЙШЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНФЕКЦИОННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.И. КАБАНИХИН, О.И. КРИВОРОТЬКО, Д.А. ВОРОНОВ, В.А. ЛАТЫШЕНКО

Abstract. The simplest mathematical model of infectious disease of G.I. Marchuk is numerically investigated. This model consists in four ordinary differential equations with delays. The results of numerical calculations of this problem using Runge-Kutta-Felberg algorithm is demonstrated and discussed. The genetic algorithm for numerical solving of the inverse problem is proposed and demonstrated.

Keywords: ODE system with delay, mathematical model of G.I. Marchuk, Runge-Kutta method, inverse problem, genetic algorithm, determination of the immune response parameters.

1. Введение

В настоящее время бурно развивается математическое моделирование в иммунологии, формируются новые взгляды на процессы, происходящие в организме человека, рассматриваются его защитные функции против чужеродных клеток, бактерий и вирусов, способных поразить те или иные органы человека. Важным открытием явилось установление того факта, что иммунный ответ связан с универсальным характером защиты организма против бактериальных и вирусных атак. Поэтому познание механизма иммунного ответа дает ключ к пониманию процесса заболевания и к методам его эффективного лечения.

Kabanikhin, S.I., Krivorotko, O.I., Voronov, D.A., Latyshenko, V.A., Numerical approach for solving of inverse problem for the simplest mathematical model of infectious disease with delay.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации.

Поступила 22 декабря 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

Модели, описывающие иммунный ответ, состоят из одного или нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с запаздывающими аргументами. Например, математическая модель простейшего инфекционного заболевания организма, которая состоит из 4 уравнений с запаздывающим аргументом, описывающих изменение числа антигенов, рост плазматических клеток, баланс числа антител, реагирующих с антигенами, и характеристику пораженного органа, а запаздывание характеризует задержку формирования антител. Впервые эту модель исследовала группа Г.И. Марчука [1]. Другие интересные примеры использования ОДУ с запаздывающими аргументами можно найти в книге [2].

Существует множество численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, такие как: метод шагов, который сводит обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием к уравнениям без запаздывания, явный и неявный метод Эйлера, метод наименьших квадратов, непрерывные методы [4], которые обладают большой степенью общности и др [5]. В работе используется численный метод Рунге-Кутты-Фельберга, порядок точности аппроксимации которого равен 4 [6].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 сформулирована задача Коши для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и приведен алгоритм ее численного решения на основе метода Рунге-Кутты-Фельберга. В разделе 3 приведены результаты численных расчетов решения простейшей математической модели инфекционного заболевания Г.И. Марчука при тяжелой форме заболевания пневмонией (раздел 3.1) и при лёгкой (раздел 3.2). В разделе 4 данная математическая модель сведена к модели без запаздывания 4.1, для нее поставлена обратная задача 4.2 и приведен генетический алгоритм ее численного решения 4.3.

2. Постановка задачи и численный алгоритм ее решения.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида (ограничимся случаем одного запаздывания)

$$\begin{aligned} &\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t_0 \le t \le t_0 + T, \\ &y(s) = \varphi(s), \quad s \in [t_0 - \tau, t_0]. \end{aligned} \tag{1}$$

Отметим, что задача Коши (1) имеет решение, если f и φ непрерывны, и это решение единственно, если функция $f(t, y(t), y(t-\tau))$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу при t, близких к s.

Для численного решения задачи Коши (1) используем метод Рунге-Кутты-Фельберга четвертого порядка аппроксимации.

Пусть задан отрезок $[t_0, t_0{+}T]$, $N_t{+}1$ - количество точек на заданном отрезке, $h_t = \frac{t_0-(t_0+T)}{N_t}$ - шаг сетки, τ - величина запаздывания.

Чтобы найти решение $y(t)$ задачи (1), перепишем её в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = f(t, y(t), z(t)), \quad y \in \mathbb{R}^N, z \in \mathbb{R}^N, t_0 \le t \le t_0 + T, \\ &z(t) = y(t-\tau), \\ &y(s) = \varphi(s), \quad s \in [t_0 - \tau, t_0]. \end{aligned} \tag{2}$$

Если $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, то $z(t)$ в системе (2) известна, т.е. $z(t) = \varphi$, где φ-вектор начальных данных. Тогда $y(t)$ находится известным методом Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации [7]

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n^{(i)} + \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \quad i = 1, \dots, M;$$

$$k_1^{(i)} = h_t \cdot f_i(t_n, y_n), \quad k_2^{(i)} = h_t \cdot f_i(t_n + \frac{h_t}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1),$$

$$k_3^{(i)} = h_t \cdot f_i(t_n + \frac{h_t}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2), \quad k_4^{(i)} = h_t \cdot f_i(t_n + h_t, y_n + k_3).$$

Теперь, когда известны, значения в узлах сетки при $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, нужно посчитать $y(t)$ на оставшемся отрезке, то есть при $t \in [t_0 + \tau, T]$.

Функция $z(t)$ на отрезке $t \in [t_0 + \tau, T]$ известна из предыдущих вычислений. Действительно, $z(t) = y(t-\tau)$, где все $y(t-\tau)$ посчитаны на предыдущем шаге. Поэтому используем метод Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации.

3. Пример реализации алгоритма Рунге-Кутты-Фельберга

Рассмотрим реализацию метода на конкретной математической модели простейшего инфекционного заболевания Г.И. Марчука [1]:

$$\begin{aligned} &\frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma F(t))V(t); \quad t \in (0, T) \\ &\frac{dF}{dt} = \rho C(t) - (\mu_f + \eta\gamma V(t))F(t); \\ &\frac{dC}{dt} = \xi(m)\alpha F(t-\tau)V(t-\tau) - \mu_c(C(t) - C^*); \\ &\frac{dm}{dt} = \sigma V(t) - \mu_m m(t) \end{aligned} \tag{3}$$

с начальными данными

$$V(0) = V^0, C(0) = C^*, F(0) = \frac{\rho C^*}{\mu_f}, m(0) = 0. \tag{4}$$

Здесь $V(t)$ - концентрация патогенных размножающихся антигенов, $F(t)$ - концентрация антител, $C(t)$ - концентрация плазматических клеток, $m(t)$ - характеристика пораженного органа, $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \mu_f, \eta, \xi(m), \mu_c, \sigma, \mu_m, C^*$ - постоянные величины (характеристики конкретного организма), значения которых приведены в таблице 2 [8].

В численных расчетах используется функция, которая отвечает за производительность выработки антител $\xi(m) = \begin{cases} 1, \ m \in (0, m^*], \\ 1 + \frac{m - m^*}{m^* - 1}, \ m \in (m^*, 1) \end{cases}$ при $m^* = 0.3$.

3.1. Моделирование в тяжелой форме заболевания. Подставим в систему (3) начальные данные и оценки параметров для моделирования острой пневмонии из таблицы 2.

На рисунке 1 представлены распределения функций $V(t), F(t), C(t)$ и $m(t)$ для запаздывания $\tau = 3$ дня (для среднестатистического 18-летнего инфецируемого). Отметим, что на 25-й день начинает увеличиваться концентрация

Таблица 1. Значения параметров в системе (3) в случае острой пневмонии.

Параметр	Физический смысл	Размерность	Оценка
α	коэффициент, учитывающий вероятность встречи антиген — антитело, возбуждение каскадной реакции и число образующихся новых клеток	мл/(моль·сут)	$5 \cdot 10^{-11}$
β	коэффициент размножения антигенов	1/сут	0.35
γ	коэффициент, связанный с вероятностью нейтрализации антигена антителами при встрече с ним	мл/(моль·сут)	$8.5 \cdot 10^{-14}$
μ_c	коэффициент, равный обратной величине времени жизни плазматических клеток	1/сут	0.5
ρ	скорость производства антител одной плазматической клеткой	1/сут	$7 \cdot 10^3$
η	количество антител, необходимых для нейтрализации одного антигена	шт.	20
μ_f	коэффициент, обратно пропорциональный времени распада антител	1/сут	0.05
σ	скорость поражения органов-мишеней антигеном	мл/(моль·сут)	$9 \cdot 10^{-9}$
V^0	Начальная доза поражения	моль/мл	10^3
C^*	постоянный уровень плазмоклеток в здоровом организме	клеток/мл	$2.85 \cdot 10^3$
μ_m	скорость регенерации органа-мишени	1/сут	0.4

плазматических клеток $C(t)$, поэтому возрастает количество антител $F(t)$, которые реагируют с антигенами, что приводит к убыванию функции $V(t)$. В связи с этим на 25-й день масса пораженного органа $m(t)$ уменьшается.

При увеличении параметра запаздывания τ, организм может не справится с болезнью, что повлечет летальный исход. В силу этого ослабим характеристики заболевания.

3.2. **Моделирование в легкой форме заболевания.** Изменим параметры из таблицы 2 острой пневмонии, а именно уменьшим коэффициент размножения антигенов $\beta = 0,2$ и увеличим число образующихся новых клеток $\alpha = 5 \cdot 10^{-10}$. Таким образом, на рисунке 2 представлены графики для запаздывания $\tau = 3$ дня.

Отметим, что организм идет на поправку быстрее, чем при тяжелой форме заболевания (на 22-й день, а не на 25-й).

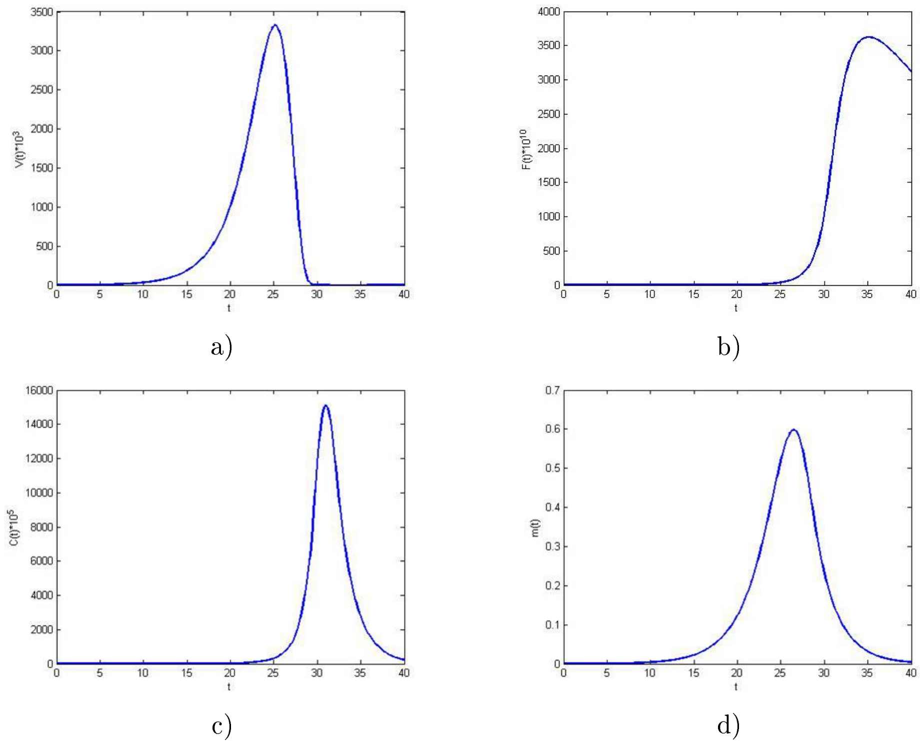


Рис. 1. Графики: a) распределения антигена, b) концентрации антител, реагирующих с антигеном, c) концентрации плазматических клеток, d) характеристики пораженного органа - при $\tau = 3$ день в случае острой пневмонии.

Следовательно, важно уметь определять параметр запаздывания и характеристики заболевания по известным функциям $V(t), F(t), C(t)$ и $m(t)$ для составления индивидуального плана лечения пациента [9].

4. Определение параметров иммунного ответа и инфекционного заболевания

Для начала сведем исходную математическую модель (3) к системе без запаздывания.

4.1. Сведение к математической модели без запаздывания. Для приведения математической модели (3) к системе без запаздывания разложим функции $F(t-\tau)$ и $V(t-\tau)$ в ряд Тейлора до первого порядка $F(t-\tau) \backsimeq F(t) + \tau F^{'}(t), V(t-\tau) \backsimeq V(t) + \tau V^{'}(t)$ и заменим производные в разложении разностной схемой $F_n^{'} = \frac{V_{n-1} - V_n}{\tau}, V^{'}(t) = \frac{F_{n-1} - F_n}{\tau}$. Тогда задача коши (3)-(4)

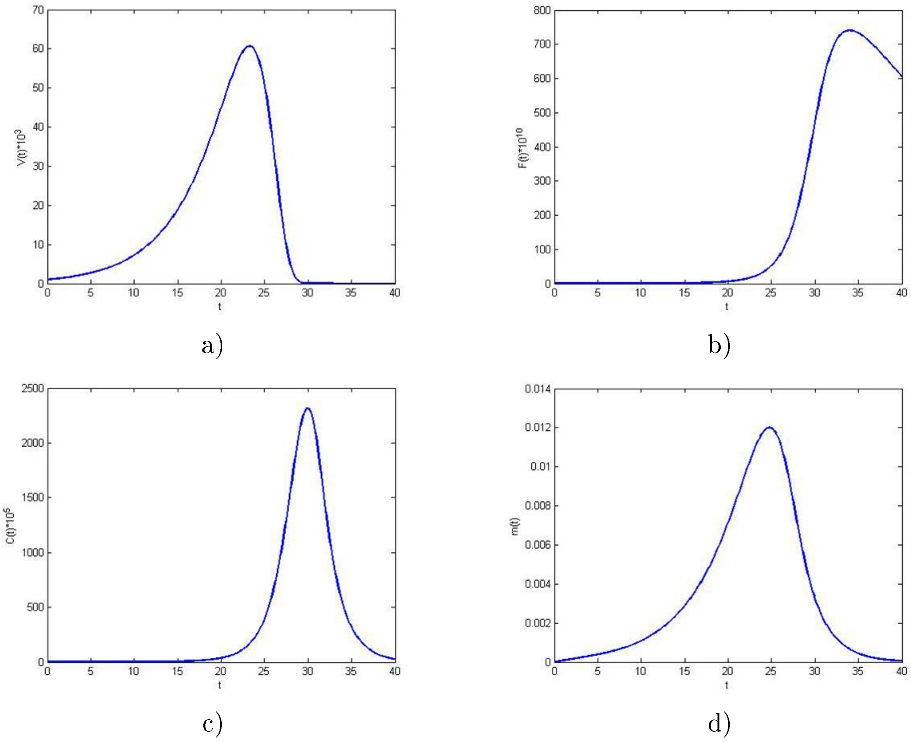


Рис. 2. Графики: a) распределения антигена, b) концентрации антител, реагирующих с антигеном, c) концентрации плазматических клеток, d) характеристики пораженного органа - при $\tau = 3$ день в случае легкой формы пневмонии.

принимает вид

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{V}}{dt} &= (\beta - \gamma \tilde{F}(t))\tilde{V}(t), \quad t \in (0, T);\\
\frac{d\tilde{F}}{dt} &= \rho \tilde{C}(t) - (\mu_f + \eta\gamma \tilde{V}(t))\tilde{F}(t);\\
\frac{d\tilde{C}}{dt} &= \xi\alpha(\tilde{F}(t)\tilde{V}(t) - \tau \tilde{F}(t)\tilde{V}'(t) - \tau \tilde{V}(t)\tilde{F}'(t)) - \mu_c(\tilde{C}(t) - C^*);\\
\frac{d\tilde{m}}{dt} &= \sigma \tilde{V}(t) - \mu_m \tilde{m}(t)
\end{aligned}
$$

с начальными данными

$$
(6)\qquad \tilde{V}(0) = V^0, \tilde{C}(0) = C^*, \tilde{F}(0) = \frac{\rho C^*}{\mu_f}, \tilde{m}(0) = 0.
$$

Здесь $V_n = V(t_n), F_n = F(t_n)$. Проверим, разумно ли использовать преобразованную систему (5) для последующих исследований. Для этого проверим, сходится ли решение системы (5) $\tilde{u} = (\tilde{V}, \tilde{C}, \tilde{F}, \tilde{m})^T$ к решению системы (3)

Таблица 2. Проверка сходимости

Последовательность сеток	Функция	Значение l
400, 800, 1600	$V(t)$	1.8473
	$F(t)$	1.6639
	$C(t)$	0.7843
	$m(t)$	2.1055
1600, 3200, 6400	$V(t)$	1.0943
	$F(t)$	1.5149
	$C(t)$	0.8734
	$m(t)$	1.1727

$u = (V, C, F, m)^T$ по формуле:

$$l = log_2 \left| \frac{\varepsilon_{h-2} - \varepsilon_{h-1}}{\varepsilon_{h-1} - \varepsilon_h} \right|,$$

где $\varepsilon_h = \max_{0 \le i \le N} |\tilde{u}_i(t) - u_i(t)|$.

Полученные расчеты приведены в таблице 2.

Видно, что при увеличении узлов сетки, значение l стремится к единице. Следовательно, решение системы (5) стремится к так называемому точному решению с первым порядком. Тогда в дальнейшем можно исследовать простейшую математическую модель инфекционного заболевания в виде (5).

4.2. **Постановка обратной задачи.** Под обратной задачей мы понимаем задачу определения коэффициентов прямой задачи по некоторой дополнительной информации.

Обозначим через Φ^k решение прямой задачи (3)-(4) при заданных параметрах в k точках, равномерно распределенных на отрезке $[0, T]$, т.е.

$$\tilde{u}(t_k; q) = \Phi^k, \quad k = 1, ...K \tag{7}$$

Обратная задача (5)-(7) состоит в определении вектора параметров $q = (\tau, \alpha, \beta, \gamma, \sigma, \rho, \eta, \mu_c, \mu_f, \mu_m, C^*) \in R^{11}$ по дополнительным измерениям (7). Отметим, что функция $m(t)$ может быть определена на прямую (например, по томографическим снимкам), а определение концентраций $V(t), C(t), F(t)$ является, в свою очередь, непростой задачей.

Определим оператор обратной задачи следующим образом [10]:

$$\begin{aligned} &A : \mathcal{P} \to R^k \\ &q \to u(t_k; q) \end{aligned} \tag{8}$$

Т.о. задача может быть записана в операторном виде $A(q) = \Phi$, где $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, ..., \Phi^k)^T$. Решение обратной задачи (5)-(7) будем искать, минимизируя целевой функционал:

$$J(q) = \|A(q) - \Phi\|^2 = \sum_{k=0}^{K} |u(t_k; q) - \Phi^{(k)}|^2 \tag{9}$$

Рис. 3. Блок-схема генетического алгоритма.

4.3. **Генетический алгоритм численного решения обратной задачи.** Для нахождения минимума целевого функционала (9) используем генетический алгоритм (ГА). ГА-это эвристический алгоритм поиска, используемый для решения задач оптимизации и моделирования путём случайного подбора, комбинирования и вариации искомых параметров с использованием механизмов, аналогичных естественному отбору в природе. Отличительной особенностью генетического алгоритма является акцент на использование оператора «скрещивания», который производит операцию рекомбинации решений, роль которой аналогична роли скрещивания в живой природе [11]. Общая схема работы генетического алгоритма показан на рисунке 3.

Пусть q_t - точное решение задачи. ГА численного решения задачи минимизации (9) состоит в следующем:

(1) Положим $\varepsilon = 10^{-4}$ и $\min J(q) = 100$.
(2) Пусть k пробегает отрезок от 1 до N, т.е. $k = 1...N$
  (a) Строим генотип q_k.
  Вектор q состоит из 11-ти параметров $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \rho_k, \mu_{f_k}, \eta_k, \mu_{c_k}, \sigma_k$, μ_{m_k}, C_k^*, τ_k. Каждое значение выбирается случайно на отрезке $[q_t - 0,5 \cdot q_t; q_t + 0,5 \cdot q_t]$.
(3) Пусть k пробегает отрезок от 1 до $N/2$, т.е. $k = 1...N/2$.
  (a) Селекция.
  Для родителя $k(q_k)$ выбираем родителя под номером $r(q_r)$, где r выбирается случайно на отрезке $[0, N]$.
  (b) Если $k = r$ выполнять шаг (a).
  (c) Скрещивание.
  Двух потомков получаем по формулам:
$$q_{k1} = (\alpha_k + m_1(\alpha_r - \alpha_k); ...; \tau_k + m_1(tau_r - \tau_k)),$$
$$q_{k2} = (\alpha_k + m_2(\alpha_r - \alpha_k); ...; \tau_k + m_2(tau_r - \tau_k)),$$
  где m_1, m_2 выбраны случайно на отрезке $[-0.25; 1.25]$, а остальные параметры определяются аналогично.
  (d) Подставляем найденные векторы в систему (5), находим значения $\tilde{u}(t; q)$.
  (e) Считаем $J(q_{k1}), J(q_{k2})$ по формуле (9).
  (f) Находим среди них минимальный и присваиваем ему значение $\min J(q)$ и запоминаем соответствующий q.

(g) Переобозначаем $q_{k1} = q_k, q_{k2} = q_{N/2+k}$.

(4) Если $\min J(q) > \varepsilon$, то выполняем 3, иначе переходим на шаг 5.

(5) Вывести q_k.

В дальнейшем планируется провести численные эксперименты поставленной обратной задачи согласно разработанному алгоритму.

References

[1] G.I. Marchuk, *Mathematical modeling in immunology. Computational methods and experiments*, Moscow: Nauka, 1991.

[2] Y. Kuang, *Delay differential equations with applications in population dynamics*, Academic Press, 1993.

[3] L. Elsgolts, S.B. Norkin, *Introduction to the theory of differential equations with deviating argument,* M.: Nauka, 1971.

[4] L. Tavemini *One-step methods for the numerical solution of Volterra functional differential equations,* SIAM J. Numer. Anal, **8** (1971), 786–795.

[5] G.V. Demidenko, V.A. Lichoshvai, *About differential equations with retarded argument*, SIb. math. journal, **46(3)** (2005), 538—552.

[6] J. Forsythe, M. Malkolm, K. Mouler, *Machine methods of mathematical calculations.* Moscow: Mir, 1980.

[7] B.P. Demidovich, I.A. Maron, E.Z. Shuvalova, *Numerical methods of analysis*, M.: Nauka, 1967.

[8] T. Sannikova, *Analysis of infectious mortality by means of the individualized risk model*, Mathematical Modeling of Biological Systems, **2** (2008), 169–181.

[9] A.I. Ilyin, S.I. Kabanikhin, O.I. Krivirotko *Determination of the parameters of the models described by systems of nonlinear differential equations,* Siberian Electronic Mathematical Reports. **11** (2014), 62–76.

[10] S.I. Kabanikhin, *Inverse and ill-posed problems,* Novosibirsk: Siberian scientific publishing, 2008.

[11] T.V. Panchenko *Genetic algorithms.* Astrachan: The publishing house "Astrakhan University", 2007.

Sergey Igorevich Kabanikhin, Olga Igorevna Krivorotko
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
pr. Lavrenteva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru, krivorotko.olya@mail.ru

Dmitriy Andreevich Voronov, Varvara Aleksandrovna Latyshenko
Novosibirsk State University,
st. Pirogova, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: dmitriy.voronov.89@gmail.com, latushenko_varia@mail.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. C.123–C.128 (2015) УДК 519.6

MSC 45Q05, 65C05

STOCHASTIC PROJECTION METHODS FOR SOLVING INVERSE PROBLEMS OF PHASE RETRIEVING AND X-RAY DIFFRACTION ANALYSIS

K.K. SABELFELD

Abstract. We suggest a stochastic simulation techniques for solving the inverse problem of recovering the phase of a complex-valued function provided its absolute value is known, under some additional information, and apply this method for retrieving the step structure of the epitaxial films from the x-ray diffraction analysis. To solve these problems we develop a new stochastic version of the Kaczmarz method with a new strategy of row sampling, and present some comparative simulations with a stochastic genetic algorithm and a simple version of a randomized projections method.

Keywords: stochastic projections, Kaczmarz row projections, random row sampling, phase retrieving, x-ray diffraction, epitaxy layers

1. Introduction

It is well known that the phase retrieval arises in many practical problems, for instance, in X-ray crystallography, diffraction imaging and microscopy (e.g., see [1], [13], [12], [3], [5]) where the phase of the optical wave cannot be measured directly, instead, the detector measures only its magnitudes. We deal in this paper with this kind of problems, specifically, with recovering the height profile of the epitaxial layers from x-ray diffraction measurements.

There are many different stochastic methods for solving large systems of linear and quadratic equations (e.g., see a overviews given in [6], [11]; see also [7], [10],

---

Sabelfeld, K.K., Stochastic projection methods for solving inverse problems of phase retrieving and x-ray diffraction analysis.

Работа поддержана РНФ (грант 14-11-00083).
Поступила 22 октября 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

[9]). In this paper we present a stochastic method which can be considered as a generalization of the approach first suggested in [4].

2. Setting of the phase retrieving problem

Generally, the x-ray diffraction equation in its simplest one-dimensional form reads

$$\left|\int_a^b \exp^{iqz} p(z)dz\right|^2 = f(q) \tag{1}$$

where the magnitudes f are measured for a set of angles q, and the problem is to recover the function $p(z)$ which in our case is interpreted as the height profile of epitaxial film layers. For simplicity, we consider here the case when the function is piecewise constant. The problem (1) can be approximated by a set of quadratic phaseless equations:

$$f_k = |(a_k, x)|^2, \quad k = 1, \dots, m \tag{2}$$

where $x \in \mathbb{C}^n$, and the vector-columns a_k belong to $\mathbb{C}^n$. This can be conveniently rewritten in a matrix form. Let A be a $m \times n$-matrix whose rows are A_k^*, $k = 1, \dots, m$, and a vector f is defined as $f = (f_1, \dots, f_m)^T$. Then, the system of quadratic equations (2) reads

$$\sqrt{f} = |Ax|$$

where $\sqrt{f} = (\sqrt{f_1}, \dots, \sqrt{f_m})^T$, and $|Ax| = (|(a_1, x)|, \dots, |(a_m, x)|)^T$.

We turn to a discrete approximation of the integral equation (1) , by choosing a subdivision, $\{z_j, j = 1, \dots, n\}, z_1 = a, z_n = b$. Let $x_i = p(z_i)\delta z_i$, then the approximation reads

$$\sum_{j=1}^n x_j^2 + 2\sum_{j=1}^n \sum_{k=j+1}^n \cos(q(z_j - z_k))x_j x_k \simeq f(q). \tag{3}$$

For a set of values of q, say, for $\{q_i, i = 1, \dots, m\}$, a subdivision of an interval (c, d) where the function $\{f(q)\}$ is defined, we have the following system of equations:

$$\sum_{j=1}^n x_j^2 + 2\sum_{j=1}^n \sum_{k=j+1}^n \cos(q_i(z_j - z_k))x_j x_k = f(q_i),\ i = 1, \dots, m. \tag{4}$$

These equations are solved under the following additional conditions

- the solution $\{z_j, j = 1, \dots, n\}$ is a step function,
- the number of steps on (a, b) is approximately known, and known are the points where the jumps are most probable.

A projection method based on a linearization and relevant iterations can be applied (e.g., see [2]). The system written in the form

$$F_i(x) = y^{\delta,i},\ i = 0, \dots, N-1,$$

where $y^{\delta,i}$ are the measured data, is solved by Newton type iterations

$$x_{n+1} = x_n - F'_{[n]}(x_n) * \left(F_{[n]}(x_n) - y^{\delta,[n]}\right) \ . \tag{5}$$

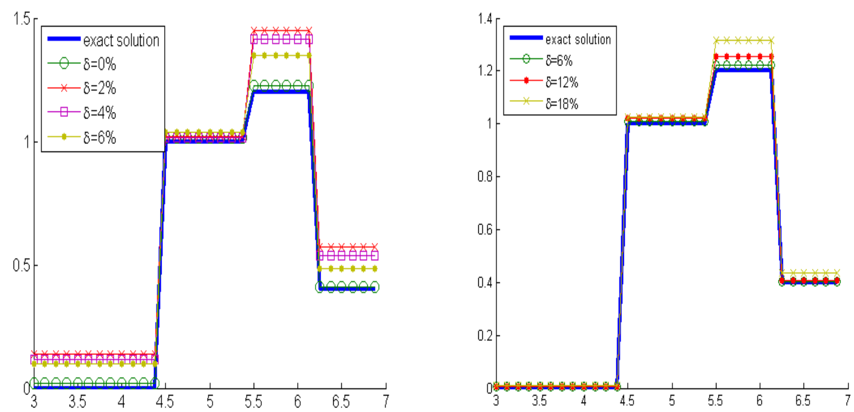


Рис. 1. Approximations obtained with $m = 128, n = 32$. Left panel: the genetic algorithm, right panel: the projection method; δ is the level of a Gaussian noise in the right-hand side.

where the matrix F' is defined by the relevant derivatives (e.g., see [14]). We have tried this method, and for comparisons, applied also a stochastic genetic algorithm ([16], [11]), see Figure 1. The results are calculated with good accuracy if only all additional conditions mentioned were used, otherwise, no convergence observed.

As the number of layers (steps) increases, the accuracy both of the genetic and the projection iterative methods (5) is rapidly decreasing. Therefore, let us consider a different stochastic projection approach.

3. A phase retrieval by randomization

Another type of stochastic projection technique first suggested in [4] by integrating a phase selection heuristic into the classical Kaczmarz methods for linear equations. The equation

$$\left| \int_a^b \exp^{iqz} p(z) dz \right|^2 = f(q)$$

is again, as above, written a an approximated discrete form. Introducing the grid $\{z_j, j = 1, \dots, n\}, z_1 = a, z_n = b$ и $\{q_i, i = 1 \dots, m\}, q_1 = c, q_m = d$ we turn to the system of equations

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \cos(q_i z_j) p(z_j) \delta z_j + i \sum_{j=1}^{n} \sin(q_i z_j) p(z_j) \delta z_j \right|^2 = f(q_i), \quad i = 1 \dots, m$$

which in a matrix form reads

$$y = \|Ax\|^2,$$

where $y \in \mathbb{C}^m, x \in \mathbb{C}^n$ и $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$,

$$y_i = f(q_i), x_j = p(z_j), a_{i,j} = \cos(q_i z_j)\delta z_j + i \sin(q_i z_j)\delta z_j \ .$$

The iterations are constructed as follows.

Choose an initial vector x_0.
For $l = 0, \ldots$ do

(1) Choose a row a_r of the matrix A, where the index r is sampled at random from some distribution, e.g., simply from a uniform distribution. (Another form of the distribution will be considered below).
(2) Calculate the angle $\theta_l = \angle(a_r, x_l)$
(3) calculate the next iteration $x_{l+1} = x_l + \frac{\sqrt{y_r}\exp^{i\theta_l} - (a_r, x_l)}{\|a_r\|_2^2} a_r^*$.
    In each iteration, additional restrictions are incorporated:
(4) $x_{l+1}^i \geq 0$, if all components are non-negative.
(5) Stopping the iterations.
    The accuracy is controlled by

$$\epsilon_l = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^m (\log(y_k) - \log(a_k x_l))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^m (\log(y_k))^2}}.$$

If $\epsilon_{l+1} \geq \epsilon_l$, then $x_{l+1} = x_l$ with some prescribed probability.

The uniform sampling of the random rows is simple but it is not the best choice. More efficient random choice in our calculations was constructed as follows. We introduce the random distribution by

$$p_k = \frac{[\log(y_k) - \log(a_k x_l)]^2}{\sum_{k=1}^m [\log(y_k) - \log(a_k x_l)]^2} \ , \quad k = 1, 2, \ldots, m \ .$$

Sampling the row from this distribution is carried our by the method due to Walker [15] which was implemented to get a row sampled using only one call of the rand() generator, see also for details and the code in [8].

4. Simulation results

In our test example, $h(z)$ is assumed to be a nonnegative piecewise constant function, the positions of jumps are given, the problem is to recover the heights of the step function h.

After discretization, we deal with the quadratic equation as described above, so we have to solve the system of equations for the unknown vector x which we have to recover from $f = \|Ax\|^2$ for a given right-hand side f. We have taken a test piecewise constant function as shown in Figure 2, left panel. The quadratic operator transforms this function to a signal, the right-hand side of the equation, shown in the right panel of the figure 2. Then, this signal was recovered by the algorithm presented in this section, and the obtained solution was superimposed on the exact step function in the upper panel. It is seen that the accuracy is extremely high although the size of the approximating system was $n = 192$ by $m = 10240$. Indeed, it is seen that the exact and calculated curves are practically coincident. This is much better than both genetic and simple projection methods have demonstrated in the example shown in Figure 1. It should be noted that the high accuracy was achieved by taking into account that the positions of the jumps in the step function are known. Without this information however the method also works well if the number of steps is not too high, say, less than a couple of hundreds, and the noise in the measurements is lower than $1 - 3$ %.

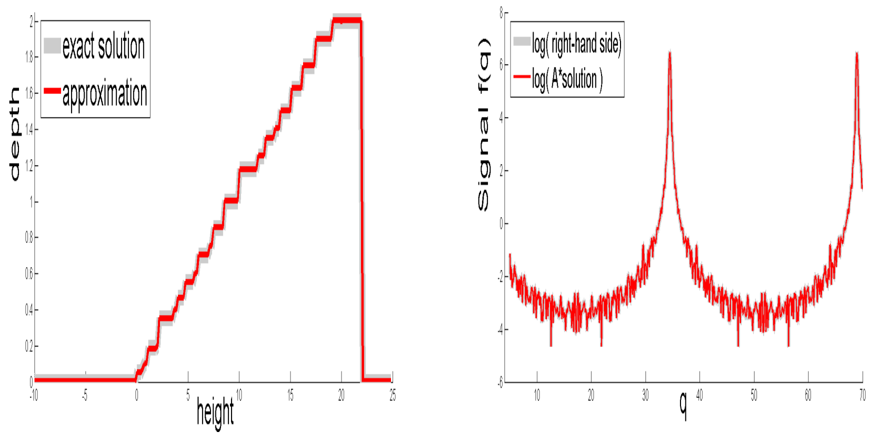


Рис. 2. Calculations made for $m = 10240, n = 192$, the number of steps 26. The exact solution, the step function, is superimposed with the solution obtained by the algorithm described (left panel). The curves shown in the right panel are the relevant signals of these step functions.

5. Conclusion

We have suggested a stochastic projection method for solving the x-ray diffraction problem by introducing an adaptive sampling of the random projection hyperplane. A set of numerical simulations and comparison with a stochastic genetic algorithm and a randomized Kaczmarz's method have confirmed that the new adaptive projection method solves the phase retrieving problem for the x-ray recovering of the epitaxial layers with much higher accuracy.

6. Acknowledgements

Support of Russian Science Foundation under grant 14-11-00083 is kindly acknowledged. Thanks also go to N. Mozartova for her kind help in numerical simulations.

References

[1] J. R. Fienup. *Reconstruction of an object from the modulus of its fourier transform.* Optics letters, **3 (1)** (1978), 27—29.
[2] M. Haltmeier, A. Leit, O. Scherzer. *Regularization of systems of nonlinear ill-posed equations: I. convergence analysis*, Inverse Problems and Imaging, **1** (2007), 289—298.
[3] R.W. Harrison. *Phase problem in crystallography*, Journal of the Optical Society of America A, **10 (5)** (1993), 1046-–1055.
[4] Ke Wei. *Solving systems of phaseless equations via Kaczmarz methods: the proof of concept study*, Inverse problems, **31 N12** (2015).
[5] J. Miao, T. Ishikawa, Q. Shen, and T. Earnesty. *Extending x-ray crystallography to allow the imaging of noncrystalline materials, cells, and single protein complexes*, Annual Review of Physical Chemistry, **59** (2008), 387—410.
[6] Klaus Mosegaard, *Resolution analysis of general inverse problems through inverse Monte Carlo sampling*, Inverse Problems **14** (1998), 405-–426.
[7] Sabelfeld K.K., *Monte Carlo Methods in Boundary Value Problems*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1991.
[8] K.K. Sabelfeld, I.A. Shalimova. *Spherical and Plane Integral operators for PDEs*, Construction, Analysis, and Applications, Walter de Gruyter, Berlin, 2013.

[9] K.K Sabelfeld, N. Loshchina, *Stochastic iterative projection methods for large linear systems,* Monte Carlo Methods and Applications, **16** (2010), 343–359.

[10] K.K. Sabelfeld, N.S. Mozartova. *Sparsified Randomization algorithms for low rank approximations and applications to integral equations and inhomogeneous random field simulation*, Mathematics and Computers in Simulation, **82** (2011), 295-317.

[11] K. Sabelfeld, N. Mozartova. *Stochastic algorithms for solving linear and nonlinear inverse ill-posed problems for particle size retrieving and x-ray diffraction analysis of epitaxial films*, J. Inverse and Ill-posed problems. 10.1515/jiip-2015-0043, published online 17 July 2015.

[12] J. Schmitt, T. Grunewald, G. Decher, P. S. Pershan, K. Kjaer, M. Loesche, *Internal Structure of Layer-by-Layer Adsorbed Polyelectrolyte Films: A Neutron and X-ray Reflectivity Study*, Macromolecules, (1993), 7058–7063.

[13] C. Thomson, G. Palasantzas, J. Krim, *X-ray reflectivity study of the growth kinetics of vapor-deposited silver films, Physical Review*, **49, N 7**, 4902–4907.

[14] V.V. Vasin, I.I. Eremin, *Operators and iterative processes of Fej'er type. Theory and applications,* Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2009.

[15] A.J. Walker *New fast method for generating discrete random numbers with arbitrary frequency distributions,* Electronic Letters, **10** (1974), 127–128.

[16] M. Wormington, Ch. Panaccione, K.M. Matney, D.K. Bowen, *Characterization of structures from X-ray scattering data using genetic algorithms,* Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, **357** (1999), 2827–2848.

Karl Karlovich Sabelfeld
Institute of computational mathematics and mathematical geophysics,
Lavrentiev pr., 6
630090, Novosibirsk, Russia, and NSU, Pirogova, 2.
E-mail address: karl@osmf.sscc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. C.129–C.137 (2015) УДК 517.946

CAUCHY PROBLEM FOR THE QUATERNIONIC TIME–HARMONIC MAXWELL EQUATIONS

E.N. SATTOROV, Z.E. ERMAMATOVA

Abstract. The problem of continuation of a solution to the system of Maxwell equations by its value on the boundary parts of the domain is investigated.

Keywords: Maxwell equations, ill-posed problem, regular solution, Carleman matrix.

1. Introduction

Since J.C. Maxwell wrote and published his famous equations, they have been investigated in a large number of works. This probably exists no fewer works generalizing these equations in many diverse directions. There is no need to spend many words explaining the reasons for such phenomena,they are evident: the importance of the subject. At the same time, the necessity of studying the equation for more than a century bears witness to the absence of a sufficiently complete theory for Maxwell's equations.

In the present work we make an attempt to construct a function theory associated with the monochromatic (in the literature the synonym 'time-harmonic' is often also used) Maxwell equations with constant coefficients, in the framework of exploiting hypercomplex function theory.

Various hypercomplex approaches to studying the classical Maxwell equations have more than a century of history, starting from the work of Maxwell himself (which sometimes surprises both mathematicians and physicists). There exists a well known reformation of these equations in vacuum in quaternionic terms (see e.g.

Sattorov, E.N., Ermamatova, Z.E., Cauchy problem for the quaternionic time–harmonic Maxwell equations.

Поступила 22 октября 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

[29,4,3,25,14,2,19]), which allows some fundamental physical laws to be rewritten in a space-saving form. This is the very case in such a phenomenological simplification is a real discovery influencing the development of a physical theory.

Formally, this leads to a partial differential operator with quaternionic coefficients which has a null-set containing all solutions to the Maxwell equations. So the problem arises as to whether this null-set possesses a well-developed function theory. The latter means a deep structural analogy with ne-dimensional complex analysis which provides, first of all, for the existence of an integral representation for the null-solutions with a good analogue of the complex Cauchy kernel. On in this case we expect to get a theory (almost) as rich as the theory of holomorphic functions of one complex variable.

For many spacific radio engineering, hydroacoustical and geophysical models it is natural and quite sufficient to limit the study to the time-harmonic case (see e.g. [11, 24,5,15,7,12,6]and many other books and articles). The main reason is contained, in fact, in the Fourier analysis together with the principle of superposition; an electromagnetic wave is superposition (or, in other words, a linear combination, finite or numerable) of elementary, periodic-in-time waves.

In this article we propose an explicit formula for reconstruction of a solution of the system of Maxwell equations in a domain from its values on a part of the boundary, we give an explicit continuation formula for a solution to the Cauchy problem.

2. Basic facts of hyperholomorfphic function theory

In this section, we provide some background on quaternionic analysis needed in this paper. For more information, we refer the reader to [21],[22].

Let H be a set of the real quaternions. This means that elements of H are of the form $a = \sum\limits_{k=0}^{3} a_k i_k$, where $\{a_k | k \in N_3^0 := N_3 \cup [0]; N_3 := \{1,2,3\}\} \subset R; i_0$ is the unit; i_1, i_2, i_3 are called the imaginary units, and they define arithmetic rules in H :by definition $i_k^2 = -i_0, k \in N_3; i_1 i_2 = -i_2 = i_3, i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1; i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2$.

Natural operations of addition and multiplication in H turn it into a non-commutative field (=a skew field). There is a main involution in H called the quaternionic congugation, and it plays an exceptionally significant role. This involution is defined in the following way:

Let $H(C)$ be the set of complex quaternions, it means that each quaternion a is represented in the form $a = \sum\limits_{k=0}^{3} a_k i_k$, with the standard basis $i_0 := 1, i_1, i_2, i_3$, where $a_k \subset C$, i_0 is the unit and $i_k | k = 1,2,3$ are the quaternionic imaginary units: $i_0^2 = i_0 = -i_k^2; i_0 i_k = i_k i_0 = i_k, k = 1,2,3; i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3; i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1; i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2$. The complex imaginary unit i commutes with $i_k, k = \overline{0,3}$. We use the Euclidean norm $|a|$ in $H(C)$, defined by $|a| := \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{3} |a|^2}$.

We will use the vector representation of complex quaternions : $a = Sc(a) + Vec(a)$, where $Sc(a) = a_0$ and $Vec(a) = \overline{a} = \sum\limits_{k=1}^{3} a_k i_k$. That is each complex quaternion is sum of its scalar part and its vector part. Complex vectors we identify with complex quaternions whose scalar part is equal to zero. In vector terms, the miltiplication of two arbitrary complex quaternions a i b can be written as follows:

$$a \cdot b = a_0 b_0 - < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} > + [\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}] + a_0 \overrightarrow{b} + b_0 \overrightarrow{a}$$

where

$$< \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} > := \sum_{k=1}^{3} a_k b_k \in C$$

and

$$[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}] := \left\| \begin{matrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| \in C^3. \tag{2.1}$$

We shall consider continuously differentiable $H(C)$ - valued functions depending on three real variables $x = (x_1, x_2, x_3)$. On this set the well known (see, [2],[3],[25]) Moisil-Theodoresco operator is defined by the expression $D := \sum\limits_{k=1}^{3} i_k \partial_k$, where $\partial_k = \partial_k / \partial(x_k)$. The action of the operator D on an $H(C)$ -valued function f can be written in a vector form:

$$Df = -div \overrightarrow{f} + gradf_0 + rot \overrightarrow{f}. \tag{2.2}$$

That is, $Sc(Df) = -div \overrightarrow{f}$ and $Vec(Df) = gradf_0 + rot \overrightarrow{f}$. In a good number of physical applications (see [3] and [4]) the operators $D_\alpha = D + M^\alpha$ and $D_{-\alpha} = D - M^\alpha$ are needed, where α is a complex quaternion and M^α denotes the operator of multiplication by α from the right-hand side: $M^\alpha f = f\alpha$. We will be interested when α is a scalar, that is $\alpha = \alpha_0$ case to the Maxwell equations.

Let $\lambda \in H(C) \setminus \{0\}$, and let α be its complex- quaternionic square root:$\alpha \in H(C), \alpha^2 = \lambda$. The function $f : \Omega \subset R^3 \to H(C)$ is called left-α-hyperholomorphic if

$$D_\alpha f := f\alpha + i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3} f = 0. \tag{2.3}$$

Let $\alpha \in H(C)$ and let

$$\Phi_0(x; \lambda) = -\frac{1}{4\pi |x|} e^{i\alpha |x|}, x \in R^3 \setminus \{0\}, Re\alpha > 0 \tag{2.4}$$

be the fundamental solution of the Helmholtz operator $\triangle_\lambda := \triangle + I\lambda = -D_\alpha D_{-\alpha}$, where $\triangle := \sum\limits_{k=0}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ and I is the identity operator.

Let $K(w)$be an entire function of a complex variable taking real values for real w, ($w = u + iv$, where u and v are reals), and such that $K(u) \neq 0,\ -\infty < u < \infty$.

Define the function $\Phi(y, x, \lambda)$ for $s > 0,\ v \geq 1$ by the equality

$$\Phi(y, x, \lambda) = \frac{1}{4\pi K(x_1)} \int_0^\infty Im[\frac{K(w)}{w - x_1}] \frac{ch(\lambda u)}{\sqrt{u^2 + s}} du,\ \ w = i\sqrt{u^2 + s} + y_1. \tag{2.5}$$

To guarantee convergence of the integral, we assume additionally that

$$\sup_{|Rew| < R,\ Imw \leq -C_R} (|K(w)| + |Imw||K'(w)| + |Imw|^2 |K''(w)|) < \infty. \tag{2.6}$$

For real w and a real-function $K(w)$ we have $\overline{K(\overline{w})} = K(w)$. Then it follows from (2.6)that, for any $\forall R > 0$,

$$\sup_{|Rew|<R} \{|K(w)| + (1 + |Imw|)|K'(w)| + (1 + |Imw|^2)|K''(w)|\} < \infty. \qquad (2.7)$$

Since

$$Im\left(\frac{K(w)}{w}\right) = \frac{1}{2i}\left\{\frac{K(w)}{w} - \frac{K(\overline{w})}{\overline{w}}\right\} = \frac{\overline{w}K(w) - wK(\overline{w})}{2i(r^2+u^2)} =$$
$$= \frac{(y_3 - x_3)ImK(w) - \sqrt{s+u^2}ReK(w)}{r^2+u^2},$$

it follows that(2.5) is on the form

$$-2\pi K(0)\Phi(y,x;\lambda) = \int_0^\infty \left\{\frac{(y_3-x_3)ImK(w)}{\sqrt{s+u^2}} - ReK(w)\right\}\frac{\mathrm{ch}(\lambda u)}{r^2+u^2}du. \qquad (2.8)$$

Since

$$K(y_3 - x_3 + i\sqrt{s+u^2}) - K(y_3 - x_3 - i\sqrt{s+u^2}) = K(y_3 - x_3 + it\sqrt{s+u^2})|_{t=-1}^{t=1}$$
$$= i\sqrt{s+u^2}\int_{-1}^{1} K'(y_3 - x_3 + it\sqrt{s+u^2})dt,$$

it follows from (2.7) and (2.8) that, for $y \neq x$, then integral in (2.5) is absolutely convergent.

If $K(w) \equiv 1$, then the function $\Phi(y,x;\lambda)$ is the classical fundamental solution of the Helmholtz equation, i.e.

$$\Phi(y,x;\lambda) = \Phi_0(y,x;\lambda) = \frac{1}{4\pi r}e^{-i\lambda r}.$$

We can show that

$$\frac{e^{-i\lambda r}}{4\pi r} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}(\lambda u)}{r^2+u^2}du,$$

where $r^2 + u^2 = (y_3 - x_3 + i\sqrt{s+u^2})(y_3 - x_3 - i\sqrt{s+u^2})$, hence

$$\frac{1}{r^2+u^2} = -\frac{1}{2i\sqrt{s+u^2}}\left(\frac{1}{(y_3 - x_3 + i\sqrt{s+u^2})} - \frac{1}{(y_3 - x_3 - i\sqrt{s+u^2})}\right) =$$
$$= -Im\left(\frac{1}{(y_3 - x_3 + i\sqrt{s+u^2})}\right)\frac{1}{\sqrt{s+u^2}}.$$

Using these identities, we obtain the expression for the classical fundamental solution of the Helmholtz equation.

In [31], the following assertion was proved.

Lemma 2.1. The function $\Phi_\sigma(y,x,k)$ is the Carleman function for the Helmholts equation, i.e.,

$$\Phi_\sigma(y,x,\lambda) = \Phi_0(y,x;\lambda) + g_\sigma(y,x,\lambda), \qquad (2.9)$$

where $g_\sigma(y,x,\lambda)$ is a function that is defined for all values of y and x and satisfies Helmholtz equation

$$\Delta(\partial_y)g + \lambda g = 0, y \in D,$$
$$\int_{\partial\Omega_\rho\setminus S}(|\Phi_\sigma| + |\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}|)dS_y \leq C(k,\Omega)\sigma exp(-\sigma x_3),$$

where $C(k,\Omega)$ is a constant.

Then the fundamental solution of the operator D_α, K_α, is given by the formula (see [3])

$$K_\alpha(x) := -D_\alpha \Phi(y,x;\lambda),$$

and its explicit form can be seen.

We shall use the notation $C^p(\Omega, H(C)), p \in N \cup \{0\}$ which has the usual component-wise meaning. Denote by $\Re := \{a \in H(C) \mid a \neq 0; \exists b \neq 0 : ab = 0\}$. Let $n_\tau = \sum_{k=0}^{3}(-1)^{k-1} i_k dx_{[k]}$, where $dx_{[k]}$ denotes as usual the differential form $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ with the factor dx_k omitted. For $\alpha-$ hyperholomorphic function the quaternionic left Cauchy integral formula is defined (see [22, Subsection 4.15],[15]):

$$K_\alpha[f](x) := -\int_{\partial\Omega} \widetilde{K}_\alpha^x[n_\tau f(\tau)] = f(x), x \in \Omega, \tag{2.10}$$

where

(1) If $\alpha = \alpha_0 \in C$, then

$$\widetilde{K}_\alpha^x[f](\tau) := K_{\alpha_0}(x-\tau)f(\tau). \tag{2.11}$$

(2) If $\alpha \notin \overline{\Re}, \overrightarrow{\alpha}^2 \neq 0$, then

$$\widetilde{K}_\alpha^x[f](\tau) := \frac{1}{2\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2}} K_{\xi_+}(x)f(\tau)\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2} + \overrightarrow{\alpha} + \frac{1}{2\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2}} K_{\xi_-}(x)f(\tau)\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2} - \overrightarrow{\alpha}. \tag{2.12}$$

(3) If $\alpha \notin \overline{\Re}, \overrightarrow{\alpha}^2 = 0$, then

$$\widetilde{K}_\alpha^x[f](\tau) := K_{\alpha_0}(x)f(\tau) + \frac{\partial}{\partial\alpha_0}[K_{\alpha_0}](x)f(\tau)\overrightarrow{\alpha}. \tag{2.13}$$

(4) If $\alpha \in \Re, \alpha_0 \neq 0$, then

$$\widetilde{K}_\alpha^x[f](\tau) := \frac{1}{2\alpha_0} K_{2\alpha_0}(x)f(\tau)\alpha + \frac{1}{2\alpha_0}[K_{\alpha_0}](x)f(\tau)\overrightarrow{\alpha}. \tag{2.14}$$

(5) If $\alpha \in \Re, \alpha_0 = 0$, then

$$\widetilde{K}_\alpha^x[f](\tau) := K_0(x)f(\tau) + \Phi_0(x)f(\tau)\alpha. \tag{2.15}$$

Statement of the problem. Find a regular solution to the $\alpha-$ hyperholomorphic function (2.3) in the domain Ω using its Cauchy data on the surface S:

$$f(y) = g(y), \quad y \in S \tag{2.16}$$

The solution of the Cauchy problem will be constructed in the domain Ω for the case in which the Cauchy data are given on a part S of the boundary. The Cauchy problem for a generalized Cauchy-Riemann system with quaternion parameter is an ill-posed problem. If, system (2.3), (2.16) coincides with the known Moisyl-Teodoresku system, which is a spatial analog of the Cauchy-Riemann equations. Various physical applications of the latter has led to far reaching generalizations [32]-[34]. In [23], obtained that the solutions to (2.3),(2.16) with some fixed values of the parameter α are closely connected to the harmonic (with respect to time) solution to the Maxwell equation. This fact allows one to consider these different physic al objects from the common point of view, and, in particular, to derive for them analogs of the Cauchy integral formula and the Sokhotskii formulas (see, [18]), as well as solutions to the boundary problems that the analogous to the problems of analytical continuation in the theory of complex-valued functions.

In (2.8), let us set

$$K(w) = e^{\sigma w^2}.$$

Denote

$$K_\alpha^\sigma[f](x) := -\int_S \widetilde{K}_\alpha^x[n_\tau f(\tau)] = f_\sigma(x), x \in \Omega. \tag{2.17}$$

Theorem 2.1 [28]. Suppose that the function $f \in kerD_\alpha \cap C(\overline{\Omega})$ satisfy the boundary condition $|f(y)| \le M$. Then for any $x \in \Omega$ and $\sigma > 0$

$$|f(x) - f_\sigma(x)| \le C(\sigma, \alpha)e^{-\sigma x_3}. \tag{2.18}$$

Now suppose that, instead of $f(y)$, their continuous approximations $f_\delta(y)$ respectively, are given on the surface S :

$$\max_S |g(y) - g_\delta(y)| \le \delta, 0 < \delta < 1.$$

Denote

$$K_\alpha^{\sigma\delta}[f_\delta](x) := -\int_S \widetilde{K}_\alpha^x[n_\tau f(\tau)] = f_{\sigma(x)\delta}, x \in \Omega, \tag{2.19}$$

where $\sigma = \frac{1}{x_3^0} ln\frac{1}{\delta}, x_3^0 = \max\limits_{x\in\Omega} x_3.$

Theorem 2.2 [28]. Suppose that the function $f \in kerD_\alpha \cap C(\overline{\Omega})$ satisfy the boundary condition $|f(y)| \le M$. Then for any $x \in \Omega$

$$|f(x) - f_{\sigma(x)\delta}(x)| \le M^{1-\frac{x_3}{x_3^0}} \delta^{\frac{x_3}{x_3^0}}. \tag{2.19}$$

3. Maxwell's equations and Cauchy problem

Let Ω is a bounded simply connected domain in R^3 with boundary $\partial\Omega$ composed of a compact connected part T of the plane $y_3 = 0$ and a smooth Lyapunov surface S lying in the half-space $y_3 > 0$, with $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial D$, $\partial\Omega = S \cup T$. As to S, we assume that each ray issuing from any point x of the domain Ω intersects this surface at most l points. Let E and H be the corresponding electrical and magnetic components of an electromagnetic field in Ω. If an electromagnetic field (E, H) is time-harmonic (or monochromatic which is a synonym)then it satisfies the following Maxwell equations [20]:

$$rot\overrightarrow{E} = i\omega\mu\overrightarrow{H}, \ \ rot\overrightarrow{H} = -i\omega\mu\overrightarrow{E}, \tag{2.1}$$

$$div\overrightarrow{H} = 0, div\overrightarrow{E} = 0. \tag{2.2}$$

Here ω is the frequency, ϵ and μ are the absolute permittivity and permeability respectively $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ and $\mu = \mu_0\mu_r$, where ε_0 and μ_0 are the corresponding parameters of a vacuum and ε_r, μ_r are the relative permittivity and permeability of a medium.

Taking into account (2.2) we can rewrite this system as follows

$$D\overrightarrow{E} = i\omega\mu\overrightarrow{H}, D\overrightarrow{H} = -i\omega\varepsilon\overrightarrow{E}. \tag{2.3}$$

This pair of equations can be diagonalized in the following way [17] (see also [22]). Denote

$$\overrightarrow{\varphi} := -i\omega\varepsilon\overrightarrow{E} + k\overrightarrow{H}, \tag{2.4}$$

$$\overrightarrow{\psi} := i\omega\varepsilon\overrightarrow{E} + k\overrightarrow{H}, \tag{2.5}$$

where $k := \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_e\mu_r}$ is the wave number. Applying the operator D to the functions $\overrightarrow{\varphi}$ and $\overrightarrow{\psi}$ one can see that $\overrightarrow{\varphi}$ satisfies the equation

$$(D-k)\overrightarrow{\varphi} = 0, \tag{2.6}$$

and $\overrightarrow{\psi}$ satisfies the equation

$$(D+k)\overrightarrow{\psi} = 0. \tag{2.7}$$

Solutions of (2.6)are (2.7) are called the Beltramb fiels (see, e.g., [16])

Statement of the problem. Find a regular solutions to the Maxwell equations (2.1)in the domain Ω using its Cauchy data on the surface S:

$$[n \times \overrightarrow{H}] = \overrightarrow{f}(y), [n \times \overrightarrow{E}] = \overrightarrow{g}(y), \ \ y \in S \tag{2.8}$$

where S is a part of the boundary of the domain, where $\overrightarrow{f}(y), \overrightarrow{g}(y)$ is a given continuous quaternion -valued functions on the part S of boundary.

Using an analog of the Cauchy integral formula [31] and results from [26], [27],[9] on solving the Cauchy problem, we construct the Carleman function for the Helmholts equations in explicit form and, on its basis, the regularized solution of the Cauchy problem for system (2.1). We construct a solution to the problem (2.1), (2.8) in the domain Ω when the Cauchy data are given on a part S of the boundary Ω. The Cauchy problem for the system of Maxwell equations relates to the class of ill-posed problem. The ill-posed character is the same as for the Cauchy problem for the Laplas and Helmholtz equations [10],[32].

We suppose that a solution to the problem exists (in this event it is unique) and continuously differentiable in the closed domain and the Cauchy data are given exactly. In this case we establish an explicit continuation formula. This formula enables us to state a simple and convenient criterion for solution of the Cauchy problem.

Using the results of [23],[31] on the Cauchy problem for the Laplas and Helmholtz equations essentially, we have managed to construct a Carleman matrix explicitly. It was used in [26],[27] construct a regularized solution to the Cauchy problem for system (2.1),(2.8). A Carleman function for the Helmholtz equation was constructed in [31]. Since we speak here of explicit formulas, it is very interesting to construct a Carleman matrix via elementary and special functions.

It was proven in [1],[30] that every Cauchy problem for an elliptic system possesses a Carleman matrix, provided that the Cauchy data are given on an open boundary set of positive measure.

We shall call also $K_{D,\alpha}[f]$ the quaternionic integral formula (2.6),(2.7) and using of theorems 2.1,2.2. we obtain solution of problem (2.1),(2.8).

References

[1] L.A. Aizenberg, N.N. Tarkhanov *An Abstract Carleman Formula*, Dokl.Akad. Nauk SSSR, **6 (298)** (1988), 1292–1296.

[2] A.V. Beresin, Yu.A Kurochkin, E.A. Tolkachev, *Quaternionins in the Relativistic Physics*, Minsk: Nauka y Texnika, (in Russian).

[3] F. Brackx, R. Delanghe and F.Sommon, *Clifford analysis*, Pitman Res. Notes in Math., 1982.

[4] G. Casanova, *L'algebre vectorielle*, Paris: Presses Universitaires de France, 1976.

[5] D. Colton, R. Kress, *Integral Equations Methods in Scaterring Theory*, New York: Wiley, 1983.

[6] D. Colton, R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, App. Math. Sciences, Berlin, Springer, 1992.

[7] V.I. Dmitriev, E.V. Zakharov, *Integral Equations in Boundary Value Problems of Electrodynamics*, Moscow Sate University, 1987, (in Russian).

[8] Fok V.A., Kuni F.M., *On the Introduction of a 'Suppressing' Function in Dispersion Relations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **127 (6)** (1959), 1195–1198.

[9] G.M. Goluzin, V.I. Krylov, *A Generalized Carleman Formula and its Application to Analytic Continuation of Functions*, Mat.Sb., **40 (2)** (1933), 144–149.

[10] J. Hadamard, *The Cauchy Problem for Linear Partial Differential Equations of Hyperbolic Type*, [Russian translation], Mir, Moscow, 1978.

[11] R.F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, New York: McGraw -Hill, 1961.

[12] A.S. Iljinskiy ,V.V.Kravtsov, A.G. Sveshnikov, *Mathematical Models of Electrodynamics*, Moscow: Visshaya Shkola, 1991, (in Russian).

[13] K. Imaeda, *A new formulation of classical electrodynamics Nuovo Cimento*, **32** (1976), 138–162.

[14] B. Jancewicz, *Miltivectors and Clifford Algebras in Electrodynamics*, Singapore: World Scientific, 1988.

[15] D.S. Jones, *Acousttic and Electromagnetic Fields*, New York: VcGraw-Hill, New York, 1986.

[16] A. Lakhata, *Bltrami fields in chiral media*, World Scientific, 1994.

[17] V.V. Kravchenko, *On the relation between holomorphic biquaternionic functions and time-harmonic electromagnetic fields,* Deposited in UkrINTEL, **2073 -Uk-92** (1992) (in Russian).

[18] V.V. Kravchenko, M.V. Shapiro, *On the generalized system of Cauchy-Riemann equations with a quaternion parameter*, Dokl.Akad.Nauk, **329 (5)** (1993), 547–549.

[19] V.G. Kravchenko, V.V.Kravchenko, *On some nonlinear equations generated by Fueter type operators Z.Anal.*, Anwendungen **13** (1994), 599–602.

[20] V.V. Kravchenko, *Quaternion-Valued Integral Representations of the Harmonic Electromagnetic and Spinor Fields*, Dokl.Akad.Nauk, **341 (5)** (1995), 603–605.

[21] V.V. Kravchenko, M.V. Shapiro,*Quaternionic time-harmonic Maxwell operator*, J.Phys.A: Math. Gen., **28** (1995), 5017–5031.

[22] V.V. Kravchenko, M.V. Shapiro, *Integral representations for spatial models of mathematical physics*, Addison Wesley Longman Ltd., Pitman Research Notes in Mathematics. Series, **351** (1996).

[23] M.M. Lavrent'ev, *On Some Problems of Mathematical Physics*, Sibirsk. Otdel.Akad.Nauk SSSR, Novosibirsk, 1962.

[24] V.V. Nikolski, *Electromagnetic and Propagation of Radiowaves,* Moscow, Nauka, 1978.

[25] W.M. Pezzaglia, *Multivector solutions to harmonic systems Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics*, Dordrecht: Reidel, 445–454.

[26] E.N. Sattorov, D.A. Mardonov, *The Cauchy Problem for the System of Maxwell equation*, Siberian Mathematical Journal, **44 (4)** (2003), 851–861.

[27] E.N. Sattorov, *About Continuation of a Solution for the Homogenous System of Maxwell Equation*, Izv.Vyssh.Uchebn.Zaved.Math., **8** (2008), 78–83.

[28] E. Sattorov, Z.E. Ermamatova, *Regularization of the solution the Cauchy problem on the generalized system of Cauchy-Riemann with a quaternion parameter*, Dokl.Akad.Nauk RUz, **3** (2014), 13–18.

[29] M.S. Shneerson, *On Moisil monogenic functions,* Mat.Sbornik, **44** (1958), 113–122, (in Russian).

[30] N.N. Tarkhanov, *The Carleman Matrix for Elliptic Systems* Dokl.Akad. Nauk SSSR, **284 (2)** (1985), 294–297.

[31] Sh.Ya. Yarmukhamedov,*Cauchy Problem for Laplace Equation*, Dokl.Akad. Nauk SSSR, **235 (2)** (1977), 281–283.

[32] Sh.Ya. Yarmukhamedov, T.I. Ishankulov, O.I. Makhmudov, *The Cauchy Problem for a System of Equations in the Theory of Elasticity in Space*, Siberian Math.J., **33** (1992), 154–158.

[33] V.S. Vladimirov, I.V. Volovich, *Teor.Mat.Fiz.*, **59 (1)** (1984), 3–27.

[34] V.S. Vladimirov, I.V. Volovich, *Teor.Mat.Fiz.*, **60 (1)** (1984), 169–198.

E.N. Sattorov, Z.E. Ermamatova
Samarkand State University,
University boulvard, 15,
114140, Samarkand, Uzbekistan
E-mail address: Sattorov-e@rambler.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.138–С.147 (2015) УДК 625.7:519.6
MSC 65T60

О МУЛЬТИВЕЙВЛЕТАХ ЭРМИТОВЫХ СПЛАЙНОВ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ

Б.М. ШУМИЛОВ

Abstract. The system of Hermite multiwavelets of any odd degree meeting orthogonality conditions to polynomials of the same degree is presented. Construction and the inverse of the block of filters in problems of processing of regular signals and two-dimensional fields are considered. New approaches to calculation of multiwavelet-transformation on the basis of the matrix sweep method and via the splitting onto parallel sweep algorithms are proved. Problems of modeling of surfaces of highways with use of data of laser scanning are described.

Keywords: Hermite splines, multiwavelets, laser data processing, road modeling.

1. Введение

Лазерное сканирование – сравнительно новое направление в $3D$-измерениях высокой точности [1], [2]. Главные цели предварительной обработки данных лазерного сканирования автомобильной дороги – удаление отражений от обочины и окружающего пейзажа, заполнение пропусков, созданных проезжающими автомобилями, и определение плановой осевой линии дороги [3]. С математической точки зрения определение оси дороги позволяет преобразовать изгибы трассы в некоторую прямоугольную область, для которой можно применить методы серединных траекторий [4], параметрической идентификации нелинейных дифференциальных уравнений [5], рекуррентных сплайнов [6] и двумерной интерполяции сплайнами [7] на прямоугольной сетке с сохранением структурных линий дороги (края, бровки), в отличие от популярного метода восстановления поверхности триангуляцией хаотических точек [8]. Очень

Shumilov, B.M., On multiwavelets of Hermite splines of odd degree.

Поступила 1 мая 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

важно то, что при таком подходе гарантируется высокая точность обнаружения трещин и повреждений дорожного полотна в местах, требующих ремонта, и значительно облегчается построение и применение вейвлет-сжатия сканированной информации в местах дороги, не требующих ремонта [9].

2. Эрмитовы сплайн-вейвлеты и обработка сигналов

2.1. **Основные определения.** Кубические сплайны гладкости C^2 давно популярны в среде инженеров-дорожников как адекватный способ математического представления пикетного метода трассирования автомобильных дорог. Что касается сплайнов Эрмита, они позволяют в явной форме, используя значения коэффициентов сплайна, удовлетворить геометрические ограничения на контрольные точки (пикеты автомобильной трассы), на тангенсы трассы (направления касательной у въезда на мост или у примыкания) и на радиусы переходных кривых (значения кривизны на скоростных и тормозных участках трассы).

Определим пространство сплайнов степени $2r+1$ гладкости C^r на отрезке $[a,b]$ с равномерной сеткой узлов $\Delta^L: x_i = a+h\cdot i$, $i=0,1,\dots,2^L$, $h=(b-a)/2^L$, $L \geq 0$, и базисными функциями $N^L_{i,k}(x) = \varphi_k(v-i)$, $k=0,1,\dots,r\forall i$, где $v = (x-a)/h$, с центрами в узлах сетки Δ^L, порожденными сжатиями и сдвигами $r+1$ функций вида [7]:

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} (-1)^k\omega_k(-t), & -1 \leq t \leq 0, \\ \omega_k(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t \notin [-1,1], \end{cases}$$

где $\omega_k(t) = (1-t)^{r+1}\sum\limits_{\beta=0}^{r-k}\dfrac{(r+\beta)!}{k!\beta!r!}t^{k+\beta}, k = 0,1,\dots,r$. Для дальнейшего удобно записать базисные сплайн-функции в виде единой матрицы-строки, $\varphi^L = \left[N^L_{0,0}, N^L_{0,1},\dots,N^L_{0,r}, N^L_{1,0}, N^L_{1,1},\dots,N^L_{2^L,r}\right]$, и упорядочить коэффициенты сплайна в виде вектора, $C^L = \left[C_0^{L,0}, C_0^{L,1},\dots,C_0^{L,r}, C_1^{L,0}, C_1^{L,1},\dots,C_{2^L}^{L,r}\right]^T$. Интерполяционный эрмитов сплайн $2r+1$-й степени может быть представлен как $S^L(x) = \varphi^L(x)C^L$, где коэффициенты $C_i^{L,k}$, $k=0,\dots,r\forall i$, являются значениями и производными аппроксимируемой функции в узлах сетки Δ^L, $L \geq 0$.

В теории кратномасштабного анализа вейвлетами называют базис множества, заполняющего разность между аппроксимирующими пространствами на густой и прореженной сетках [10]. Суть вейвлет-преобразования состоит в том, что оно позволяет иерархически разложить заданную функцию на серию все более грубых приближенных представлений и локальных уточняющих подробностей. При этом «более грубый» уровень представления функции на сетке Δ^{L-1} получается из «более подробного» уровня представления функции на сетке Δ^L посредством прореживания (удаления каждого второго, как правило, отсчета). Здесь необходимо лишь, чтобы каждая базисная функция в φ^{L-1} могла быть выражена в виде линейной комбинации базисных функций φ^L : $\varphi^{L-1} = \varphi^L P^L$. В частности, для эрмитовых сплайнов $2r+1$-й степени блоки матрицы P^L составлены из коэффициентов двухмасштабного калибровочного соотношения [11]:

$$(1)\qquad \begin{bmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_r(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{2} H_k \begin{bmatrix} \varphi_0(2t-k) \\ \varphi_1(2t-k) \\ \vdots \\ \varphi_r(2t-k) \end{bmatrix},$$

где $H_2 = U^{-1}\Lambda U$, $H_0 = SH_2S^{-1}$, $\Lambda = \operatorname{diag}\left(2^{-r-1}, \dots, 2^{-2r-1}\right)$, $S = \operatorname{diag}(1, -1, \dots, (-1)^r)$, $H_1 = \operatorname{diag}\left(1, 2^{-1}, \dots, 2^{-r}\right)$ и матрица U размерности $(r+1)\times(r+1)$ задана элементами $U_{k,j} = (-1)^{r+1+k-j}\dfrac{(r+1+k)!}{(r+1+k-j)!}$, $k, j = 0, 1, \dots, r$.

Недостатком биортогональных [12], [13] вейвлетов является то, что они сводятся к локальным усредняющим фильтрам, т.е. информация для расчета каждого коэффициента на прореженной сетке используется не полностью. В отличие от этого, будем искать вейвлеты $M^L_{i,k}(x)$, $k = 0, \dots, r$, $i = 0, 1, \dots, 2^L$, как линейные комбинации базисных эрмитовых сплайнов на сетке Δ^{L+1}, удовлетворяющие условиям ортогональности многочленам $2r+2$-го порядка, то есть

$$(2)\qquad \int_a^b M^L_{i,k}(x)x^m dx = 0,\ k = 0, \dots, r\forall i(m = 0, 1, \dots, 2r+1).$$

Теорема 1. *Пусть задан отрезок* $[0, 2^{L+1}]$, $L \ge 0$, *с сеткой* $\Delta^{L+1} : x_i = i, i = 0, 1, \dots, 2^{L+1}$. *Если разложения базисных мультивейвлетов имеют вид*

$$(3)\qquad M^L_{i,k}(x) = \sum_{l=0}^{r}\sum_{j=0}^{2} \alpha^l_j \varphi_l(2t-j), t = x - x_{2i},\ -1 \le t \le 3,$$

то при условии, что три матрицы R^0, R^1, R^2 *размерности* $(2r+2)\times(r+1)$ *заданы элементами, соответственно,*

$$R^j_{m,l} = \int_{j-1}^{j+1} \varphi_l(2t-j)t^m dt,\ j = 0, 1, 2,\ l = 0, 1, \dots, r,\ m = 0, 1, \dots, 2r+1,$$

каждый из $r+1$ *столбцов блочной матрицы* $[A_0^{inner}/A_2^{inner}] = -[R^0|R^2]^{-1}R^1$ *дает значения коэффициентов* $\alpha^l_j, j = 0, 2,\ l = 0, 1, \dots, r$ *соответствующего* k*-го базисного мультивейвлета, полностью лежащего внутри отрезка* $[0, 2^{L+1}], L \ge 1$, *а коэффициенты* $\alpha^l_1 = \{1, l = k; 0, l \ne k\}$. *При* $L = 0$ *элементы матриц* R^0, R^2 *вычисляются в пределах интервала* $[0, 2]$, *а матрица коэффициентов* $\alpha^l_j, j = 0, 2,\ l = 0, 1, \dots, r$ *принимает обозначение* $[A_0^{center}/A_2^{center}] = -[R^0 \mid R^2]^{-1}R^1$. *При* $L > 0$ *для крайних слева базисных мультивейвлетов элементы матрицы* R^0 *вычисляются по укороченному слева интервалу*

$$R^0_{m,l} = \int_0^1 \varphi_l(2t)t^m dt,\ l = 0, 1, \dots, r,\ m = 0, 1, \dots, 2r+1,$$

а коэффициенты разложения (3) $\alpha^l_j, j = 1, 2,\ l = 0, 1, \dots, r$ *даются значениями столбцов матрицы* $[A_1^{left}/A_2^{left}] = -[R^1 \mid R^2]^{-1}R^0$ *при условии, что коэффициенты* $\alpha^l_0 = \{1, l = k; 0, l \ne k\}$. *Для крайних справа базисных мультивейвлетов* *элементы матрицы R^2 вычисляются по укороченному справа интервалу*

$$R^2_{m,l} = \int_1^2 \varphi_l(2t-2)t^m dt,\ l = 0, 1, \ldots, r,\ m = 0, 1, \ldots, 2r+1,$$

а коэффициенты разложения (3) $\alpha^l_j, j = 0, 1,\ l = 0, 1, \ldots, r$ даются значениями столбцов матрицы $[A^{right}_0 / A^{right}_1] = -[R^0 \mid R^1]^{-1} R^2$ при условии, что коэффициенты $\alpha^l_2 = \{1, l = k; 0, l \neq k\}$. Система функций $M^L_{i,k}(x), k = 0, 1, \ldots, r,\ i = 1, 2, \ldots, 2^L$, удовлетворяет условиям (2) с носителями не более чем из двух шагов сетки Δ^{L+1} и образует базис.

С точки зрения скорости аппроксимации [14] этот тип вейвлетов эквивалентен полуортогональным вейвлетам, но их носители существенно меньше. При этом ортогональность многочленам обеспечивает локально максимальную «похожесть» на наилучшее среднеквадратическое приближение. Некоторый недостаток построенных вейвлетов состоит в том, что они не ортогональны базисным сплайнам на прореженной сетке. Практически, это означает что при сжатии с заданной среднеквадратической ошибкой количество коэффициентов вейвлет-разложения будет больше, чем для полуортогональных вейвлетов.

2.2. **Построение блока фильтров.** Запишем базисные вейвлет-функции на уровне разрешения L в виде матрицы-строки, $\psi^L = \left[M^L_{1,0}, M^L_{1,1}, \ldots, M^L_{1,r}, \ldots, M^L_{2^L,r}\right]$. Соответствующие коэффициенты вейвлет-разложения будем собирать в вектор, $D^L = \left[D^{L,0}_1, D^{L,1}_1, \ldots, D^{L,r}_1, \ldots, D^{L,r}_{2^L}\right]^T$. Тогда с использованием обозначений для блочных матриц процесс получения C^L из C^{L-1} и D^{L-1} может быть записан как [15]:

$$C^L = \left[P^L \mid Q^L\right] \left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}}\right]. \tag{4}$$

Здесь блоки матрицы Q^L составлены из коэффициентов соотношений (3). При этом с целью компенсации единичного шага сетки в уравнениях (4) в качестве исходных C^L нужно использовать значения функции и производных, домноженные на h в соответствующей степени: $\{f^{(k)}(x_i) \cdot h^k, k = 0, \ldots, r, i = 0, 1, \ldots, 2^L\}$, всего $(r+1) \cdot (2^L + 1)$ чисел.

2.3. **Метод матричной прогонки.** Обратный процесс разбиения коэффициентов C^L на более грубую версию C^{L-1} и уточняющие коэффициенты D^{L-1} состоит в решении системы линейных уравнений (4). Разрешимость данной системы гарантирована линейной независимостью базисных функций. В случае эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов в [16] были численно получены оценки констант Ритца 0.414076 < A < B < 0.414265, что гарантирует устойчивость алгоритмов вычисления кубического мультивейвлет-преобразования в случае приближения на бесконечной числовой оси. В случае приближения на конечном интервале мы предлагаем воспользоваться как для построения вейвлет-преобразования, так и для изучения свойства устойчивости методом блочной матричной прогонки. Для этого матрицу $\left[P^L \mid Q^L\right]$ предлагается сделать блочной трехдиагональной, изменив порядок неизвестных так, чтобы блоки матриц

P^L и Q^L перемежались:

$$K^L = \begin{bmatrix} H_1 & I & O & O & \dots & O & O \\ H_2^T & A_1^{\text{left}} & H_0^T & O & \dots & O & O \\ O & A_2^{\text{left}} & H_1 & A_0^{\text{inner}} & \dots & O & O \\ O & O & H_2^T & I & \dots & O & O \\ O & O & O & A_2^{\text{inner}} & \ddots & A_0^{\text{right}} & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & H_2^T & A_1^{\text{right}} & H_0^T \\ O & O & O & \dots & O & I & H_1 \end{bmatrix}, L > 1,$$

$$K^L u^{L-1} = C^L,$$

$$u^L = \left[C_0^{L,0}, C_0^{L,1}, \dots, C_0^{L,r}, D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, \dots, D_1^{L,r}, C_1^{L,0}, \dots, D_{2^L}^{L,r}, \dots, C_{2^L}^{L,r}\right]^T.$$

Здесь O обозначает матрицу $r+1$-го порядка с нулевыми коэффициентами, тогда как I – единичная матрица $r+1$-го порядка, многоточия обозначают повторяющиеся блоки матрицы K^L.

Одним из методов решения полученных систем алгебраических уравнений является метод Гаусса или, как его вариант, LU-разложение [17]. Если матрица системы разбита на блоки, то можно построить блочное LU-разложение, которое можно представить в виде

$$K^L = (L+T)T^{-1}(U+T), \tag{5}$$

где для $L > 1$ имеем $L = \text{blocktridiag}\left(H_2^T, 0, 0; A_2^{\text{left}}, 0, 0; H_2^T, 0, 0; A_2^{\text{inner}}, 0, 0; \dots; I, 0, 0\right); U = \text{blocktridiag}\Big(0, 0, I; 0, 0, H_0^T; 0, 0, A_0^{\text{inner}}; \dots; 0, 0, A_0^{\text{right}};\ 0, 0, H_0^T\Big)$; $T = \text{blocktridiag}\left(T_i, i = 0, 1, \dots, 2^L\right)$. Приравнивая соответствующие блоки в левой и правой частях (5), получим выражения для блоков LU-разложения T_i [18]

$$\begin{aligned} T_1 &= H_1;\ T_2 = A_1^{\text{left}} - H_2^T T_1^{-1};\ T_3 = H_1 - A_2^{\text{left}} T_2^{-1} H_0^T; \\ T_i &= I - H_2^T T_{i-1}^{-1} A_0^{\text{inner}}; T_{i+1} = H_1 - A_2^{\text{inner}} T_i^{-1} H_0^T \\ &\quad (i = 4, 6, \dots, 2^L - 2); \\ T_{2^L} &= A_1^{\text{right}} - H_2^T T_{2^L-1}^{-1} A_0^{\text{right}};\ T_{2^L+1} = H_1 - T_{2^L}^{-1} H_0^T. \end{aligned} \tag{6}$$

Аналогично, для $L = 1$ получаем $T_1 = H_1;\ T_2 = I - H_2^T T_1^{-1} A_0^{\text{center}};\ T_3 = H_1 - A_2^{\text{center}} T_2^{-1} H_0^T$. Если ввести обозначение $T^{-1}(U+T)u = z$, то процесс решения системы $K^L u = f$ разбивается на два этапа: $(L+T)z = f; (I + T^{-1}U)u = z$. Покомпонентно каждый из них можно записать в следующем виде: для решения $(L+T)z = f$ последовательно выполняются действия

$$\begin{aligned} z_1 &= T_1^{-1} f_1;\ z_2 = T_2^{-1}(f_2 - H_2^T z_1);\ z_3 = T_3^{-1}(f_3 - A_2^{\text{left}} z_2); \\ z_i &= T_i^{-1}(f_i - H_2^T z_{i-1});\ z_{i+1} = T_{i+1}^{-1}(f_{i+1} - A_2^{\text{inner}} z_i) \\ &\quad (i = 4, 6, \dots, 2^L - 2); \\ z_{2^L} &= T_{2^L}^{-1}(f_{2^L} - H_2^T z_{2^L-1});\ z_{2^L+1} = T_{2^L+1}^{-1}(f_{2^L+1} - z_{2^L}), \end{aligned} \tag{7}$$

а для вычисления $(I+T^{-1}U)u = z$ можно воспользоваться рекуррентными формулами:

$$
\begin{aligned}
u_{2^L+1} &= z_{2^L+1};\ u_{2^L} = z_{2^L} - T_{2^L}^{-1} H_0^T u_{2^L+1}; \\
u_{2^L-1} &= z_{2^L-1} - T_{2^L-1}^{-1} A_0^{\text{right}} u_{2^L}; u_i = z_i - T_i^{-1} H_0^T u_{i+1}; \\
u_{i-1} &= z_{i-1} - T_{i-1}^{-1} A_0^{\text{inner}} u_i \ (i = 2^L-2, 2^L-4, \ldots, 4); \\
u_2 &= z_2 - T_2^{-1} H_0^T u_3;\ u_1 = z_1 - T_1^{-1} u_2.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Здесь u_i, z_i и f_i суть подвекторы порядка $r+1$.

3. Проблема оптимизации вейвлет-преобразования эрмитовых сплайнов нечетной степени

Нетрудно убедиться, что при $L > 1$ кроме первой и последней строк условия даже слабого диагонального преобладания [19] не выполняются. В то же время, прямое вычисление для прогоночных матриц T_i чисел обусловленности в эвклидовой норме дает:

$i\backslash\text{cond2}(T_i)$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$
1	4	8	16	32
2	$2.695e+004$	$2.799e+007$	$2.142e+011$	$8.333e+014$
3	157.2	$5.832e+004$	$8.799e+007$	$3.717e+010$
4	60.32	7805	$2.468e+006$	$8.122e+008$
5	478.7	$1.817e+005$	$7.345e+007$	$7.162e+010$
6	52.05	7124	$1.999e+006$	$7.353e+008$
7	492.9	$1.864e+005$	$7.264e+007$	$8.126e+010$
8	51.79	7102	$1.991e+006$	$7.328e+008$
9	493.4	$1.865e+005$	$7.263e+007$	$8.158e+010$
10	51.79	7102	$1.991e+006$	$7.327e+008$
11	493.4	$1.865e+005$	$7.263e+007$	$8.159e+010$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
32	$3.61e+005$	$1.379e+009$	$5.382e+011$	$3.713e+017$
33	$2.933e+004$	$1.965e+007$	$7.101e+009$	$1.308e+015$

Таким образом, можно полагать, что для любого уровня разрешения L они являются невырожденными, что на практике означает корректность представленного выше монотонного варианта алгоритма матричной прогонки (6) – (8). Тем не менее, с повышением степени вейвлетов численная устойчивость будет неизбежно ухудшаться.

3.1. **Построение сплайн-вейвлетов со смещенными носителями.** В отличие от предыдущего определения мы предлагаем использовать в качестве вейвлетов функции $N_{i,k}^L(x)$ в V_L с центрами в четных узлах. Например, для случая седьмой степени самое компактное решение получается, когда из исходных координат вычитается уравнение кубической параболы, интерполирующей функцию и вторую производную в первой и последней точках. После такой модификации данных интерполяционный эрмитов сплайн 7-й степени с некоторыми отсутствующими элементами по концам отрезка аппроксимации может быть представлен как

$$(9)\qquad S^L(x)=\sum_{k=0,2}\sum_{i=1}^{2^L-1}C_i^{L,k}N_{i,k}^L(x)+\sum_{k=1,3}\sum_{i=0}^{2^L}C_i^{L,k}N_{i,k}^L(x),\ a\le x\le b.$$

3.2. **Алгоритм с применением расщепления.** Для случая представленного выше типа вейвлетов составим матрицы:

$$\Lambda_1=\mathrm{diag}\,(16,16,8,8/3)\,,\ \ S=\mathrm{diag}\,(1,-1,1,-1)\,,$$

$$T_0^0=\begin{bmatrix}-2380 & 1418 & -808 & 4581\\ 40110 & -45840 & 28230 & -25392\end{bmatrix},\quad T_0^1=\begin{bmatrix}140 & -74 & 32 & -10\\ 2310 & -1200 & 510 & -144\end{bmatrix},$$

$$T_1^0=\begin{bmatrix}-334 & -346 & -138 & -142\\ 1260 & 672 & 420 & 224\\ -630 & 1590 & 562 & 1302\\ -18900 & -23520 & -13860 & -12768\end{bmatrix},$$

$$T_0^2=\begin{bmatrix}13 & -7 & 3 & -1\\ 70 & -37 & 16 & -5\\ 315 & -165 & 71 & -21\\ 1155 & -600 & 255 & -72\end{bmatrix},\quad T_1^2=\begin{bmatrix}-321 & 353 & -135 & 143\\ -1190 & 709 & -404 & 229\\ -315 & -1425 & 633 & -1281\\ 20055 & -22920 & 14115 & -12696\end{bmatrix},$$

$$T^L=\begin{bmatrix}T_0^0 & T_0^1 & O & \cdots & O & O\\ T_1^0 & T_1^2 & T_0^2 & \cdots & O & O\\ ST_0^2S & ST_1^2S & T_1^2 & \ddots & O & O\\ O & ST_0^2S & ST_1^2S & \ddots & O & O\\ O & O & ST_0^2S & \ddots & O & O\\ O & O & O & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & O & O\\ O & O & O & \cdots & T_0^2 & O\\ O & O & O & \cdots & T_1^2 & T_0^2\\ O & O & O & \cdots & ST_1^2S & ST_1^0S\\ O & O & O & \cdots & -T_0^1S & -T_0^0S\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_1\\ \vdots\\ \Lambda_1\end{bmatrix}.$$

Здесь точки, расставленные по диагонали, означают, что третий блочный столбец повторяется соответствующее число раз, сдвигаясь при этом каждый раз вниз на один блок.

Следующее утверждение дает последовательность вычисления коэффициентов вейвлет-анализа по известным коэффициентам сплайн-разложения на любой сетке $\Delta^L, L\ge 2$.

Теорема 2. *Пусть значения коэффициентов* $\tilde{C}^L = \left[C_1^{L,0}, C_1^{L,1}, C_1^{L,2}, C_1^{L,3}, \ldots, C_{2^L-1}^{L,3}\right]^T$ *в нечетных узлах пересчитаны сначала из решения четырех систем линейных уравнений, соответственно, вида*

$$\begin{bmatrix} 13802 & -1317 & 1 & & & \\ -1317 & 12486 & -1316 & \ddots & & \\ 1 & -1316 & 12486 & \ddots & 1 & \\ & 1 & -1316 & \ddots & -1316 & 1 \\ & & 1 & \ddots & 12486 & -1317 \\ & & & \ddots & -1317 & 13802 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{L,k} \\ C_3^{L,k} \\ C_5^{L,k} \\ \vdots \\ C_{2^L-3}^{L,k} \\ C_{2^L-1}^{L,k} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} C_1^{L,k} \\ C_3^{L,k} \\ C_5^{L,k} \\ \vdots \\ C_{2^L-3}^{L,k} \\ C_{2^L-1}^{L,k} \end{bmatrix},$$
$$k = 0, 2,$$

$$\begin{bmatrix} 11170 & -1315 & 1 & & & \\ -1315 & 12486 & -1316 & \ddots & & \\ 1 & -1316 & 12486 & \ddots & 1 & \\ & 1 & -1316 & \ddots & -1316 & 1 \\ & & 1 & \ddots & 12486 & -1315 \\ & & & \ddots & -1315 & 11170 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{L,k} \\ C_3^{L,k} \\ C_5^{L,k} \\ \vdots \\ C_{2^L-3}^{L,k} \\ C_{2^L-1}^{L,k} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} C_1^{L,k} \\ C_3^{L,k} \\ C_5^{L,k} \\ \vdots \\ C_{2^L-3}^{L,k} \\ C_{2^L-1}^{L,k} \end{bmatrix},$$
$$k = 1, 3,$$

где пустые позиции представляют собой нулевые элементы, а затем из матричного произведения $\tilde{C}^L := T^L \cdot \tilde{C}^L$. *Тогда вектор сплайн-коэффициентов на прореженной сетке* Δ^{L-1} *представляет собой результат умножения матрицы* $V^L = -diag(2, 8, 1, 2, 4, 8, \ldots, 2, 8)$ *на вектор* $\tilde{C}^L$ *, тогда как вектор вейвлет-коэффициентов равен покомпонентной сумме вектора* $\tilde{C}^L$ *и вектора,* $\left[C_0^{L,1}, C_0^{L,3}, C_2^{L,0}, C_2^{L,1}, C_2^{L,2}, C_2^{L,3}, \ldots, C_{2^L}^{L,3}\right]^T$*, сплайн-коэффициентов в четных узлах густой сетки.*

Несложно предложить параллельную реализацию представленного алгоритма вейвлет-преобразования эрмитовых сплайнов 7-й степени, в которой четыре пятидиагональные прогонки выполняются независимо. Напомним, что параллельный алгоритм вейвлет-преобразования эрмитовых кубических сплайнов предусматривал независимое решение двух трехдиагональных систем уравнений, а сплайнов пятой степени – трех четырехдиагональных систем уравнений со строгим диагональным преобладанием [20], [21]. Было бы интересно выяснить, каковы обусловленность и степень параллелизма вейвлет-преобразования эрмитовых сплайнов 11-й степени.

4. Моделирование поверхностей

Мы выбрали для применения тензорный метод [22] разложения двумерных сканов, поскольку они имеют преобладающую длину в одном из двух направлений. Запишем базисные функции сплайна в форме двух матричных строк для направлений u и v соответственно, $\varphi_u^{L_1} = \left[N_{0,0}^{L_1}, N_{0,1}^{L_1}, \ldots, N_{0,r_1}^{L_1}, N_{1,0}^{L_1}, \ldots, N_{2^{L_1},r_1}^{L_1}\right]$

и $\varphi_v^{L_2} = \left[N_{0,0}^{L_2}, N_{0,1}^{L_2}, \ldots, N_{0,r_2}^{L_2}, N_{1,0}^{L_2}, \ldots, N_{2^{L_2},r_2}^{L_2}\right]$. Тогда одномерное вейвлет-преобразование может быть записано как: $C^{L_1} = P^{L_1} \cdot C^{L_1-1} + Q^{L_1} \cdot D^{L_1-1}$ для переменной u и $C^{L_2} = C^{L_2-1} \cdot \left(P^{L_2}\right)^T + D^{L_2-1} \cdot \left(Q^{L_2}\right)^T$ для переменной v, где векторы D^{L_1-1} и D^{L_2-1} – коэффициенты одномерного вейвлет-разложения. Пусть коэффициенты $C_{i,j}^{k_1,k_2}$ двумерного сплайна собраны в матрицу

$$C^{L_1,L_2} = \begin{bmatrix} C_{0,0}^{0,0} & C_{0,0}^{0,1} & C_{0,0}^{0,2} & \cdots & C_{0,2^{L_2}}^{0,L_2} \\ C_{0,0}^{1,0} & C_{0,0}^{1,1} & C_{0,0}^{1,2} & \cdots & C_{0,2^{L_2}}^{1,L_2} \\ C_{0,0}^{2,0} & C_{0,0}^{2,1} & C_{0,0}^{2,2} & \cdots & C_{0,2^{L_2}}^{2,L_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{2^{L_1},0}^{L_1-1,0} & C_{2^{L_1},0}^{L_1-1,1} & C_{2^{L_1},0}^{L_1-1,2} & \cdots & C_{2^{L_1},2^{L_2}}^{L_1-1,L_2} \\ C_{2^{L_1},0}^{L_1,0} & C_{2^{L_1},0}^{L_1,1} & C_{2^{L_1},0}^{L_1,2} & \cdots & C_{2^{L_1},2^{L_2}}^{L_1,L_2} \end{bmatrix}.$$

При введенных обозначениях формула для аппроксимации поверхности запишется как $S(u,v) = \varphi_u^{L_1} \cdot C^{L_1,L_2} \cdot \left(\varphi_v^{L_2}\right)^T$. Тогда для двумерного случая имеет место формула: $C^{L_1,L_2} = P^{L_1} \cdot \left[C^{L_1-1,L_2-1} \cdot \left(P^{L_2}\right)^T + E^{L_1-1,L_2-1} \cdot \left(Q^{L_2}\right)^T\right] + Q^{L_1} \cdot \left[F^{L_1-1,L_2-1} \cdot \left(P^{L_2}\right)^T + D^{L_1-1,L_2-1} \cdot \left(Q^{L_2}\right)^T\right]$, где C^{L_1-1,L_2-1}, E^{L_1-1,L_2-1}, F^{L_1-1,L_2-1}, D^{L_1-1,L_2-1} – матрицы коэффициентов двумерного вейвлет-разложения. Последняя формула показывает, что двумерное вейвлет-разложение сводится к одномерному вейвлет-разложению для каждого столбца исходной матрицы данных C^{L_1,L_2} и получению при этом двух матриц промежуточных данных. Затем строки этих промежуточных матриц также подвергаются одномерному вейвлет-преобразованию – при этом получаем четыре итоговых матрицы и т.д. для следующих вложенных уровней.

Для случая аппроксимации эрмитовыми сплайнами с некоторыми нулевыми краевыми условиями важную роль играет построение поверхности Кунса [23]. Например, для бикубических сплайнов уравнение билинейной поверхности Кунса со значения на границе, совпадающими со значениями аппроксимируемой поверхности, необходимо вычесть из начальных координат. Тогда исправленные значения координат обнуляются на границах, и требуется только добавить вычтенное ранее уравнение к бикубическому эрмитовому сплайну, полученному после вейвлет-обработки.

5. Заключение

Вышеизложенные алгоритмы были положены в основу пакета программ [3] для обработки материалов лазерного сканирования. Там же даны результаты визуализации лазерных точек после предварительной фильтрации и заполнения пропусков данных и наложения запроектированной дороги. Мы полагаем, что мультимасштабное вейвлет-разложение Эрмита имеет потенциал, который может быть использован при обработке изображений и видеоматериалов. И мы ожидаем, что в сочетании с алгоритмом обнаружения трещин и повреждений дорожного полотна можно будет в дальнейшем разрабатывать интеллектуальную систему восстановления автомобильной дороги.

References

[1] W. Boehler, A. Marbs, *3D Scanning Instruments*, Proc. of the CIPA WG6 Int. 2002. Workshop on scanning for cultural heritage recording. http://www.isprs.org/commission5/workshop/

[2] H. C. Yun, M. G. Kim, J. S. Lee, *Applicability Estimation of Mobile Mapping System for Road Management*, Contemporary Engineering Sciences, **7** (2014), 1407–1414.

[3] B.M. Shumilov, A.N. Baigulov, *A study on modeling of road pavements based on laser scanned data and a novel type of approximating hermite wavelets*, WSEAS Transactions on Signal Processing. **11** (2015), 150–156.

[4] G.I. Marchuk, *Mathematical Models in Immunology. Numerical Methods and Experiments*, 3-rd edition, Nauka, Moscow, 1991. (in Russian)

[5] L.I. Konstantinova, V.A. Kochegurov, B.M. Shumilov, *Parametric identification of nonlinear differential equations on the basis of spline schemes that are exact on polynomials*, Automat. Remote Control, **5** (1997), 756–764.

[6] B.M. Shumilov, E.A. Esharov, N.K. Arkabaev, *Construction and optimization of predictions on the basis of first-degree recurrence splines*, Numerical Analysis and Applications, **3** (2010), 186–198.

[7] Y.S. Zavyalov, B.I. Kvasov, V.L. Miroshnichenko, *Methods of Spline Functions*, Fizmatgiz, Moscow, 1980. (in Russian)

[8] J. D. Boissonnat, O. Devillers, M. Teillaud, M. Yvinec, *Triangulations in CGAL*, Proc. 16th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom., (2000), 11–18.

[9] A.Z. Kuduev, E.A. Esharov, N.K. Arkabaev, *Visualizaton of roads laser scanning data applying orthogonal GHM-multiwavelet transform*, Vestnik of Tomsk State University of Architecture and Building, **2** (2014), 157–167. (in Russian)

[10] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (PA), 1992.

[11] V. Strela, *Multiwavelets: Theory and Applications*, PHD Thesis (Math.), Cambridge, Massachusetts, 1996.

[12] W. Sweldens, *The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets*, Applied and Computational Harmonic Analysis. **3** (1996), 186–200.

[13] R. Warming, R. Beam, *Discrete multiresolution analysis using Hermite interpolation: Biorthogonal multiwavelets*, SIAM J. Sci. Comp. **22** (2000), 269–317.

[14] I.Y. Novikov, M.A. Skopina, V.Y. Protasov, *Wavelet Theory*, Translations of Mathematical Monographs 239, American Mathematical Society, Providence (RI), 2011.

[15] E.J. Stollnitz, T.D. DeRose, D.H. Salesin, *Wavelets for Computer Graphics: Theory and Applications*, Morgan Kaufmann, San Francisco, 1996.

[16] B. Han, S.-G. Kwon, S.S. Park, *Riesz multiwavelet bases*, Applied and Computational Harmonic Analysis. **20** (2006), 161–183.

[17] J.M. Ortega, *Introduction to Parallel and Vector Solutions of Linear Systems*, Premium Press, New York, 1988.

[18] E.A. Vasilieva, *Ample conditions of existence of the complete block decomposition*, KSTU News, Scientific Journal of Kaliningrad State Technical University. **20** (2011), 103–108. http://www.klgtu.ru/en/research/magazine/2011_20/14.doc (in Russian)

[19] A.A. Samarskii, E.S. Nikolaev, *Methods of Solving Grid Equations*, Nauka, Moscow, 1978. (in Russian)

[20] B.M. Shumilov, *Cubic multiwavelets orthogonal to polynomials and a splitting algorithm*, Numerical Analysis and Applications. **6** (2013), 247–259.

[21] B.M. Shumilov, U.S. Ymanov, *"Lazy"wavelets of Hermite quintic qplines and a splitting algorithm* Universal Journal of Computational Mathematics. **1** (2013), 109–117.

[22] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, San Diego (CA), 1999.

[23] J.H. Ahlberg, E.N. Nilson, J.L. Walsh, *The Theory of Splines and their Applications*, Academic Press, New York, 1967.

Boris Mihailovich Shumilov
Tomsk State University of Architecture and Building,
Solyanaya sq., 2,
634003 Tomsk, Russia
E-mail address: sbm@tsuab.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.148–С.153 (2015) УДК 519.63
MSC 68W10

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ИЗОЛИРОВАННЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ АСТРОФИЗИКИ И ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

Н.В. СНЫТНИКОВ

Abstract. We developed parallel algorithm for convolution method of calculating gravitational or electrostatic potential. It uses multi-dimensional fast Fourier transform and data transposition of potential and density grid functions. Algorithm is scalable on grids with number of nodes up to 1 billion and corresponfing number of processors (up to 1024).

Keywords: gravitational potential, electrostatic potential, isolated systems, Poisson equation

1. Введение

Для решения некоторых задач астрофизики и физики плазмы необходимо вычислять потенциал (гравитационный или электростатический) изолированных систем точечных масс или зарядов [1]. Одним из типичных примеров является моделирование гравитирующих систем (динамики галактик или околозвездных дисков, см. Рис. 1), когда плотность ρ известна, а гравитационный потенциал Φ определяется из уравнения Пуассона. Естественным граничным условием на потенциал является его убывание к нулю при удалении от точечных масс:

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}), \\ &\Phi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}\to\infty} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

Snytnikov N.V., Parallel algorithm for calculating potential of isolated systems for problems of astophysics and plasma physics.

Работа поддержана РФФИ (грант 14-01-31088).

Поступила 30 ноября 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

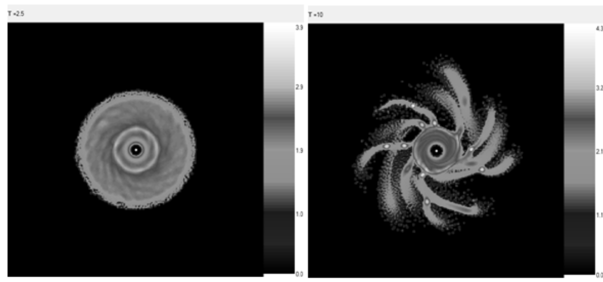


Рис. 1. Моделирование гравитационных неустойчивостей в газопылевом диске в некоторой конечной области. Плотность изменяется на каждом временном шаге и влечет необходимость вычисления потенциала на границе расчетной области.

В этом случае значение потенциала на границе конечной расчетной области (которая выбирается таким образом, что плотность ρ была равна нулю за ее пределами) заранее неизвестны.

На практике существует два способа решения этой задачи. Первый состоит в том, чтобы аппроксимировать значения потенциала на границе и решать далее разностный аналог задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta_h \Phi_h = 4\pi\rho_h,\ \Phi_h|_\Gamma = \Phi_\Gamma$$

(где ρ_h, Φ_h — сеточные функции плотности и потенциала) с помощью одного из многочисленных методов [2]. Недостатком этого метода является то, что требуется отодвигать расчетную область достаточно далеко от центра области, увеличивая количество сеточных узлов от 10 до 100 раз.

Другой способ состоит в непосредственном вычислении потенциала с помощью фундаментального решения уравнения Пуассона. Поскольку для случая изолированных систем функция Грина известна, то можно записать:

$$\Phi(\mathbf{x_0}) = -\int \frac{\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}}{|\mathbf{x_0} - \mathbf{x}|}, \tag{2}$$

где x_0 — некоторая точка в пространстве.

Быстрое вычисление этого интеграла для набора точек, расположенных в узлах равномерной декартовой сетки, возможно с помощью метода свёртки, основанного на быстром преобразовании Фурье, предложенного Хокни [3]. Метод позволяет драматически уменьшить трудоемкость вычислений: от $O(N^6)$ до $O(N^3 \log N)$ в полностью трехмерном случае и от $O(N^4)$ до $O(N^2 \log N)$ в случае, когда требуется вычислять потенциал плоского слоя (где N — число узлов расчетной области по одному направлению).

Несмотря на то, что метод свертки довольно популярен в различных астрофизических кодах [4], его параллельная реализация на практике использовалась намного реже из-за необходимости транспозиции трехмерных данных — большому объему межпроцессорных коммуникаций и невозможности использования на среднем количестве процессоров (более 100).

В данной статье предложена новая параллельная реализация метода свертки и показано, что для относительно новых программных и аппаратных суперкомпьютерных архитектур (таких как в Сибирском суперкомпьютерном центре или суперкомпьютере «Ломоносов» в МГУ), метод эффективен при использовании большого числа процессоров (вплоть до 1024).

2. Метод свертки

Фундаментальное решение уравнения Пуассона в дискретном случае на равномерной сетке в декартовой системе координат с числом узлов $N_x \times N_y \times N_z$ и сеточными шагами h_x, h_y, h_z записывается в следующем виде:

$$\Phi(x_0, y_0, z_0) = -\sum_{i=1}^{N_x-1}\sum_{j=1}^{N_y-1}\sum_{k=1}^{N_z-1}\frac{q_{i,j,k}}{\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2+(z_i-z_0)^2}}, \tag{3}$$

где $q_{i,j,k} = \rho_{i,j,k}\cdot(h_x h_y h_z)$ — значения зарядов (масс), находящихся в узлах сетки.

Если требуется вычислить трехмерный потенциал в плоскости $z = z_0$ с поверхностной плотностью σ, то формула принимает следующий вид:

$$\Phi(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{N_x-1}\sum_{j=1}^{N_y-1}\frac{q_{i,j}}{\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2}}, \tag{4}$$

где $q_{i,j,k} = \sigma_{i,j} h_x h_y$.

Нетрудно видеть, что прямое вычисление этой суммы для всех x_0, y_0, необходимое для восстановления сеточной функции гравитационного потенциала в плоскости $z = z_0$, потребует $O(N_x^2 N_y^2)$ операций. А для полностью трехмерного случая —$O(N_x^2 N_y^2 N_z^2)$. Трудоемкость вычислений можно существенно сократить, воспользовавшись теоремой о свёртке [5] и ее дискретным аналогом. Запишем (2) в виде:

$$\Phi(\mathbf{x_0}) = -\int \rho(\mathbf{x}) K(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})d\mathbf{x} = -\rho * K, \tag{5}$$

где

$$K(\mathbf{x}-\mathbf{x_0}) = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}|}$$

и $\rho * K$ обозначает свёртку.

Если интеграл в (5) является абсолютно интегрируемым и существуют следующие интегралы (т.е. существуют ограничивающие константы C_1 и C_2):

$$\int \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x} < C_1 < \infty,$$

$$\int K(\mathbf{x})d\mathbf{x} < C_1 < \infty, \tag{6}$$

то:

$$\begin{aligned} &FT[\Phi](\mathbf{k}) = -FT[\rho](\mathbf{k})\cdot FT[K](\mathbf{k}),\\ &\Phi = -FT^{-1}\left[FT[\rho]\cdot FT[K]\right] \end{aligned} \tag{7}$$

где $FT[\dots]$ обозначает преобразование Фурье.

С практической точки зрения это означает, что, воспользовавшись дискретным аналогом теоремы о свёртки и алгоритмом быстрого преобразования Фурье, можно вычислить сумму (3) для трехмерной области за $O(N_x N_y N_z(\log N_x + \log N_y + \log N_z))$ операций. Если же речь идет о вычислении гравитационного потенциала плоского диска (4), то окажется, что его трудоемкость составляет

$O(N_xN_y(\log N_x + \log N_y))$, что не только быстрее прямого способа вычисления фундаментального решения уравнения Пуассона, но и быстрее прямых методов решения трехмерного уравнения (1), имеющих по крайней мере кубическую сложность.

Чтобы применить быстрое преобразование Фурье для вычисления потенциала плоского диска с помощью (4), необходимо устранить неопределенность в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$, и определить функции K и σ так, чтобы они стали периодическими. Первая из этих проблем решается с помощью модификации потенциала на близких расстояниях. Мы задавали сеточную функцию K следующим образом:

$$K(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{0.5\min(hx,hy)}, & \sqrt{x^2+y^2} = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \sqrt{x^2+y^2} > 0. \end{cases}$$

Вторая проблема решается с помощью введения фиктивных дополнительных подобластей, дублирующих область решения по каждому направлению в два раза, и доопределения в них функции K так, чтобы она стала периодической во всей новой области, а функция σ равной нулю. Аккуратное доказательство корректности метода и того факта, что полученное таким способом решение совпадает с прямым вычислением (3), приведено в статье [6].

3. Параллельный алгоритм и реализация

Параллельный алгоритм для метода свёртки основан разбиении области на одинаковые подобласти в направлении X и затем Y и транспозиции данных для многомерного быстрого преобразования Фурье (использовалась реализация FFTW [7]), аналогично подходу описанному в работе [8]. Он состоит из следующих шагов (схематично показан на Рис.2):

(1) Вычислительная область в 2D или 3D подразделяется на подобласти в направлении X.
(2) Применяется прямое быстрое преобразование Фурье (БПФ) к сеточным функциям плотности ядра потенциала в направлении Y и в направлении Z.
(3) Выполняется транспозиция «слоев» из направления Y в направление X.
(4) Применяется прямое БПФ в направлении X. Перемножается образ сеточной функции ядра на образ функции плотности. Применяется обратное БПФ в направлении X к полученному результату.
(5) Выполняется обратная транспозиция «слоев» из направления X в направление Y.
(6) Применяется обратное БПФ в направлении Z и обратное БПФ в направлении Y.

Результаты тестовых экспериментов для параллельного метода свертки в случае плоского двумерного распределения для сеток 16384×16384 и 32768×32768 приведены в Таблице 1. Общий вывод состоит в том, что данный алгоритм хорошо масштабируется на большое число процессоров и ползволяет решать задачи с более чем 1 миллиардом сеточных узлов менее, чем за 1 секунду.

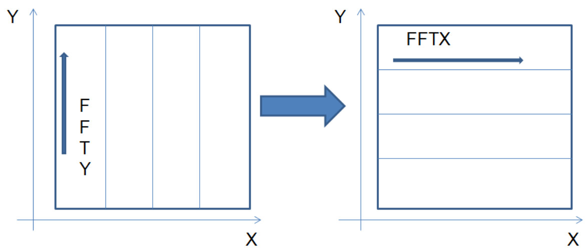


Рис. 2. Разделение области на подобласти, применение быстрого преобразования Фурье по координате Y, транспозиция данных и применение быстрого преобразования Фурье по координате Y.

Таблица 1. Эксперименты по оценке производительности алгоритма для сетки 16384×16384 и 32768×32768 при разном количестве процессоров суперкомпьютера «Ломоносов» МГУ.

Число процессоров N	Время (с) 16384×16384	Время (с) 32768×32768
64	1.75	
128	1.1	
256	0.5	2.4
512	0.35	1.3
1024	0.25	0.65

4. Заключение

Разработан и реализован параллельный метод для вычисления трехмерного потенциала изолированных систем. Показано, что метод обладает хорошей производительностью на больших сетках вплоть до 1 миллиарда узлов расчетной области при использовании 1024 процессоров на современных суперкомпьютерах.

В дальнейшем алгоритм будет использован в контексте проведения серийных экспериментов по моделированию нестационарных процессов динамики галактик или газопылевых протопланетных дисков с десятками и сотнями тысяч временных шагов.

References

[1] V.A. Vshivkov, V.N. Snytnikov, N.V. Snytnikov. *Simulation of three-dimensional dynamics of matter in gravitational field with the use of multiprocessor computer.* // Vychislitelnye tekhnologii (Computational Technologies). **11**, N.2, 2006. - in Russian.

[2] Samarskii A.A., Andreev V.B.: *Difference methods for elliptic equations.* Moscow: Nauka, 1976 (in Russian)

[3] R.W. Hockney. J.W. Eastwood. *Computer Simulation Using Particles.* New York: McGraw-Hill, 1981.

[4] Springel V., Yoshida N., White S.D.M. *GADGET: a code for collisionless and gasdynamical cosmological simulation.* // New Astronomy. **6**, pp. 79-117, 2001.

[5] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis* // Graylock Press, Rochester, N.Y., 1961.

[6] Eastwood J.W., Brownrigg D.R.K. *Remarks on the Solution of Poisson's Equation for Isolated Systems* // Journal of Computational Physics, **32**, pp.24-38, 1979.
[7] Frigo M., Johnson S.G. *The Design and Implementation of FFTW3* // Proceedings of the IEEE. **93 (2)**, 216-231, 2005.
[8] O. Ayala, L.P. Wang. *Parallel implementation and scalability analysis of 3D Fast Fourier Transform using 2D domain decomposition* // Parallel Computing. **39**. 2013. P. 58-77.

Nikolay Valerievich Snytnikov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
pr. Lavrentieva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: nik@ssd.sscc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.154–С.162 (2015) УДК 519.62
MSC 65Q10

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ПОДХОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ ИНФЕКЦИОННОГО ЗАБОЛЕВАНИЯ

С.И. Кабанихин, О.И. Криворотько, Д.А. Воронов, Д.В. Ермоленко

Abstract. In this paper the problem for determining of the immune and disease parameters for the simplest model of infectious disease by measurements of the antigen and antibody concentrations in fixed times is numerically investigated. The explicit expression of the gradient of the misfit functional based on the adjoint problem solution is obtained. The results of numerical calculations of inverse problem are discussed. The results are obtained with the help of methods of Landweber iterations and Nelder-Mead. Comparative analysis of these methods is discussed.

Keywords: inverse problem, optimization approach, Landweber iterations, Nelder-Mead method.

Введение

Большинство математических моделей иммунологии описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений. В последнее время активно развивается математическое моделирование иммунологических систем, основанное на численном решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Иммунологические модели характеризуются своими параметрами, которые описывают патоген, особенности иммунитета заболеваемого и т.п.

Многие российские и зарубежные ученые занимаются проблемой решения обратных задач иммунологии. Г.И. Марчук ([1],1980), А.А. Романюха ([2],1996),

---

Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I., Voronov D.A., Yermolenko D.V., Optimization approach for solving the inverse problem for the simplest model of infectious disease.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации.

Поступила 22 ноября 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

H.W. Engl ([3],2009) численно исследовали устойчивость решения обратных задач. B.M. Adams, H.T. Banks ([4],2014) использовали прямые методы численного решения задачи наименьших квадратов со случайным распределением данных. Г.П. Кузнецова ([5],2003) в своей работе использовала метод численного интегрирования обратной задачи для простейшей модели инфекционного заболевания Г.И. Марчука.

Основная цель работы – идентификация параметров для получения информации о характере заболевания и об иммунном ответе по данным анализа крови методами итерации Ландвебера и Нелдера–Мида, а также выявление наилучшего метода для решения данной задачи.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 представлена постановка обратной задачи для простейшей модели инфекционного заболевания. В разделах 2, 3 исследовано два метода для решения обратной задачи. В частности в разделе 2 описан градиентный метод (метод итерации Ландвебера), приведены численные результаты, полученные с помощью данного метода. В разделе 3 изучен метод Нелдера–Мида, приведено численное решение обратной задачи. И в разделе 4 приведен сравнительный анализ методов итерации Ландвебера и Нелдера–Мида.

1. Постановка обратной задачи

Исследована задача Коши для простейшей модели инфекционного заболевания «антиген–антитело» [6]:

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = N_1(t)(\beta_{11} - \beta_{12}N_2(t)), \quad \frac{dN_2(t)}{dt} = \beta_{21}N_1(t)N_2(t), \quad t \in (0,T), \\ N_1(0) = N_{10}, N_2(0) = N_{20}, \end{cases} \tag{1}$$

которая может быть записана в векторном виде:

$$\frac{dN(t)}{dt} = P(N(t),\beta), \quad N(0) = N^0, \qquad t \in (0,T). \tag{2}$$

Здесь $N(t) = (N_1(t), N_2(t))^T$ – переменные системы (концентрации антигенов и антител в организме), $\beta = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21})^T$ – вектор параметров, характеризующий особенности иммунитета, P – заданная вектор–функция.

Пусть в фиксированные моменты времени t_k, $k = 1, ..., K$ измерены концентрации антигенов $N_1(t)$ и антител $N_2(t)$ (обозначим $N_i(t) := N_i(t;\beta), i = 1,2$):

$$N_i(t_k;\beta) = \Phi_i(t_k), \quad i = 1,2;\ k = 1, ..., K. \tag{3}$$

Обратная задача (2)-(3) заключается в определениии вектора параметров β по заданной функции P, начальным данным N^0 и дополнительной информации вида (3).

Определим оператор обратной задачи (2)-(3): $A : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^K$. Здесь $\mathcal{P} := \{\beta \in \mathbb{R}^3 : \beta_m \geq 0, m = 1,2,3\}$ – пространство рассматриваемых параметров.

Запишем обратную задачу (2)-(3) в операторном виде:

$$A(\beta) = \Phi, \quad \Phi = (\Phi_1(t_1), \dots, \Phi_1(t_K), \Phi_2(t_1), \dots, \Phi_2(t_K))^T. \tag{4}$$

Вектор Φ определяется, например, по данным анализа крови, мочи в моменты времени t_k, $k = 1, ..., K$.

Решение обратной задачи (4) будем искать, минимизируя целевой функционал $J(\beta) = \|A(\beta) - \Phi\|^2$, определенный следующим образом:

$$J(\beta) = \sum_{k=0}^{K} |N(t_k; \beta) - \Phi(t_k)|^2. \tag{5}$$

2. Численное решение обратной задачи методом итерации Ландвебера

Используем метод итерации Ландвебера для решения задачи $\min\limits_{\beta \in \mathcal{P}} J(\beta)$, который заключается в определении приближенного решения [7, 8]:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \alpha J'(\beta_n), \quad \alpha > 0, \ \beta_0 \in \mathcal{P}. \tag{6}$$

Здесь α – параметр спуска, $J'(\beta) \in \mathbb{R}^3$ – градиент целевого функционала (5), явное выражение которого определяется следующим соотношением:

$$J'(\beta) = -\int\limits_0^T \Psi(t)^T P_\beta(N(t), \beta)\, dt. \tag{7}$$

Здесь $\Psi(t)$ – решение сопряженной задачи ($\Psi_i \in C^r(0,T)$ ($r \geqslant 1$), $i = 1, 2$)

$$\begin{cases} \frac{d\Psi(t)}{dt} = -P_N^T(N(t), \beta)\Psi(t), \quad t \in \bigcup\limits_{k=0}^{K} (t_k, t_{k+1}), t_0 = 0, t_{K+1} = T; \\ \Psi(T) = 0, \ [\Psi]_{t=t_k} = 2(N(t_k; \beta) - \Phi(t_k)), \quad k = 1, \ldots, K, \end{cases} \tag{8}$$

$P_N(N(t), \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ и $P_\beta(N(t), \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ – соответствующие матрицы Якоби:

$$P_N = \begin{pmatrix} \beta_{11} - \beta_{12}N_2(t) & -\beta_{12}N_1(t) \\ \\ \beta_{21}N_2(t) & \beta_{21}N_1(t) \end{pmatrix}, P_\beta = \begin{pmatrix} N_1(t) & -N_1(t)N_2(t) & 0 \\ \\ 0 & 0 & N_1(t)N_2(t) \end{pmatrix},$$

$C^r(0,T)$ – пространство непрерывно дифференцируемых r раз функций,
$[\Psi]_{t=t_k} := \Psi(t_k + \varepsilon) - \Psi(t_k - \varepsilon)$ – разрыв функции Ψ в точке t_k, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число.

Построим равномерную сетку $\omega := \left\{t_j = jh_t, \ h_t = \frac{T}{N_t}, j = \overline{0, N_t}\right\}$, $T = 4$ недели, $N_t = 100$. Алгоритм численного решения обратной задачи (2)-(3) методом итерации Ландвебера состоит в следующем:

1. Выбираем вектор точных параметров $\beta = (0.5, 0.5, 0.6)^T$. Решая прямую задачу (1) методом Рунге–Кутты четвертого порядка аппроксимации, получаем синтетические данные (3) в моменты времени t_k, $k = 1, \ldots, K$, равномерно распределенные по сетке ω.

2. Задаем начальное приближение $\beta_0 = (0.1, 0.1, 0.2)^T$. Решаем задачу (1) при заданном β_0. Строим вектор $N(t_k, \beta_0)$, $k = 1, \ldots, K$.

3. Пусть известно β_n. Построим следующее приближение β_{n+1}. Решаем прямую задачу (1) для набора параметров β_n методом Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации. Определяем $N(t_k; \beta_n)$, $k = 1, \ldots, K$. Если $J(\beta_n) < 10^{-6}$, то β_n – искомое решение. Иначе переходим к пункту **4**.

4. Решаем сопряженную задачу (8) методом Рунге–Кутты.

5. Определяем по формуле (7) градиент целевого функционала $J(\beta_n)$.

6. Определяем следующую итерацию согласно соотношению (6) при $\alpha = 0.001$. Переходим к пункту **3**.

Рисунок 1 показывает, что 20–ти измерений достаточно для получения результата с заданной точностью. Можно заметить, что при 35–ти измерениях относительная ошибка ниже чем при 20–ти, но сделать 35 измерений за 4 недели (то есть 35 раз взять анализы у человека) проблематично. Поэтому в дальнейшем для всех расчетов мы будем использовать 20 измерений за 4 недели.

На рисунке 2 изображены графики зависимости целевого функционала $J(\beta_n)$ от числа итераций n. Отметим, что первые три итерации функционал резко возрастает (ввиду нелинейности задачи (1)) (см. рис. слева), а начиная с четвертой итерации монотонно убывает со скоростью $1/n$ (см. рис. справа), что свидетельствует о сходимости метода.

На рисунке 3 приведены результаты численного решения обратной задачи (2)-(3) при $K = 20$. Можно заметить, что в этом случае получаем приближенное решение: $\beta_{11}^n = 0.49675, \beta_{12}^n = 49903, \beta_{21}^n = 0.60017$ за 26836 итераций.

В случаях с параметрами спуска $\alpha = 10^{-4}, \alpha = 10^{-5}$ численное решение обратной задачи (2)-(3) незначительно отличается от приведенных результатов, а время выполнения алгоритма на ЭВМ значительно больше, чем для случая $\alpha = 10^{-3}$. В связи с этим в работе приведены численные результаты лишь для случая $\alpha = 10^{-3}$.

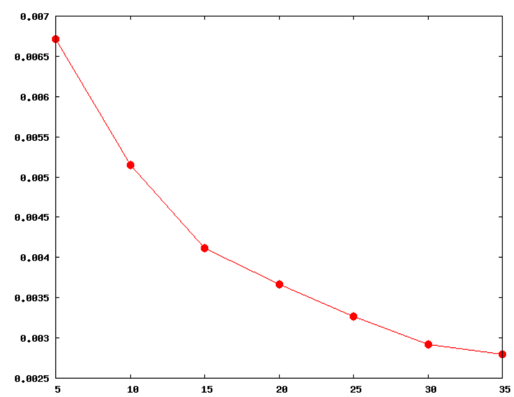


Рис. 1. График зависимости относительной ошибки $\frac{|\beta-\beta_n|}{|\beta|}$ от числа измерений K.

3. Численное решение обратной задачи методом Нелдера–Мида

Метод Нелдера–Мида (симплекс метод) [9] – метод безусловной оптимизации функционала, не использующий градиента. Ввиду этого метод Нелдера–Мида легко применим к негладким и зашумленным функциям. Суть метода заключается в последовательном перемещении и деформировании начального приближения (симплекса) вокруг точки экстремума. Метод Нелдера–Мида широко используется для уточнения параметров в задачах фармакокинетики и иммунологии. Основная проблема данного метода заключается в том, что он находит локальный экстремум и чувствителен к выбору начального приближения.

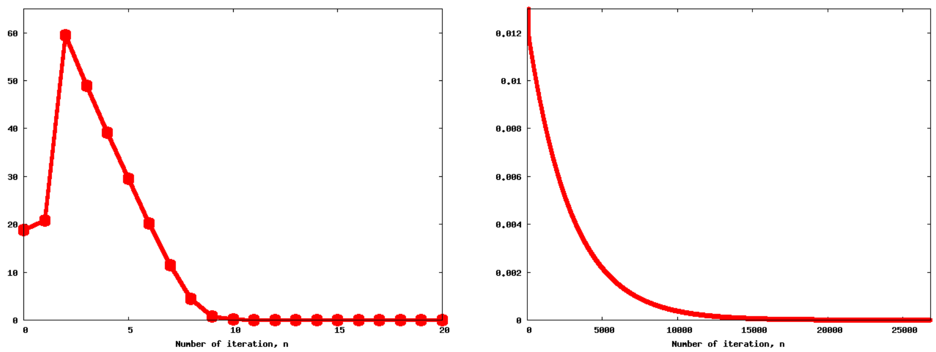


Рис. 2. График $J(\beta_n)$ при $\alpha = 10^{-3}, \varepsilon = 10^{-6}$ и общем числе итераций $n = 20$ (слева) и $n = 26836$ (справа).

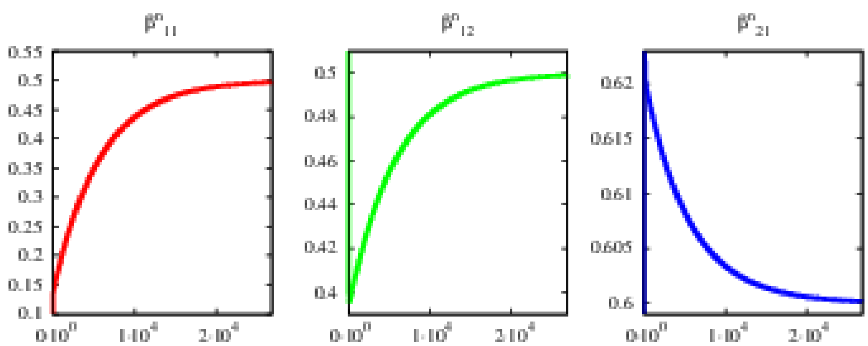


Рис. 3. Графики параметров $\beta_{11}^n, \beta_{12}^n, \beta_{21}^n$ при $\alpha = 0.001, n = 26836$.

Решение обратной задачи, также как и в случае градиентного метода, будем искать, минимизируя целевой функционал:

$$J(\beta) = \sum_{k=0}^{K} |N(t_k;\beta) - \Phi(t_k)|^2.$$

Следовательно, требуется найти безусловный минимум функционала трех переменных $J(\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21})$.

В данном разделе представлены результаты численных расчетов, полученные с помощью метода Нелдера–Мида. В качестве точных параметров $(\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21})^T$ выбран вектор $(0.5, 0.5, 0.6)^T$.

Используем начальный симплекс: $\beta_1 = (0.1, 0.1, 0.2)^T, \beta_2 = (0.4, 0.7, 0.8)^T, \beta_3 = (0.2, 0.3, 0.4)^T, \beta_4 = (0.9, 0.7, 0.1)^T$, начальные данные $N_0 = (1.8, 1.8)^T$, число точек сетки $N_t = 100$, параметр выхода $\varepsilon = 10^{-6}$.

На рисунке 4 изображен график зависимости относительной ошибки $\frac{|\beta_n - \beta|}{|\beta|}$ от числа измерений K. Заметим, что при 10 измерениях относительная ошибка наименьшая. Поэтому рассмотрим численное решение обратной задачи (2)-(3) при $K = 10$.

На графике 5 представлена зависимость целевого функционала J от числа итераций n. Заметим, что при увеличении n, функционал J убывает до $5 \cdot 10^{-3}$, что свидетельствует о сходимости метода с точностью 10^{-2} для выбранного начального симплекса.

Для 10 измерений β_{11}^n сходится к 0.17, β_{12}^n к 0.4 и β_{21}^n к 0.62. Можно заметить, что разность полученного решения обратной задачи и точного достаточно велика. Следовательно, метод Нелдера–Мида для данного начального симплекса нашел «ложный» минимум и «застрял» в нем.

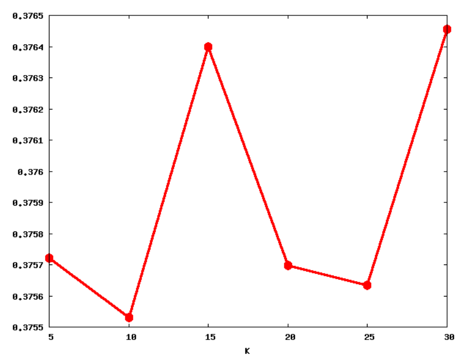


Рис. 4. График зависимости относительной ошибки $|\beta - \beta_n|/|\beta|$ от числа измерений K.

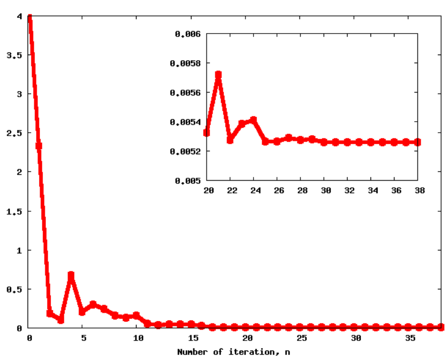


Рис. 5. График $J(\beta_n)$ при общем числе итераций $n = 38$.

Теперь проведем подобные вычисления для начального симплекса: $\beta_1 = (0.15, 0.2, 0.35)^T, \beta_2 = (0.05, 0.1, 0.3)^T, \beta_3 = (0.2, 0.07, 0.25)^T, \beta_4 = (0.3, 0.3, 0.2)^T$.

На рисунке 6 изображен график зависимости относительной ошибки $\frac{|\beta_n - \beta|}{|\beta|}$ от числа измерений K. По графику 6 можно проследить, что при 25 измерениях относительная ошибка наименьшая, но сделать 25 измерений за 4 недели проблематично. Поэтому возьмем $K = 20$ и для дальнейших вычислений будем использовать это число измерений. Метод Нелдера–Мида сходится для данного набора параметров, то есть функционал J_n стремится к нулю (см. рис. 7).

На рисунке 8 представлено решение обратной задачи в зависимости от числа итераций n. Отметим, что полученные результаты близки к точному решению $\beta = (0.5, 0.5, 0.6)^T$. Следовательно, используя начальный симплекс $\beta_1 = (0.15, 0.2, 0.35)^T, \beta_2 = (0.05, 0.1, 0.3)^T, \beta_3 = (0.2, 0.07, 0.25)^T, \beta_4 = (0.3, 0.3, 0.2)^T$, мы нашли минимум функционала J.

Представленные примеры показывают, что результаты, полученные с помощью метода Нелдера–Мида, зависят от выбора начального приближения. В зависимости от начального симплекса мы можем попасть как в «ложный» минимум, так и в глобальный. Это основная проблем данного метода. Работая с реальными данными метод Нелдера–Мида не гарантирует нахождения минимума целевого функционала. Данную проблему помогают решить стохастические методы, такие как метод Монте–Карло и генетический алгоритм. Используя их в совокупности с методом Нелдера–Мида, можно исключить «ложные» минимумы.

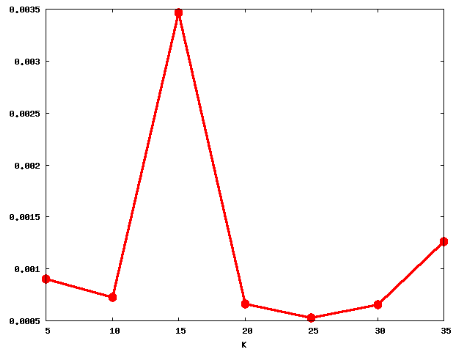


Рис. 6. График зависимости относительной ошибки $|\beta - \beta_n|/|\beta|$ от числа измерений K.

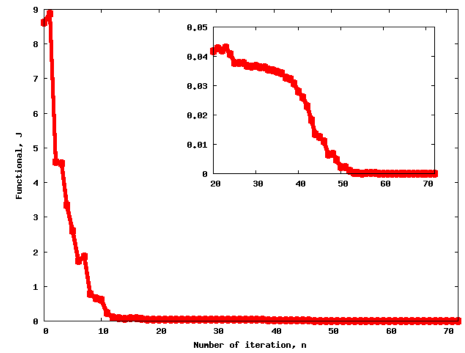


Рис. 7. График $J(\beta_n)$ при и общем числе итераций $n = 72$.

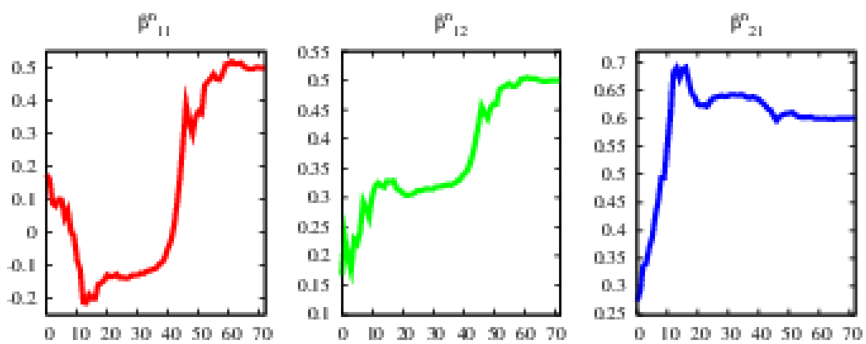


Рис. 8. Графики параметров $\beta_{11}^n, \beta_{12}^n, \beta_{21}^n$ при $\alpha = 0.001, n = 26836$.

4. Сравнительный анализ метода Нелдера-Мида с методом итерации Ландвебера

В таблице 1 представлены численные решения обратной задачи (2)-(3), полученные методом Нелдера–Мида и методом итерации Ландвебера для 20 измерений. Можно заметить, что метод Нелдера–Мида получает ответ гораздо быстрее, чем градиентный метод. Относительная ошибка для метода Нелдера–Мида на порядок ниже, чем для метода итерации Ландвебера. Отметим, что несмотря на хорошие результаты, полученные методом Нелдера–Мида для «удачно» выбранного симплекса, сходимость приближенного решения в точному в общем случае не гарантирована. В случае метода итерации Ландвебера приближенное решение близко к точному.

5. Заключение

В работе исследовано численное решение обратной задачи, полученное с помощью двух итерационных методов: итерации Ландвебера и Нелдера–Мида.

	Метод Нелдера–Мида	Метод итерации Ландвебера
K, число измерений	20	20
Начальное приближение	$\beta^{(1)} = (0.15, 0.2, 0.35)^T$ $\beta^{(2)} = (0.05, 0.1, 0.3)^T$ $\beta^{(3)} = (0.2, 0.07, 0.25)^T$ $\beta^{(4)} = (0.3, 0.3, 0.2)^T$	$\beta_0 = (0.1, 0.1, 0.2)^T$
ε, параметр выхода	10^{-6}	10^{-6}
β_{11}^n	0.50059584	0.49675121
β_{12}^n	0.50013173	0.49902571
β_{21}^n	0.59992131	0.60017153
$\lvert\beta_n - \beta\rvert/\lvert\beta\rvert$, относительная ошибка	0.00066348	0.00366208
n, число итераций	72	26836

Таблица 1. Сравнение методов Нелдера–Мида и итерации Ландвебера решения обратной задачи (2)-(3)

Показано, что при правильном выборе начального приближения итерационный метод Нелдера–Мида за меньшее число итераций определяет приближенное решение обратной задачи (определения трех параметров) с заданной точностью, в отличии от метода итерации Ландвебера. В случае «неудачного» выбора начального приближения, метод Нелдера–Мида сходится к ложному решению обратной задачи в то время, как за достаточно большое число итераций метод итерации Ландвебера с заданной точностью определит приближенное решение обратной задачи.

References

[1] G.I. Marchuk, *Mathematical models in immunology*, Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).

[2] A.A. Romanyuha, S.G. Rudnev, S.M. Zuev, *Data analysis and modeling of infectional diseases*, Modern problems of computational mathematics and mathematical modeling, T.2 (2005), Nauka, Moscow, 352–404 (in Russian).

[3] H.W. Engl, C. Flamm, P. Kügler, J. Lu, S. Müller and P. Schuster, *Inverse Problems in systems biology*, Inverse Problems, **25 (12)** (2009). p. 123014.

[4] H. Banks , S. Hu W. T, *Modeling and Inverse Problems in the Presence of Uncertainty*, Taylor and Frances Publishing, Bosa Raton, London, New York, Washington D.C., 2014.

[5] G.P. Kuznetsova. *The inverse problem for the Marchuk immunologic "simplest model"*, Far Eastern Mathematical Journal, **4 (1)** (2003), 134–140.

[6] A. Bellouquid,M. Delitala *Modeling Complex Biological Systems: A Kinetic Theory Approach*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 2006.

[7] O.M. Alifanov, E.A. Artyukhin, S.V. Rumyantsev, *Extremum methods for solving ill-posed problems*, Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).

[8] S.I. Kabanikhin, *Обратные и некорректные задачи*, Siberian Scientific Publishing, Novosibirsk, 2009 (in Russian).

[9] J. Nelder ,R. Mead A simplex method for function minimization, Computer Journal, **7** ,1965, 308–313.

Sergey Igorevich Kabanikhin, Olga Igorevna Krivorotko
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru, krivorotko.olya@mail.ru

Dmitriy Andreevich Voronov, Daria Vladimirovna Yermolenko
Novosibirsk State University,
Pirogova street, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: dmitriy.voronov.89@gmail.com, ermolenko.dasha@mail.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. C.163–C.172 (2015) УДК 517.968
MSC 45D05, 93A30

MATHEMATICAL MODELING OF A DYNAMIC BEHAVIOR OF ISOLATED ENERGY SYSTEMS BY VOLTERRA POLYNOMIALS

S.V. SOLODUSHA, D.O. GERASIMOV, K.V. SUSLOV, V.A. VINNIKOV

Abstract.
The paper deals with the algorithms for constructing quadratic and cubic Volterra polynomials. The algorithms are intended for the investigation of energy system operation. The Volterra polynomials were practically identified using reference off-grid energy systems which allow an active experiment on the basis of test input sets. The algorithms consider the necessary conditions for solvability of special multidimensional Volterra integral equations of the first kind. The results of computational experiments that illustrate the non-stationarity of the studied dynamic systems are presented.

Keywords: nonlinear dynamic, Volterra polynomials, isolated energy systems.

1. Introduction

The problem of restoration of multidimensional transient characteristics of a nonlinear "black-box" dynamic system is the main problem in the approximation of continuous mapping of scalar input $x(t)$ to output $y(t)$ with the help of Volterra polynomials of the $N-$th degree in the form

$$y(t) = \sum_{m=1}^{N} \int_0^t \ldots \int_0^t K_m(t, s_1, \ldots, s_m) \prod_{i=1}^{m} x(s_i) ds_i, \ t \in [0, T]. \tag{1}$$

Solodusha, S.V., Gerasimov, D.O., Suslov, K.V., Vinnikov, V.A., Mathematical modeling of a dynamic behavior of isolated energy systems by Volterra polynomials.

The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (grants 15-01-01425a).

Поступила 1 декабря 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

From scalar character of $x(t)$ follows the symmetry of Volterra kernels K_m with respect to variables $s_1, s_2, ..., s_m$. The difficulty of practical application of (1) consists in that for the unique restoration of the $(i+1)-$ dimensional kernel $K_i(t, s_1, ..., s_i)$, $i = \overline{1, m}$, it is necessary to specify the outputs $y(t, \omega_1, ..., \omega_i)$ to the i–parametric set of test inputs $x_{\omega_1, ..., \omega_i}(t)$. This explains close attention of many authors to the problem of identification (e.g. overviews in [1], [2]). The most widespread identification technique using pulse test signals [3], has a limited area of application [4].

The studies conducted by Melentiev Energy Systems Institute SB RAS in the field of Volterra kernel identification were commenced in the 1990s [5]. The technique presented in [1], [6] is based on specifying a set of test signals represented by special linear combinations of Heaviside functions with divergent argument. In this case the initial problem is reduced to solving linear Volterra integral equations which allow the use of explicit inversion formula. The authors of [7], [8] establish the necessary conditions for solvability of corresponding multidimensional integral equations in a certain class of functions in terms of the test signal amplitudes. At the same time, the use of the obtained conditions makes it possible to reduce the amount of test signals for dividing the system response into components.

The goal of the paper is to consider a new method for constructing integral models in the form of Volterra polynomials (1) in the cases which are the most important for applications, i.e. for $N = 2, 3$, using the reference dynamic systems as an example.

2. A new identification algorithm

Let us describe the main idea of obtaining the Volterra multidimensional linear integral equations of the first kind which are solved as a result of reducing the problem of Volterra kernel identification in quadratic and cubic Volterra polynomials.

2.1. **Quadratic Volterra polynomial.** Assuming in (1) that $N = 2$, we write the quadratic model

$$y_{quad}(t) = \int_0^t K_1(t, s_1)x(s_1)ds_1 + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1 ds_2, \tag{2}$$

where $t \in [0, T]$. If the dynamic system response $y^\alpha(t, \omega_1, \omega_2)$ (for certainty we will consider that the amplitude is $\alpha > 0$) to the test signals

$$x^\alpha_{\omega_1\,\omega_2}(t) = \alpha(e(t) - 2e(t-\omega_1) + e(t-\omega_1-\omega_2)), \quad t, \omega_1, \omega_2 \in [0, T] \tag{3}$$

is such that at $0 \le \omega_1 + \omega_2 \le t \le T$

$$\frac{1}{\alpha^2}\left[y^\alpha(t, \omega_1, \omega_2) - \alpha \int_0^{\omega_1} K_1(t, s_1)ds_1 + \alpha \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_1(t, s_1)ds_1\right] = \frac{1}{\alpha^2}\Big[3y^\alpha(t, \omega_1, 0) -$$

(4)

$$-3y^\alpha(t, 0, \omega_1+\omega_2) + y^\alpha(t, \omega_1+\omega_2, -\omega_2) - 7\alpha \int_0^{\omega_1} K_1(t, s_1)ds_1 - 5\alpha \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_1(t, s_1)ds_1\Big]$$

is met, then in terms of

$$f_2(t,\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{\alpha^2}\left[y^\alpha(t,\omega_1,\omega_2) - \alpha\int_0^{\omega_1} K_1(t,s_1)ds_1 + \alpha\int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_1(t,s_1)ds_1\right] \tag{5}$$

the main equality

$$f_2(t,\omega_1,\omega_2) = 3f_2(t,\omega_1,0) - 3f_2(t,0,\omega_1+\omega_2) + f_2(t,\omega_1+\omega_2,-\omega_2) \tag{6}$$

holds true.

Condition (6) is necessary for the existence of a solution to the equation

$$\begin{gathered}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_1} K_2(t,s_1,s_2)ds_1ds_2 - 2\int_0^{\omega_1}\int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_2(t,s_1,s_2)ds_1ds_2+\\ +\int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2}\int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_2(t,s_1,s_2)ds_1ds_2 = f_2(t,\omega_1,\omega_2)\end{gathered} \tag{7}$$

in the class of functions continuous on $\Omega_3 = \{t,s_1,s_2/0 \le s_1,s_2 \le t \le T\}$, which are symmetric with respect to the second and third argument [9].

By substituting (3) in (2) we obtain the integral equation

$$\begin{gathered}\alpha\int_0^{\omega_1} K_1(t,s_1)ds_1 - \alpha\int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_1(t,s_1)ds_1 + \alpha^2\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_1} K_2(t,s_1,s_2)ds_1ds_2-\\ -2\alpha^2\int_0^{\omega_1}\int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_2(t,s_1,s_2)ds_1ds_2+\alpha^2\int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2}\int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_2(t,s_1,s_2)ds_1ds_2 = y^\alpha(t,\omega_1,\omega_2).\end{gathered} \tag{8}$$

Thus, the integral equations (4), (8) are sufficient for the unique identification of kernels K_1, K_2. Indeed, the problem of K_1 identification is reduced to solving the Volterra integral equation of the first kind

$$\int_0^{\omega_1} K_1(t,s_1)ds_1 = f_1(t,\omega_1,0) \tag{9}$$

with the right-hand side

$$f_1(t,\omega_1,0) = \frac{y^\alpha(t,\omega_1,0) - y^\alpha(t,0,\omega_1)}{2\alpha}. \tag{10}$$

Considering (9), (10), we determine $f_2(t,\omega_1,\omega_2)$ from (7). The inversion formulas of one-dimensional (9) and two-dimensional (7) first kind Volterra integral equations have the following form [9]:

$$K_1(t,s_1) = \frac{\partial f_1(t,s_1)}{\partial s_1},\ K_2(t,s_1,s_2) = -\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f_2(t,s_1,s_2)}{\partial s_1\partial s_2},$$

where $s_1 = \omega_1,\ s_2 = \omega_1+\omega_2$.

The case where the dynamic system is stationary, i.e. Volterra kernels in (2) depend only on the difference $t - s_i,\ i = 1,2$ is considered in [10], [11].

2.2. **Cubic Volterra polynomial.** For simplicity we will limit ourselves to the case of combined models made up on analogy with [12]. Consider the cubic model

$$y_{cub}(t) = \int_0^t K_1(t,s_1)x(s_1)ds_1 + \int_0^t\int_0^t K_2(t,s_1,s_2)\prod_{i=1}^2 x(s_i)ds_i +$$

$$+\int_0^t\int_0^t\int_0^t \hat{K}_3(s_1,s_2,s_3)\prod_{i=1}^3 x(t-s_i)ds_i, \quad t\in[0,T]. \tag{11}$$

By using the above described algorithm it is easy to see that condition (4) and dynamic system outputs to the test inputs $x^{\alpha_i}_{\omega_1\omega_2}(t)$, $i=1,2$, $\alpha_1\neq\alpha_2$ of form (3) completely provide the identification of kernels K_1, K_2, $\hat{K}_3$. For example the right-hand side of the integral equation with respect to K_1 has the following form

$$f_1(t,\omega_1,0) = \frac{\begin{vmatrix} f^{\alpha_1}(t,\omega_1,0) & \alpha_1^3 \\ f^{\alpha_2}(t,\omega_1,0) & \alpha_2^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2 & \alpha_2^3 \end{vmatrix}}, \tag{12}$$

where

$$f^{\alpha_i}(t,\omega_1,0) = \frac{1}{2}\Big(y^{\alpha_i}(t,\omega_1,0) - y^{\alpha_i}(t,0,\omega_1)\Big).$$

As applied to the model

$$y_{cub}(t) = \int_0^t K_1(t,s_1)x(s_1)ds_1 + \int_0^t\int_0^t \hat{K}_2(s_1,s_2)\prod_{i=1}^2 x(t-s_i)ds_i +$$

$$+\int_0^t\int_0^t\int_0^t \hat{K}_3(s_1,s_2,s_3)\prod_{i=1}^3 x(t-s_i)ds_i, \quad t\in[0,T] \tag{13}$$

we obtain that for the unique restoration of K_1, $\hat{K}_2$, $\hat{K}_3$ it is sufficient to have the outputs of the dynamic system to the test inputs $x^{\alpha_i}_{\omega_1\omega_2}(t)$, $i=1,2$, $\alpha_1\neq\alpha_2$ of form (3) and condition

$$f_2(t,\omega_1,0) = f_2(t-\omega_1,-\omega_1,0).$$

In this case the identification problem, for example, of kernel K_1 can be reduced to equation (9) with the right-hand side of (12), where

$$f^{\alpha_i}(t,\omega_1,0) = \frac{1}{2}\Big(y^{\alpha_i}(t,\omega_1,0) - y^{\alpha_i}(t-\omega_1,-\omega_1,0)\Big),$$

and $y^{\alpha_i}(t,\omega_1,0)$ are the outputs of the reference model to the input (3) at $\omega_2=0$ with amplitudes α_i.

3. Application

Modern energy facilities are characterized by complex flow charts and diverse processes that occur in their components. The establishment of secure conditions of the equipment operation, development and application of effective methods for forecasting the dynamic loads during contingencies are the key problems of prospective energy technologies. Therefore, the studies in the field of mathematical description of the energy system dynamics are relevant.

3.1. **A mathematical model of the heat exchanger element.** The reference dynamic system is represented by a mathematical model of a transient process in the heat exchanger element with independent heat supply [13]:

$$\Delta i_{et}(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\int\limits_0^t \left(\Delta\mathcal{Q}(\eta) - \frac{\mathcal{Q}_0}{\mathcal{D}_0}\Delta\mathcal{D}(\eta)\right)\left(e^{-\lambda_1\int\limits_\eta^t \mathcal{D}(s)ds} - e^{-\lambda_2\int\limits_\eta^t \mathcal{D}(s)ds}\right)d\eta. \tag{14}$$

In (14) $t \in [0,T]$ is time, subscripts "0" denote the parameters of the initial stationary condition, $\mathcal{D}_0 = 0.16$ (kg/sec), $\mathcal{Q}_0 = 100$ (kW), $i_0 = 434$ (kJ/kg), Δ is an increment, for example $\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}_0 + \Delta\mathcal{D}(t)$, λ_1 and λ_2 are the roots of a characteristic equation for some system of two first- order ordinary differential equations. The numerical characteristics that belong to (14), were assumed according to a real high-temperature circuit.

A combined quadratic model was constructed for the case of the vector input signal [8]. Here we used the outputs $\Delta i_{et}(t)$ to a series of test inputs $\Delta\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}(t) - \mathcal{D}_0$ of form (14) and $\mathcal{Q}(t) = \mathcal{Q}_0$ ($\Delta\mathcal{Q}(t) = \mathcal{Q}(t) - \mathcal{Q}_0$ and $\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}_0$) for $t \in [0,30]$ (sec) on the uniform mesh with the step size $h = 1$ (sec).

3.2. **A mathematical model of the wind power plant.** As a reference dynamic system we use a mathematical model of horizontal axis wind power plant presented with the techniques [14]–[16] in the following form:

$$Z(t) = \frac{\omega_T(t)R}{V(t)}, \quad z(t) = \left(\frac{1}{Z(t)+0.08b(t)} - \frac{0.035}{b^3(t)+1}\right)^{-1}, \tag{15}$$

$$C_p(t) = 0.22\left(\frac{116}{z(t)} - 0.4b(t) + 5\right)\exp\left(-\frac{12.5}{z(t)}\right), \tag{16}$$

$$M_T(t) = \frac{\rho S C_p(t) V^3(t)}{2\omega_T(t)}, \quad \frac{d\omega_T}{dt} = \frac{M_T(t) - M_C(t)}{J}, \ \omega_T(0) = \omega_{T_0}, \tag{17}$$

where ω_T (rad/sec) is an angular velocity of wind power plant components, ω_{T_0} (rad/sec) is some stationary value of the angular velocity, M_T (N·m) is a torque produced by aerodynamic force, M_C (N·m) is a load resistant torque, J (kg·m^2) is a moment of inertia of the wind turbine moving parts, ρ (kg·m^2) is an air density, S (m^2) is a swept area, R (m) is a wind wheel radius, b (degree) is a blade pitch angle, V (m/sec) is a wind speed; dimensionless values: C_p is a coefficient of wind energy use, Z is a specific speed, z is a current value of the specific speed.

System (15)–(17) was numerically solved using the fourth-order Runge-Kutta method. The outputs $\Delta\omega_T(t) = \omega_T(t) - \omega_{T_0}$ to the test inputs $\Delta b(t) = b(t) - b_0$ of form (14) and $V(t) = V_0$ ($\Delta V(t) = V(t) - V_0$ and $b(t) = b_0$) were used to construct quadratic Volterra polynomials on the uniform mesh with the step size $h = 1$ (sec) at $t \in [0,20]$ (sec). The research is a continuation of the studies started in [17].

4. Results of the computational experiments

This section includes a description of the respective software; presents illustrative calculations on the example of reference dynamic systems. A software package [18]—[20] was created in the object-oriented programming environment Borland C++ Builder and is based on the function-module principle. The software package includes the following modules: modules of constructing integral models in the form of linear, quadratic and cubic Volterra polynomials for scalar input signals; modules of constructing integral models in the form of linear and quadratic Volterra polynomials for vector input signals; module of calculating a controlled input action that provides a reliable (specified) response of the integral model (such problem arises in relation to the problems of automatic regulation of technical objects).

The software consists of blocks intended for adjustment of input parameters, identification and modeling. In a dialog mode user can change the reference model parameters and specify discretization step, length of time section $[0, T]$ and amplitude of test input signals. The identification block calculates net analogues of the reference model responses to sets of test input signals. The obtained data are used for approximation of transient characteristics of dynamic object. The procedures for identification are based on difference analogs of inversion formulas, which provides fast on-line operation. The software implements the input functions and digitization of input actions, as well as graphical representation of computational experiment results. User can study integral models by choosing input disturbances from a database or by setting signals with the help of manipulator “mouse”. All the output data are stored in respective files on a disk and can be used for detailed familiarization and analysis.

Since it is a priori unknown whether or not the modeled dynamic system is stationary, we will make an a posteriori analysis of the indicated dynamic systems. To this end we will consider a two-dimensional output of the system to the test signals $x_{\omega_1}(t) = e(t) - e(t - \omega_1)$. If it turns out that $K'_{1t} \equiv -K'_{1\omega_1}$, then it means that $K_1(t, \omega_1) \equiv K_1(t - \omega_1)$ and, hence, the system is stationary.

For the dynamics of heat exchange it was obtained that the reference system is stationary with respect to heat supply $\Delta\mathcal{Q}$. Non-stationarity of model (14) with respect to the liquid flow rate $\Delta\mathcal{D}$ for $\mathcal{Q}_0 = 100$ (kW) is illustrated by the plot of $\varepsilon = |K'_{1t}| - |K'_{1\omega_1}|$ in Fig. 1.

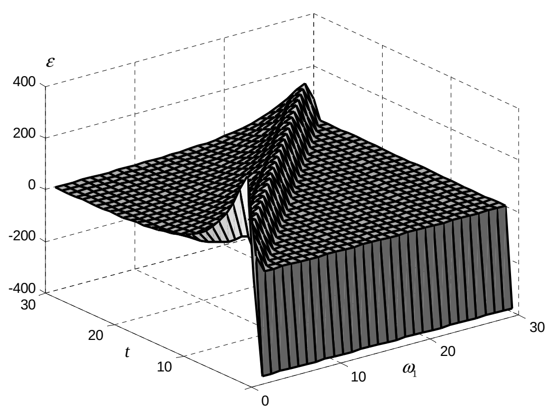


Рис. 1. Error ε is obtained for the kernels reflecting the impact of $\Delta\mathcal{D} = 0.08$ (kg/sec) for $0 \le \omega_1 \le t \le 30$

Figure 2 presents the graphs of error ε by $t = \omega_1$. The plot ε_1 of is obtained in the case where the Volterra kernels $K_1(t, s)$ are constructed for $\Delta\mathcal{D} = 0.04$ (kg/sec), ε_2 is for $\Delta\mathcal{D} = 0.08$ (kg/sec), ε_3 is for $\Delta\mathcal{D} = 0.12$ (kg/sec) at $\mathcal{Q}_0 = 100$ (kW).

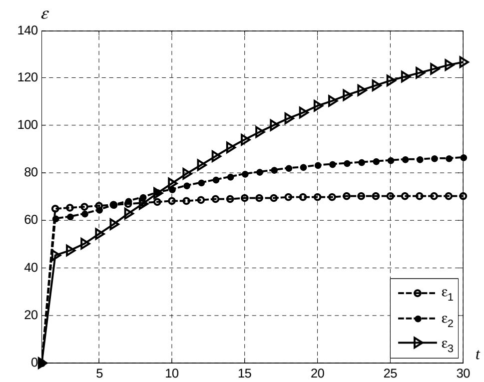


Рис. 2. Error ε is obtained for the kernels reflecting the impact of $\Delta\mathcal{D}$ for $t = \omega_1$

The research of dynamics of change in the angular velocity ω_T of the wind power plant shows the system's non-stationarity with respect to the blade angle Δb and wind speed ΔV. Figure 3 presents the graphs of error ε for $V_0 = 10$ (m/sec). Figure 4 presents the graphs of error ε at $b_0 = 0$ (degrees).

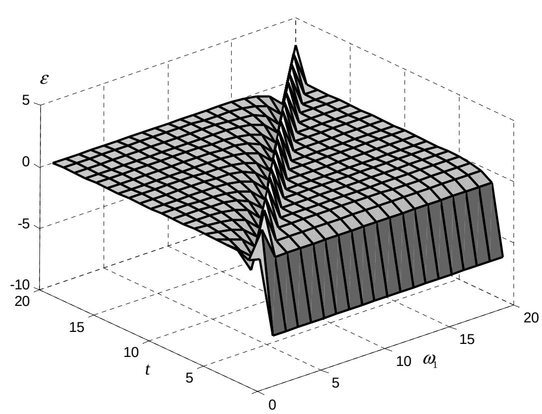


Рис. 3. Error ε is obtained for the kernels that reflect the influence of $\Delta b = 10$ (degrees) for $0 \leq \omega_1 \leq t \leq 20$

Figures 5 and 6 demonstrate the plots of ε by $t = \omega_1$ for input signals Δb and ΔV, respectively. In Figure 5 the plot of ε_1 is obtained in the case where the Volterra kernels $K_1(t, s)$ are constructed for $V_0 = 8$ (m/sec), ε_2 is for $V_0 = 10$ (m/sec) at $\Delta b = 10$ (degrees). In Figure 6 the plot of ε_1 is obtained in the case where the Volterra kernels $K_1(t, s)$ are constructed for $b_0 = 10$ (degrees), ε_2 is for $b_0 = 20$ (degrees), ε_3 is for $b_0 = 0$ (degrees) at $\Delta V = 5$ (m/sec). It is obvious (Figs. 1–6) that the studied dynamic systems are non-stationary in the studied range of input parameters.

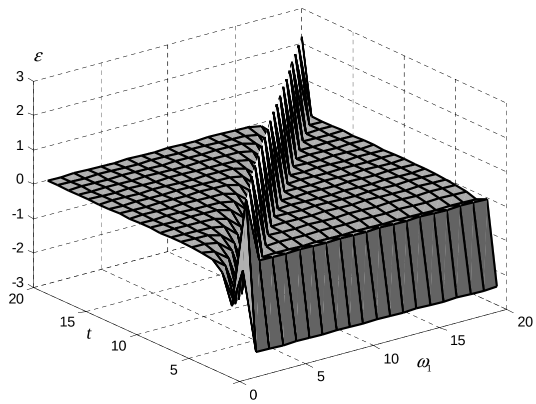


Рис. 4. Error ε is obtained for the kernels that reflect the influence of by $\Delta V = 5$ (m/sec) for $0 \leq \omega_1 \leq t \leq 20$

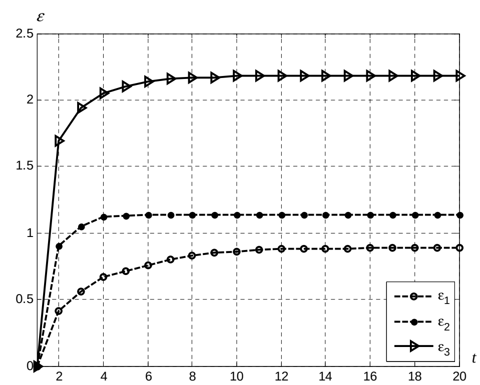


Рис. 5. Error ε is obtained for the kernels that reflect the influence of Δb for $t = \omega_1$

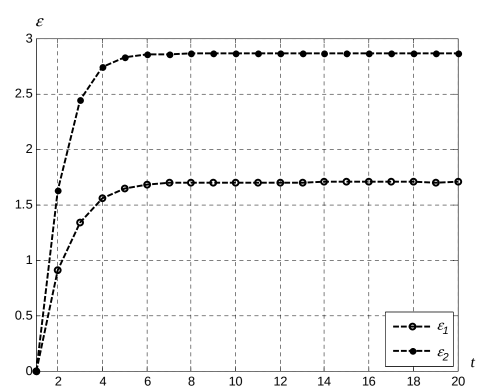


Рис. 6. Error ε is obtained for the kernels that reflect the impact of ΔV for $t = \omega_1$

5. Conclusion

The paper considers the algorithms for the construction of quadratic and cubic Volterrra polynomials for the description of non-stationary dynamics of isolated energy systems. To construct the quadratic Volterra polynomials we applied two reference "input–output" models of energy systems. It is shown that the studied dynamic characteristics are non-stationary in the investigated range of input parameters.

It is established that the integral models describing the nonlinear dynamics of heat exchange can be simplified considering stationary properties of the system with respect to thermal load.

Further it is planned to apply this approach to the research into complex dynamic systems which contain an arbitrarily large amount of components of the active-adaptive isolated system.

References

[1] A.S. Apartsyn, *Non-classical Volterra Equations of the First Kind in the Integral Models of Dynamic Systems: Theory, Numerical Methods, Application*, Thesis... Dr. of Physical-Mathematical Sciences, Irkutsk: Irkutsk State University, 2000.

[2] S.N. Grigorenko, V.D. Pavlenko, *Effectivness of reduction methods of diagnostic models bbased on Volterra kernels objecs controlling*, Eastern European Scientific Journal, **6** (2014), 367–374.

[3] L.V. Danilov, L.N. Matkhanov, V.S. Filippov, *Theory of Nonlinear Dynamic Circuits*, Moscow: Energoizdat, 1990.

[4] L. Lyuing, *System Identification. Theory for Users*, Moscow: Nauka, 1991.

[5] A.S. Apartsyn, S.V. Solodusha, V.A. Spiryaev, *Modeling of Nonlinear Dynamic Systems with Volterra Polynomials: Elements of Theory and Applications*, The International Journal of Energy Optimization and Engineering, **4** (2013), 16–43.

[6] A.S. Apartsyn, *Non-classical Volterra Equations of the First Kind: Theory and Numerical Methods*, Novosibirsk: Nauka, 1999.

[7] A.S. Apartsyn, S.V. Solodusha, *About Optimization of the Amplitudes of Test Signals in Identification of Volterra Kernels*, Automatics and Telemechanics, **3** (2004), 116–124.

[8] S.V. Solodusha, *Numerical Modeling of Heat Transfer Dynamics by using the Modified Quadratic Volterra Polynomial*, Computational Technologies, **2** (2013), 83–94.

[9] A.S. Apartsyn, *To the Identification of Nonlinear Non-stationary Dynamic Systems*, Boundary Value Problems, Irkutsk: Irkutsk State University, (1997), 91–99.

[10] S.V. Solodusha, D.O. Gerasimov, K.V. Suslov, *Construction of an Integral Model on the Example of the Wind Turbine Dynamics*, News of SUSU: Mathematical Modeling and Programming, **4** (2015), 40–49.

[11] S.V. Solodusha, K.V. Suslov, D.O. Gerasimov, *A New Algorithm for Construction of Quadratic Volterra Model for a Non-Stationary Dynamic System*, IFAC-PapersOnLine, **11** (2015), 992-–997.

[12] A.S. Apartsyn, *About Improvement of Modeling Accuracy of Nonlinear Dynamic Systems by the Volterra Polynomials*, Electronic Modeling, **6** (2001), 3–12.

[13] E.A. Tairov, *Nonlinear Modeling of Heat Transfer Dynamics in the Duct with a Single-Phase Heat Carrier*, Bulletin of AS USSR: Energy and Transport, **1** (1989), 150–156.

[14] N.V. Pronin, A.S. Martiyanov, *A model of the Wind Generator VEU-3 in the MATLAB Package*, News of SUSU: Energy, **37** (2012), 143–145.

[15] A. Perdana, O. Carlson, J. Persson, *Dynamic Response of Grid-Connected Wind Turbine with Doubly Fed Induction Generator during Disturbances*, Proc. of IEEE Nordic Workshop on Power and Industrial Electronics, 2004.

[16] A. Sedaghat, M. Mirhosseini, *Aerodynamic Design of a 300 kW Horizontal Axis Wind Turbine for Province of Semnan*, Energy Conversion and Management, **63** (2012), 87–94.

[17] D.O. Gerasimov, S.V. Solodusha, K.V. Suslov, *Algorithms for Controlling Active-Adaptive Network Elements, Based on the Integro-Power Volterra series*, Modern technologies. System analysis. Modeling, **1** (2015), 97–101.
[18] S.V. Solodusha, *Software package for modeling nonlinear dynamics of heat exchange by quadratic Volterra polynomials*, State registration certificate for the computer software, 2012614246 (2012).
[19] S.V. Solodusha, V.A. Spiryaev, *Software package for modeling the nonlinear dynamics systems using cubic Volterra polynomials (scalar case)*, State registration certificate for the computer software, 2013618929 (2013).
[20] S.V. Solodusha, *Software package for modeling of dynamic processes with nonstationary properties using cubic Volterra polynomials (vector case)*, State registration certificate for the computer software, 2015660174 (2015).

Svetlana V. Solodusha
Energy Systems Institute SB RAS,
str. Lermontov, 130,
664033, Irkutsk, Russia
E-mail address: solodusha@isem.irk.ru

Dmitriy O. Gerasimov
Irkutsk National Research Technical University,
str. Lermontov, 83,
664074, Irkutsk, Russia
E-mail address: gerasimovdo@mail.ru

Konstantin V. Suslov
Irkutsk National Research Technical University,
str. Lermontov, 83,
664074, Irkutsk, Russia
E-mail address: souslov@istu.edu

Vladislav A. Vinnikov
Irkutsk National Research Technical University,
str. Lermontov, 83,
664074, Irkutsk, Russia
E-mail address: vva_95@mail.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.173–С.181 (2015)

УДК 519.642 519.642
MSC 65R20

РЕАЛИЗАЦИЯ МОЗАИЧНО-СКЕЛЕТОННОГО МЕТОДА В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

М.Ю. ТАЛТЫКИНА, А.А. КАШИРИН

Abstract. The paper considers numerical solution of three-dimensional Dirichlet problems for the Helmholtz equation by a method of integral equations. For decreasing computational complexity a mosaic-skeleton method is used. A software package is developed for multiprocess systems with shared memory. Numerical experiments have shown the efficiency of offered approach.

Keywords: Dirichlet problem, Helmholtz equation, mosaic-skeleton method, software package.

1. Введение

Рассматриваемые в настоящей работе задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца решаются в основном численно, так как их аналитические решения получены только для простых областей. Численное решение предполагает предварительное построение дискретного аналога исходной задачи, которое может быть проведено, например, с помощью конечно-разностных или проекционно-сеточных методов. Однако в случае внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца такие методы предъявляют высокие требования к вычислительным ресурсам. Другой подход состоит в том, чтобы сформулировать исходную

Taltykina, M.Y., Kashirin, A.A., Application of the mosaic-skeleton method to software package for solving three-dimensional Dirichlet problems for the Helmholtz equation.

Работа поддержана РФФИ (проект 14-01-00781) и Программой фундаментальных исследований ДВО РАН (проект 15-I-4-075).

Поступила 1 августа 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

задачу в виде эквивалентного граничного интегрального уравнения и построить дискретный аналог задачи на основе этого уравнения. Такой подход более предпочтителен с вычислительной точки зрения, поскольку в этом случае трехмерная задача Дирихле в неограниченной области сводится к двумерной задаче на границе области.

В данной работе задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца формулируются в виде граничных интегральных уравнений Фредгольма первого рода со слабой особенностью в ядре [1]. Для дискретизации этих уравнений используется согласованный с шагом сетки на границе области специальный метод осреднения слабо сингулярных ядер интегральных операторов [1, 2]. В отличие от наиболее популярных в настоящее время методов граничных элементов, применяемый подход не требует предварительной триангуляции поверхности, одинаково просто реализуется как на регулярных, так и на нерегулярных сетках, и позволяет обойтись без трудоёмкого приближённого вычисления кратных поверхностных интегралов. Это существенно понижает вычислительную сложность дискретизации, позволяя вычислять коэффициенты систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), аппроксимирующих интегральные уравнения, по весьма простым формулам. После нахождения решения СЛАУ решения исходных задач восстанавливаются в любой точке области.

Полученные СЛАУ с плотными матрицами решаются обобщённым методом минимальных невязок (GMRES) [3], который в данном случае имеет сложность $O(mn^2)$, где m – количество итераций, а n – порядок матрицы. Наиболее трудоёмкой частью GMRES является многократное применение матрично-векторного умножения. С целью снижения сложности такого умножения используется мозаично-скелетонный метод [4]–[8]. Его основная идея заключается в аппроксимации больших блоков плотной матрицы суммами одноранговых матриц (скелетонов). Структура хранения таких матриц в виде строк и столбцов позволяет умножать их на вектор за почти линейное число операций, а также снизить затраты оперативной памяти.

Для численного решения рассматриваемых задач разработан программный комплекс для многопроцессорных систем с общей памятью. Распараллеливание проводилось с помощью технологии OpenMP. Тестирование программы проходило на кластере ВЦ ДВО РАН на вычислительном узле с 4-мя шестиядерными процессорами Six Core AMD Opteron$^{\text{TM}}$ 8431, тактовой частотой 2.40 ГГц и оперативной памятью 96 ГБ (http://hpc.febras.net/).

1.1. **Обобщённая постановка задачи Дирихле.** Рассмотрим трёхмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с ортогональной системой координат $ox_1x_2x_3$. Пусть в этом пространстве имеется произвольная замкнутая липшицева поверхность Γ, разделяющая его на внутреннюю область Ω_i и внешнюю область $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}_i$.

Сформулируем исходную задачу [9].

Задача 1 (внешняя задача Дирихле). Найти функцию $u_e(x) \in H^1(\Omega_e)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца

$$\Delta u_e + k^2 u_e = 0, \quad x \in \Omega_e, \tag{1}$$

граничному условию

$$\gamma u_e = f, \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

и условию излучения на бесконечности

(3) $$\partial u_e/\partial\left|x\right| - iku_e = o\left(\left|x\right|^{-1}\right), \quad \left|x\right| \to \infty.$$

Здесь $\Delta = \nabla^2$ – оператор Лапласа, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, k – волновое число, $\mathrm{Im}(k) \geq 0$, γu_e – след на Γ функции u_e, $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ – известная функция. Определения используемых здесь и далее функциональных пространств имеются в работе [9].

Замечание 1. Если $\mathrm{Im}(k) = 0$, то $u_e \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_e)$.

Справедлива следующая теорема [9].

Теорема 1. *Для любой функции $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ существует единственное решение внешней задачи 1 из пространства $H^1(\Omega_e)$.*

1.2. **Интегральная формулировка задачи 1.** Решение задачи 1 будем искать в виде потенциала простого слоя

(4) $$u_e(x) = (Sq)(x) \equiv \langle G(x,\cdot), q\rangle_\Gamma, \quad x \in \Omega_e,$$

(5) $$G(x,y) = \exp\left(ik\left|x-y\right|\right)/(4\pi\left|x-y\right|).$$

Ядром интегрального оператора (4) является фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, поэтому u_e удовлетворяет уравнению (1) и условию излучения (3). Эта функция будет решением задачи 1, если подобрать плотность q так, чтобы u_e удовлетворяла граничному условию (2). Таким образом, задача 1 сводится к граничному тождеству

(6) $$\langle Sq, \mu\rangle_\Gamma = \langle f, \mu\rangle_\Gamma \ \ \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Теорема 2. *Пусть $\mathrm{Im}(k) > 0$ или k^2 не является собственным значением однородной задачи*

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \qquad \gamma u = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Тогда уравнение (6) корректно разрешимо в пространстве $H^{-1/2}(\Gamma)$ и формула (4) дает решение задачи 1.

Доказательство теоремы можно найти в работе [8].

2. Дискретизация интегральных уравнений

Применяемый метод численного решения приведен в работе [1], кратко опишем общую схему его реализации. Построим покрытие поверхности Γ системой $\{\Gamma_m\}_{m=1}^M$ окрестностей узловых точек $x'_m \in \Gamma$, лежащих внутри сфер радиусов h_m с центрами в x'_m, и обозначим через $\{\varphi_m\}$ подчинённое ему разбиение единицы. В качестве φ_m будем использовать функции

$$\varphi_m(x) = \varphi'_m(x)\left(\sum_{k=1}^{M}\varphi'_k(x)\right)^{-1}, \qquad \varphi'_m(x) = \begin{cases} \left(1 - r_m^2/h_m^2\right)^3, & r_m < h_m, \\ 0, & r_m \geq h_m, \end{cases}$$

где $x \in \Gamma$, $r_m = |x - x'_m|$, $\varphi_m \in C^1(\Gamma)$ при $\Gamma \in C^{r+\beta}$, $r + \beta > 1$.

Приближённые решения уравнений (6) будем искать на сетке $\{x_m\}$,

$$x_m = \frac{1}{\bar{\varphi}_m}\int\limits_\Gamma x\varphi_m d\Gamma, \quad \bar{\varphi}_m = \int\limits_\Gamma \varphi_m d\Gamma,$$

узлами которой являются центры тяжестей функций φ_m. Будем предполагать, что для всех $m = 1, 2, \dots, M$ выполняются неравенства

$$0 < h' \le |x_m - x_n|\,, \quad m \ne n, \quad n = 1, 2, \dots, M,$$

$$h' \le h_m \le h, \quad h/h' \le q_0 < \infty,$$

где h, h' – положительные числа, зависящие от M, q_0 не зависит от M.

Вместо заданной на Γ неизвестной функции q будем искать обобщённую функцию $q\delta_\Gamma$, действующую по правилу

$$(q\delta_\Gamma, \eta)_{\mathbb{R}^3} = \langle q, \eta\rangle_\Gamma \qquad \forall \eta \in H^1(\mathbb{R}^3).$$

Приближать эту функцию будем выражением

$$q\,(x)\,\delta_\Gamma\,(x) \approx \sum_{n=1}^{M} q_n \bar{\varphi}_n \psi_n(x),$$

где q_n – неизвестные коэффициенты,

$$\psi_n(x) = (\pi\sigma_n^2)^{-3/2} \exp\left(-(x - x_n)^2/\sigma_n^2\right), \ \sigma_n^2 = 0.5\bar{\varphi}_n.$$

В работе [1] показано, что для любых функций $\eta \in H^1(\mathbb{R}^3)$ и $q \in H^1(\Gamma)$ справедливо равенство

$$\langle q, \eta\rangle_\Gamma = \sum_{n=1}^{M} q_n \bar{\varphi}_n (\psi_n, \eta)_{\mathbb{R}^3} + O(h^2).$$

Следуя этой работе, будем аппроксимировать потенциал простого слоя по формуле

$$\langle Sq, \varphi_m\rangle_\Gamma \approx \sum_{n=1}^{M} B_{mn} q_n, \quad m = 1, 2, ..., M, \tag{7}$$

$$B_{mn} = \frac{\beta_{mn}}{2r_{mn}} \exp\left(-\gamma_{mn}^2\right)\left(w\,(z_1) - w\,(z_2)\right), \quad m \ne n,$$

$$\beta_{mn} = \frac{\bar{\varphi}_m \bar{\varphi}_n}{2\pi\,(1 - \mu_{mn}^2 + 0.5\mu_{mn}^4)},$$

$$B_{mm} = \beta_{mm}\left(\frac{2}{\pi^{1/2}\sigma_{mm}} + i\kappa w\,(\mu_{mm}) + 8\pi^{3/2}\sigma_{mm}\,(\bar{\varphi}_m)^{-3}\left(1 - 2\,(\mu_{mm})^2 \big/ 3\right)\right), \tag{8}$$

$$r_{mn} = |x_m - x_n|\,, \quad \sigma_{mn} = \left(\sigma_m^2 + \sigma_n^2\right)^{1/2}, \quad \gamma_{mn} = r_{mn}/\sigma_{mn},$$

$$z_1 = \mu_{mn} - i\gamma_{mn}, \quad z_2 = \mu_{mn} + i\gamma_{mn}, \quad i^2 = -1, \quad \mu_{mn} = 0.5k\sigma_{mn},$$

$$w\,(z) = -\frac{2i}{\pi^{1/2}} \exp\left(-z^2\right) \int\limits_z^\infty \exp\left(t^2\right) dt.$$

Решая СЛАУ

$$\sum_{n=1}^{M} B_{mn} q_n = \bar{\varphi}_m f_m, \quad m = 1, 2, ..., M, \tag{9}$$

где

$$f_m = \frac{1}{\bar{\varphi}_m} \int\limits_{\Gamma} f \varphi_m d\Gamma,$$

найдём приближённые значения коэффициентов q_n. После этого решения исходных задач могут быть найдены по формулам

$$u_e(x) = \sum_{n=1}^{M} \int\limits_{\Gamma_n} G(x,y) q_n \varphi_n(y) d\Gamma_y, \quad x \in \Omega_e,$$

в «ближней» зоне, и по формулам

$$u_e(x) = \sum_{n=1}^{M} G(x, x_n) q_n \bar{\varphi}_n, \quad x \in \Omega_e,$$

в «дальней» зоне.

3. Мозаично-скелетонный метод

Пусть A_k – некоторая подматрица (блок) матрицы $A^{n \times m}$, а $\Pi(A_k)$ – матрица размера $n \times m$, полученная из A_k путём дополнения до A нулями.

Определение 1. *Конечное множество блоков $\{A_k\}$ будем называть покрытием A, если*

$$A = \sum_k \Pi(A_k),$$

и мозаичным разбиением A, если, дополнительно, $\bigcap\limits_k A_k = \varnothing$.

Определение 2. *Мозаичным рангом матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, соответствующим покрытию $\{A_k\}$, будем называть число*

$$\mathrm{mr}(A) = \sum_k \mathrm{mem}(A_k)/(n+m), \tag{10}$$

где сумма берётся по всем блокам покрытия $A_k \in \mathbb{C}^{n_k \times m_k}$, и $\mathrm{mem}\,(A_k) = \min\{n_k m_k,\ (n_k + m_k)\,\mathrm{rank}\,(A_k)\}$.

Отметим, что мозаичный ранг характеризует как вычислительную сложность матрично-векторного умножения, так и объем памяти, необходимый для хранения покрытия матрицы A.

Другим критерием эффективности метода является фактор сжатия, он задается следующей формулой:

$$I = \frac{\mathrm{mem}(A^{(p)})}{\mathrm{mem}(A)} 100,$$

где $\mathrm{mem}(A^{(p)})$ – объем памяти, необходимой для хранения матрицы в малоранговом формате, $\mathrm{mem}(A)$ – объем памяти для хранения исходной матрицы.

Определение 3. *Будем называть скелетоном матрицу вида uv^*, где u и v – вектор-столбцы, v^* обозначает вектор-строку, эрмитово-сопряженную к вектору v.*

Из определения 3 следует, что $\operatorname{rank}(uv^*) = 1$.

Мозаично-скелетонный метод состоит из трех этапов: построение дерева кластеров, создание списка блоков и нахождение мозаично-скелетонной аппроксимации. На первом этапе все точки дискретизации заключаются в куб подходящего размера, который будет являться кластером нулевого уровня. На следующем шаге каждое ребро куба делится пополам, и все точки сетки распределяются по восьми дочерним подкубам (часть из подкубов может быть пустая). Далее процедура деления продолжается с подкубами, пока уровень дерева не достигнет заданного.

Список блоков строится по полученному дереву. Каждый блок образуется парой кластеров, которые задают его размеры и определяют зону, в которую он попадает. Если точки кластеров геометрически удалены друг от друга, блок попадает в дальнюю зону, иначе – в ближнюю. На последнем этапе метода для блоков дальней зоны строится мозаично-скелетонная аппроксимация по методу неполной крестовой аппроксимации [6] – [8]. После построения приближения блоки дальней зоны сохраняются в виде столбцов и строк. Блоки ближней зоны высчитываются поэлементно по формулам (8) и хранятся в виде матриц.

В GMRES на этапе матрично-векторного умножения возникает разветвление: блоки ближней зоны умножаются на вектор с помощью функции из Intel Math Kernel Library, а блоки дальней зоны для умножения используют специальную функцию, учитывающую специфику их хранения. Она позволяет умножать такие блоки на вектор за почти линейное число операций.

4. Численные эксперименты

Пример 1. Рассматриваются внешние задачи Дирихле для эллипсоида с полуосями $(0.75, 1, 0.5)$ и центром в точке $(0, 0, 0)$, граничные условия имеют вид

$$u_e(x) = \exp(ikx_3), \quad x \in \Gamma,$$

волновые числа $k_1 = 1, k_2 = 14, k_3 = 30$.

Для начала рассмотрим относительные погрешности решений задач из примера 1 в норме пространства сеточных функций $H_h^0(\Omega_e)$. Они представлены на рисунке 1 сплошными линиями. Здесь и далее, квадратами помечены графики при $k = 1$, кругами – графики при $k = 14$, треугольниками – графики при $k = 30$. Так как аналитические решения задач неизвестны, то в качестве наиболее точного решения принималось решение на самой густой сетке при 256640 точках дискретизации. Важно отметить, что метод имеет второй порядок точности относительно $h^2 \sim M^{-1}$, так как при удвоении порядка матрицы погрешности падают в два раза.

На рисунке 2 представлено время решения задач из примера 1 при использовании мозаично-скелетонного метода в GMRES (пунктирная линия) и без него (сплошная линия). Время t представлено в секундах. Мозаично-скелетонный метод дает существенный выигрыш во времени (до 200 раз), а также понижает сложность метода. При удвоении количества узловых точек время возрастает в 2.5–3 раза. Напомним, что GMRES имеет квадратичную сложность относительно порядка матрицы.

Значения мозаичного ранга и фактора сжатия приведены соответственно в таблицах 1 и 2. Эксперименты показывают, что с ростом M мозаичный ранг растёт как $O(\ln^3(M))$, а фактор сжатия, начиная с некоторого M, уменьшается как $O(\ln^3(M)/M)$. Чем больше точек дискретизации, тем выгоднее использовать рассматриваемый метод.

На рисунке 3 представлено время решения СЛАУ в зависимости от количества используемых ядер вычислительного кластера. При удвоении количества ядер время падает в среднем в 1.7 раз.

Пример 2. Рассматриваются внешние задачи Дирихле для эллипсоида с полуосями $(0.75, 1, 0.5)$ и центром в точке $(0, 0, 0)$, граничные условия имеют вид

$$f(x) = \exp(ik\,|x - x_0|)/|x - x_0|, \quad x \in \Gamma, \tag{11}$$

волновые числа k те же, что и в примере 1, $x_0 = (0.375, 0.5, 0)$.

Относительные погрешности решений внешних задач из примера 2 представлены на рисунке 1 пунктирными линиями. Как и в примере 1, метод имеет второй порядок точности относительно шага сетки h.

Мозаичный ранг, фактор сжатия, а также результаты тестирования параллельной версии для задач из примера 2 аналогичны предыдущим из примера 1.

5. Заключение

В данной работе рассмотрено применение мозаично-скелетонного метода к численному решению трехмерных задач Дирихле для уравнения Гельмгольца. Результаты экспериментов показывают, что использование метода понижает сложность решения задачи, а также снижает требования к ресурсам компьютера при сохранении прежней точности.

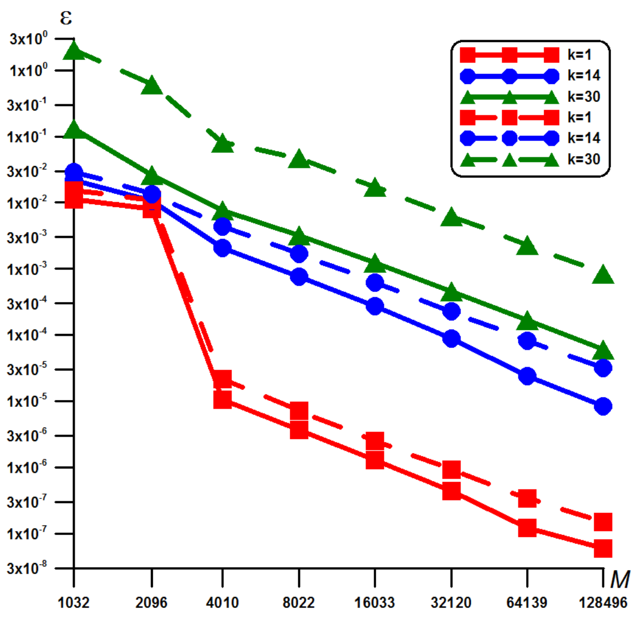


Рис. 1. Погрешности решений внешних задач из примера 1 (сплошная линия) и из примера 2 (пунктирная линия).

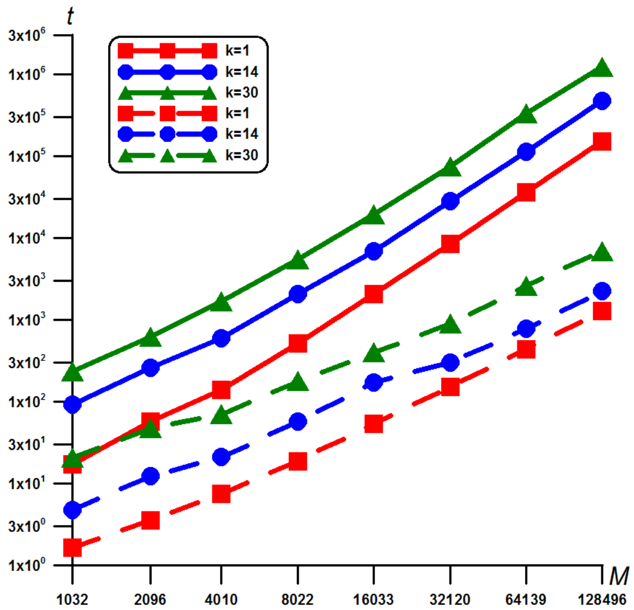


Рис. 2. Время решения СЛАУ для примера 1 с использованием мозаично-скелетонного метода (пунктирная линия) и без его использования (сплошная линия).

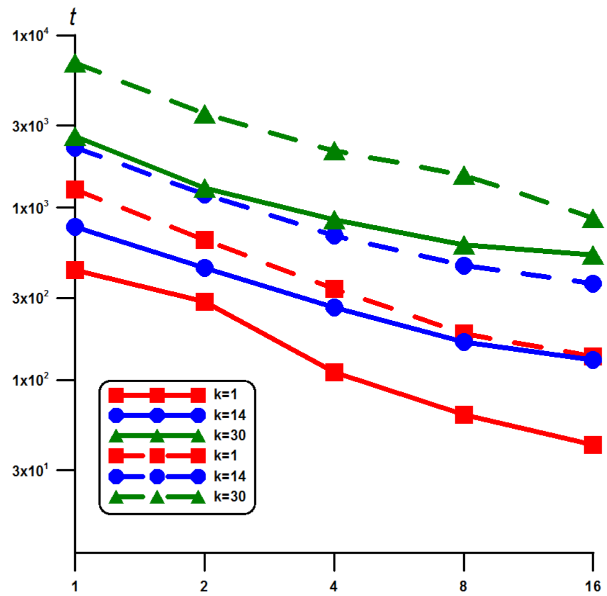


Рис. 3. Время решения СЛАУ для примера 1 при распараллеливании. Порядок СЛАУ – 64139 (сплошная линия) и 128946 (пунктирная линия).

Таблица 1. Мозаичный ранг для задач из примера 1.

$k\backslash M$	1032	2096	4010	8022	16033	32120	64139	128496
1	482.4	739.4	988.1	1259.9	1560.2	1921.6	2360.9	2889.0
14	513.8	839.8	1133.8	1417.2	1704.1	2043.9	2433.9	2913.2
30	516.0	983.4	1387.9	1765.8	2119.7	2496.8	2933.4	3428.5

Таблица 2. Фактор сжатия для задач из примера 1.

$k\backslash M$	1032	2096	4010	8022	16033	32120	64139	128496
1	93.5	70.6	49.3	31.4	19.5	12.0	7.4	4.5
14	99.6	80.1	56.6	35.3	21.3	12.7	7.6	4.5
30	100.0	93.8	69.2	44.0	26.4	15.5	9.1	5.3

References

[1] A.A. Kashirin, S.I. Smagin, *About numerical solution of the Dirichlet problem for the Helmholtz equation by the methods of potentials*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **52 (8)** (2012), 1492–1505 (in Russian).

[2] A.A. Kashirin, S.I. Smagin, *On Numerical Solution of Integral Equations for Three-dimensional Diffraction Problems*, MTPP 2010, LNCS. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, **6083** (2010), 11–19.

[3] Y. Saad, M. Schultz, *GMRES: a general minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*, SIAM J. Sci Stat. Comput, **7(3)** (1986), 856–869.

[4] E.E. Tyrtyshnikov, *Mosaic-skeleton approximations*, Calcolo, **33(1-2)** (1996), 47–57.

[5] S.A. Goreinov, *Mosaic-sceleton approximations of the matrices, induced by asmimptotically smooth and oscillational kernels*, Matrix methods and computations, ICM RAS, Moscow (1999), 42–76 (in Russian).

[6] D.V. Savostyanov, *Fast polylinear approximation of matrices and integral equations*, PhD thesis, ICM RAS, Moscow (2006) (in Russian).

[7] E.E. Tyrtyshnikov, *Incomplete cross approximations in the mosaic-skeleton method*, Computing, **64(4)** (2000), 367–380.

[8] A.A. Kashirin, S.I. Smagin, M.Yu. Taltykina, *Realization of mosaic-skeleton method in Dirichlet problems for the Helmholtz equation*, Informatics and control systems, **4(46)** (2015), 32–42 (in Russian).

[9] W. McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Mariia Yurievna Taltykina
Computing Center, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences,
st. Kim Yu Chen, 65,
680000, Khabarovsk, Russia
E-mail address: taltykina@yandex.ru

Aleksei Alekseevich Kashirin
Computing Center, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences,
st. Kim Yu Chen, 65,
680000, Khabarovsk, Russia
E-mail address: elomer@mail.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.182–С.188 (2015) УДК 51-76 519.633.251-76
MSC 13A99

ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛЕЙ ФАРМАКОКИНЕТИКИ И ИММУНОЛОГИИ

С.И. КАБАНИХИН, Д.А. ВОРОНОВ, О.И. КРИВОРОТЬКО, А.А. ГРОДЗЬ

Abstract. The problem of the identifiability of dynamic systems is considered in this article. The review of the methods of identifiability analysis is presented. Method based on definition of Lie derivatives, method based on the theory of differential algebra and its modification are covered. Features of special software for identifiability analysis are considered in this paper.

Key words: pharmacokinetics, systems of ordinary differential equations, identifiability, inverse problem, Lie derivatives, software.

Введение

1. Понятие идентифицируемости

Динамические процессы фармакокинетики и иммунологии моделируется [2] системами обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t),p) + \sum_{i=1}^{n} g(x(t),p)u_i(t) \\ y(t) = h(u(t),x(t),p). \end{cases} \tag{1.1}$$

Kabanikhin, S.I., Voronov, D.A., Krivorotko, O.I., Grodz, A.A., Identifiability of dynamic systems illustrated by pharmacokinetic and immunology examples.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации, договором No 107 “Разработка программного обеспечения для исследования численного решения прямых и обратных задач фармакокинетики и эпидемиологии” и Министерством образования и науки Республики Казахстан № 1746/GF4 “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания”.

Поступила 30 мая 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

Где $x(t)$ - n-мерная функция состояния (в фармакокинетике – доза препарата, в эпидемиологии – количество больных разного типа), $y(t)$ - k-мерная функция экспериментальных данных (в фармакокинетике - концентрация препарата в крови и/или моче), $u(t)$ - функция входных данных (в фармакокинетике – способ введения препарата в организм), p - s-мерный вектор параметров, характеризующий рассматриваемый процесс (в фармакокинетике – скорость перехода препарата между органами).

Определение идентифицируемости формулируется [1], [3] следующим образом:

Определение. Модель (1.1) называется *идентифицируемой*, если её параметры $p = [p_1, ..., p_n]$ можно однозначно определить по входным данным $u(t)$ и данным измерений $y(t) = h(t, p)$.

В статье [9] разобраны методы анализа идетифицируемости (метод передаточной функции, метод, основанный на разложении в ряд Тейлора, метод дифференциальной алгебры и метод графов). Вычисления, необходимые для анализа идентифицируемости модели, трудоемко проводить вручную. В этой статье приведен обзор следующих подходов анализов идентифицируемости: модификация метода дифференциальной алгебры, позволяющий определять идентифицируемые комбинации параметров [5]; метод, основанный на разложении в ряд функции измерения $y(t)$ через производные Ли [7] и анализе таблицы идентифицируемости; метод, определяющий чувствительность параметров наряду с идентифицируемостью [12]. Рассмотрены программные комплексы, предназначенные для анализа идентифицируемости, а также примеры применения методов.

2. Обзор методов

2.1. **Метод, основанный на теории дифференциальной алгебры.** Данный подход основан на исключении переменных состояния $x(t)$ и их производных в модели (1.1) с помощью специальной процедуры (псевдоделения) [6], [4]. Далее строится специальное отображение $\psi(y, u, p)$ на основе анализа которого делается вывод об идентифицируемости модели. Отображение: $\psi(y, u, p)$: $P \to c(p)$, здесь P - множество параметров , $c(p)$ - функции от параметров p (т. е. коэффициенты перед мономами $\psi(y, u, p)$. Вычисляя базис Грёбнера для систем уравнений $c(p) = c(p^*)$, проверяется условие взаимнооднозначности отображения [1], [9]. Если система алгебраических уравнений разрешима единственным образом, то модель является идентифицируемой. В противном случае модель неидентифицируема.

Этот метод реализован в программном обеспечении DAISY, которое доступно на сайте http://www.dei.unipd.it/ pia/ [4].

2.2. **Модификация метода 2.1.** Программный комплекс DAISY определяет идентифицируема ли динамическая система (1.1).

Модифицированный метод 2.1 не только определяет идентифицируема наша модель или нет, но и определяет идентифицируемые комбинации параметров модели.

Данный метод реализован в приложении COMBOS. Оно реализовано как веб - приложение и включает в себя удобный пользовательский интерфейс, который доступен по ссылке http://biocyb1.cs.ucla.edu/combos [5].

Идея модифицированного алгоритма заключается в поиске базисов Грёбнера, соответствующих системе уравнений $c(p) = c(p^*)$ [13]. Построенные базисы Гребнера учитывают новое переупорядочение вектора параметров p.

Алгоритм позволяет определять "простейшие"идентифицируемые комбинации параметров (комбинации с наименьшей степенью и минимальным числом слагаемых) среди новых базисов Гребнера.

2.3. **Пример.** Рассмотрим нелинейную четырехкамерную модель ВИЧ, описывающую динамику неинфицированных x_1, латентно инфицированных x_2, активно инфицированных клеток x_3, а также свободных частиц вируса x_4. Более подробно модель описана в статье [10]:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = s - dx_1 - bx_4x_1 \\ \dot{x_2} = q_1bx_4x_1 - m_1x_2 - k_1x_2 \\ \dot{x_3} = q_2bx_4x_1 - k_1x_2 - m_2x_3 \\ \dot{x_4} = k_2x_3 - cx_4 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

Неизвестный вектор параметров $p = [s, d, b, q_1, q_2, m_1, m_2, k_1, k_2, c]$

С помощью DAISY, получен следующий результат: параметры b, d, s - идентифицируемы и c, m_2 - локально идентифицируемы (т.е. имеют конечное число решений), остальные параметры q_1, q_2, m_1, k_1, k_2 - неидентифицируемые .

С помощью COMBOS было получено, что параметры b, d, s - идентифицируемы и c, m_2 - локально идентифицируемы, а также получено, что комбинация параметров dm_2 - локально идентифицируема, q_2k_2 - идентифицируема и комбинации $k_1 + m_1$ и $q_1k_1k_2$ - локально идентифицируемы.

2.4. **Метод, основанный на разложении в ряд с помощью производных Ли.** Этот метод основан на разложении в ряд функции $y = h(x, p, t)$ из системы (1.1), используя производные Ли вдоль векторного поля f, h, g. Здесь $f(x, p), h(x, p), g_j(x, p)$ – рассматриваются как векторные поля [8], [14].

В этом методе функция $y = h(x, p, t)$ может быть разложена по времени в точке $t = t_0$, так, что коэффициенты ее будут равняться производным Ли вдоль векторного поля f и g: $L_fh(x, p, t_0)$, $L_gh(x, p, t_0)$, $L_fL_fh(x,p,t_0)$, $L_fL_gh(x, p, t_0)$, $L_gL_fh(x, p, t_0)$, $L_gL_gh(x, p, t_0)$.

Определение. Производная Ли от функции $h(x, p, t)$ вдоль векторного поля f определяются по формуле:

$$L_fh(x, p, t) = \sum_{i=1}^{n_x} f_i(x, p, t)\frac{\partial h(x,p,t)}{\partial x_i} \tag{2.2}$$

где f_i - i-я компонента поля f, $i = 1,..., n_x$.

Исчерпывающие данные содержат коэффициенты функции измерения $h(x, p, t_0)$ системы (1.1) и последовательные производные Ли вдоль векторного поля f, оцененные в начальные данные $t = t_0$. Модель идентифицируема, если исчерпывающие данные являются единственными.

То есть нужно найти $L_fh(x, p, t_0)$, $L_gh(x, p, t_0)$, $L_fL_fh(x, p, t_0)$, $L_fL_gh(x, p, t_0)$, $L_gL_fh(x, p, t_0)$, $L_gL_gh(x, p, t_0)$ и т. д. Подставить в выражения производных Ли от $h(x,p)$ начальные данные и приравнять к ϕ_i – так называемым, наблюдаемым параметрам. Получится систему алгебраических уравнений. Если решение системы уравнений является уникальным то параметры идентифицируемы.

Данный метод реализован в программе GenSSI [7] в сочетании с использованием таблицы идентифицируемости (Identifiability tableaus) [8], про которую будет рассказано ниже.

2.5. **Таблица идентифицируемости.** После вычисления производных Ли, с помощью таблицы идентифицируемости можно найти идентифицируемые параметры и принять решение, каким образом преобразовать нелинейную систему уравнений для остальных параметров.

Таблица представляет собой ненулевые элементы матрицы Якоби коэффициентов разложения в ряд функции $y(t)$ по неизвестным параметрам [8]. Количество столбцов равно количеству параметров, количество строк - числу коэффициентов в разложении функции $y(t)$ в ряд .

Если в якобиане имеются пустые столбцы, то соответствующие параметры могут быть неидентифицируемы. Анализ идентифицируемости сводится к нахождению ранга матрицы Якоби, и, если ранг якобиана совпадает с количеством параметров, то, параметры являются локально идентифиццируемыми. В этом случае нужно проанализировать таблицу, она поможет при решении системы уравнений, а именно:

Количество ненулевых коэффициентов больше чем неизвестных параметров, на практике это означает, что мы должны выбрать n_p строк, которые гарантируют полный ранг матрицы. Таблица помогает обнаружить необходимые коэффициенты и сформировать минимальную таблицу.

Единственный ненулевой элемент в данной строке минимальной таблицы означает его идентифицируемость. Далее мы можем сокращать строки в таблице, что может привести нас к новым идентифицируемым параметрам.

После того, как сокращений больше не может быть совершено, то можно попытаться решить полученную систему и смотреть решается она однозначно или нет, или при каких комбинациях параметров она может быть разрешима однозначно.

Таблица идентифицируемости позволяет легко визуализировать возможные проблемы идентифицируемости и систематизировать решение полученной алгебраической системы уравнений относительно параметров.

2.6. **Пример.** Рассмотрим нелинейную фармакокинетическую модель [11], представляющую реакцию взаимодействия лиганд макрофага и маннозы. Математическая модель имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1(x_2 - x_1) - \frac{k_a v_m x_1}{k_c k_a + k_c x_3 + k_a x_1}, \\ \dot{x}_2 = \alpha_2(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_3 = \beta_1(x_4 - x_3) - \frac{k_c v_m x_3}{k_c k_a + k_c x_3 + k_a x_1}, \\ \dot{x}_4 = \beta_2(x_3 - x_4), \\ x_1(0) = c_0, x_2(0) = 0, x_3(0) = \gamma c_0, x_4(0) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Где x_1 - концентрация фермента в плазме, x_2 - концентрация во второй камере, x_3 - концентрация в плазме маннозилированных полимеров, x_4 - концентрация маннозилированных полимеров в части внесосудистой жидкости

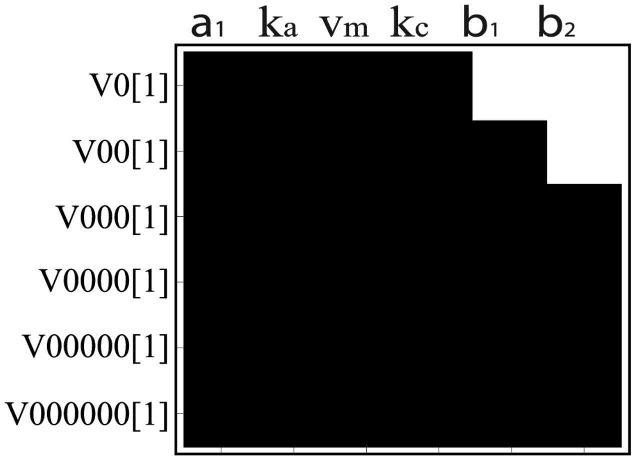


Рис. 2.1. Таблица идентифицируемости для фармакокинетической модели

органов доступных для макромолекул. Вектор неизвестных параметров $p = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, k_c, k_a, v_m]$.

Рассмотрим два случая: (a) измерения известны из первой камеры x_1 ($y_1 = x_1$), случай (b) измерения доступны из второй камеры x_2 $y_2 = x_2$, ко всему этому известен параметр α_2.

С помощью программы GenSSI было получено, что параметры локально идентифицируемы. Результаты таблицы идентифицируемости представлены на рисунке (2.1). В случаях (a) и (b) ранг таблицы идентифицируемости является полным, что гарантирует точно локальную идентифицируемость.

Используя программу DAISY для анализа этой модели, был получен результат, что для случая, когда известны измерения из двух камер ($y_1 = x_1, y_2 = x_2$) и шестью параметрами (т.е. параметр α_2 известен), модель является идентифицируемой. Заметим, что результаты не могут быть получены в случаях (a) и (b), когда известны измерения только из одной камеры.

На рисунке 2.1 представлена таблица идентифицируемости для фармакокинетической модели, где V значения производных Ли функций h_j вдоль f, например, $V000[j] = L_f L_f L_f h_j$, $j = 1, ..., n_y$. Черный квадрат на координатной плоскости (i,k) обозначает, что соответствующий ненулевой коэффициент i ряда зависит от параметра p_k.

2.7. **Программное обеспечение AMIGO.** Программный комплекс AMIGO доступный по адресу http://www.iim.csic.es/ amigo, обладает следующим функционалом:

1. Анализ идентифицируемости для обнаружения идентифицируемых параметров модели.

2. Глобальное упорядочение параметров. Этот шаг поможет решить, какие параметры являются наиболее актуальными для моделирования $y(t)$. В случае отсутствия структурной идентифицируемости, глобальное упорядочение может быть использовано для принятия решений, как перестроить модель или какие параметры можно оценить из данных $y(t)$. Такое воздействие может быть оценено с использованием параметрической чувствительности.

3. Уточнение параметров модели. В этой процедуре используются глобальные методы оптимизации для нахождения неизвестных параметров. К сожалению, так как это обычно бывает, возможно несколько субоптимальных решений. Использование глобальных методов оптимизации должно гарантировать, что найдено наилучшее решение.

4. Проведение практического анализа идентифицируемости. Эта процедура позволяет оценить возможности присвоения уникальных значений параметрам из данного набора экспериментальных данных, с учетом экспериментального шума. Этот шаг помогает оптимально планировать эксперимент для того, чтобы вычислить схему экспериментов, которая максимизирует количество и качество информации с целью уточнения парамеров модели.

5. Оптимальное планирование эксперимента с помощью динамической оптимизации. Цель этого шага заключается в разработке динамических экспериментов с целью максимизации качества и количества (по данным матрицы Фишера) данных с целью калибровки модели.

3. Вывод

В статье были рассмотрены методы анализа идентифицируемости с реализованным для них программным обеспечением: DAISY (Differential Algebra for Identifiability of SYstems), COMBOS (identifiable combinations of parameters), GenSSI (Generating Series for testing Structural Identifiability), AMIGO.

При использовании программы DAISY, мы можем установить только идентифицируемость параметров модели.

Результатом использования COMBOS является не только анализ идентифицируемости, а также обнаружение идентифицируемых параметров.

Программа GenSSI предоставляет пользователю таблицу идентифицируемости, с помощью которой можно исследовать модель и выявить идентифицируемые комбинации и параметры.

В AMIGO реализована целая процедура с пошаговыми действиями для анализа структурной и практической идентифицируемостью.

Априорный анализ идентифицируемости позволяет определять идентифицируемые наборы комбинации параметров. И разработанные для этих методов программные приложения облегчают и ускоряют процесс нахождения параметров модели (1.1).

References

[1] E. Carson, C. Cobelli, *Modelling Methodology for Physiology and Medicine*, Academic Press, 2001.

[2] R.F.Brown, *Compartmental System Analysis: State of the Art*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 1980.

[3] E. Carson, C. Cobelli, *Introduction to Modelling in Physiology and Medicine*, Elsevier Inc., 2008.

[4] G. Bellu, M. Saccomani, S. Audoly, L. D'Angio, *Comput Methods Programs Biomed.*, Elsevier Ireland Ltd., 2007.

[5] N. Meshkat, M. Eisenberg, J. DiStefano III, *Finding and Using Identifiable Parameter Combinations in Nonlinear Dynamic Systems Biology Models and COMBOS: A Novel Web Implementation*, Plos One, **9(10)** (2014).

[6] N. Meshkat, C. Anderson, J. DiStefano III, *Alternative to Ritt's Pseudodivision for finding the input-output equations of multi-output models*, Mathematical Biosciences, **239(1)** (2012), 117–123.

[7] O. Chis, J. Banga, E. Balsa-Canto, *GenSSI: a software toolbox for structural identifiability analysis of biological models*, Bioinformatics, 2011.

[8] O. Balsa-Canto, A. Alonso, J. Banga, *An iterative identification procedure for dynamic modeling of biochemical networks*, Bioinformatics, 2010.

[9] S.I. Kabanikhin, D.A. Voronov, A.A. Grodz, O.I. Krivorotko, *Identifiability of mathematical models in medical biology*, Vavilov Journal of Genetics and Breeding, **19, 6** (2015), 738–744, (in Russian).

[10] M. Saccomani, S. Audoly, L. Angio, *An Effective Automatic Procedure for Testing Parameter Identifiability of HIV/AIDS Models*, Bull Math Biol, 2011.

[11] M. Domurado, D. Domurado, S. Vansteenkiste, *Glucose oxidase as a tool to study in vivo the interaction of glycosylated polymers with the mannose receptor of macrophages*, 1995.

[12] JR. Banga, E. Balsa-Canto, *AMIGO, a toolbox for advanced model identification in systems biology using global optimization*, Bioinformatics, 2011.

[13] N. Meshkat, M. Eisenberg, JJ. DiStefano III, *An algorithm for finding globally identifiable parameter combinations of nonlinear ODE models using Groebner Bases*, Mathematical Biosciences, 2009.

[14] E. Walter, Y. Lecourtier, *Global approaches to identifiability testing for linear and nonlinear state space models*, Mathematics and Computers in Simulation, 1982.

Sergey Igorevich Kabanikhin
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: `kabanikhin@sscc.ru`

Dmitriy Andreevich Voronov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: `dmitriy.voronov.89@gmail.com`

Olga Igorevna Krivorotko
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: `krivorotko.olya@mail.ru`

Anastasiya Aleksandrovna Grodz
Novosibirsk State University,
Pirogova Str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: `nastya-grodz@yandex.ru`

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.189–С.196 (2015) УДК 517.946

ON THE CONTINUATION OF THE SOLUTION OF A QUATERNIONIC DIRAC EQUATION

E.N. SATTOROV, F.E. ERMAMATOVA

Abstract. We study the analytic continuation of the time-harmonic solutions of the relativistic Dirac equation in spatial bounded domain from its values on a part of the boundary of this domain, i.e. problem Cauchy. **Keywords:** Cauchy problem, quaternionic Dirac equations,Helmhoitz equation,Cauchy kennel ill-posed problem, regular solution, Carleman function.

Introduction

The Cauchy integral formula plays a significant role in the theory of one-dimensional complex analysis with the Cauchy kernel and its numerous application.

It is known that the theory of solutions of the Dirac equation reduces, in some degenerate cases, to that of complex holomorphic functions. Hence, one may consider the former to be a generalization of the letter. At the same time, not many facts from the holomorphic function theory have their extensions onto the Dirac equation theory. In the present paper we suppose that a solution to the problem exists (in this event it is unique) and continuously differentiable in the closed domain and the Cauchy data are given exactly. In this case we establish an explicit continuation formula. This formula enables us to state a simple and convenient criterion for solution of the Cauchy problem.

1. Function theory for the quaternionic Dirac operator

Let Ω is a bounded simply connected domain in R^3 with boundary $\partial\Omega$ composed of a compact connected part T of the plane $y_3 = 0$ and a smooth Lyapunov surface

Sattorov, E.N., Ermamatova, F.E., Ill-posed problem of mathematical physics.

Поступила 1 октября 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

S lying in the half-space $y_3 > 0$, with $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial D$, $\partial\Omega = S \cup T$. As to S, we assume that each ray issuing from any point x of the domain Ω intersects this surface at most l points. We consider the the following Dirac equation (see [1]) for a free massive particle of spin 1/2:

$$D[\Psi] := (\gamma_0\partial_t - \sum_{k=1}^{3}\gamma_k\partial_k + im)[\Psi] = 0, \tag{1.1}$$

where the Dirac matrices [4, p.64] have the standard Dirac-Pauli form

$$\gamma_0 := \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \gamma_1 := \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\gamma_2 := \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \gamma_3 := \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{1.2}$$

and where $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}; \partial_k := \frac{\partial}{\partial x_k}, m \in R, \Psi : R^4 \to C^4$. Suppose that the spinor field Ψ is time-harmonic (=monohromatic):

$$\Psi(t, x) = \psi(x)e^{i\omega t},$$

where $\omega \in R$ is the frequency and $\psi : \Omega \in R^3 \to C^4$ is the amplitude. Then the relativistic Dirac equation to the time-harmonic Dirac equation:

$$(D_{\omega,m}[\psi](x) = (i\omega\gamma_0 - \sum_{k=0}^{3}\gamma_k\partial_k + im)[\psi(x)] = 0. \tag{1.3}$$

Statement of the problem. Find a regular solutions to the time-harmonic Dirac equation (1.3)in the domain Ω using its Cauchy data on the surface S:

$$\psi(y) = g(y), \quad y \in S \tag{1.4}$$

where S is a part of the boundary of the domain, where $g(y)$ is a given continuous quaternion -valued functions on the part S of boundary.

We consider the problem of describing the quaternion-function given on a part of the boundary of a three dimensional domain Ω can be continued to this domain as a solution of system (1.3). Following M.M.Lavrent'ev and Sh.Yarkhamedov, we call the fundamental solution of equation (1.3) of solutions with this property the Carleman function for the half-space [8], [9]. After the construction of the Carleman function in explicit form, the continuation and regularization formulas for the solution of the Cauchy problem can be written out as Cauchy integral formula.

2. Basic facts of hyperholomorfphic function theory

In this section, we provide some background on quaternionic analysis needed in this paper. For more information, we refer the reader to [3],[4].

Let $H(C)$ be the set of complex quaternions, it means that each quaternion a is represented in the form $a = \sum_{k=0}^{3} a_k i_k$, with the standard basis $i_0 := 1, i_1, i_2, i_3$, where $a_k \subset C$, i_0 is the unit and $i_k|k = 1, 2, 3$ are the quaternionic imaginary units: $i_0^2 = i_0 = -i_k^2; i_0 i_k = i_k i_0 = i_k, k = 1,2,3; i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3; i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1; i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2$. The complex imaginary unit i commutes with $i_k, k = \overline{0,3}$. We use the Euclidean norm $|a|$ in $H(C)$, defined by $|a| := \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{3} |a|^2}$.

We will use the vector representation of complex quaternions : $a = Sc(a) + Vec(a)$, where $Sc(a) = a_0$ and $Vec(a) = \overline{a} = \sum\limits_{k=1}^{3} a_k i_k$. That is each complex quaternion is sum of its scalar part and its vector part. Complex vectors we identify with complex quaternions whose scalar part is equal to zero. In vector terms, the miltiplication of two arbitrary complex quaternions a i b can be written as follows:

$$a \cdot b = a_0 b_0 - < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} > + [\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}] + a_0 \overrightarrow{b} + b_0 \overrightarrow{a}$$

where

$$< \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} > := \sum_{k=1}^{3} a_k b_k \in C$$

and

$$[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}] := \left\| \begin{matrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| \in C^3. \tag{2.1}$$

We shall consider continuously differentiable $H(C)$ - valued functions depending on three real variables $x = (x_1, x_2, x_3)$. On this set the well known (see, [2],[3],[4]) Moisil-Theodoresco operator is defined by the expression $D := \sum\limits_{k=1}^{3} i_k \partial_k$, where $\partial_k = \partial_k / \partial(x_k)$. The action of the operator D on an $H(C)$ -valued function f can be written in a vector form:

$$Df = -div \overrightarrow{f} + gradf_0 + rot \overrightarrow{f}. \tag{2.2}$$

That is, $Sc(Df) = -div \overrightarrow{f}$ and $Vec(Df) = gradf_0 + rot \overrightarrow{f}$. In a good number of physical applications (see [2] and [3]) the operators $D_\alpha = D + M^\alpha$ and $D_{-\alpha} = D - M^\alpha$ are needed, where α is a complex quaternion and M^α denotes the operator of multiplication by α from the right-hand side: $M^\alpha f = f\alpha$. We will be interested when α is a vector $\alpha = \overrightarrow{\alpha}$ case to the Dirac equation.

Let $\lambda \in H(C) \setminus \{0\}$, and let α be its complex- quaternionic square root:$\alpha \in H(C), \alpha^2 = \lambda$. The function $f : \Omega \subset R^3 \to H(C)$ is called $left{-}\alpha{-}hyperholomorphic$ if

$$D_\alpha f := f\alpha + i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3} f = 0. \tag{2.3}$$

Let $\alpha \in H(C)$ and let

$$\Phi_0(x; \lambda) = -\frac{1}{4\pi |x|} e^{i\alpha |x|}, x \in R^3 \setminus \{0\}, Re\alpha > 0 \tag{2.4}$$

be the fundamental solution of the Helmholtz operator $\triangle_\lambda := \triangle + I\lambda = -D_\alpha D_{-\alpha}$, where $\triangle := \sum\limits_{k=0}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ and I is the identity operator.

Let $K(w)$be an entire function of a complex variable taking real values for real w, ($w = u + iv$, where u and v are reals), and such that $K(u) \neq 0, \ -\infty < u < \infty$.

Define the function $\Phi(y,x,\lambda)$ for $s>0,\ \ v\geq 1$ by the equality

$$\Phi(y,x,\lambda)=\frac{1}{4\pi K(x_1)}\int\limits_0^\infty Im[\frac{K(w)}{w-x_1}]\frac{ch(\lambda u)}{\sqrt{u^2+s}}du,\ \ w=i\sqrt{u^2+s}+y_1. \tag{2.5}$$

To guarantee convergence of the integral, we assume additionally that

$$\sup_{|Rew|<R,\ \ Imw\leq -C_R}(|K(w)|+|Imw||K'(w)|+|Imw|^2|K''(w)|)<\infty. \tag{2.6}$$

For real w and a real-function $K(w)$ we have $\overline{K(\overline{w})}=K(w)$. Then it follows from (2.6)that, for any $\forall R>0$,

$$\sup_{|Rew|<R}\{|K(w)|+(1+|Imw|)|K'(w)|+(1+|Imw|^2)|K''(w)|\}<\infty. \tag{2.7}$$

Since

$$Im\left(\frac{K(w)}{w}\right)=\frac{1}{2i}\left\{\frac{K(w)}{w}-\frac{K(\overline{w})}{\overline{w}}\right\}=\frac{\overline{w}K(w)-wK(\overline{w})}{2i(r^2+u^2)}=$$
$$=\frac{(y_3-x_3)ImK(w)-\sqrt{s+u^2}ReK(w)}{r^2+u^2},$$

it follows that(2.5) is on the form

$$-2\pi K(0)\Phi(y,x;\lambda)=\int\limits_0^\infty\left\{\frac{(y_3-x_3)ImK(w)}{\sqrt{s+u^2}}-ReK(w)\right\}\frac{\mathrm{ch}(\lambda u)}{r^2+u^2}du. \tag{2.8}$$

Since

$$K(y_3-x_3+i\sqrt{s+u^2})-K(y_3-x_3-i\sqrt{s+u^2})=K(y_3-x_3+it\sqrt{s+u^2})|_{t=-1}^{t=1}$$
$$=i\sqrt{s+u^2}\int\limits_{-1}^{1}K'(y_3-x_3+it\sqrt{s+u^2})dt,$$

it follows from (2.7) and (2.8) that, for $y\neq x$, then integral in (2.5) is absolutely convergent.

If $K(w)\equiv 1$, then the function $\Phi(y,x;\lambda)$ is the classical fundamental solution of the Helmholtz equation, i.e.

$$\Phi(y,x;\lambda)=\Phi_0(y,x;\lambda)=\frac{1}{4\pi r}e^{-i\lambda r}.$$

We can show that

$$\frac{e^{-i\lambda r}}{4\pi r}=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{ch}(\lambda u)}{r^2+u^2}du,$$

where $r^2+u^2=(y_3-x_3+i\sqrt{s+u^2})(y_3-x_3-i\sqrt{s+u^2})$, hence

$$\frac{1}{r^2+u^2}=-\frac{1}{2i\sqrt{s+u^2}}\left(\frac{1}{(y_3-x_3+i\sqrt{s+u^2})}-\frac{1}{(y_3-x_3-i\sqrt{s+u^2})}\right)=$$
$$=-Im\left(\frac{1}{(y_3-x_3+i\sqrt{s+u^2})}\right)\frac{1}{\sqrt{s+u^2}}.$$

Using these identities, we obtain the expression for the classical fundamental solution of the Helmholtz equation.

In [9], the following assertion was proved.

Lemma 2.1. The function $\Phi_\sigma(y,x,k)$ is the Carleman function for the Helmholts equation, i.e.,

$$\Phi_\sigma(y,x,\lambda)=\Phi_0(y,x;\lambda)+g_\sigma(y,x,\lambda), \tag{2.9}$$

where $g_\sigma(y,x,\lambda)$ is a function that is defined for all values of y and x and satisfies Helmholtz equation

$$\Delta(\partial_y)g+\lambda g=0, y\in D,$$

$$\int_{\partial\Omega_\rho\setminus S}(|\Phi_\sigma|+|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}|)dS_y\leq C(k,\Omega)\sigma exp(-\sigma x_3),$$

where $C(k,\Omega)$ is a constant.

Then the fundamental solution of the operator D_α, K_α, is given by the formula(see [3])

$$K_\alpha(x):=-D_\alpha\Phi(y,x;\lambda),$$

and its explicit form can be seen.

We shall use the notation $C^p(\Omega,H(C)), p\in N\cup\{0\}$ which has the usual component-wise meaning. Denote by $\Re:=\{a\in H(C)\mid a\neq 0;\exists b\neq 0: ab=0\}$. Let $n_\tau=\sum\limits_{k=0}^{3}(-1)^{k-1}i_k dx_{[k]}$, where $dx_{[k]}$ denotes as usual the differential form $dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$ with the factor dx_k omitted. For $\alpha-$ hyperholomorphic function the quaternionic left Cauchy integral formula is defined (see [4, Subsection 4.15],[11]):

$$K_\alpha[f](x):=-\int\limits_{\partial\Omega}\widetilde{K}^x_\alpha[n_\tau f(\tau)]=f(x), x\in\Omega, \tag{2.10}$$

where

(1) If $\alpha=\alpha_0\in C$, then

$$\widetilde{K}^x_\alpha[f](\tau):=K_{\alpha_0}(x-\tau)f(\tau). \tag{2.11}$$

(2) If $\alpha\notin\overline{\Re}, \overrightarrow{\alpha}^2\neq 0$, then

$$\widetilde{K}^x_\alpha[f](\tau):=\frac{1}{2\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2}}K_{\xi_+}(x)f(\tau)\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2}+\overrightarrow{\alpha}+\frac{1}{2\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2}}K_{\xi_-}(x)f(\tau)\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2}-\overrightarrow{\alpha}. \tag{2.12}$$

(3) If $\alpha\notin\overline{\Re}, \overrightarrow{\alpha}^2=0$, then

$$\widetilde{K}^x_\alpha[f](\tau):=K_{\alpha_0}(x)f(\tau)+\frac{\partial}{\partial\alpha_0}[K_{\alpha_0}](x)f(\tau)\overrightarrow{\alpha}. \tag{2.13}$$

(4) If $\alpha\in\Re, \alpha_0\neq 0$, then

$$\widetilde{K}^x_\alpha[f](\tau):=\frac{1}{2\alpha_0}K_{2\alpha_0}(x)f(\tau)\alpha+\frac{1}{2\alpha_0}[K_{\alpha_0}](x)f(\tau)\overrightarrow{\alpha}. \tag{2.14}$$

(5) If $\alpha\in\Re, \alpha_0=0$, then

$$\widetilde{K}^x_\alpha[f](\tau):=K_0(x)f(\tau)+\Phi_0(x)f(\tau)\alpha. \tag{2.15}$$

Statement of the problem. Find a regular solutions to the $\alpha-$ hyperholomorphic function (2.3)in the domain Ω using its Cauchy data on the surface S:

$$f(y)=g(y),\ \ y\in S \tag{2.16}$$

In (2.8), let us set

$$K(w)=e^{\sigma w^2}.$$

Denote

$$K_\alpha^\sigma[f](x) := -\int_S \widetilde{K}_\alpha^x[n_\tau f(\tau)] = f_\sigma(x), x \in \Omega. \tag{2.17}$$

Theorem 2.1.([11]) Suppose that the function $f \in kerD_\alpha \cap C(\overline{\Omega})$ satisfy the boundary condition $|f(y)| \leq M$. Then for any $x \in \Omega$ and $\sigma > 0$

$$|f(x) - f_\sigma(x)| \leq C(\sigma, \alpha)e^{-\sigma x_3}. \tag{2.18}$$

Now suppose that, instead of $f(y)$, their continuous approximations $f_\delta(y)$ respectively, are given on the surface S :

$$\max_S |g(y) - g_\delta(y)| \leq \delta, 0 < \delta < 1.$$

Denote

$$K_\alpha^{\sigma\delta}[f_\delta](x) := -\int_S \widetilde{K}_\alpha^x[n_\tau f(\tau)] = f_{\sigma(x)\delta}, x \in \Omega, \tag{2.19}$$

where $\sigma = \frac{1}{x_3^0} ln\frac{1}{\delta}, x_3^0 = \max\limits_{x\in\Omega} x_3$.

Theorem 2.2. ([11]) Suppose that the function $f \in kerD_\alpha \cap C(\overline{\Omega})$ satisfy the boundary condition $|f(y)| \leq M$. Then for any $x \in \Omega$

$$|f(x) - f_{\sigma(x)\delta}(x)| \leq M^{1-\frac{x_3}{x_3^0}}\delta^{\frac{x_3}{x_3^0}}. \tag{2.19}$$

3. Function theory for the quaternionic Dirac operator

We start this Section with a brief description of the relations between the time-harmonic spinor fields theory and the theory of $\alpha-$hyperholomorphic functions. One can find more about in [4], [6].The standard Dirac matrices have the well-known properties:

$\gamma_0^2 = E_4, \gamma_k^2 = -E_4, k \in N_3 := 1, 2, 3, \gamma_j\gamma_k + \gamma_k\gamma_j = 0, j, k \in N_3^0 := N_3 \cup \{0\}, j \neq k$

where E_4 is the 4×4 identity matrix. The products of the Dirac matrices

$$\widehat{i_0} := E_4, \widehat{i_0} := \gamma_3\gamma_2, \widehat{i_2} := \gamma_1\gamma_3, \widehat{i_3} := \gamma_1\gamma_2, \widehat{i} := \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3,$$

have the following properties:

$$\widehat{i}_0^2 = \widehat{i}_0^2 = -\widehat{i}_k^2, \widehat{i_0}\widehat{i_k} = \widehat{i_k}\widehat{i_0} = \widehat{i_k}, k \in N_3, \widehat{i_1}\widehat{i_2} = -\widehat{i_2}\widehat{i_1} = \widehat{i_3},$$

$$\widehat{i_2}\widehat{i_3} = -\widehat{i_3}\widehat{i_2} = \widehat{i_1}, \widehat{i_3}\widehat{i_1} = -\widehat{i_1}\widehat{i_3} = \widehat{i_2}, \widehat{i}\widehat{i_k} = \widehat{i_k}\widehat{i}, = \widehat{i_3}, k \in N_3^0.$$

For $b \in H(C)$, set

$$B_l(b) := \left\| \begin{matrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \end{matrix} \right\|.$$

Matrix subalgebra $B_l(C) := \{B - l(b) : b \in H(C)\}$ and $H(C)$ are izomorphic as complex algebras. Abusing a little we shall not distinguish, sometimes between $B_l(b)$, the column $\left\| \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \right\|$ and the quaternion b. Set

$$D := i\omega\gamma_0 - E_4\partial_1 - \gamma_1\partial_2 - \gamma_2\partial_3 + im.$$

We shall consider D on the set $C^1(\Omega, B_l(C))$ of corresponding matrices. Hence, for us

$$D : C^1(\Omega, B_l(C)) \to C^0(\Omega, B_l(C)).$$

In [3,Section 12] (see also [10, page 7563], [12, page 5])there was introduced map UA which transforms a function $\psi : \Omega \subset R^3 \to C^4$ into the function $\rho : \Omega \subset R^3 \to H(C)$ by the rule:

$$\rho = UA[\psi] := \frac{1}{2}[-(\widetilde{\psi}_1 - \widetilde{\psi}_2)i_0 + i(\widetilde{\psi}_0 - \widetilde{\psi}_3)i_1 - (\widetilde{\psi}_0 + \widetilde{\psi}_3)i_2 + i(\widetilde{\psi}_1 + \widetilde{\psi}_2)i_3],$$

where $\widetilde{\psi}(x) := \psi(x_1, x_2, -x_3)$, the domain $\widetilde{\Omega}$ is obtained from $\Omega \subset R^3$ by the reflection $x_3 \to -x_3$. The corresponding inverse transform is given as follows:

$$(UA)^{-1}[\rho] = A^{-1}U^{-1}[\rho] := (-i)\widetilde{\rho}_1 - i\widetilde{\rho}_2, -\widetilde{\rho}_0 - i\widetilde{\rho}_3, \widetilde{\rho}_0 - i\widetilde{\rho}_3, i\widetilde{\rho}_1 - \widetilde{\rho}_2.$$

The maps UA and $(UA)^{-1}$ may be represented in a matrix form (see [4, Subsection 12,13]):

$$\rho = UA[\psi] := \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & i & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \widetilde{\psi}_0 \\ \widetilde{\psi}_1 \\ \widetilde{\psi}_2 \\ \widetilde{\psi}_3 \end{matrix} \right\|,$$

$$\psi = (UA)^{-1}[\rho] := \left\| \begin{matrix} 0 & -i & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & -1 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \widetilde{\rho}_0 \\ \widetilde{\rho}_1 \\ \widetilde{\rho}_2 \\ \widetilde{\rho}_3 \end{matrix} \right\|.$$

Direct computation leads to the equality

$$D_{\omega,m} = -\gamma_0 \widehat{i}(UA)^{-1} D\widehat{i}^2 (UA), \tag{3.1}$$

on $C^1(\Omega, C^4)$. Also we get $D\widehat{i}^2 = D_\alpha$, on $B_l(C)$, where $\alpha := -(i\omega i_1 + m i_2)$. By these reasons D is termed "the quaternionic relativistic Dirac operator". Thus,

$$kerD = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} \right\| kerD_\alpha.$$

There exists a one-to-one correspondence between elements of $kerD$ (which are matrices) and matrices of the form $B_l(\psi)$, with $\psi := \psi_0 i_0 + \psi_1 i_1 + \psi_2 i_2 + \psi_3 i_3$ being $\alpha-$ hyperholomorphic function.

The "quaternionic relativistic Cauchy-Dirac kernel i.e., the fundamental solution of D, is given by

$$K_{D,\alpha} := \widehat{i}^2 K_\alpha.$$

The integral

$$K_{D,\alpha}[f](x) := -\int_{\partial\Omega} \widetilde{K}^x_{D,\alpha}[n_{D,\tau} f(\tau)], x \in \Omega, \tag{3.2}$$

plays the role of the Cauchy integral formula, the one with the quaternionic relativistic Cauchy-Dirac kernel (see [10],[4]); with $f : \partial\Omega \to B_l(C)$ and

$$n_{D,\tau} := \left\| \begin{matrix} -n_1(\tau) & 0 & n_3(\tau) & n_2(\tau) \\ 0 & -n_1(\tau) & n_2(\tau) & -n_3(\tau) \\ -n_3(\tau) & -n_2(\tau) & -n_1(\tau) & 0 \\ -n_2(\tau) & n_3(\tau) & 0 & -n_1(\tau) \end{matrix} \right\| dS.$$

We shall call also $K_{D,\alpha}[f]$ the quaternionic relativistic Cauchy-Dirac integral formula and using of theorems 2.1,2.2. we obtain solution of problem (1.3),(1.4).

References

[1] N.N. Bogolyubov and D.V. Shirkov, *Introduction to Quantum Fields Theory*, Nauka, Moskow, 1984.

[2] F. Brackx ,K. Delanghe ,F. Sommen, *Clifford analysis*, L.:Pitman, 1982.

[3] K. Gurllebeck, W. Sprobig, *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems*, Akademie-Verlag, 1989.

[4] V.V. Kravchenko, M.V.Shapiro, *Integral representations for spatial models of mathematical physics*, Addison Wesley Longman Ltd., Pitman Research Notes in Mathematics. Series, v.351, 1996.

[5] V.V.Kravchenko, *Quaternion-Valued Integral Representations of the Harmonic Electromagnetic and Spinor Fields*, Dokl.Akad.Nauk, **341, (5)** (1995), 603–605.

[6] V.V. Kravchenko, *On the relation between holomorphic biquaternionic functions and time-harmonic electromagnetic fields*, Deposited in UkrINTEL, 29.12.1992, 2073-Uk-92, (in Russian).

[7] V.V. Kravchenko, *Exact solutions of the Dirac equation with harmonic pseudoscalar, scalar or electric potential*, J.Phys.A:Math.Gen.,**31** (1998), 7561–7575.

[8] M.M. Lavrent'ev, *Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics*, Novosib., 1962.

[9] Sh. Yarmukhamedov, *Continuation of the Solution of the Helmholtz Equation*, Dokl. Ross. Akad.Nauk **357(3)** (1997), 320–323.

[10] R.Rocha-Chavez, M.Shapiro and F.Sommen, *Integral theorems for functions and differential forms in C^m*. Research Notes in Mathematics **428** (2002).

[11] E. Sattorov, Z.E. Ermamatova, *Regularization of the solution the Cauchy problem on the generalized system of Cauchy-Riemann with a quaternion parameter*, Dokl.Akad.Nauk RUz, **3** (2014), 13–18.

[12] B.Schneider,*Singular integrals of the time-harmonic relativistic Dirac equation on a piecewise Liapunov surface*, Electronic Journal of Differential Equations, **2005 (96)** (2005), 1–8.

E.N. Sattorov, F.E. Ermamatova .
Samarkand State University,
University boulvard, 15,
114140, Samarkand, Uzbekistan
E-mail address: Sattorov-e@rambler.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.197–С.205 (2015) УДК 519.6
MSC 65M32

ЧИСЛЕННЫЙ АСПЕКТ АЛГОРИТМА 3.5D КОНЦЕНТРАЦИИ МАСС

Ю.В. ГЛАСКО

Abstract. We discuss some inverse problems interpretation of geophysics. We study concentration of mass for definition geometry of object-source of potential field and density of the object.

Keywords: introcontinuation of potential fields, balayage of densities, concentration of densities, discrepancy, smoothing functional.

1. Введение

Обратные задачи интерпретации в геофизике имеют целью определение характеристик объекта по наблюденному на дневной поверхности Земли потенциальному полю. Для усиления эффекта от интерпретируемого объекта поле пересчитывается посредством интеграла Пуассона (или иным образом) на высоту шага сетки между измеряемыми профилями. Рассматриваемая в статье интерпретация относительно месторождений нефти Ω помимо пересчета включает задачи интропродолжения поля и концентрации. В статье сосредоточимся, главным образом на последнем этапе. Мы будем рассматривать концентрацию плотностей - то есть речь идет о гравитационном поле (g). Упомянутое интропродолжение опирается на краевую задачу 1-го рода для уравнения Лапласа и полный нормированный градиент В.М. Березкина (ПНГ). В [1] нами рассматриваются численные и 3D варианты ПНГ. Подобная задача, с применением иной математической и численной реализации рассматривается сейчас в работах С.И. Кабанихина и М.А. Шишленина [2]. Что же касается задачи концентрации плотностей масс u, то она является комбинированной обратной задачей [3] и включает в себя геометрическую и ретроспективную обратные

Glasko Y.V., On some calculating for 3D concentration mass algorithm.

Работа проводилась в рамках НИР МГУ N14 (ЦИТИС 01201253080).

Поступила 1 ноября 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

задачи. Хотя ретроспективность в данном случае не является физической (отвечающей сути обратной задачи), она лишь характеристика модели процесса. Собственно, идея подобной ретроспективности предложена В.Н. Страховым [4]. В свою очередь концентрация, использует задачу выметания плотностей масс.

2. Выметание плотностей

Выметание плотностей масс состоит в их перераспределении $\delta(\omega),\ \omega \in \Omega$ из области $\Omega \subset V$ на границу $\Gamma \equiv \partial V$ объемлющей ее области V: $\delta_\Gamma(s^*),\ s^* \in \Gamma$.

В общем случае, $\Omega(\omega) = \bigcup\limits_{i_1=1}^{N} \Omega^{i_1}(\omega)$ связная область аппроксимируемая объединением нескольких элементарных фигур (в частности кубов) $\bigcup\limits_{r=1}^{\Theta} \Omega_r(\omega)$.

Математическая модель 3D процесса выметания масс ($u(s,t)$- плотность), имеет следующий вид:

$$\Delta u(s,t) = u_t(s,t),\ s \equiv (x,y,z) \in V, \tag{1}$$

$$u(s,0) = \begin{cases} \delta(s),\ \forall\ s \in \Omega \\ 0,\ \forall\ s \in V \setminus \Omega \end{cases} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)\Big|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n}(s,t)\Big|_\Gamma \tag{3}$$

Модель предложена В.Г. Филатовым для 2D случая [5].

Задача может быть записана в операторной форме:

$$u(s^*,T) = A_{sweep} u(s,t) \tag{4}$$

Процесс можно представить, как выметание с подвижной границей:

$$\Delta u(s,t) = u_t(s,t),\ s \equiv (x,y,z) \in V, \tag{5}$$

$$u(s,0) = \begin{cases} \delta(s),\ \forall\ s \in \Omega \\ 0,\ \forall\ s \in V \setminus \Omega \end{cases} \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)\Big|_{s=\Gamma} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d\xi}{dt}(s,t) = D\ \frac{\partial u(s,t)}{\partial n}\Big|_{s=\xi},\ \ \xi(0) = \partial\Omega,\ \xi(T) = \partial V \tag{8}$$

$$u(s,t)|_{s \in V(t)} = C = u(s,0)|_{s \in V} = \int\int\limits_{\Omega}\int \delta(s) ds \tag{9}$$

Здесь $V(t)$- область ограниченная $\xi(t)$, D- размерный коэффициент.

Итак, можно рассматривать более грубую, но относительно простую модель или более подробную, но и более сложную. При этом возможны два варианта численной реализации моделей выметания. Первая предполагает конечно-разностный подход. Вторая реализация использует метод конечных элементов. Вариацией метода конечных элементов является, весьма уникальный метод выметания по Д. Зидарову [6]. Отметим, что этот метод даже не предполагает использования многочленов. В свою очередь, метод конечных разностей требует достаточно жестких условий от искомой функции $u(s,t)$. В общем случае, требуется дважды непрерывная дифференцируемость по координатам (абсциссе, ординате и апликате) и непрерывная дифференцируемость по времени. Конечно, эти условия можно, ослабить. Но тогда, в модели появятся интегральные соотношения вводящие дополнительный фактор некорректности. В то же время, метод Д. Зидарова требует от искомой функции не более, чем кусочной непрерывности. Можно ограничиться и кусочно-постоянными функциями $u(s,t)$. Данные условия более точно соответствуют рассматриваемой нами задаче геофизики - поскольку плотность залежи нефти Ω или нескольких залежей нефти $\Omega(\omega) = \bigcup\limits_{i_1=1}^{N} \Omega^{i_1}(\omega) \quad \delta(\omega),\ \omega \in \Omega$ можно вполне рассматривать, как кусочно-непрерывную функцию. Плотность $u(s,t),\ s \in V$ можно аппроксимировать и кусочно-постоянной величиной. Действительно, плотность нефти на одной глубине - постоянна. Она не зависит от давления, но может меняться с глубиной в силу изменения температуры. Для этого нужен значительный перепад глубин. Следовательно, численный метод Д. Зидарова представляется в данных условиях более приемлемым. Реализуется метод на основе 6-и точечной схемы, в цикле для $l = \overline{2,L-1},\ j = \overline{2,T-1},\ k = \overline{2,P-1}$ с высокой точностью выметания плотности из области на границу Γ (10^{-30}) следующими формулами:

$$u^{t+1}_{l-1,j,k} := u^t_{l-1,j,k} + 1/6u^t_{l,j,k},\ \ u^{t+1}_{l+1,j,k} := u^t_{l+1,j,k} + 1/6u^t_{l,j,k} \tag{10}$$

$$u^{t+1}_{l,j-1,k} := u^t_{l,j-1,k} + 1/6u^t_{l,j,k},\ \ u^{t+1}_{l,j+1,k} := u^t_{l,j+1,k} + 1/6u^t_{l,j,k}, \tag{11}$$

$$u^{t+1}_{l,j,k-1} := u^t_{l,j,k-1} + 1/6u^t_{l,j,k},\ \ u^{t+1}_{l,j,k+1} := u^t_{l,j,k+1} + 1/6u^t_{l,j,k}, \tag{12}$$

$$u^t_{l,j,k} := 0 \tag{13}$$

Здесь L, T, P число узлов по осям абсцисс, ординат и апликат, соответственно.

Время расчета, в рамках используемых нами моделей области Ω, незначительно (от 1секунды-до несколько минут). Отметим, что расчеты в кубе $V = [0;1] \times [0;1] \times [1/3;4/3]$ показали большую иформативность нечетной сетки с шагом $1/3, 1/5$,... в сравнении с четной сеткой $1/2,\ 1/4$,... . Под информативностью мы понимаем степень однозначности обратной выметанию интерпретации геометрии области Ω. С теоретической точки зрения, мы имеем дело с эквивалентным перераспределением плотностей. Однако отметим, что в рассматриваемом случае выметание плотности на 12 ребер сеточного куба V^h (к примеру, ребро $i = 1,\ j = 1,\ k = \overline{1,P}$) не выполняется. Массы выметаются исключительно на внутренние части граней сеточного куба: $i = 1$ или $i = L$ (соответственно $= 0$ или $x = 1$) при $j = \overline{2,T-1},\ k = \overline{2,P-1}$ либо $j = 1$ или $j = T$ (соответственно $y = 0$ или $y = 1$) при $i = \overline{2,L-1},\ k = \overline{2,P-1}$, либо $k = 1$ или $k = P$ ($z = 1/3$ или $z = 4/3$, соответственно) при $i = \overline{2,L-1},\ j = \overline{2,T-1}$.

3. Концентрация плотностей

При концентрации в качестве в качестве области V мы рассматриваем куб $[0;1\text{км}] \times [0;1\text{км}] \times [1/3\text{км};4/3\text{км}]$. Относительно нефти мы также знаем сегмент плотностей $[\delta^{\text{нф}}_{\text{нжн}};\delta^{\text{нф}}_{\text{врхн}}]$. Нижнее $\delta^{\text{нф}}_{\text{нжн}}$ и верхнее значения плотности нефти $\delta^{\text{нф}}_{\text{врхн}}$ получены исследованием месторождений УВ [1]. Топологическое произведение $V \times [\delta^{\text{нф}}_{\text{нжн}};\delta^{\text{нф}}_{\text{врхн}}]$ представляет компакт на котором будет рассматриваться алгоритм концентрации.

Относительно задачи концентрации плотностей возможны 3 постановки. 1. По закону изменения плотности $\delta(s)$, $s \in V$ определить область-залеж $\Omega \subset V$ порождающую наблюденное поле $\delta_\Gamma(s^*)$, $\Gamma \equiv \partial V$. 2. По заданной области Ω определить распределение плотностей $\delta(\omega)$, $\omega \in \Omega$ порождающих поле выметенных плотностей тождественное заданному $\delta_\Gamma(s^*)$. Наконец, смешанная постановка состоит в одновременном определении 2-х характеристик $q = \{\Omega(\omega); \delta(\omega)\}$. Рассматриваемая далее смешанная постановка задачи концентрации включает в себя геометрическую и ретроспективную обратные задачи.

Модель концентрации для 3D случая имеет вид:

$$\Delta u(s,t) = u_t(s,t),\ s \equiv (x,y,z) \in V, \tag{14}$$

$$u(s,T) = \begin{cases} 0,\ \forall\ s \in V \setminus \partial V \\ \delta_\Gamma(s^*) \equiv \delta(s,T),\ s \in \partial V \end{cases} \tag{15}$$

$$\int_0^T \frac{\partial u}{\partial n}(s,t)\bigg|_\Gamma = u(s,t) \tag{16}$$

Выпишем операторную форму задачи концентрации.

$$Aq = \delta_\Gamma(s^*),\ q = \{\Omega(\omega),\delta(\omega)\},\ \Omega \subset V \tag{17}$$

Здесь $\delta_\Gamma(s^*)$ -известные значения плотностей на $\Gamma \equiv \partial V$. Задача рассматривается в 3D палетке V. Как отмечено выше V является кубом. Указанную палетку можно передвигать по исследуемой области (месторождению УВ) с целью ее изучения. В данном случае, мы ограничимся одной палеткой $[0; 1\text{км}] \times [0; 1\text{км}] \times [1/3\text{км}; 4/3\text{км}]$.

Алгоритмически обратная задача концентрации осуществляется многократным решением проблемы выметания в рамках метода подбора по невязке на компакте $\Psi = V \times [\delta_{\text{нжн}},\delta_{\text{врхн}}]$.

$$\hat{q} = arg \inf_\Psi \rho^2(A_{sweep}q,\delta_\Gamma(s^*)), \tag{18}$$

$$\rho^2(A_{sweep}q,\delta_\Gamma(s^*)) = \|A_{sweep}q - \delta_\Gamma(s^*)\|^2_{L_2} \tag{19}$$

В рассматриваемом здесь случае речь идет о нефти, соответственно $\delta_{\text{нжн}} = \delta^{\text{нф}}_{\text{нжн}}$, $\delta_{\text{врхн}} = \delta^{\text{нф}}_{\text{врхн}}$. Мы возьмем максимально широкий сегмент плотности нефти $[0.4\text{г/см}^3; 1\text{г/см}^3]$. Этот сегмент вполне можно сузить, однако для наших вычислительных экспериментов и его оказывается вполне достаточно. Этот сегмент является априорной информацией для "ретроспективной"части обратной задачи концентрации.

При заданных опорных значениях плотности $\delta_{\text{оп}}(\omega)$ можно использовать сглаживающий фунционал А.Н. Тихонова. Для нефтяного месторождения опорные значения плотности нефти вполне можно задать [7].

$$\hat{q} = arg \inf_\Psi F_\alpha(q),\ F_\alpha(q) = \rho^2(A_{sweep}q,\tilde{\delta}_\Gamma(s^*)) + \alpha\Omega(q) \tag{20}$$

$$\Omega(q) = \|\delta(\omega) - \delta_{\text{оп}}(\omega)\|^2_{L_2} \tag{21}$$

Алгоритм концентрации состоит из 2-х этапов: I. Интерпретация поля плотностей на границе $\delta_\Gamma(s^*)$ с целью определения морфологии Ω. II. Определение плотностей области-залежи. Первый этап включает интерпретацию альбома карт выметенных плотностей, построенного на основе серии вычислительных экспериментов и экстраполяцию полученных результатов. II-ой этап включает многократное использование в цикле метода выметания по Д.П. Зидарову и статистическую регуляризацию на основе метода Монте-Карло. При этом, целью каждого из N экспериментов метода Монте-Карло является определение аргумента минимизации квадрата невязки $\rho^2(\delta(\omega), \delta_\Gamma(s^*))$ либо сглаживающего функционала $F_\alpha(q)$. По сути, мы имеем систему сжимающихся компактов - сжимается как область V в которой расположена Ω, так и сегмент плотностей нефти (для нескольких залежей расположенных на разных глубинах).

Рассмотрим задачу концентрации для куба V содержащего вложенный куб $V_{\text{вн}}$ и область-залеж $\Omega \subset V_{\text{вн}}$, $V_{\text{вн}} \subset V$. То есть, мы имеем равномерную сетку с шагом $h = 1/3$.

На всей сеточной области V^h, где $i = \overline{1,L}$, $j = \overline{1,T}$, $k = \overline{1,P}$ мы имеем $L \times T \times P$ узлов. В случае равномерной сетки с $h = 1/3$ $L = T = P = 4$. L, T, P- число узлов сетки по осям абсцисс, ординат и апликат соответственно. Внутренние узлы индексируются, как $i = \overline{2,L-1}$, $j = \overline{2,T-1}$, $k = \overline{2,P-1}$. Узлы границы Γ^h имеют индексы $i = 1$ или $i = L$ при $j = \overline{1,T}$, $k = \overline{1,P}$, либо $j = 1$ или $j = T$ при $i = \overline{1,L}$, $k = \overline{1,P}$, либо $k = 1$ или $k = P$ при $i = \overline{1,L}$, $j = \overline{1,T}$. Соответственно, мы перечислили грани Γ_{1x}, Γ_L Γ_{1y}, Γ_T, Γ_{1z}, Γ_P на сетке. $\Gamma^h = \Gamma^h_{1x} \bigcup \Gamma^h_L \bigcup \Gamma^h_{1y} \bigcup \Gamma^h_T \bigcup \Gamma^h_{1z} \bigcup \Gamma^h_P$.

Наибольший эффект выметания наблюдается в трех ближайших к внутреннему узлу (x_i, y_j, z_k) $(x_i = (i-1)h$, $y_j = (j-1)h$, $z_k = kh)$ не расположенных на ребрах точках границы Γ^h $(x_\Gamma$, y_Γ, z_Γ. Так для точки внутренней области с индексами $(L-1, T-1, P-1)$- $(x_{L-1}, y_{T-1}, z_{P-1})$ ближе всего расположенной к граням Γ_L, Γ_T и Γ_P эффект наблюдается в трех точках именно этих граней - (x_L, y_{T-1}, z_{P-1}), (x_{L-1}, y_T, z_{P-1}), (x_{L-1}, y_{T-1}, z_P). Соответствия при таком шаге выстраиваются для 8-и внутренних точек сетки.

4. Вычислительный эксперимент

Для выявления оптимальных характеристик алгоритма смешанной концентрации, и методики отсеивания неперспективных областей мы проводим серию вычислительных экспериментов.

Первый из 3D модельных вычислительных экспериментов концентрации относится к случаю, когда наибольшие (пики) значения выметенной на Γ^h плотности 0.184 наблюдаются в точках границы с координатами (0,2/3,1), (1/3,1,1), (1/3, 2/3, 4/3) (в узлах границы сетки (1,3,3), (2,4,3), (2,3,4)). Следовательно, наиболее существенная, если не единственная масса сконцентрирована в точке (1/3,2/3, 1) (в узле (2,3,3)). Так же влияние этого источника сказывается и в точках отвечающих ему 3-х дальних граней Г. Остальные же наблюдаемые выметенные на границу Γ^h плотности 0.035 и 0.013 значительно меньше 0.184 можно вполне трактовать, как погрешность выметания основной массы. Узлу (3,3,3) отвечают значения 0.035 в трех ближайших точках. Узлу (2,3,2) 3 значения 0.035. Точке сетки (3,3,2) соответствуют 3 значения 0.013. Узлу (3,2,3) - 0.013. (2,2,3) - 3 значения 0.035. Узлу (2,2,2) отвечают 3 значения 0.013. Наконец, узлу (3,2,2) - 3 значения выметенной плотности 0.006. Сегменты значений плотностей во внутренней точке будем моделировать на основе сумм значений плотностей на трех ближайших к внутренней точке границах.

Расположение источника определяется на основе двух разрезов куба V^h и поверхности выметенной плотности $\delta^h_\Gamma(s^*)$, $s^* \in \Gamma^h$.

На основе анализа выметенной плотности можно построить поверхности уровня (изоповерхности) плотности, касательно 8-и внутренних узлов.

В случае гомеоморфного отображения граней куба на квадрат, получим сжимающуюся систему изолиний локализующих источник Ω.

Указанную систему изолиний можно понимать, как источник плотности, который распространяет ее вокруг себя.

Концентрация на основе метода Монте-Карло, в рамках минимизации невязки дает хорошие результаты: погрешность определения плотности источника δ_Ω 4%. Однако при этом время расчета на Pentium 3 (1 ГГц) для 300 экспериментов составляет 15 мин, а для 1000 - 35 мин. Учтем, что область Ω может состоять из множества точек, следовательно, время концентрации будет весьма продолжительно. Возникает следующая дилемма: использовать более мощный компьютер либо больший объем априорной информации и стабилизирующий функционал.

Сначала используем невязку в сочетании с априорной информацией о верхней границе плотности нефти. Результат по длительности счета и точности концентрации существенно не отличается от результата без использования этой информации.

С другой стороны, мы обладаем априорной информацией о нижней границе плотности нефти 0.4г/см^3. Поэтому, если при моделировании внутренних плотностей их верхняя граница окажется меньшей 0.4, то эти плотности равны 0. В рассматриваемом модельном примере указанная априорная информация задает геометрию распределения плотностей. Если мы точно зададим морфологию области, то менее чем за 5 сек. получим результат концентрации плотности в определенной уже области с погрешностью не превосходящей 1%.

В данном случае, использование стабилизатора, относительно точного δ_Γ - $\bar{\delta}_\Gamma$ представляется излишним.

Пусть δ_Γ задана с суммарной по всем точкам границы погрешностью $\delta = \int\limits_\Gamma \left|\bar{\delta}_\Gamma(s^*) - \tilde{\delta}_\Gamma(s^*)\right| ds^*/N_{\text{ист}}$. Получена она внесением в точные плотности источников погрешностей и выметанием их на границу. $N_{\text{ист}}$- количество шаров аппроксимирующих область Ω. В данном случае $N_{\text{ист}} = 1$.

Расчеты относительно невязки дают при $\delta = 5\%$ среднюю погрешность концентрации плотности в области Ω $\epsilon = 5.1\%$, для $\delta = 10\%$ - $\epsilon = 9.5\%$, для $\delta = 15\%$ - $\epsilon = 14.9\%$, для $\delta = 20\%$ - $\epsilon = 19.4\%$. Используем сглаживающий функционал. В этом случае, для точных опорных значений и $\delta = 5\%$ средняя погрешность концентрации в определенной уже области Ω $\epsilon_r = 0.4\%$, для $\delta = 20\%$ - $\epsilon_r = 1.94\%$.

Следует отметить, что при регуляризации параметры δ, α, а так же точность метода Монте-Карло, погрешность регуляризации и время счета $\epsilon_{\text{МК}}$, ϵ_r, $t_{\text{СЧ}}$ связаны. Так при $\delta = 10\%$, $\alpha = 1$ и $\epsilon_{\text{МК}} = 10^{-4}$ время расчета неоправданно сильно растет. Параметры $\delta = 5\%$, $\alpha = 1$ и $\epsilon_{\text{МК}} = 10^{-3}$ дают погрешность регуляризации 0.8%, то есть меньшую, чем при $\epsilon_{\text{МК}} = 10^{-4}$.

В случае задания опорного значения плотности $\delta_{\text{оп}}$ с погрешностью, результат концентрации будет иметь приемлемую погрешность ϵ_r. Так при погрешности в $\delta_{\text{оп}}$ 5%, $\delta = 5\%$, $\alpha = 1$, $\epsilon_{\text{МК}} = 10^{-3}$ $\epsilon_r = 4\%$. При $\delta_{\text{оп}} = 10\%$ $\delta = 5\%$ и тех же значениях параметров α, $\epsilon_{\text{МК}}$- $\epsilon_r = 8.88\%$. При $\delta_{\text{оп}} = 20\%$, $\delta = 5\%$ - $\epsilon_r = 17.9\%$.

Рассмотрим второй модельный пример. Наибольшие значения выметенных плотностей наблюдаются в точках границы (0,2/3,1), (1/3,1,1), (1/3,2/3,4/3) и (1,1/3,2/3), (2/3,0,2/3), (2/3,1/3,1/3). Соответственно, в узлах границы сетки (1,3,3) , (2,4,3), (2,3,4) и (M,2,2), (3,1,2), (3,2,1).

Следовательно, мы имеем 2 значимых изоповерхности плотностей для внутренних узлов области $V^h_{\text{вн}}$ и 2-е изолинии плотностей.

Изолинии сжимаются и локализуют 2 источника поля плотностей на поверхности куба. Естественно предположить, что плотности сконцентрированы в точках (1/3,2/3,1) и (2/3,1/3,2/3). Номера узлов: (2,3,3) и (3,2,2). Соответствующую ситуацию можно описать 3D матрицей размерности $(L-2)\times(T-2)\times(P-2)$ с ненулевой диагональю.

Если в данном примере внутренние плотности моделируются как равномерно распределенные случайные величины на двух сегментах: [0.57,1.43] и [0,0.36], то погрешность концентрации в источниках аномалии будет: $\epsilon_{233} = 3.5\%$, $\epsilon_{322} = 5\%$, суммарная погрешность $\epsilon = 5\%$ при $\epsilon_{\text{MK}} = 10^{-3}/5$. Однако время концентрации (на Pentium 3) весьма продолжительно (несколько часов). В этой связи, следует использовать априорную информацию относительно сегмента допустимых плотностей нефти. Если учесть при моделировании, что плотность нефти не превосходит 1, то получим длительный по времени расчет с небольшим уточнением результата. Поэтому, в первую очередь следует использовать априорную информацию о нижней допустимой границе плотности, которая в данном случае задает геометрию области. В этом случае, $\epsilon_{233} = 1.1\%$, $\epsilon_{322} = 0.9\%$, суммарная погрешность $\epsilon = 1\%$ при $\epsilon_{\text{MK}} = 10^{-4}$, $N_{\text{MK}} = 300$ и задании $\bar{\delta}_\Gamma$. Время концентрации не более 5 секунд.

Пусть задано не $\bar{\delta}_\Gamma(s^*)$, а $\tilde{\delta}_\Gamma(s^*)$. Проведем расчеты с использованием невязки и сглаживающего функционала. При $\delta \in [0;5\%]$ $\epsilon_{\text{MK}} = 10^{-4}$ средняя по двум шарам погрешность концентрации плотности $\epsilon = 2.37\%$. Соответственно при $\delta \in [6\%;10\%]$ - $\epsilon = 7.7\%$, при $\delta \in [11\%;15\%]$ - $\epsilon = 12\%$, при $\delta \in [16\%;20\%]$ - $\epsilon = 17.9\%$. Для сглаживающего функционала $\delta \in [0;5\%]$ $\epsilon_{\text{MK}} = 10^{-4}$ - $\epsilon_r = 0.2\%$, для $\delta \in [6\%;10\%]$ $\epsilon_{\text{MK}} = 10^{-3}$ - $\epsilon_r = 0.67\%$, $\delta \in [11\%;15\%]$ соответствует $\epsilon_r = 0.72\%$, $\delta \in [16\%;20\%]$ соответствует $\epsilon_r = 1.45\%$.

Рассмотрим 3-ий модельный вычислительный эксперимент. В данном случае, наибольшие значения выметенных на границу $\Gamma = \partial V$ плотностей равные 0.24 мы наблюдаем в 12 точках (0,2/3,1),(1/3,1,1),(1/3,2/3,4/3), (1,2/3,1),(2/3,1,1), (2/3, 2/3, 4/3), (0,1/3,2/3),(1/3,0,2/3),(1/3,1/3,1/3), (1,1/3,2/3),(2/3,0,2/3),(2/3, 1/3, 1/3). Эти точки соответствуют граничным узлам сетки (1,3,3),(2,4,3),(2,3,4), (4,3,3),(3, 4, 3),(3,3,4), (1,2,2),(2,1,2),(2,2,1), (4,2,2),(3,1,2),(3,2,1). В остальных точках границы (но не на ребрах куба) выметенные плотности равны 0.095.

Таким образом, мы имеем 2 изоповерхности и две излинии плотностей $V^h_{\text{вн}}$.

Можно отметить, что основные массы сосредоточены в 4-х точках (1/3,2/3,1), (2/3,2/3,1), (1/3,1/3,2/3), (2/3,1/3,2/3). В этих точках плотности не менее 0.72. В остальных 4-х точках плотность можно трактовать как эффект размывания плотностей в основных точках. Действительно, суммарная выметенная на границу плотность равна 4. Следовательно, в основных точках сконцентрировано не менее 2.88г/см^3. В остальных четырех точках находится 1.12г/см^3. Поскольку распределение в них равное, то в каждой из них находится по 0.28г/см^3. В этой связи можно уточнить модель формирования плотностей в не основных точках. Так, выметенная из точки (1/3,2/3,2/3) плотность может составить

0.095г/см$^3 * 3 = 0.28$г/см^3. То есть моделировать плотность в (1/3,2/3,2/3) разумнее, как случайную величину на $[0; 3 * \delta_{232}]$. Более грубая модель верхней грани сегмента вторичных плотностей $3 * 2.5 * \delta_{232} = 0.71$, не дает возможность однозначно задать геометрию области, а как следствие ведет к длительным расчетам. В основных точках плотность моделируем на сегменте $[0.72; 1.2]$, где $1.2 \approx 3 * 1.7 * \delta_{233}$. Мы можем привлечь дополнительную априорную информацию о сегменте плотности нефти на конкретном месторождении. Впрочем, вполне возможно обойтись тем фактом, что из внутреннего узла плотность выметается, в первую очередь в три ближайшие к нему точки границы Г.

При использовании априорной информации о нижней допустимой границе плотности нефти и проведенных корректировках в выборе сегментов плотностей во внутренних узлах, получим $\epsilon_{222} \sim 1.13\%$, $\epsilon_{233} \sim 1.07\%$, $\epsilon_{322} \sim 0.45\%$, $\epsilon_{333} \sim 0.34\%$, суммарная погрешность $\epsilon \sim 0.75\%$ при $\epsilon_{\text{МК}} = 10^{-4}$, $N_{\text{МК}} = 300$ и задании $\bar{\delta}_\Gamma$. Время концентрации не более 20 секунд.

Относительно расчетов по невязке для $\tilde{\bar{\delta}}_\Gamma$ при $\delta \in [0; 5\%]$ и $\epsilon_{\text{МК}} = 10^{-4}$ средняя суммарная погрешность концентрации плотностей в Ω^h $\epsilon = 2.3\%$. Для $\delta \in [16\%; 20\%]$ - $\epsilon = 15.6\%$. При использовании сглаживающего функционала для $\delta \in [0; 5\%]$, $\alpha = 1$, $\epsilon_{\text{МК}} = 10^{-3}$) погрешность $\epsilon_r = 1.4\%$. $\delta \in [16\%; 20\%]$ соответствует $\epsilon_r = 3.8\%$.

Здесь следует заметить, что при $\alpha = 10$ счет затягивается, а при $\alpha = 0.1$ точность падает. Наряду с этим при больших погрешностях в $\tilde{\bar{\delta}}_\Gamma(s^*)$ приходится снижать и точность метода Монте-Карло $\epsilon_{\text{МК}}$, поскольку при слишком малых $\epsilon_{\text{МК}}$ счет весьма затягивается и приходится выбирать между длительным счетом и вполне приемлемой, но меньшей точностью (на уровне $2\% - 4\%$).

Рассмотрим случай задания опорных значений плотности $\delta_{\text{МК}}$ с некоторой погрешностью и погрешностью в наблюдаемом поле выметенных на Г плотностей масс $\delta_\Gamma(s^*)$. Так, для $\delta_{\text{оп}} \in [0\%; 5\%]$ и $\delta \in [0\%; 5\%]$ ($\alpha = 1$, $\epsilon_{\text{МК}} = 10^{-3}$) - $\epsilon_r = 3\%$. Для $\delta_{\text{оп}} \in [6\%; 10\%]$ и $\delta \in [0\%; 5\%]$ - $\epsilon_r = 6.4\%$. Для $\delta_{\text{оп}} \in [16\%; 20\%]$ и $\delta \in [0\%; 5\%]$ - $\epsilon_r = 12.1\%$.

Расчеты показывают достаточно устойчивый результат концентрации с использованием регуляризации даже при 20% погрешностях задания опорных значений плотностей и значений выметенных плотностей. Так же можно отметить, что при больших значениях погрешности, время расчета, как минимум, сильно возрастает. В этой связи мы снижаем точность метода Монте-Карло $\epsilon_{\text{МК}}$. Оптимальным представляется 300 опытов метода Монте-Карло.

Следует отметить, что погрешность в 3-х рассмотренных 3D примерах растет с ростом числа источников. В результате мы имеем значительную вносимую погрешность и, следовательно, значительное время расчета. В приведенных трех примерах мы, снижаем погрешность результата, используя сглаживающий функционал. В то же время, использование альбома выметенных на Г плотностей для I-го этапа концентрации относительно указанных трех экспериментов, повысит точность результата и значительно снизит время расчетов для II-го этапа. Так же повысит точность и снизит время расчетов информация о нижней границе концентрируемой плотности.

References

[1] A.A. Nikitin, A.V. Petrov, V.M. Megerya, V.I. Starostenko, V.G. Filatov, A.M. Lobanov *Optimal filtration and intro-continuation of geofields considering secondary magnets- and*

minerцt -genesis in the oil and gas exploration, NT Press Publishing, Moscow, 2011 (in Russian).

[2] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Regularization of the problems of continuation of physical fields from the part of the boundary: theory and applications*, Abstracts of the international scientific inverse and ill-posed problems seminar, Moscow (2015), 83–84 (in Russian).

[3] O.M. Alifanov, *Inverse problem of thermophysics with applications in aerospace technics*, Abstracts of the international scientific inverse and ill-posed problems seminar, Moscow (2015), 23–26 (in Russian).

[4] V. N. Strakhov, *About Puankare's balayage and its usage in direct and inverse gravimetry problems* . Reports of Academy of Science of USSR, **236 (1)** (1977), 54–57 (in Russian).

[5] V.G. Filatov *Stable methods of processing and interpretation of potential fields using regularization and contentration of sources* Author's summary of thesis for doctor's degree, Kiev, 1988 (in Russian).

[6] D.P. Zidarov, *Inverse gravimetry problem in geological and geodesy*, Sophiya, Bulgarian Academy of Sciences, 1984.

[7] V.G. Filatov, V.M. Megerya, V.I. Starostenko, C.V. Zinovkin, *Determination of densities of geological objects in oil and gas prospecting*, Moscow, 2012 (in Russian).

[8] Y.V. Glasko, *The problem of mass concentration*, Physics of earth, **51(2)** (2015), 37–43 (in Russian). 408

Glasko Yuri Vladlenovich
Reaserch Computing Center, M.V. Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gori, h.1, bld.4,
119992, Moscow, Russia
E-mail address: glaskoyv@mail.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.206–С.218 (2015) УДК 519.62
MSC 65M32

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ГЕОРАДАРА

С.И. КАБАНИХИН, М.А. ШИШЛЕНИН, Б.Б. ШОЛПАНБАЕВ

Abstract. In the paper the mathematical problems of data processing of the GPR are considered. We apply the two-dimensional equation for the horizontal components of the electric field as the mathematical model of the GPR. The algorithm was developed and numerical calculations were performed to detect the location of underground localized object for model data. The analysis of the obtained numerical results compared with the data obtained by GPR.

Keywords: inverse problem, electrodynamic, continuation problem, optimization method, misfit functional

1. Физическая постановка задачи продолжения.

В настоящее время большинство георадаров можно разделить на несколько типов, по основными принципами функционирования: стробоскопические георадары, слабоимпульсные радары, сверхмощные радары с разнесенными антеннами.

Принцип действия георадара: в изучаемую среду антенной источником излучается электромагнитная волна, которая отражается от разделов сред и различных включений. Отраженный сигнал принимается и записывается приемной антенной георадара.

Георадары серии «ЛОЗА» относятся к классу сверхмощных радаров с разнесенными антеннами для исследования подповерхностной структуры почвы.

Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A., Sholpanbaev, B.B., Mathematical problems of GPR data processing.

The work was supported by RFBR under grant 14-01-00208, 15-01-09230, the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, grant MES 1760/GF: project NTP 04.03.02 “Creating methodological basis of geological and geophysical studies of focal zones UNE in igneous rocks”.

Поступила 1 октября 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

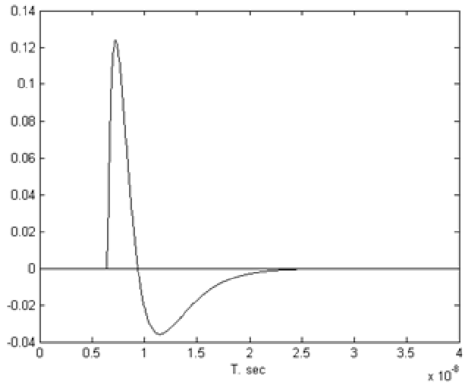


Рис. 1. Волновая форма импульса

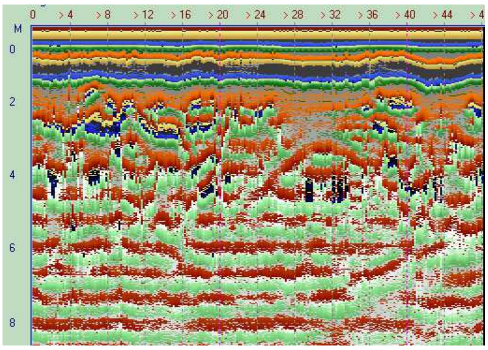


Рис. 2. Вид радарограммы

Глубина зондирования зависит от модели прибора, используемой антенны и параметров зондируемой среды. Отличительной особенностью георадара «Лоза-В» является большой энергетический потенциал (не менее 120 дБ), позволяющий работать в средах с высокой проводимостью, таких как, в суглинке или влажной глине.

В качестве зондирующего импульса Георадара «Лоза» используется апериодический сигнал (см. рис.1).

Приемник георадара регистрирует величину амплитуды и время пробега сигнала (см. рис.2).

Основным физическим примером будет двумерная задача электродинамики. Рассмотрим систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + j,$$

$$\operatorname{rot} E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Здесь положительные функции $\varepsilon(x, y, z)$, $\sigma(x, y, z)$ и $\mu(x, y, z)$ диэлектрическая проницаемость, проводимость и магнитная проницаемость среды соответственно.

Считаем, что электромагнитные колебания до момента времени $t = 0$ отсутствуют:

$$(E, H)|_{t<0} \equiv 0, \qquad j|_{t<0} \equiv 0,$$

а затем индуцируются внешним током $j(x, y, z, t)$.

Рассмотрим один из простейших вариантов задачи, когда ε, σ и μ зависят только от глубины x и одной горизонтальной переменной y, а источником стороннего тока является достаточно длинный кабель, расположенный по центру и протянутый вдоль оси z:

$$j(x, y, z, t) = (0, 0, 1)^T g_v(x) g_h(y) r(t).$$

Здесь функции g_v и g_h описывают поперечные размеры источника.

В этом случае, пренебрегая влиянием концов кабеля, в системе уравнений Максвелла ненулевыми останутся только три компоненты E_z, H_x, H_y и система будет иметь вид:

$$\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} + \sigma E_z + g_v(x) g_h(y) r(t) = 0,$$

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0,$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0.$$

После исключения из первого уравнения частных производных компонент H_x и H_y, получим относительно E_z уравнение второго порядка

$$\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) - g_v(x) g_h(y) r'(t),$$

к которому добавим начальное условие

$$E_z|_{t<0} \equiv 0.$$

Обозначим $v = E_z(x, y, t)$, $\varepsilon = const$, $\mu = const$ и получим следующее уравнение:

$$\varepsilon v_{\tau\tau} + \sigma v_\tau = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Введем новую переменную $t = \frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Для функции $u(x, y, t) = v(x, y, \tau)$ получим,

$$u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_t = \Delta u$$

2. Математическая постановка задачи продолжения

Рассмотрим задачу продолжения в области $\Omega = \Delta(L_x) \times (0, L_y)$, где $\Delta(L_x) = \{(x, t) : x \in (0, L_x), t \in (x, 2L_x - x)\}$ (см. рис.1):

(1) $$u_{tt} + \Big(\frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

(2) $$u_x(0, y, t) = g(y, t),$$

(3) $$u(0, y, t) = f(y, t),$$

Физическая постановка задачи (1)-(3). Пусть на границе среды $x = 0$ исследуемой области Ω включается источник гэлектромагнитных волн (2) в момент времени $t = 0$. Отклик среды (3) измеряется на поверхности $x = 0$ в течении времени $t \in (0, 2L_x)$.

Предполагаем, что функция источника $g(y, t)$ финитна и ее носитель лежит внутри $(0, L_y)$ и L_y достаточно большое, чтобы:

$$u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0. \tag{4}$$

2.1. **Пример Адамара некорректности задачи продолжения.** Задача продолжения (1)—(3) некорректна по Адамару. Пусть $\sigma \equiv 0$. Тогда решение задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \\ u(0, y, t) = \frac{1}{k}\cos(k\sqrt{2}y)\cos(kt), \quad u_x(0, y, t) = 0. \end{cases}$$

единственно, но не является устойчивым к возмущениям данных Коши [1]. В самом деле, при $k \to \infty$ данные $u_k(0, y, t) = \frac{1}{k}\cos(k\sqrt{2}y)\cos(kt)$ стремятся к нулю, в то время как решение

$$u_k(x, y, t) = \frac{1}{k}\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}\cos(k\sqrt{2}y)\cos(kt)$$

бесконечно возрастает в любой окрестности плоскости $x = 0$.

2.2. **Сведение задачи продолжения к обратной задаче.** Рассмотрим некорректную задачу (1) — (4) как обратную к следующей прямой(корректной) задаче. В области $\Omega = \Delta(L_x) \times (0, L_y)$ требуется определить $u(x, y, t)$ по заданным $q(x, y)$ и $g(y, t)$ из соотношений:

$$u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}u_t = u_{xx} + u_{yy}, \qquad (x, t) \in \Delta(L_x) \tag{5}$$

$$u_x(0, y, t) = g(y, t), \qquad y \in (0, L_y), t \in (0, 2L_x); \tag{6}$$

$$u(x, y, x) = q(x, y), \qquad x \in (0, L_x), y \in (0, L_y); \tag{7}$$

$$u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0, \qquad (x, t) \in \Delta(L_x). \tag{8}$$

В **прямой задаче** (5) — (8) требуется определить $u(x, y, t)$ по заданным $q(x, y)$ и $g(y, t)$.

Прямая задача (5)–(8) является корректной задачей [1]. Отметим, что решив прямую задачу (5)–(8) мы тем самым найдем решение задачи продолжения (1)–(4).

Обратная задача заключается в определении функции $q(x, y)$ из соотношении (5)—(8) по дополнительной информации:

$$u(0, y, t) = f(y, t). \tag{9}$$

3. Решение задачи продолжения для уравнения геоэлектрики методом Ландвебера

Вводим оператор A следующим образом

$$A\colon q(x, y) \mapsto f(y, t)$$

$$A\colon H^1(0, L_x) \mapsto H^1(0, 2L_x)$$

Тогда обратная задача (5) — (9) записывается в операторной форме

$$Aq = f. \tag{10}$$

Введем целевой функционал

$$J(q_n) = \|Aq_n - f\|^2_{W_2^0} = \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{2L_x} [u(0,y,t;q_n) - f(y,t)]^2 dydt. \tag{11}$$

Целевого функционала (11) минимизируем методом Ландвебера.

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n, \tag{12}$$

где $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{\|A\|^2}\right)$

3.1. **Вычисление градиента целевого функционала.** Зададим приращение $q_n + \delta q_n$, тогда

$$\delta u = \tilde{u} - u = u(x,y,t;q_n + \delta q_n) - u(x,y,t;q_n). \tag{13}$$

Используя обозначение (13), вычисляем приращение целевого функционала $J(q)$.

$$\begin{aligned}
J(q_n + \delta q_n) - J(q_n) &= \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{2L_x} \big[u(0,y,t;q_n+\delta q_n) - f(y,t)\big]^2 dydt \\
&- \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{2L_x} \big[u(0,y,t;q_n) - f(y,t)\big]^2 dydt = \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{2L_x} \big[u(0,y,t;q_n+\delta q_n) - u(0,y,t;q_n)\big] \\
&\times \Big[u(0,y,t;q_n+\delta q_n) - f(y,t) + u(0,y,t;q_n) - f(y,t)\Big] dy \\
&= \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{2L_x} \delta u(0,y,t;q_n) 2\big[u(0,y,t;q_n) - f(y,t)\big] dy + o(\|\delta u\|).
\end{aligned} \tag{14}$$

Для получения выражения на $\delta u(0,y,t;q_n)$ рассмотрим постановку возмущенной задачи для уравнений (5) — (8).

$$\tilde{u}_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy} \tag{15}$$

$$\tilde{u}_x(0,y,t) = g(y,t), \tag{16}$$

$$\tilde{u}(x,y,x) = q_n + \delta q_n, \tag{17}$$

$$\tilde{u}(x,0,t) = u(x,L_y,t) = 0. \tag{18}$$

Из соотношений (15)—(18) вычтем соотношения (5) — (8) и, учитывая (13), получим для приращения δu задачу

$$\delta u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}\delta u_t = \delta u_{xx} + \delta u_{yy} \tag{19}$$

$$\delta u_x(0,y,t) = 0, \tag{20}$$

$$\delta u(x,y,x) = \delta q_n, \tag{21}$$

$$\delta u(x,0,t) = u(x,L_y,t) = 0. \tag{22}$$

Умножая (19) на произвольную функцию $\psi(x,y,t)$, проинтегрируем по Ω.

$$0 = \iiint\limits_{\Omega}\left(\delta u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}\delta u_t - \delta u_{xx} - \delta u_{yy}\right)\psi dxdydt = \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{L_x}\int\limits_x^{2L_x-x}\psi\delta u_{tt}dtdxdy$$
$$-\int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{L_x}\int\limits_0^{t}\psi\delta u_{xx}dxdtdy - \int\limits_0^{L_y}\int\limits_{L_x}^{2L_x}\int\limits_0^{2L_x-t}\psi\delta u_{xx}dxdtdy - \int\limits_0^{L_x}\int\limits_x^{2L_x-x}\int\limits_0^{L_y}\psi\delta u_{yy}dydtdx$$
$$+\int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{L_x}\int\limits_x^{2L_x-x}\frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}\psi\delta u_t dtdxdy$$

Проинтегрируем по частям и получим:

$$\int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{L_x}\Big[(\psi\delta u_t)(x,y,2L_x-x) - \underline{(\psi\delta u_t)(x,y,x)} - (\psi_t\delta u)(x,y,2L_x-x) + \underline{\underline{(\psi_t\delta u)(x,y,x)}}$$
$$+\int\limits_x^{2L_x-x}\psi_{tt}\delta u dt\Big]dxdy + \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{L_x}\frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}\Big[(\psi\delta u)(x,y,2L_x-x) - (\psi\delta u_t)(x,y,x) - \int\limits_x^{2L_x-x}\psi_t\delta u dt\Big]dxdy$$
$$-\int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{L_x}\Big[\underline{(\psi\delta u_x)(t,y,t)} - (\psi\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\delta u_x})(0,y,t) - \underline{\underline{(\psi_x\delta u)(t,y,t)}} + (\psi_x\delta u)(0,y,t) + \int\limits_0^{t}\psi_{xx}\delta u dx\Big]dtdy$$
$$-\int\limits_0^{L_y}\int\limits_{L_x}^{2L_x}\Big[(\psi\delta u_x)(2L_x-t,y,t) - (\psi\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\delta u_x})(0,y,t) - (\psi_x\delta u)(2L_x-t,y,t) + (\psi_x\delta u)(0,y,t)$$
$$+\int\limits_0^{2L_x-t}\psi_{xx}\delta u dx\Big]dtdy - \int\limits_0^{L_x}\int\limits_x^{2L_x-x}\Big[(\psi\delta u_y)(x,L_y,t) - (\psi\delta u_y)(x,0,t) - (\psi_y\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\delta u})(x,L_y,t) +$$
$$+(\psi_y\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\delta u})(x,0,t) + \int\limits_0^{L_y}\psi_{yy}\delta u dy\Big]dtdx$$

Учитывая (20) и (22) и в силу того, что $\delta u_x(t,y,t) + \delta u_t(x,y,x) = \frac{d\delta u}{dx}\Big|_{\frac{dt}{dx}=1} =$ $(\delta q)_x$ получаем

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\psi_{tt} - \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}\psi_t} - \psi_{xx} - \psi_{yy}\right)\delta u dx dy dt$$

$$+ \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{L_x} \Big[(\psi\delta u_t)(x,y,2L_x - x) - (\psi_t\delta u)(x,y,2L_x - x) + (\psi_t\delta u)(x,y,x)\Big] dxdy$$

$$+ \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{L_x} (\psi_x\delta u)(t,y,t)dtdy - \int\limits_0^{L_y}\int\limits_{L_x}^{2L_x} \Big[(\psi\delta u_x)(2L_x - t,y,t) - (\psi_x\delta u)(2L_x - t,y,t)\Big] dtdy$$

$$- \int\limits_0^{L_y} (\psi\delta u)\Big|_0^{L_x} dy + \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{L_x} (\psi_x\delta u)(t,y,t)dxdy - \int\limits_0^{L_x}\int\limits_x^{2L_x - x} \Big[(\psi\delta u_y)(x,L_y,t) - (\psi\delta u_y)(x,0,t)\Big] dtdx$$

$$+ \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{L_x} \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \Big[(\psi\delta u)(x,y,2L_x - x) - (\psi\delta u)(x,y,x)\Big] dxdy + \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{2L_x} (\psi_x\delta u)(0,y,t)dtdy$$

Откуда, вытекает постановка сопряженной задачи

$$\psi_{tt} - \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}\psi_t} = \psi_{xx} + \psi_{yy}, \tag{23}$$

$$\psi(x,y,2L_x - x) = 0, \tag{24}$$

$$\psi_x(0,y,t) = 2(u(0,y,t) - f(y,t)), \tag{25}$$

$$\psi_y(x,L_y,t) = \psi_y(x,0,t) = 0. \tag{26}$$

Тогда, учитывая (14), получим

$$\langle \delta q_n, J'q_n \rangle = \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{L_x} \big(\psi_t(x,y,x) + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}\psi(x,y,x)\big)\delta q dx dy.$$

По определению [3, стр.260] главная часть приращения функционала есть градиент, т.е.

$$J'q_n = \psi_t(x,y,x) + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}\psi(x,y,x). \tag{27}$$

Здесь $\psi(x,y,t)$ есть решение сопряженной задачи (23) — (26).

3.2. **Алгоритм решения обратной задачи.**

(1) Выбираем начальное приближение q_0.
(2) Предположим, что q_n уже известно.
(3) Решаем прямую задачу (5) — (8) с заданным q_n.
(4) Вычисляем значение функционала $J(q_n)$ по формуле (11).
(5) Если значение целевого функционала не достаточно мало (например, $J(q_n) > \delta$), тогда решаем сопряженную задачу (23)–(26) с данными

$$\psi_n(0,y,t) = 2(u_n(0,y,t) - f(y,t)).$$

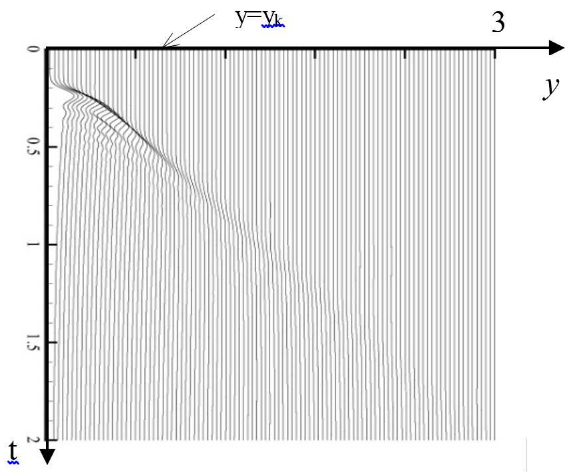


Рис. 3. Аномальное поле $E_z^{(2)}(x=0,y,t) - E_z^{(1)}(x=0,y,t)$ в среде с одной границей $x = 0.1$ м

(6) Вычисляем градиент функционала $J'(q_n)$ по формуле (27).
(7) Вычисляем следующее приближение $q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n$ и переходим пункту 2.

4. Результаты численных расчетов

4.1. **Пример 1 Результаты расчетов. Одна граница $x = 0.1$ м. Отклик среды.** Расчеты проводились в области $(x, y) = (2) \times (3)$ м., время наблюдения 50 нс. Шаг по пространственным переменным $h_x = h_y = 0.0025$ м. Шаг по времени равен $h_t = 0.004$ нс.

Рассмотрим следующие параметры среды:

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 = 81, & x \in (0,\ 0.1) \\ \varepsilon_2 = 5, & x \in (0.1,\ 0.3) \\ \varepsilon_3 = 49, & x \in (0.3,\ 3) \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 = 0.5, & x \in (0,\ 0.1) \\ \sigma_2 = 0.006, & x \in (0.1,\ 0.3) \\ \sigma_3 = 0.05, & x \in (0.3,\ 3) \end{cases}$$

Расчеты проведены для трех различных сред: с одной границей на глубине 0,1м.

Источник находится в точке 0, а приемники расположены по оси y с шагом $h_y = 0.0025$ м. На рисунке 3 каждая вертикальная линия описывает график функции $E_z(0, y = y_k, t)$, где y_k- номер линии, координата расположения приемника.

Вначале рассмотрим однородную среду и вычислим поле $E_z^{(1)}(x = 0, y, t)$в однородной среде, где параметры среды равны $\varepsilon_1, \quad \sigma_1$.

Затем рассмотрим среду с одной границей $x = 0.1$ м и вычисляем полное поле $E_z^{(2)}(x = 0, y, t)$. . При этом выше границы $x = 0.1$ м параметры среды $\varepsilon_1, \ \sigma_1$ и ниже $\varepsilon_2, \ \sigma_2$.

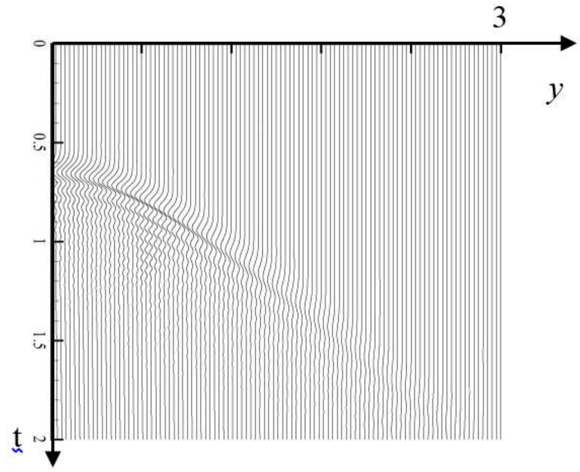


Рис. 4. Аномальное поле $E_z^{(2)}(x = 0, y, t) - E_z^{(1)}(x = 0, y, t)$ в среде с одной границей $x = 0.1$ м

Вычисляем аномальное поле, которое является разницей полного поля и поля в однородной среде $E_z^{(2)}(x = 0, y, t) - E_z^{(1)}(x = 0, y, t)$. Аномальное поле позволяет увидеть отражение от границы в виде годографа (рис. 3). Годографом называется график зависимости времени прихода электромагнитной волны от координат точек наблюдения. Различают годографы поверхностные, когда наблюдения выполняются на некоторой площади, и линейные, когда наблюдения производятся вдоль линии, чаще прямой. Аналогичные годографы получаются при реальных георадарных измерениях.

4.2. **Пример 2 Результаты расчетов. Две границы $x = 0.1$ м и $x = 0.3$ м. Отклик среды.** Рассмотрим среду с двумя границами на $x = 0.1$ м и $x = 0.3$ м. Источник находится в точке 0, а приемники расположены по оси y с шагом $h_y = 0.0025$ м. Вначале вычисляем однородное поле $E_z^{(2)}(x = 0, y, t)$ с одной границей на глубине $x = 0.1$ м. Затем вычислим полное поле $E_z^{(3)}(x = 0, y, t)$ с двумя границами $x = 0.1$ м и $x = 0.3$ м.

После этого вычислим аномальное поле, которое является разницей полного поля от однородного поля $E_z^{(3)}(x = 0, y, t) - E_z^{(3)}(x = 0, y, t)$. Аномальное поле позволяет увидеть отражение от второй границы в виде годографа (рис. 4).

4.3. **Пример 3 Результаты расчетов. Включение в однородной среде.** Рассмотрим однородную среду с включением размером $(0.08) \times (0.3)$ м^2 , на глубине 0.55 м (рис. 5). Параметры однородной среды $\varepsilon_1 = 12, \quad \sigma_1 = 0.1$. Параметры локализованного объекта $\varepsilon_2 = 1, \quad \sigma_2 = 2 \cdot 10^7$.

Вначале рассмотрим однородную среду без включения. Вычислим поле $E_z^{(1)}(x = 0, y, t)$. Затем рассмотрим среду с включением и вычислим полное поле $E_z^{(2)}(x = 0, y, t)$. Аномальное поле $E_z^{(2)}(x = 0, y, t) - E_z^{(1)}(x = 0, y, t)$ позволяет увидеть отражения от локализованного объекта в виде годографа (рис. 6).

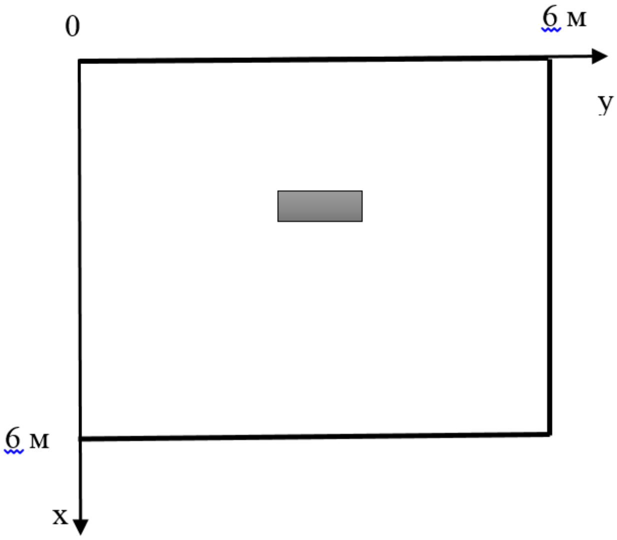


Рис. 5. Схема включения в однородной среде

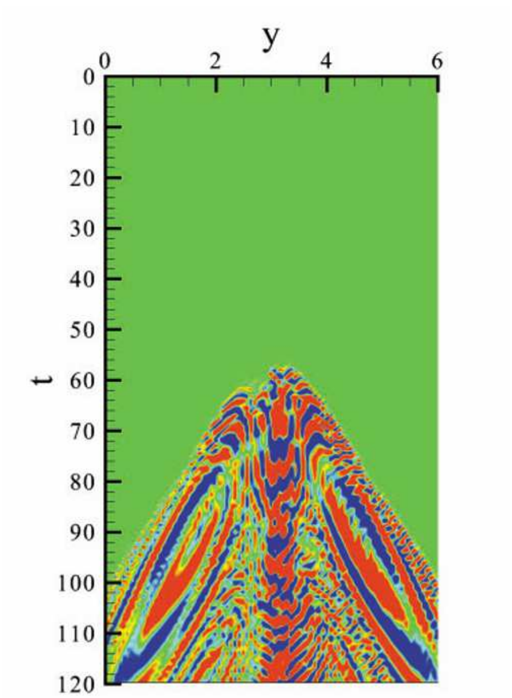


Рис. 6. Аномальное поле локализованного объекта в однородной среде

Для сравнения с экспериментальными данными металлический цилиндр размером $(0.08) \times (0.3)m^2$ был закопан на глубину 0.55 м.

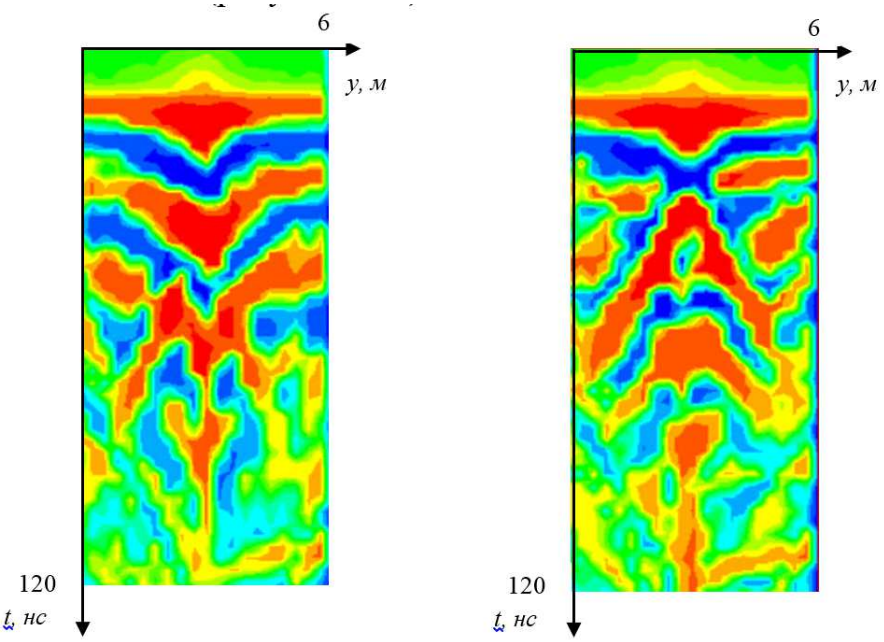


Рис. 7. Радарограмма однородной среды (слева) радарограмма среды с неоднородностью (справа)

Вначале измерили георадаром и получили поле в однородной среде без включения (рис. 7 (слева)). Затем, металлический цилиндр был закопан, и георадаром измерили поле среды с неоднородностью (рис. 7 (справа)). Данные радарограммы были переведены в числовой формат, и вычислена разница между радарограммой среды с неоднородностью и радарограммой среды без включения (рис. 8).

По виду годографа можно предположить, какие слои с какими параметрами находятся в исследуемой среде. По годографу также можно определить, что локализованный объект в среде присутствует, и можно указать его местоположение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК №1746/ГФ4 "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания".

References

[1] С.И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Новосибирск: СибНИ, 2008.
[2] С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов, А.Т. Нурсеитова, *Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы*, Алматы-Новосибирск: Международный фонд обратных задач, 2006.
[3] Ф.П. Васильев, *Численные методы решения экстремальных задач*, М.: Наука, 1988.
[4] S.I. Kabanikhin, A.L. Karchevsky, *Method for solving the Cauchy Problem for an Elliptic Equation*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **3(1)** (1995), 21–46.

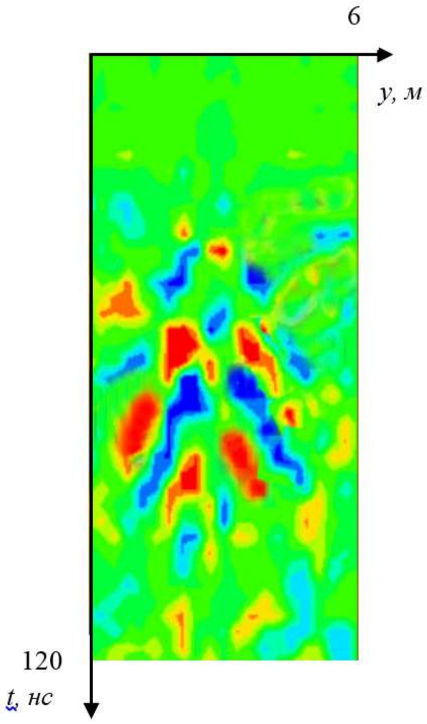


Рис. 8. Радарограмма аномального поля от неоднородности

[5] В.А. Козлов, В.Г. Мазья, А.В. Фомин, *Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **31(1)** (1991), 64–74.

[6] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, D.B. Nurseitov, A.T. Nurseitova, S.E. Kasenov, *Comparative Analysis of Methods for Regularizing an Initial Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation*, Journal of Applied Mathematics, 2014, (2014), *http://dx.doi.org/10.1155/2014/786326*, 7 pages.

[7] S.I. Kabanikhin, Y.S. Gasimov, D.B. Nurseitov, M.A. Shishlenin, B.B. Sholpanbaev, S. Kasenov, *Regularization of the continuation problem for elliptic equations*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **21(6)** (2013), 871–884.

[8] S.I. Kabanikhin, D.B. Nurseitov, M.A. Shishlenin, B.B. Sholpanbaev, *Inverse problems for the ground penetrating radar*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **21(6)** (2013), 885–892.

[9] М.А. Шишленин, *Матричный метод в задачах определения источников колебаний*, Сибирские электронные математические известия, **11** (2014), С.161–С.171.

[10] С.И. Кабанихин, Д.Б. Нурсеитов, Б.Б. Шолпанбаев, *Задача продолжения электромагнитного поля в сторону залегания неоднородностей*, Сибирские электронные математические известия, **11** (2014), С.85–С.102.

[11] С.И. Кабанихин, Д.Б. Нурсеитов, М.А. Шишленин, Б.Б. Шолпанбаев, *Двумерные линеаризованные обратные задачи электродинамики*, Сибирские электронные математические известия, **11** (2014), С.145–С.155.

Sergey Igorevich Kabanikhin
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

Maxim Alexandrovich Shishlenin
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug avenue,
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: mshishlenin@ngs.ru

Bakytgerey Bakturovich Sholpanbaev
Kazakh National Pedagogical University named after Abai,
pr. Dostyk, 13,
050010, Almaty, Kazakhstan
E-mail address: Bahtygerey@mail.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.219–С.228 (2015) УДК 519.635
MSC 76M12

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В ДВУМЕРНОЙ СРЕДЕ: ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

И.М. КУЛИКОВ, Н.С. НОВИКОВ, М.А. ШИШЛЕНИН

Abstract. The report considers the modeling of the 2D acoustic waves propagation. The hyperbolic first order system of differential equations was considered and solved by the method of S.K. Godunov. The basic element of the method is the solution of the Riemann's problem of the "decay of discontinuity". The results of numerical experiments are presented. The inverse problem of reconstructing the density of the medium was also considered. The formula, that reduces the calculation of the residual functional to the solution of the adjoint problem, was obtained.

Keywords: acoustic problem, numerical methods, inverse problems, optimization methods

1. Введение

Данная работа посвящена моделированию распространения ультразвуковых волн. В настоящее время работы по созданию эффективных ультразвуковых томографов активно ведутся как в России [8, 10], так и за рубежом (Германия, Япония, США). Особый интерес эта область представляет в связи с возможностью разработки средств качественной диагностики рака груди. В силу этого

Kulikov, I.M., Novikov, N.S., Shishlenin, M.A., Mathematical modeling of propagation of ultrasonic waves in the medium: direct and inverse problem.

The work was supported by RFBR under grant 14-01-00208, 15-01-09230, the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, grant MES 1760/GF: project NTP 04.03.02 "Creating methodological basis of geological and geophysical studies of focal zones UNE in igneous rocks".

Поступила 17 января 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

большое значение приобретает создание эффективных методов решения связанных с ультразвуковой томографией задач. Авторами предлагается подход, рассматривающий задачу томографии как коэффициентную обратную задачу для системы гиперболических уравнений первого порядка, что позволяет рассматривать объекты со структурой, отличной от слоистой. Для решения этой задачи может быть использован аппарат оптимизационных численных методов, широко используемый в теории обратных и некорректных задач для решения прикладных задач [4, 5, 6, 7, 11, 14, 13, 16]. Эти алгоритмы предполагают решение прямой и сопряженной задачи на каждом шаге итерационного процесса оптимизации, в связи с чем возникает необходимость использования эффективных численных методов решения прямой задачи. Математическая модель, используемая в данной работе, использует для описания распространения акустических волн в среде гиперболическую систему уравнений первого порядка. Для решения этой системы используется метод, разработанный С.К. Годуновым ([1], [3]), использующийся для решения широкого круга задач, связанных с гидродинамикой [9], [15], [12].

2. Постановка задачи. Схема Годунова

Для упрощения задачи мы будем рассматривать случай двух пространственных переменных. В этом случае распространение плоских звуковых волн в среде описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) = 0, \tag{3}$$

Здесь $u = u(x, y, t), v = v(x, y, t)$ - две компоненты скорости в среде (по x и y соответственно), $p = p(x, y, t)$ - давление в среде. Функции $\rho(x, y)$ и $c(x, y)$ описывают соответственно плотность среды и скорость звука в среде. Подробный вывод этих уравнений можно найти в [2]. Отметим, что уравнения (1)-(3) могут быть переписаны в виде интегральных соотношений, представляющих собой законы сохранения массы и импульса для рассматриваемой задачи:

$$\oint \rho u dxdy + pdydt = 0, \tag{4}$$

$$\oint \rho v dxdy + pdxdt = 0, \tag{5}$$

$$\oint pdxdy + \rho c^2 (udydt + vdxdt) = 0. \tag{6}$$

Для решения задачи, задаваемой уравнениями (1)-(3) был использован метод, разработанный С.К. Годуновым [3]. Основным структурным элементом метода является решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва с параметрами среды в соседних ячейках разностной сетки, которая в общем виде может быть записана следующим уравнением:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0. \tag{7}$$

Как правило, параметры среды в соседних ячейках достаточно близки, что позволяет аппроксимировать эту нелинейную задачу некоторым линейным приближением:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0. \tag{8}$$

Методы построения аппроксимации A при этом могут быть различными [15]. Рассмотрим построение на основе метода Годунова [3] разностной схемы для решения задачи (1)-(3). Введём в пространстве $\mathbb{R}^2$ сетку, образованную прямыми $x = x_j$ и $y = y_k$. При этом шаги сетки h_x, h_y предполагаются постоянными. Прямоугольник с вершинами в точках (x_{j-1}, y_{k-1}), (x_j, y_{k-1}), (x_j, y_k) ,(x_{j-1}, y_k) образовывает ячейку сетки с номером $(j-1/2, k-1/2)$.
Функции $u(x,y,t), v(x,y,t), p(x,y,t)$, описывающие состояние среды на момент времени t считаются постоянными в пределах каждой ячейки. Соответствующие значения обозначаюся как $u_{j-1/2,k-1/2}, v_{j-1/2,k-1/2}, p_{j-1/2,k-1/2}$. Так, обозначая шаг сетки по времени через τ и применяя интегральное равенство (4) к ячейке $j-1/2, k-1/2$, получим:

$$\begin{aligned}\rho(u^{j-1/2,k-1/2} - u_{j-1/2,k-1/2})h_x h_y + \\ + \int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{y_k-1}^{y_k}[p(x_j,y,t) - p(x_{j-1},y,t)]dydt = 0,\end{aligned} \tag{9}$$

где через верхний индекс описываются значения искомых величин u, v, p в момент времени $t_0 + \tau$. Далее, функции $p(x_j, y, t), p(x_{j-1}, y, t)$, соответствующие значениям на границе ячейки, в интеграле выражения (9) приближённо предполагаются постоянными (подробнее см. [3]). Обозначая эти выражения $P_{j,k-1/2}$ и $P_{j-1,k-1/2}$ соответственно, получаем:

$$\rho(u^{j-1/2,k-1/2} - u_{j-1/2,k-1/2})h_x h_y + \tau h_y(P_{j,k-1/2} - P_{j-1,k-1/2}) = 0. \tag{10}$$

Используя оставшиеся законы сохранения (5), (6), можно получить аналогичные (10) соотношения:

$$\rho(v^{j-1/2,k-1/2} - v_{j-1/2,k-1/2})h_x h_y + \tau h_x(P_{j-1/2,k} - P_{j-1/2,k-1}) = 0, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}(p^{j-1/2,k-1/2} - p_{j-1/2,k-1/2})h_x h_y + \\ +\tau\rho c^2 h_y(U_{j,k-1/2} - U_{j-1,k-1/2}) + \tau\rho c^2 h_x V_{j-1/2,k} - V_{j-1/2,k-1}) = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

Для определения искомых величин на "верхнем"слое необходимо вычислить значения "больших"величин P, U, V на границах ячеек. Для их определения используются решения модельных задач "расчёта распада разрыва связанных с распространением акустических волн в окрестности границы, на которой акустические параметры терпят разрыв. В итоге на линии $x = x_j$ имеем:

$$u = U_{j,k-1/2} = \frac{u_{j-1/2,k-1/2} + u_{j+1/2,k-1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2,k-1/2} - p_{j-1/2,k-1/2}}{2\rho c} \tag{13}$$

$$p = P_{j,k-1/2} = \frac{p_{j-1/2,k-1/2} + p_{j+1/2,k-1/2}}{2} - \rho c\frac{u_{j+1/2,k-1/2} - u_{j-1/2,k-1/2}}{2} \tag{14}$$

Аналогичные равенства имеют место на линии $y = y_k$:

$$v = V_{j-1/2,k} = \frac{v_{j-1/2,k-1/2} + u_{j-1/2,k+1/2}}{2} - \frac{p_{j-1/2,k+1/2} - p_{j-1/2,k-1/2}}{2\rho c} \tag{15}$$

$$p = P_{j-1/2,k} = \frac{p_{j-1/2,k-1/2} + p_{j-1/2,k+1/2}}{2} - \rho c \frac{v_{j-1/2,k+1/2} - u_{j-1/2,k-1/2}}{2} \tag{16}$$

Таким образом, в силу (10), (11), (12), значения искомых величин в момет времени $t_0 + \tau$ выражаются с помощью значений величин в момент времени t_0 следующим образом:

$$\begin{aligned} u^{j-1/2,k-1/2} &= u_{j-1/2,k-1/2} - \frac{\tau}{\rho h_x}(P_{j,k-1/2} - P_{j-1,k-1/2}), \\ v^{j-1/2,k-1/2} &= v_{j-1/2,k-1/2} - \frac{\tau}{\rho h_y}(P_{j-1/2,k} - P_{j-1/2,k-1}), \\ p^{j-1/2,k-1/2} &= p_{j-1/2,k-1/2} - \frac{\tau}{h_x}\rho c^2(U_{j,k-1/2} - U_{j-1,k-1/2}) - \\ &\quad - \frac{\tau}{h_y}\rho c^2(V_{j-1/2,k} - V_{j-1/2,k-1}). \end{aligned}$$

При этом "большие"величины U, V, P определяются на основе соотношений (13)-(16). Устойчивость схемы определяется ([15], [3]) следующим условием:

$$\tau\left(\frac{C_0}{h_x} + \frac{C_0}{h_y}\right) < 1 \tag{17}$$

Здесь в качестве C_0 используется максимальное значение скорости звука в рассматриваемой области.

3. Результаты расчётов

Для проведения тестовых расчётов использовалась следующая конфигурация расчётов. В качестве модели томографа рассматривался круг радиуса 11.5 см, заполненный водой. Внутрь помещался изучаемый объект, имеющий форму круга радиус 7 см. Скорость и плотность среды изучаемого объекта были выбраны в соответствии с параметрами человеческого тела. В качестве модели “опухолей” в объект были помещены два включения с повышенной плотностью. Для моделирования условий поглощения акустических волн на границе томографа, модель помещалась в квадрат со стороной 0.3м, на границе которого рассматривались однородные краевые условия. Число узлов по пространству одинаково по обоим координатам и равно 200. Шаг по времени выбирается в соответствии с условием Куранта-Фридрихса-Леви (17). В тестовых расчётах использовался источник акустических волн в форме круга радиусом 2 см, расположенный на границе томографа.Давление в источнике в тестовом случае предполагалось постоянным в течение всего времени расчёта и соответствовало $p = 5 * 10^{-4}$ атм.

4. Постановка сопряженной задачи и вывод градиента функционала невязки

Как было упомянуто во введении, определение плотности и скорости звука в среде планируется осуществить с помощью решения обратной задачи для

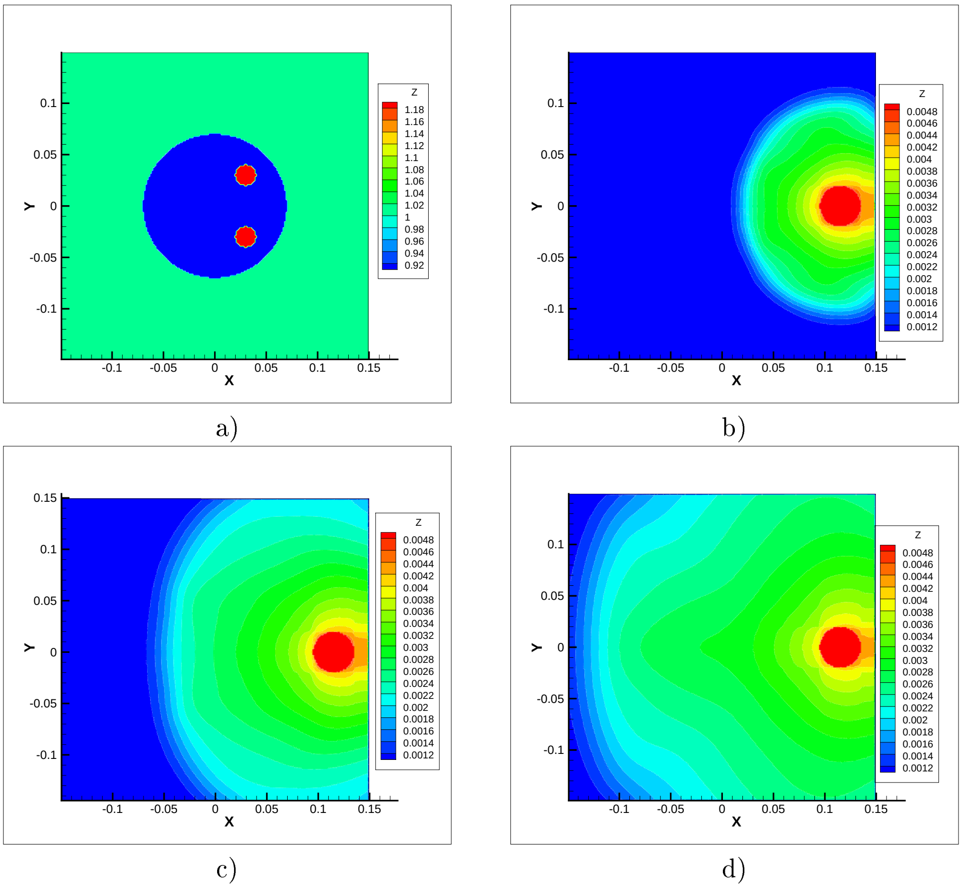


Рис. 1. Результаты численных расчётов: a) Распределение плотности b) Распределение давления в момент $t = 0.06$, c) Распределение давления в момент $t = 0.12$, d) Распределение давления в момент $t = 0.18$.

системы уравнений акустики:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, (x, y) \in \Omega, 0 < t \leq T \tag{18}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, (x, y) \in \Omega, \tag{19}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) = \theta_\Omega(x, y)A(t), (x, y) \in \Omega; \tag{20}$$

$$u, v, p|_{(x,y)\in\partial\Omega} = 0. \tag{21}$$

$$u, v, p|_{t=0} = 0 \tag{22}$$

Здесь $\Omega = (x, y) \in [0, L] \times [0, L]$.

Данными обратной задачи являются значения давления в приёмниках:

$$f_i(t) = p(x_i, y_i, t), i = 1...N \tag{23}$$

Предположим, что распределение скорости звука в среде известно и рассмотрим задачу восстановления плотности среды $\rho(x, y)$. В таком случае возможно выписать функционал невязки:

$$J(\rho) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \big[p(x_i, y_i, t) - f_i(t)\big]^2 dt = \tag{24}$$
$$= \int_0^T \int_0^L \int_0^L \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i, y - y_i)\big[p(x, y, t) - f_i(t)\big]^2 dxdydt$$

Для получения формулы, позволяющей осуществить эффективную минимизацию функционала (24), рассмотрим задачу вида (18) - (22), соответствующую проварьированным данным прямой задачи $\rho(x, y)+\delta\rho$. Обозначив соответствующие функции как $\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{p}$, получим:

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho + \delta\rho}\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x} = 0, (x, y) \in \Omega, 0 < t \leq T$$
$$\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho + \delta\rho}\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial y} = 0, (x, y) \in \Omega,$$
$$\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial t} + (\rho + \delta\rho)c^2(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y}) = \theta_\Omega(x, y)A(t), (x, y) \in \Omega;$$
$$\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{p}|_{(x,y)\in\partial\Omega} = 0.$$
$$\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{p}|_{t=0} = 0$$

Вычитая из одной постановки другую и обозначая $\delta u = \widetilde{u} - u, \delta v = \widetilde{v} - v, \delta p = \widetilde{p} - p$, получим:

$$\delta u_t + \frac{1}{\rho}\delta p_x + \frac{u_t}{\rho}\delta\rho = 0, (x, y) \in \Omega, 0 < t \leq T \tag{25}$$
$$\delta v_t + \frac{1}{\rho}\delta p_y + \frac{v_t}{\rho}\delta\rho = 0, (x, y) \in \Omega, \tag{26}$$
$$\delta p_t + \rho c^2(\delta u_x + \delta v_y) + \delta\rho \cdot c^2(\widetilde{u}_x + \widetilde{v}_y) = 0, (x, y) \in \Omega; \tag{27}$$
$$\delta u, \delta v, \delta p|_{(x,y)\in\partial\Omega} = 0. \tag{28}$$
$$\delta u, \delta v, \delta p|_{t=0} = 0 \tag{29}$$

Выпишем также вариацию функционала невязки:

(30)

$$\delta J = J(\rho+\delta\rho)-J(\rho) = \int_0^T \int_0^L \int_0^L \sum_{i=1}^N \delta(x-x_1, y-y_1)\Big([p+\delta p-f_i]^2-[p-f_i]^2\Big)dxdydt =$$
$$= \int_0^T \int_0^L \int_0^L \sum_{i=1}^N \delta p * \Big(2\delta(x - x_i, y - y_i)(p - f_i)\Big)dxdydt + o(||\delta p||).$$

Определим теперь функции $\Psi_i, i = 1, 2, 3$ как решение следующей задачи:

$$\Psi_{1t} + \frac{1}{\rho}\Psi_{3x} = 0; \tag{31}$$

$$\Psi_{2t} + \frac{1}{\rho}\Psi_{3y} = 0; \tag{32}$$

$$\frac{1}{\rho c^2}\Psi_{3t} + (\Psi_{1x} + \Psi_{2y}) = 2\sum_{i=1}^{N}\delta(x - x_i, y - y_i)\big[p - f_i\big]; \tag{33}$$

$$\Psi_i(x, y, T) = 0; \tag{34}$$

$$\Psi_i|_{(x,y)\in\partial\Omega} = 0. \tag{35}$$

Задача (31)-(35) называется сопряженной к задаче (18)-(22). Используя сопряженную задачу, перепишем (30):

$$\delta J = \int_0^T\int_0^L\int_0^L\sum_{i=1}^{N}\delta p * \Big(2\delta(x - x_1, y - y_1)(p - f_1)\Big)dxdydt + o(||\delta p||) =$$
$$= \int_0^T\int_0^L\int_0^L\delta p\Big(\frac{1}{\rho c^2}\Psi_{3t} + (\Psi_{1x} + \Psi_{2y})\Big)dxdydt + o(||\delta p||) \cong$$
$$\cong -\int_0^T\int_0^L\int_0^L\Big(\Psi_3\frac{1}{\rho c^2}\delta p_t + \Psi_1\delta p_x + \Psi_2\delta p_y\Big)dxdydt.$$

В силу (25)—(29) $\delta u, \delta v, \delta p$ имеем:

$$\frac{1}{\rho c^2}\delta p_t = -(\delta u_x + \delta v_y) - \frac{\delta\rho}{\rho}(\widetilde{u}_x + \widetilde{v}_y);$$
$$\delta p_x = -(\rho\delta u_t + \delta\rho u_t);$$
$$\delta p_y = -(\rho\delta v_t + \delta\rho v_t);$$

Тогда равенство может быть переписано следующим образом:

$$\delta J \cong -\int_0^T\int_0^L\int_0^L\Big(\Psi_3\frac{1}{\rho c^2}\delta p_t + \Psi_1\delta p_x + \Psi_2\delta p_y\Big)dxdydt =$$
$$= -\int_0^T\int_0^L\int_0^L\Big(-\Psi_3\Big[(\delta u_x + \delta v_y) + \frac{\delta\rho}{\rho}(\widetilde{u}_x + \widetilde{v}_y)\Big] -$$
$$-\Psi_1(\rho\delta u_t + \delta\rho u_t) - \Psi_2(\rho\delta v_t + \delta\rho v_t)\Big)dxdydt.$$

Обозначим

$$(*) = \int_0^T\int_0^L\int_0^L\Psi_3\frac{\delta\rho}{\rho}(\widetilde{u}_x + \widetilde{v}_y)dxdydt \tag{36}$$

Тогда, продолжая (4),

$$\delta J = \int_0^T \int_0^L \int_0^L \Big(\Psi_3(\delta u_x + \delta v_y) + \Psi_1(\rho\delta u_t + \delta\rho u_t) + \Psi_2(\rho\delta v_t + \delta\rho v_t)\Big) dxdydt + (*) =$$
$$= -\int_0^T \int_0^L \int_0^L \Big(\delta u \Psi_{3x} + \delta v \Psi_{3y} + \rho\delta u \Psi_{1t} + \delta\rho\Psi_{1t} u + \rho\delta v\Psi_{2t} + \delta\rho\Psi_{2t} v\Big) dxdydt + (*) =$$
$$= -\int_0^T \int_0^L \int_0^L \delta u(\rho\Psi_{1t} + \Psi_{3x}) + \delta v(\rho\Psi_{2t} + \Psi_{3y}) + \delta\rho(\Psi_{1t}u + \Psi_{2t}v) dxdydt + (*)$$

В силу (31)-(35) выражения при δu и δv обращаются в ноль. Рассмотрим теперь отдельно слагаемое $(*)$:

$$(*) = \int_0^T \int_0^L \int_0^L \Psi_3 \frac{\delta\rho}{\rho}(\widetilde{u}_x + \widetilde{v}_y) dxdydt =$$
$$= \int_0^T \int_0^L \int_0^L \Psi_3 \Big(\frac{\delta\rho}{\rho}(u_x + v_y) + \frac{1}{\rho}\delta\rho(\delta u_x + \delta v_y)\Big) dxdydt =$$
$$= \int_0^T \int_0^L \int_0^L \delta\rho \frac{\Psi_3}{\rho}(u_x + v_y) dxdydt + o(\delta\rho).$$

В итоге, не учитывая слагаемые порядка малости выше первого относительно $|\rho||)$, получим:

$$\delta J = \int_0^T \int_0^L \int_0^L \delta\rho \Big[-\Psi_{1t}u - \Psi_{2t}v + \frac{1}{\rho}\Psi_3(u_x + v_y)\Big] dxdydt =$$
$$= \int_0^T \int_0^L \int_0^L \delta\rho \Big[-\Psi_{1t}u - \Psi_{2t}v - u\Big(\frac{1}{\rho}\Psi_3\Big)_x - v\Big(\frac{1}{\rho}\Psi_3\Big)_y\Big] dxdydt =$$
$$= \int_0^T \int_0^L \int_0^L \delta\rho \Big[-u(\Psi_{1t} + \frac{1}{\rho}\Psi_{3x}) - v(\Psi_{2t} + \frac{1}{\rho}\Psi_{3y}) + \Psi_3 \frac{u\rho_x + v\rho_y}{\rho^2}\Big] dxdydt =$$
$$= \int_0^T \int_0^L \int_0^L \delta\rho \Psi_3 \frac{u\rho_x + v\rho_y}{\rho^2} dxdydt.$$

С другой стороны, по определению градиента функционала

$$\delta J = < J'(\rho), \delta\rho > + o(||\rho||) = \int_0^L \int_0^L J'(x,y)\delta\rho(x,y) dxdy + o(||\rho||).$$

Следовательно, градиент функционала невязки может быть вычислен следующим образом:

$$J'(\rho)(x,y) = \int_0^T \Psi_3(x,y,t) \frac{u(x,y,t)\rho_x + v(x,y,t)\rho_y}{\rho^2(x,y)} dt \tag{37}$$

Таким образом, для минимизации функционала (24) могут быть использованы градиентные методы. Решим прямую задачу (18)—(22) и сопряженную задачу (31)—(35), градиент функционала на каждой итерации спуска может быть вычислен по формуле (37). Отметим также, что сопряженная задача (31)—(35), после замены переменной τ на $t = T - \tau$, может быть записана следующим образом:

$$(38)\quad \begin{cases} -\Psi_{1t} + \dfrac{1}{\rho}\Psi_{3x} = 0; \\ -\Psi_{2t} + \dfrac{1}{\rho}\Psi_{3y} = 0; \\ -\Psi_{3t} + \rho c^2(\Psi_{1x} + \Psi_{2y}) = 2\delta(x - x_1, y - y_1)\rho c^2\big[p(x, y, t) - f_1(t)\big]; \\ \Psi_i(x, y, 0) = 0; \\ \Psi_i\big|_{(x,y)\in\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

References

[1] S.K. Godunov, *Difference method for numerical computation of discontinuous solutions of hydrodynamics*, Mathematical collection, **47 (3)** 1959, 271–306 (in Russian).

[2] M.A. Isakovich, *General acoustics*, Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).

[3] S.K. Godunov, A.V. Zabrodin, M.Y. Ivanov, A.N. Kraykov, G.P. Prokopov, *Numerical solution of multi-dimensional problems of gas dynamics*, Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).

[4] S. Sh. Bimuratov, S.I. Kabanikhin, *Solution of one-dimensional inverse problem of electrodynamics by Newton-Kantorovich method*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **32 (12)** (1992), 1900–1915 (in Russian).

[5] S.I. Kabanikhin, A.L. Karchevsky, *Method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation*, J. Inverse Ill-Posed Probl.,**3 (1)** (1995), 21–46.

[6] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Quasi-solution in inverse coefficient problems*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **16 (7)** (2008), 705–713.

[7] S. I. Kabanikhin, A. Gasanov, A.V. Penenko, *Method of gradient descent for solving the coefficient inverse problem of heat transfer*, Numerical Analysis and Applications, **11 (1)** (2008), 41–51 (in Russian).

[8] V.A. Burov, S.N. Vecherin, S.M. Morozov, O.D. Rumyantseva *Modeling of the exact solution of the inverse problem of acoustic scattering by functional methods*, Akusticheskiy Zhurnal,**56 (4)** (2010), 516–536 (in Russian).

[9] I.S. Menshov *Generalization of the method of S.K. Godunov for problems of computational aeroacoustics*, Scientific reports of Central Institute of Aerohydrodynamics, **41 (1)** (2010), 44–52 (in Russian).

[10] V.A. Burov, V.B. Voloshinov, K.V. Dmitriev, N.V. Polikarpova, *Acoustic waves in metamaterials, crystalls and structures with abnormal deflection*, Physics-Uspekhi, **181 (11)** (2011), 1205–1211 (in Russian).

[11] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *About the usage of the a priori information in coefficient inverse problems for hyperbolic equations*, Proceedings of IMM of UrB RAS, **18 (1)** (2012), 147–164 (in Russian).

[12] S.K. Godunov, S.P. Kiselev, I.M. Kulikov, V.I. Mali, *Numerical and experimental modeling of wave's genesis for explosive welding*, Modern problems of mechanics, Collection of papers, dedicated to 80th anniversary of A.G. Kulikovskiy (2013), 16–31 (in Russian).

[13] S.I. Kabanikhin, Y.S. Gasimov, D.B. Nurseitov, M.A. Shishlenin, B.B. Sholpanbaev, S. Kasenov, *Regularization of the continuation problem for elliptic equations*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **21 (6)** (2013), 871–884.

[14] S.I. Kabanikhin, D.B. Nurseitov, M.A. Shishlenin, B.B. Sholpanbaev, *Inverse problems for the ground penetrating radar*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **21 (6)** (2013), 885–892.

[15] S.K. Godunov, I.M. Kulikov, *Computation of discontinuous solutions of hydrodynamical equations with guaranty of entropy's nondecrease*,Computational Mathematics and Mathematical Physics, **54 (6)** (2014), 1008–1021 (in Russian).

[16] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, D.B. Nurseitov, A.T. Nurseitova, S.E. Kasenov, *Comparative Analysis of Methods for Regularizing an Initial Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation*, Journal of Applied Mathematics, 2014. (http://dx.doi.org/10.1155/2014/786326).

Igor Mikhailovich Kulikov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: kulikov@ssd.sscc.ru

Nikita Sergeevich Novikov
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: novikov-1989@yandex.ru

Maxim Alexandrovich Shishlenin
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug avenue,
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: mshishlenin@ngs.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.229–С.233 (2015) УДК 519.62
MSC 65Q10

THE TWO-DIMENSIONAL ANALOG OF M. G. KREIN EQUATION OF RECOVERING THE VELOCITY IN WAVE EQUATION

S.I. KABANIKHIN, M.A. SHISHLENIN

We consider the method of regularization of two dimensional (2D) inverse coefficient problems based on the projection method and the approach of I.M. Gelfand, B.M. Levitan and M.G. Krein. We propose a method of reconstruction of the velocity in 2D wave equation. The 2D analogies of the I.M. Gelfand, B.M. Levitan and M.G. Krein method are established. Our approach can be easily applied to corresponding multidimensional inverse problems. The results of numerical calculations are presented.

Key words: M.G. Krein equation, inverse coefficient problem, wave equation

1. Introduction

We consider the method of regularization of 2D inverse coefficient problems based on the projection method and the approach of I. M. Gelfand, B. M. Levitan, M. G. Krein and V.A. Marchenko.

In 1951 I. M. Gelfand and B. M. Levitan [1] established a method of reconstructing the Sturm–Liouville operator from a spectral function and gave the sufficient conditions for a given monotonic function to be a spectrum function of the operator. In 1951 and 1954 M. G. Krein [2, 3] considered the physical statement of the inverse boundary value problem and proved solvability.

Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A., The two-dimensional analog of M. G. Krein equation of recovering the velocity in wave equation.

The work was supported by RFBR under grant 14-01-00208, 15-01-09230, the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, grant MES 1760/GF: project NTP 04.03.02 "Creating methodological basis of geological and geophysical studies of focal zones UNE in igneous rocks".

Поступила 22 ноября 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

One of the advantages of our approach (for 1D inverse coefficient problems see also [4, 5, 6]) is that it allows one to avoid multiple solution of 2D direct problem (see also the boundary control method proposed by M.I. Belishev [13, 18]. In [16] we proved that boundary control method and the method by M.G. Krein are equivalent in 1D case.

In [21, 22, 23, 24] it was developed new methods of numerical solution of multidimensional analogs Gelfand–Levitan and Krein equations.

2. Reconstruction of the velocity $c(x, y)$

Inverse problem: find the velocity $c(x, y)$ from the sequence of relations ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$):

$$c^{-2}(x,y)u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)}, \qquad x \in \mathrm{R}, \quad y \in \mathrm{R}, \quad t > 0;$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \qquad u_t^{(k)}|_{t=0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\,\delta(x).$$

$$u^{(k)}(0,y,t) = f^{(k)}(y,t), \qquad u_x^{(k)}(+0,y,t) = 0.$$

Let $\tau(x, y)$ be a solution of Cauchy problem for the eikonal equation

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = c^{-2}(x,y), \qquad x > 0, \quad y \in \mathrm{R}; \tag{1}$$

$$\tau|_{x=0} = 0, \qquad \tau_x|_{x=0} = c^{-1}(0,y), \qquad y \in \mathrm{R}. \tag{2}$$

Let us introduce new variables $z = \tau(x, y)$, $y = y$ and new functions

$$v^{(k)}(z,y,t) = u^{(k)}(x,y,t), \qquad b(z,y) = c(x,y). \tag{3}$$

Since the velocity is supposed to be strictly positive this change of variables is not degenerate at least in some interval $x \in (0, h)$.

Let us consider the sequence of the auxiliary problems ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) [10, 17]:

$$w_{tt}^{(m)} = w_{zz}^{(m)} + b^2 w_{yy}^{(m)} + q w_{yz}^{(m)} + p w_z^{(m)}, \qquad z > 0, \quad y \in \mathrm{R}, \quad t \in \mathrm{R}; \tag{4}$$

$$w^{(m)}(0,y,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}my}\,\delta(t), \qquad w_z^{(m)}(0,y,t) = 0. \tag{5}$$

Here

$$q(z,y) = 2b^2\tau_y, \qquad p(z,y) = b^2(z,y)(\tau_{xx} + \tau_{zz}). \tag{6}$$

We suppose that $c(0, y) = b(0, y)$ is known and for simplicity $b(0, y) \equiv 1$ for $y \in \mathrm{R}$.

In the neighborhood of the plane $t = z$ the solution of the direct problem (4), (5) has the form [10, 17]:

$$w^{(m)}(z,y,t) = S^{(m)}(t,y)\delta(z-t) + Q^{(m)}(t,y)\theta(z-t) + \tilde{w}^{(m)}(z,y,t). \tag{7}$$

Here $\tilde{w}^{(m)}$ is continuous function and functions $S^{(m)}$ and $Q^{(m)}$ solve the following problems:

$$2S_t^{(m)} + qS_y^{(m)} + pS^{(m)} = 0, \qquad t > 0, \quad y \in \mathrm{R}; \tag{8}$$

$$S^{(m)}|_{t=0} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}my}. \tag{9}$$

$$2Q_{tt}^{(m)} = S_{tt}^{(m)} - \left[qQ_y^{(m)} + b^2 S_{yy}^{(m)} + pQ^{(m)}\right], \qquad t > 0, \quad y \in \mathrm{R}; \tag{10}$$

$$Q^{(m)}|_{t=0} = 0. \tag{11}$$

The 2D analogy of M.G. Krein equation follows from (7) ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$):

$$(12) \quad \sum_m S^{(m)}(z,y) {f_m^{(k)}}'(t-z) + \tilde{w}^{(k)}(z,y,t) + \\ + \sum_m \int_{-z}^{z} {f_m^{(k)}}'(t-s)\tilde{w}^{(m)}(z,y,s)\mathrm{d}s = 0, \quad |t| < z.$$

So for solving the inverse problem we can solve the system (8)–(12), using the projection method and then find $c(x,y)$ from the following iterative algorithm.

First, we introduce N-approximation of the system (8)–(12), e.g. let $\tilde{w}^{(m)}$, $S^{(m)}$ and $Q^{(m)}$ be equal to 0 for all $|m| > N$. Let us suppose that $c_n(x,y)$ is known. Then we calculate $\tau_n(x,y)$ from (1), (2) [17, 19, 20], $b_n(z,y)$ from (3) and $q_n(z,y)$ and $p_n(z,y)$ from (6). Function $S_n^{(m)}(t,y)$ is calculated from (8), (9). Then solving the 2D analogy of M.G. Krein equation (12) we find $\tilde{w}_n^{(m)}(z,y,t)$ for $|m| \le N$. It follows from (7) that $Q_n^{(m)}(t,y) = \tilde{w}_n^{(m)}(t+0,y,t)$. Then from equations (8) and (10) we find function $b_{n+1}(z,y)$ and after that new value $c_{n+1}(x,y) = b_{n+1}(z,y)$ is calculated.

In numerical experiments (see figures 1–4) 2D inverse problem 2 is approximated by the finite system of one dimensional inverse acoustic problems [17, 19, 20]. The inverse problem 2 is solved in the domain $x \in (0,1)$, $y \in (-\pi, \pi)$ and $t \in (0,2)$. The number N is equal to 5 for figure 2 and the number N is equal to 10 for figures 3 and 4. The noisy data is taken as

$$f^{\varepsilon}(y,t) = f(y,t) + \varepsilon\alpha(y,t)(f_{\max} - f_{\min}).$$

Here ε is the level of noise, $\alpha(y,t)$ is white noise for fixed y and t, $f_{\max}$ and $f_{\min}$ are maximum and minimum values of exact data. The dimension of the space grid is equal to 100×100.

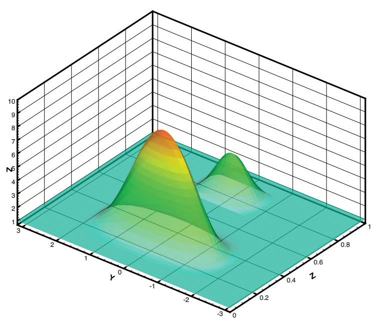


Рис. 1. The exact solution of the inverse problem.

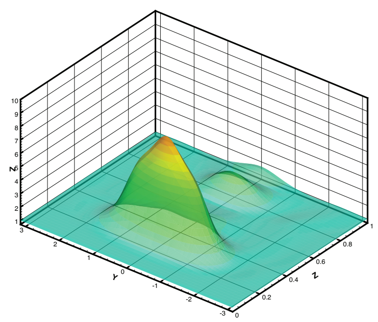


Рис. 2. The approximate solution of the inverse problem, $N = 5$, $\varepsilon = 0$.

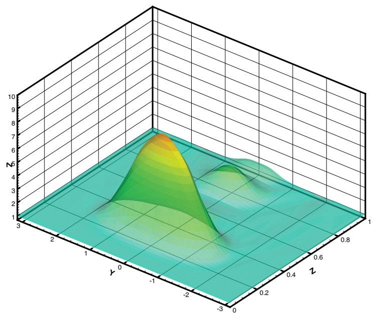


Рис. 3. The approximate solution of the inverse problem, $N = 10$, $\varepsilon = 0$.

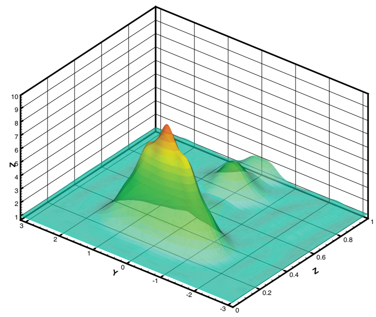


Рис. 4. The approximate solution of the inverse problem, $N = 10$, $\varepsilon = 0.05$.

References

[1] I.M. Gelfand, B.M. Levitan, *On the determination of a differential equation from its spectral function*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., **15** (1951), 309–360 (in Russian).

[2] M.G. Krein, *Solution of the inverse Sturm-Liouville problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **76** (1951), 21–24 (in Russian).

[3] M.G. Krein, *On a method of effective solution of an inverse boundary problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **94** (1954), 987–990 (in Russian).

[4] W.W. Symes, *Inverse boundary value problems and a theorem of Gel'fand and Levitan*, J. Math. Anal. Appl., **71** (1979), 378–402.

[5] R. Burridge, *The Gelfand-Levitan, the Marchenko and the Gopinath-Sondhi integral equation of inverse scattering theory, regarded in the context of inverse impulse-response problems*, Wave Motion, **2** (1980), 305–323.

[6] F. Santosa, *Numerical scheme for the inversion of acoustical impedance profile based on the Gelfand-Levitan method* , Geophys. J. Roy. Astr. Soc., **70** (1982), 229–244.

[7] S.I. Kabanikhin, *Regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations based on a projection method*, Doklady Akademii Nauk, **292 (3)** (1987), 534–537.

[8] J. Sylvester, G. Uhlmann, *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Ann. of Math., **125** (1987), 153–169.

[9] G.M.L. Gladwell, N.B. Willms, *A discrete Gelfand-Levitan method for band-matrix inverse eigenvalue problems*, Inverse Problems, **5** (1989) 165–179.

[10] S.I. Kabanikhin, *On linear regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations*, Sov. Math. Dokl., **40 (3)** (1990) 579–583.

[11] Rakesh, *An inverse problem for the wave equation in the half plane*, Inverse Problems, **9** (1993) 433–441.

[12] F. Natterer, *A discrete Gelfand-Levitan theory*, Technical report, Institut fuer Numerische und instrumentelle Mathematik Universitaet Muenster Germany, 1994.

[13] M.I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method)*, Inverse Problems, **13 (5)** (1997), R1–R45.

[14] S.I. Kabanikhin, G.B. Bakanov, *Discrete analogy of Gelfand-Levitan method*, Doklady Akademii Nauk, **356 (2)** (1997), 157–160.

[15] S.I. Kabanikhin, G.B. Bakanov, *A discrete analog of the Gelfand-Levitan method in a two-dimensional inverse problem for a hyperbolic equation*, Siberian Mathematical Journal, **40 (2)** (1999), 262–280.

[16] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Boundary control and Gel'fand-Levitan-Krein methods in inverse acoustic problem*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **12 (2)** (2004), 125–144.
[17] S.I. Kabanikhin, A.D. Satybaev, M.A. Shishlenin, *Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolic Problems*, VSP, The Netherlands, 2004.
[18] M.I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method*, Inverse Problems, **23 (5)** (2007), R1–R67.
[19] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Quasi-solution in inverse coefficient problems*, J. of Inverse and Ill-Posed Problems, **16 (7)** (2008), 705–713.
[20] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gel'fand-Levitan-Krein equation*, J. of Inverse and Ill-Posed Problems, **18 (9)** (2011), 979–995.
[21] S.I. Kabanikhin, N.S. Novikov, I.V. Oseledets, M.A. Shishlenin, *Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem*, J. of Inverse and Ill-Posed Problems, **23(6)** (2015), 687–700.
[22] S.I. Kabanikhin, K.K. Sabelfeld, N.S. Novikov, M.A. Shishlenin, *Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods*, Monte Carlo Methods and Applications, **21(3)** (2015), 189–203.
[23] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Multidimensional analogues of Gelfand-Levitan, Marchenko and Krein equations. Theory, numerics and applications*, Вычислительные технологии, **20(3) (86)** (2015), 63–69.
[24] S.I. Kabanikhin, K.K. Sabelfeld, N.S. Novikov, M.A. Shishlenin, *Numerical solution of the multidimensional GelfandвЂ"Levitan equation*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **23(5)** (2015), 439–450.

Sergey Igorevich Kabanikhin
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

Maxim Alexandrovich Shishlenin
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug avenue,
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: mshishlenin@ngs.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.234–С.245 (2015) УДК 519.62
MSC 13A99

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХ ФАРМАКОКИНЕТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

А.И. ИЛЬИН, С.И. КАБАНИХИН, Д.А. ВОРОНОВ, О.И. КРИВОРОТЬКО,
Е.И. ВОСТРИКОВА

Abstract. The article provides an overview of physiologically based approach to modeling of pharmacokinetic processes. This approach is applied to the modeling of beta-oxidation and to the model for glucose and insulin kinetics. Statments of direct and inverse problems were considered. Results of numerical solution of inverse problem were obtained by Nelder-Mead method. Also results of experiments to data with noise are provided.

Key words: Pharmacokinetics, Nelder–Mead method, Runge–Kutta method, inverse problem, model for glucose and insulin kinetics, $[^{123}I]IPEA$, synthetic data, ATP level.

Введение

Общая концепция физиологически обоснованного моделирования фармакокинетики [1] (Physiologically Based Pharmacokinetic Modeling) заключается в математическом описании соответствующих физиологических, физикохимических и биохимических процессов, которые определяют фармакокинетическое поведение лекарственного препарата. Для этого рассматривается камерный подход к моделированию фармакокинетических процессов. Он состоит в разбиении организма на конечное число камер (отдельные органы или

Kabanikhin, S.I., Voronov, D.A., Krivorotko, O.I., Vostrikova, E.I., Numerical solution of inverse problem for two pharmacokinetic models.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации, договором No 107 “Разработка программного обеспечения для исследования численного решения прямых и обратных задач фармакокинетики и эпидемиологии” и Министерством образования и науки Республики Казахстан № 1746/GF4 “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания”.

Поступила 30 мая 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

ткани), соединенных между собой кругом кровообращения. Фармакокинетические процессы моделируются [3] с помощью системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений типа:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x,t,\vec{q_1}) \\ x(0) = x_0(\vec{q_2}) \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x_i - количество вещества в i-ой камере, x_0 - концентрация вещества в начальный момент времени, $\vec{q} = (\vec{q_1}, \vec{q_2})$, $\vec{q_1}$ - вектор параметров, характеризующий переход между камерами, $\vec{q_2}$ - вектор параметров начальных данных. Для каждой камеры записываются уравнения закона сохранения масс. PBPK модели могут описывать и/или предсказывать фармакокинетику лекарства у определенных людей и при определенных физиологических или патологических условиях, в которых основной результат моделирования – это множество кривых, описывающих зависимость концентрации от времени, иллюстрирующих временное поведение препарата в крови, в плазме или других соответствующих органах. В данной статье приведен анализ двух фармакикнетических моделей, которые построены с помощью PBPK подхода. Во пятом параграфе рассмотрен фармакокинетический анализ одного радиофармацевтического соединения. В шестом - минимальная модель контроля - глюкозы инсулина. Для данных моделей представлено решение прямой и обратной задач соответственно. Были проведены эксперименты для данных с шумом.

1. Постановка прямой задачи

Прямая задача состоит в решении задачи Коши (1). Её численное решение было получено с помощью метода Рунге - Кутты 4 порядка аппроксимации [2]. В статье рассматривались две фармакокинетические модели. Прямая задача для фармакокинетической модели, используемая для анализа профилей радиоактивности была получена для набора параметров из таблицы 1, соответствующего группе крыс с уровнем АТФ от 80 до 110 μммоль/100гр [5]. Прямая задача для модели контроля глюкозы - инсулина была получена для набора параметров из таблицы 3 [8]. Результаты экспериментов предствлены в главе 5 и 6.

2. Постановка обратной задачи

Обратная задача состоит в нахождении вектора параметров: $\vec{q} = (\vec{q_1}, \vec{q_2})$ по дополнительной информации о решении прямой задачи вида:

$$y_i = X_i(t_k), k = 1, \dots, K_i, i = 1, \dots N \tag{2}$$

Рассмотрим вариационную постановку обратной задачи (1), (2):

$$J(\vec{q}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} (X_i(t_k, \vec{q}) - f_k)^2, \tag{3}$$

где $f = (y_1, \dots y_N)^T, K = K_1 + \dots + K_N$, N - число уравнений модели.
Оптимизационнывй метод заключается в минимизации функционала (3) с помощью метода Нелдера - Мида, схема которого приведена ниже.

3. Симплекс - метод минимизации функционала [4]

Суть метода заключается в последовательном перемещении и деформировании симплекса вокруг точки экстремума.

3.1. Алгоритм. Рассмотрим минимизацию функционала n переменных, без ограничений на область определения. Пусть $P_0, P_1, \ldots, P_n$ - $(n+1)$ точек в n - мерном пространстве, которые определяют текущий симплекс.
Параметры метода:
- коэффициент отражения $\alpha > 0$, обычно выбирается равным 1
- коэффициент сжатия $\beta > 0$, лежит в интервале от 0 до 1
- коэффициент растяжения $\gamma > 0$, обычно выбирается равным 2

(1) "Подготовка".В точках, определяющих текущий симплекс вычисляются значения: $y_i = y(P_i), i = 0, \ldots, n$.
(2) "Сортировка". Из вершин симплекса выбираем точки: $y_h = \max_i(y_i)$, $y_l = \min_i(y_i)$. Дальнейшей целью будет уменьшение y_h.
(3) Найдём центр тяжести всех точек, за исключением P_h: $\overline{P} = \frac{1}{n}\sum_{i\neq h} P_i$.
(4) "Отражение". Отразим точку P_h относительно $\overline{P}$ с коэффициентом α, получим новую точку P^* и вычислим значение в ней:
$P^* = (1+\alpha)\overline{P} - \alpha P_h$. Таким образом, P^* находится на прямой, соединяющей P_h и $\overline{P}$, то есть $[P^*\overline{P}] = \alpha[P_h\overline{P}]$, где $[P_iP_j]$ - расстояние от P_i до P_j.
(5) Далее, смотрим насколько нам удалось уменьшить функцию, ищем место y^* в ряду y_h, y_l.
Если $y^* < y_l$, то направление выбрано удачное и можно попробовать увеличить шаг. Производим "растяжение". Новая точка $P^{**} = (1-\gamma)\overline{P} + \gamma P^*$, то есть γ - коэффициент отношения расстояния $[P^{**}\overline{P}]$ к $[P^*\overline{P}]$.
Если $y^{**} < y_l$, то можно расширить симплекс до этой точки: присваиваем точке P_h значение P^{**} и заканчиваем итерацию (на шаг 9).
Если $y^{**} > y_l$, то переместились слишком далеко: присваиваем точке P_h значение P^* и заканчиваем итерацию (на шаг 9).
Если $y_l < y^* < y_h$, то меняем местами значения y^* и y_h и переходим на шаг 9.
Если $y^* > y_i, \forall i \neq h$, то идём на следующий шаг 6.
(6) "Сжатие". Строим точку $P^{**} = \beta P_h + (1-\beta)\overline{P}$, то есть β - коэффициент отношения расстояния $[P^{**}\overline{P}]$ к $[p_h\overline{P}]$.
(7) Если $y^{**} = y_h$, то присваиваем точке P_h значение P^{**} и идём на шаг 9.
(8) Если $y^{**} > y_h$, то первоначальные точки оказались самыми удачными. Делаем "глобальное сжатие"симплекса: заменяем все P_i на $\frac{(P_i+P_l)}{2}$.
(9) Проверка сходимости. Может выполняться по - разному, например, оценкой дисперсии набора точек. Суть проверки заключается в том, чтобы проверить взаимную близость полученных вершин симплекса, что предполагает и близость их к искомому минимуму. Если требуемая точность еще не достигнута, можно продолжить итерации с шага 2.

4. Схема решения обратной задачи для данных, заданных с ошибкой

Схема решения обратной задачи для данных, заданных с ошибкой выглядит следующим образом:

(1) Получение синтетических данных. Задание точного набора параметров. Решение прямой задачи для этого набора параметров. Формирование вектора данных $f_k = x(t_k)$

(2) К данным измерений f_k добавляем ошибку, равномерно распределенную на отрезке $[-1; 1]$ либо стандартную нормальную с плотностью $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x)^2}{2}}$;

(3) Задание точности решения и начального приближения для метода Нелдера - Мида;

(4) Минимизируем функционал (3) методом Нелдера - Мида, используя данные f_k;

5. Фармакокинетический анализ радиофармацевтического соединения $[^{123}I]IPEA$ для печеночной функции, основанной на бета - окислении

Бета-окисление является важнейшим способом обеспечения печени энергией. Последние данные показали, что радиоактивно меченые аналоги среднецепочечных жирных кислот могут быть использованы в качестве радиофармацевтических препаратов в печени, что позволяет контролировать изменения в энергетическом метаболизме на клеточном уровне. Исследование фармакокинетического анализа радиойодированного аналога среднецепочечной жирной кислоты $[^{123}I]IPEA$ [5] проводилось как на нормальных крысах, так и на крысах, зараженных гепатитом для измерения индекса бета-окислительной активности гепатоцитов. Константа скорости метаболизма $[^{123}I]IPEA$ в печени показала тесную взаимосвязь с уровнем АТФ, который был определен как индикатор бета-окисления в гепатоцитах.

Разработка в естественных условиях методов количественной и региональной оценки печеночной жизнеспособности является важной задачей клинической ядерной медицины. С этой целью была разработана $[^{123}I]IPEA$ для использования в однофотонной эмиссионной компьютерной томографии (рис. 1).

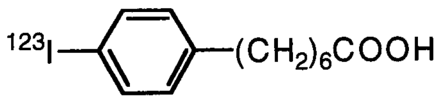


Рис. 1: Химическая структура $[^{123}I]IPEA$

Сразу же после инъекции было замечено высокое начальное поглощение $[^{123}I]IPEA$ в печени. $[^{123}I]IPEA$, инкорпорируемое в печень, было усвоено с помощью бета-окисления, и его радиометаболиты быстро вывелись через печень.

Фармакокинетическая модель, используемая для анализа профилей радиоактивности после внутривенной инъекции $[^{123}I]IPEA$ крысам (Рис. 2)
Фармакокинетическая модель построена на основе следующих предположений:

(1) $[^{123}I]IPEA$ в крови перемещается между гепатоцитами моноэкспоненциально.
(2) $[^{123}I]IPEA$ в гепатоцитах усваивается с помощью одностороннего метаболизма.
(3) радиометаболиты в гепатоцитах выводятся через печень только с кровью.

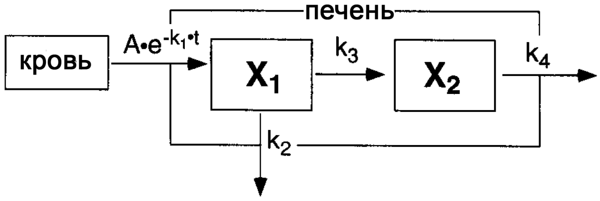


Рис. 2: Фармакокинетическая модель, используемая для анализа профилей радиоактивности после внутривенной инъекции $[^{123}I]IPEA$ крысам

Данная модель демонстрирует печеночное поглощение, метаболизм и выделение. Здесь X_1 - исходное количество $[^{123}I]IPEA$ в печеночной камере, X_2 - количество радиоактивных метаболитов в печеночной камере, $A \cdot e^{-k_1 \cdot t}$ - скорость переноса $[^{123}I]IPEA$ из крови в печень, k_2 - константа скорости переноса $[^{123}I]IPEA$ из печени, k_3 - постоянная скорости метаболизма в печени, k_4 - константа скорости переноса радиоактивных метаболитов из печени.

5.1. **Численное решение прямой задачи.** Система дифференциальных уравнений (1) для исследуемой модели имеет [5] следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = A \cdot e^{-k_1 \cdot t} - (k_2 + k_3) \cdot x_1 \\ \frac{dX_2}{dt} = k_3 \cdot x_1 - k_4 \cdot x_2 \\ X_1(0) = 0 \\ X_2(0) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Численное решение прямой задачи было получено с использованием параметров из таблицы 1 (Рис. 3).

Параметр	Числовое значение
A	395.1
k_1	3.811
k_2	0.0461
k_3	0.0610
k_4	0.0018

Таблица 1: Фармакокинетические параметры $[^{123}I]IPEA$ для крыс с умеренными поражениями печени [5]

5.2. **Численное решение обратной задачи для синтетических данных без шума.** Обратная задача состоит в нахождении параметров модели(4): A, k_1, k_2, k_3, k_4 На рисунках 4 и 5 представлено поведение функций X_1 и X_2 на разных итерациях.

На рисунке 6 изображена зависимость ошибки от числа итераций (сравнивалась норма разности точного решения с приближенным).

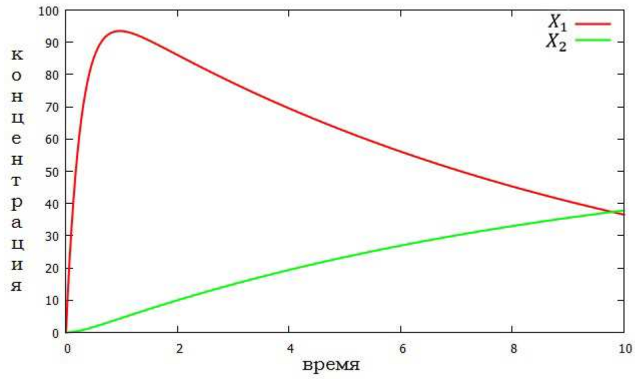


Рис. 3: Графики решения прямой задачи

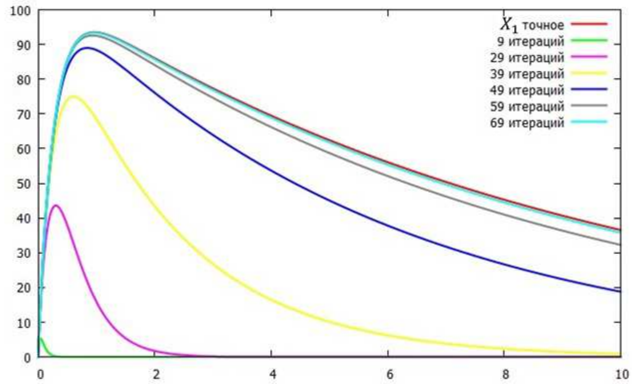


Рис. 4: Численное решение функции X_1 на разных итерациях

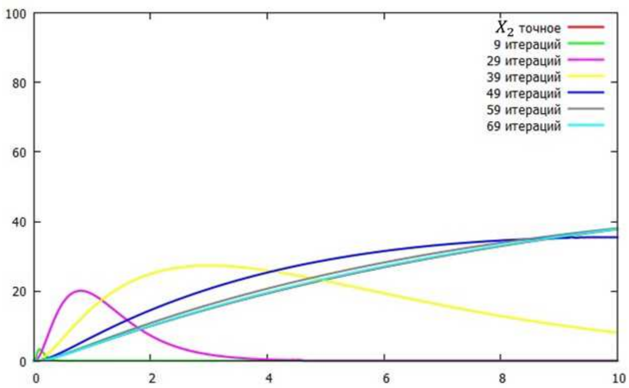


Рис. 5: Численное решение функции X_2 на разных итерациях

5.3. **Результаты численных экспериментов для данных с шумом.** Пусть теперь дополнительная информация для обратной задачи задана с некоторой ошибкой (2%, 5%). В таблице 2 сравнивается точный набор параметров с

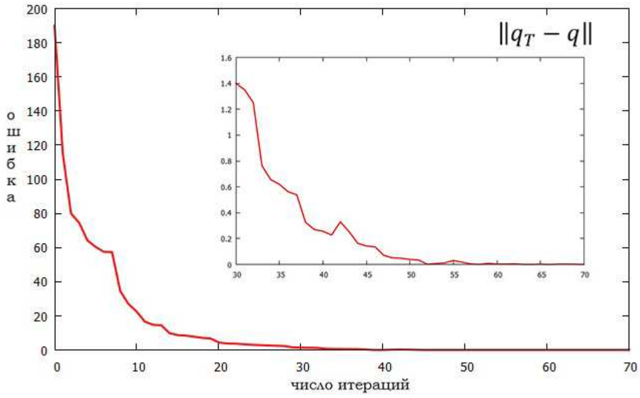


Рис. 6: Зависимость ошибки от числа итераций

полученными после уточнения математической модели по данным с нормально распределенной ошибкой 5 %. Полученные данные почти не отличаются от точных, что свидетельствует о хорошей сходимости метода.

Параметр	Точные данные	Полученные
A	395.1	395.101
k_1	3.811	3.8122
k_2	0.0461	0.478932
k_3	0.0610	0.0633909
k_4	0.0018	0.00478867

Таблица 2: Сравнение точных данных с полученными после уточнения математической модели по данным с нормально распределенной ошибкой 5 %

6. Минимальная модель контроля глюкозы-инсулина

Допустимое содержание глюкозы и инсулина в плазме крови у собак и людей во время часто проводимых внутривенных тестов на переносимость глюкозы (FSIGT) было установлено и использовано доктором Ричардом Н. Бергман и разработчиками с 1970-х. В типичном тесте FSIGT, брались пробы крови натощак через регулярные промежутки времени, после однократного внутривенного введения глюкозы. Затем, пробы крови анализировались на содержание глюкозы и инсулина. Минимальная модель контроля глюкозы-инсулина обеспечивает количественное и экономное описание концентрации глюкозы и инсулина в образцах крови после инъекции глюкозы. Модель состоит из двух камер: плазма и внутритканевое пространство. На рисунке 7 изображена схема данной модели.

Инсулин выводится или попадает в камеру внутритканевого пространства со скоростью, пропорциональной разности между уровнем инсулина в плазме $I(t)$ и базовым уровнем I_b; если уровень инсулина в плазме падает ниже базового, инсулин выводится из внутритканевой камеры, и если уровень инсулина в плазме повышается выше базового, инсулин поступает во внутритканевую камеру. Инсулин также выводится из внутритканевой камеры через второй путь со скоростью, пропорциональной количеству инсулина в этой камере.

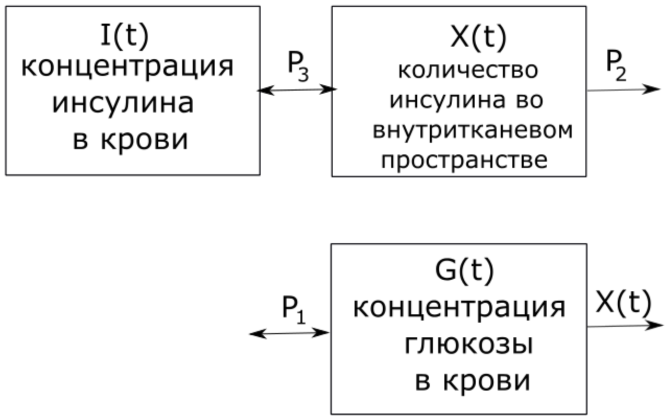


Рис. 7: Модель контроля глюкозы-инсулина

Глюкоза выводится или попадает в камеру плазмы со скоростью, пропорциональной разности между уровнем глюкозы в плазме $G(t)$, и базовым уровнем G_b; если уровень глюкозы в плазме падает ниже базового, глюкоза поступает в плазменную камеру, и если уровень глюкозы поднимается выше базового, то глюкоза покидает плазменную камеру. Глюкоза также выводится из камеры плазмы через второй путь со скоростью, пропорциональной количеству инсулина во внутритакневом пространстве. Система дифференциальных уравнений, соответствующая данной модели записывается [8] в виде:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -p_2 \cdot X(t) + p_3 \cdot (I(t) - I_b) \\ \frac{dG}{dt} = -X(t) \cdot G(t) + p_1 \cdot (G_b - G(t)) \\ X(0) = 0 \\ G(0) = G_0 \end{cases} \tag{5}$$

Здесь t-время, $G(t)$-коцентрация глюкозы в крови, $I(t)$-концентрация инсулина в крови и $X(t)$-концентрация инсулина во внутритканевом пространстве. G_b, I_b-базовые уровени концентрации глюкозы и инсулина в плазме соответственно. Базовые уровни концентрации глюкозы и инсулина обычно берутся либо до, либо спустя 180 минут после введения глюкозы. Также в данной модели есть четыре неизвестных параметра: p_1, p_2, p_3, G_0, где $\frac{p_3}{p_2}$ - чувствительность к инсулину, p_1 - эффективность глюкозы, G_0 концентрация глюкозы в крови в начальный момент времени. С помощью теста FSIGT были получены реальные данные [8], изображенные на рисунке 8:

Параметр	Значение
p_1	0.02649256302
p_2	0.02543609572
p_3	1.281692067e-05
G_0	279.1123014

Таблица 3: Таблица точных значений параметров

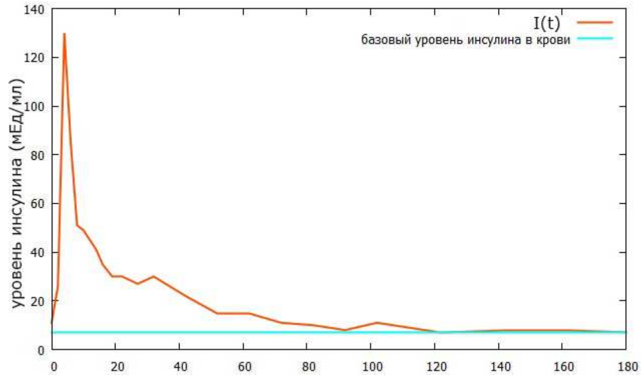


Рис. 8: $I(t)$ - уровень инсулина в крови

6.1. **Численное решение прямой задачи.** Численное решение прямой задачи для функций $X(t)$ и $G(t)$ изображено на рисунках 9 и 10 соответственно.

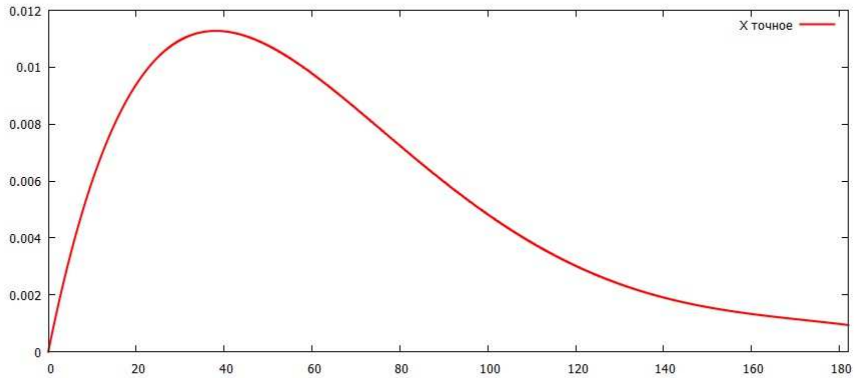


Рис. 9: Распространение инсулина во внутритканевом пространстве

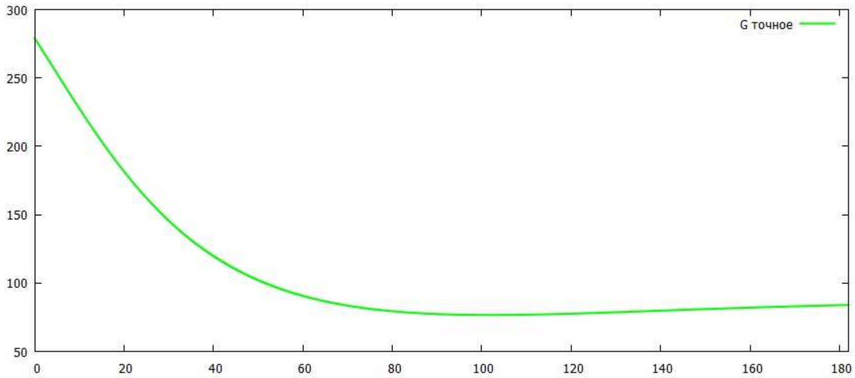


Рис. 10: Распространение глюкозы в крови

6.2. **Численное решение обратной задачи для синтетических данных без шума.** Обратная задача состоит в нахождении параметров модели(5): p_1, p_2, p_3, G_0. Для того чтобы получить синтетические данные, мы используем решение прямой задачи x_i, полученное с помощью точного набора параметров, взятого из таблицы 3. Выбираем значения функции x_i в некоторых точках и используем в качестве данных обратной задачи. На рисунках 11 и 12 соответственно представлено сравнение функций $X(t)$ и $G(t)$ на разных итерациях.

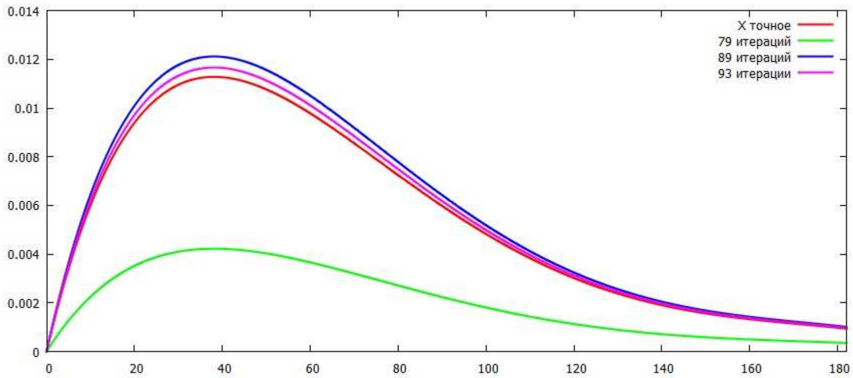


Рис. 11: Сравнение функции $X(t)$ на разных итерациях

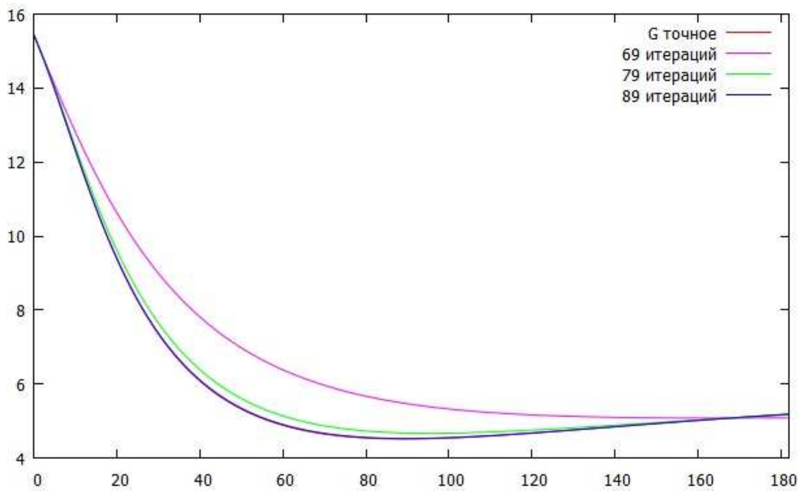


Рис. 12: Сравнение функции $G(t)$ на разных итерациях

6.3. **Результаты численных экспериментов для данных с шумом.** Пусть теперь дополнительная информация для обратной задачи задана с некоторой равномерно распределенной ошибкой (2%). На рисунке 13 представлено численное решение для функции $X(t)$. Пусть теперь дополнительная информация для обратной задачи задана с некоторой нормально распределенной ошибкой (2%). На рисунке 14 представлено численное решение для функции $G(t)$. На

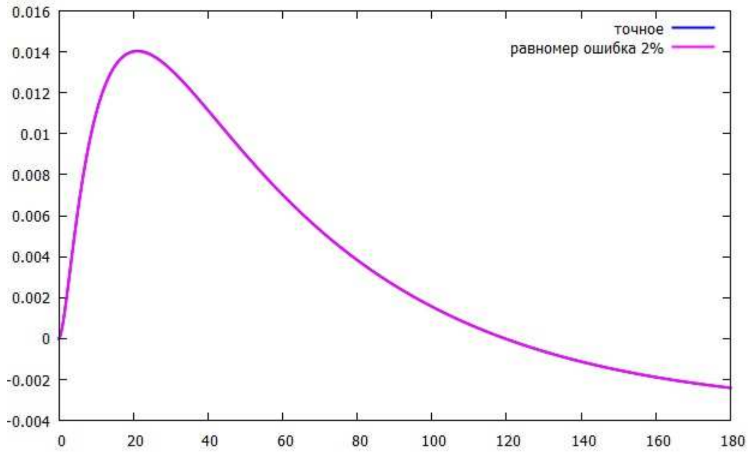


Рис. 13: График функции $X(t)$ после уточнения математической модели по точным данным и данным с ошибкой

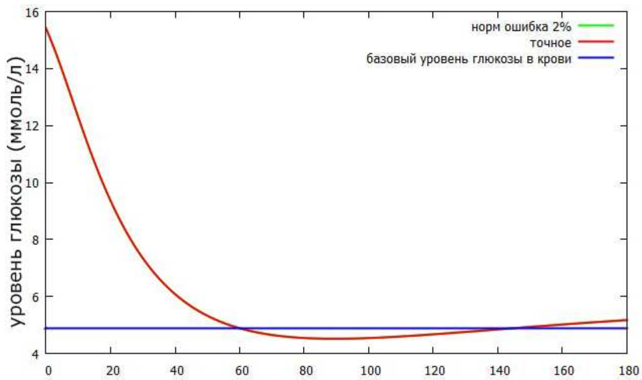


Рис. 14: График функции $G(t)$ после уточнения математической модели по точным данным и данным с ошибкой

рисунках 13 и 14 можно видеть, что полученные данные почти не отличаются от точных.

7. Вывод

В статье был представлен PBPK подход к моделированию фармакокинетических процессов, примененный для двух конкретных моделей. Представлены результаты численного решения прямой и обратной задачи. Было показано, что для фармакокинетической модели, используемой для анализа профилей радиоактивности после внутривенной инъекции $[^{123}I]IPEA$ крысам, а также для модели контроля глюкозы инсулина метод минимизации функционала Нелдера - Мида хорошо сходится, в том числе и для зашумленных данных, практически для любых начальных приближений.

References

[1] T. Rodgers, M. Rowland, *Physiologically based pharmacokinetic modeling 2: predicting the tissue distribution of acids, very weak bases, neutrals and zwitterions*, Journal of Pharmaceutical Sciences, **95, no. 6** (2006), 1238—1257.

[2] G. S. Khakimzianov, S.G. Cherny *Numerical methods*, Novosibirsk, 2003 (in Russian).

[3] A. Rescigno, *Foundations of pharmacokinetics*, Springer Science Business Media, 2003.

[4] J. A. Nelder, R. Mead, *A simplex method for function minimization*, The computer journal, (1965), 308–313.

[5] N. Yamamura et al., *Pharmacokinetic analysis of123I-labeled medium chain fatty acid as a radiopharmaceutical for hepatic function based on beta-oxidation*, Annals of nuclear medicine, **13, №. 4**, 235–239.

[6] S.I. Kabanikhin, *Inverse and ill-posed* , Moscow, Publishing Center Akademia, 2008, (in Russian).

[7] P. Poulin, F.-P. Theil, *A priori prediction of tissue: plasma partition coefficients of drugs to facilitate the use of physiologically-based pharmacokinetic models in drug discovery*, Journal of Pharmaceutical Sciences, **89, no. 1** (2000), 16-–35.

[8] D. R. Kerner *Minimal Models for Glucose and Insulin Kinetics.*

Aleksandr Ivanovich Ilin
Scientific Center for Anti-Infectious Drugs,
75V Al-Farabi ave.,
Almaty, Republic of Kazakhstan

Sergey Igorevich Kabanikhin
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

Dmitriy Andreevich Voronov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: dmitriy.voronov.89@gmail.com

Olga Igorevna Krivorotko
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: krivorotko.olya@mail.ru

Elizaveta Igorevna Vostrikova
Novosibirsk State University,
Pirogova Str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: vostrikova-liza@inbox.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.246–С.254 (2015) УДК 519.622.2
MSC 13A99

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ СЕКРЕЦИИ И КИНЕТИКИ С-ПЕПТИДА

С.И. КАБАНИХИН, Д.А. ВОРОНОВ, О.И. КРИВОРОТЬКО, А.Ю. БЕЛОНОГ

Abstract. Mathematical modeling of secretion and kinetics of C-peptide is considered. The distribution of C-peptide in the blood and tissues could be quantitatively described by this approach. The problem of estimation secretion and kinetics parameters is covered in this article. The identifiability analysis has been performed. The numerical solution of corresponding inverse problem was obtained by special iteration algorithm. The scheme of this method is proposed in this paper. The results of numerical solution was obtained for noisy data. The uniform and Gaussian distribution of the error was considered.
Keywords: inverse problem of pharmacokinetics, pancreatic secretion model, numerical solution of inverse problem.

Введение

Инсулин - основой регулятор оптимальности концентрации глюкозы в крови. Он выделяется из бета-клеток в ответ на увеличение концентрации глюкозы. До попадания в систему кровообращения инсулин проходит через печень, где остается его значительная доля. Оставшаяся часть инсулина достигает целевой орган или ткани, где оказывает свое гипогликемическое воздействие – содействует поглощению глюкозы и препятствует ее образованию в печени –

Kabanikhin, S.I., Voronov, D.A., Krivorotko, O.I., Belonog, A.Yu., Numerical solution of inverse problem for mathematical model of secretion and kinetics of C-peptide.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации, договором No 107 “Разработка программного обеспечения для исследования численного решения прямых и обратных задач фармакокинетики и эпидемиологии” и Министерством образования и науки Республики Казахстан № 1746/GF4 “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания”.

Поступила 30 мая 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

прежде, чем устранится печенью, почками и другими органами. Действие инсулина зависит от его концентрации в непосредственной близости от инсулин-чувствительных клеток. Это результат трех процессов: секреции поджелудочной железы, кинетики инсулина и печеночной экстракции (выделения из печени).

Но количественное описание процесса секреции не может быть получено как напрямую из анализов, так и непрямым вычислением из данных о концентрации инсулина в крови. Эту проблему можно обойти измерением концентрации C-пептида, фрагмента, соединяющего A-цепь и B-цепь инсулина. Вместе с инсулином они выделяются в кровоток, но в отличие от инсулина, при этом в печени остается лишь незначительная часть C-пептида (Рис. 0.1). Т.к. одна моль C-пептида выделяется с одной молью инсулина, то выработка C-пептида эквивалента выработке инсулина. Таким образом, концентрация C-пептида в крови в достаточной степени отражает его поджелудочную секрецию, что, в свою очередь, соответствует секреции инсулина. Более подробно описаны физиологические процессы в [4], [5], [6].

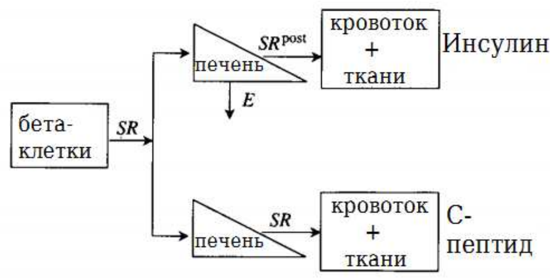


Рис. 0.1. Схема выделения инсулина и C-пептида в организм. (SR) - поджелудочная секреция, $(SR)^{post}$ - остаточная секреция, (E) - печеночная экстракция.

В разделе 1 приведено описание построения минимальной модели секреции и кинетики C-пептида. В разделе 2 рассмотрена схема численного решения обратной задачи. В разделе 3 приведены численные расчеты с данной моделью.

1. Минимальная модель секреции и кинетики C-пептида

1.1. **Кинетическая модель C-пептида.** В [5] рассмотрена двухкамерная кинетическая модель C-пептида , схема которой изображена на Рис. 1.1

$$\begin{cases} \dot{CP}_1(t) = -[k_{01} + k_{21}]CP_1(t) + k_{12}CP_2(t) + SR(t)/V_C \\ \dot{CP}_2(t) = k_{21}CP_1(t) - k_{12}CP_2(t) \\ CP_1(0) = CP_{1b}, \quad CP_2(0) = CP_{2b}, \end{cases} \tag{1.1}$$

где камера 1 представляет плазму крови, а камера 2 - ткани. Соответственно, $CP_1(t)$ – концентрация C-пептида в крови, $CP_2(t)$ - концентрация C-пептида в тканях, $SR(t)$ – поджелудочная секреции, V_C – объем распределения камеры 1. Параметры k_{21} и k_{12} обозначают скорость передачи между двумя камерами, k_{01} - убыток из камеры 1.

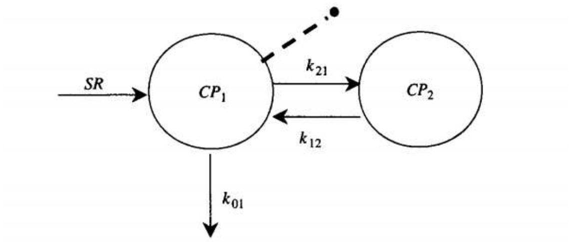


Рис. 1.1. Схема кинетической модели С-пептида

1.2. **Модель поджелудочной секреции.** В [6] рассмотрена минимальная модель поджелудочной секреции

$$\begin{cases} SR(t) = mX(G,t) \\ \dot{X}(G,t) = -mX(G,t) + Y(G,t) \\ \dot{Y}(G,t) = -\alpha[Y(G,t) - Y_\infty - \beta'(G-h)] \\ X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0 = Y_\infty. \end{cases} \tag{1.2}$$

Функция $SR(t)$ секреции предполагается пропорциональной количеству высвобожденного инсулина $X(G,t)$, вообще говоря, зависящего от концентрации глюкозы $G = const$. $Y(G,t)$ - запасы инсулина, распределенные в "открытых"бета-клетках, т.е. в таких, которые способны выделять инсулин. Клетка считается "открытой", если $G > h$, т.е. концентрация глюкозы G выше некоторого порогового уровня h. Параметры α, m - постоянные времени, β' отражает чувствительность поджелудочной железы к глюкозе. Начальное значение X_0 есть сумма количества высвобождаемого инсулина в начальном состоянии X_∞ и количества инсулина в "открытых"клетках в момент 0, когда, с помощью инъекции, концентрация глюкозы почти мгновенно возрастает с начального уровня до максимального.

1.3. **Минимальная модель секреции и кинетики С-пептида.** Уравнения кинетики (1.1) и секреции (1.2) - линейные, и функции состояний могут быть переформулированы в удобном виде, как отклонения от начальных состояний

$$\begin{gathered} cp_1(t) = CP_1(t) - CP_{1b} \\ cp_2(t) = CP_2(t) - CP_{2b} \\ x(t) = (X(G,t) - X_\infty)/V_C \\ y(t) = (Y(G,t) - Y_\infty)/V_C. \end{gathered}$$

Таким образом, минимальная модель секреции и кинетики С-пептида может быть записана в виде [4]:

$$\begin{cases} \dot{cp}_1(t) = -[k_{01} + k_{21}]cp_1(t) + k_{12}cp_2(t) + mx(t) \\ \dot{cp}_2(t) = k_{21}cp_1(t) - k_{12}cp_2(t) \\ \dot{x}(t) = -mx(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = -\alpha(y(t) - \beta[G-h]) \\ cp_1(0) = 0, \quad cp_2(0) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

Модель содержит 8 неизвестных параметров. Три из них относятся к кинетике С-пептида (показателя, отражающего уровень секреции инсулина): k_{01}, k_{21}, k_{12}; остальные относятся к секреции поджелудочной железы: $\alpha, \beta = \beta'/V_C, m, h, x_0$.

2. Алгоритм решения обратной задачи

2.1. **Постановка прямой и обратной задач.** Векторная запись модели (1.3) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X,\varphi), \quad t \in (0,T), \\ X(0) = \psi, \end{cases} \qquad X \in \mathbb{R}^4,\ \varphi \in \mathbb{R}^7,\ \psi \in \mathbb{R}^4, \tag{2.1}$$

Рассмотрим прямую задачу, которая является задачей Коши для системы ОДУ. Здесь $X = (cp_1, cp_2, x, y)$, $F(X,\varphi)$ — выражения модели,
$\varphi = (k_{01}, k_{21}, k_{12}, \alpha, \beta, m, h)$ - параметры модели, $\psi = (0, 0, x_0, 0)$ — начальные данные.

Обратной является задача определения вектора параметров $q = (\varphi,\psi)^T \in \mathbb{R}^{11}$ по данным измерений вида:

$$X_n(t_k,\varphi,\psi) = X_n^k, \quad k = 1,\ldots,K,\ n = 1,\ldots,N. \tag{2.2}$$

Решение прямой задачи будем записывать в виде $X = X(t,\varphi,\psi)$, имея ввиду зависимость решения от вектора параметров φ и начальных данных ψ.

2.2. **Схема метода.** Рассмотрим следующую схему итерационного алгоритма:

(1) Выбор точности нахождения решения ε
(2) Выбор начального набора параметров q_0
(3) Линеаризация по параметрам φ, ψ
(4) Дискретизация
  (a) Применение разностной схемы к линеаризованной системе
  (b) Приведение задачи к виду $A \cdot \delta q = f$, где $A_{(4 \cdot N_t) \times 11}$ - оператор обратной задачи (N_t - количество узлов сетки), $\delta q = q - q_0$ - приращение параметров, f - вектор дополнительной информации
(5) Решение СЛАУ методом сингулярного разложения [1].

Условием остановки была выбрана норма вектора приращений

$$\|\delta q\| = \|(\delta\varphi, \delta\psi)^T\| \le \varepsilon.$$

2.3. **Линеаризация.** Пусть $q_0 = (\varphi_0,\psi_0)^T$ вектор начального набора параметров. Пусть $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$, $\psi = \psi_0 + \delta\psi$. Здесь $\delta\varphi$, $\delta\psi$ - неизвестные приращения параметров и начальных данных соответственно. Обозначим $\tilde{X} = X(t,\varphi_0,\psi_0)$, $X = X(t,\varphi_0 + \delta\varphi,\psi_0 + \delta\psi)$. Применяя формулу Тейлора к функции $\dot{y} = \dot{X}(t,\varphi_0 + \delta\varphi,\psi_0 + \delta\psi) - \dot{X}(t,\varphi_0,\psi_0) = \dot{X} - \dot{\tilde{X}}$ в точке $(\tilde{X},\varphi_0)$, получим, что линеаризованная обратная задача имеет вид

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dot{y} = F^{'}_{\tilde{X}}(\tilde{X},\varphi_0) \cdot y + F^{'}_{\varphi_0}(\tilde{X},\varphi_0) \cdot \delta\varphi, \quad t \in (0,T), \\ y(0) = \delta\psi, \end{cases} \\ &y(t_k,\varphi_0,\psi_0) = X^k - \tilde{X}^k, \quad k = 1,\ldots,K, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где X^k - известные данные измерений, $\tilde{X}^k$ - данные из решения прямой задачи для начального набора, K - количество известных данных X^k.

Таким образом задача определения вектора параметров (φ,ψ) сведена к задаче нахождения приращения этих параметров $(\delta\varphi,\delta\psi)$ по вектору начального набора (φ_0,ψ_0).

2.4. **Дискретизация.** Используя явную разностную схему первого порядка аппроксимации с шагом $h = T/N_t$, где N_t - количество узлов, построим дискретную матрицу A

$$\frac{y^{j+1}-y^j}{h} = F^{'}_{\tilde{X}}(\tilde{X}^j,\varphi_0)\cdot y^j + F^{'}_{\varphi_0}(\tilde{X}^j,\varphi_0)\cdot\delta\varphi, \quad y^j = y(jh),$$
$$y^{j+1} = (I + hF^{'}_{\tilde{X}}(\tilde{X}^j,\varphi_0))\cdot y^j + hB^{'}_{\varphi_0}(\tilde{X}^j,\varphi_0)\cdot\delta\varphi.$$

Т.к. $y^0 = \delta\psi$, получим уравнение для каждого y^j:

$$y^j = M^j\delta\psi + (M^{j-1}P_0 + M^{j-2}P_1 + \ldots + P_{j-1})\delta\varphi.$$

Здесь $M_{4\times4}(\varphi_0) = I + hF^{'}_{\tilde{X}}(\varphi_0)$, $P_j = P_{4\times7}(\tilde{X}^j,\varphi_0) = hF^{'}_{\varphi_0}(\tilde{X}^j,\varphi_0)$, $j = 1,\ldots,N_t$. Явный вид этих матриц для модели:

$$M = \begin{pmatrix} -(k_{01}+k_{21}) & k_{12} & m & 0 \\ k_{21} & -k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$P_j =$

$$\begin{pmatrix} -cp_1(jh) & -cp_1(jh) & cp_2(jh) & x(jh) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cp_1(jh) & -cp_2(jh) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x(jh) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y(jh)+\beta(G-h) & \alpha(G-h) & -\alpha\beta \end{pmatrix}$$

Применим к данным обратной задачи

$$y(t_k,\varphi_0,\psi_0) = X^k - \tilde{X}^k = \left(y_1^1,\ldots,y_1^{K_1},\ldots,y_N^1,\ldots,y_N^K\right)^T,$$

линейную интерполяцию на узлы сетки $\omega_j = \left\{y^j = y(jh)\right\}$, $j = 1,\ldots,N_t$. Тогда искомая матрица A обратной задачи имеет блочный вид

$$A_{(4\cdot N_t)\times 11} = (A_1 \mid \ldots \mid A_{N_t})^T,$$
$$(A_k)_{4\times11} = \left(M^{k-1}P_0 + M^{k-2}P_1 + \ldots + MP_{k-2} + P_{k-1}\left|M^k\right.\right).$$

Обратная задача сведена к системе линейных уравнений $A\cdot\delta q = f$ с вектором правых частей вида $f = (y^1,y^2,\ldots,y^{N_t})$, решение которой находится методом сингулярного разложения.

3. Численные эксперименты

Рассматривается задача нахождения параметров $q = (k_{01}, k_{21}, k_{12}, m, h, x_0)$ на промежутке $(0, 10)$ по некоторой дополнительной информации (3.1). Модель была проанализирована на идентифицируемость [2] с помощью пакета COMBOS [3], параметры α и β были зафиксированы. Значения точных параметров и параметров начального набора показаны в таблице 1. Параметры соответствуют полученным из популяционных данных [4].

3.1. **Синтетические данные.** Дополнительная информация представлена синтетическими данными, полученными по следующей схеме:

(1) Задание точного набора параметров q кинетики и секреции С-пептида
(2) Решение прямой задачи (2.1)
(3) Формирование вектора данных измерений f вида (2.2)
    (a) Добавление ошибки

Были проведены расчеты с разным числом дополнительных данных и сделан вывод, что минимальным необходимым количеством для нахождения решения является 5 точек.

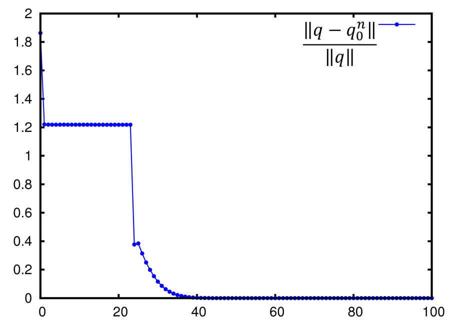
3.2. **Эксперимент с незашумленными данными.** Из Рис. 3.1 графика и таблицы зависимости относительной ошибки $\frac{\|q-q_0^n\|_2}{\|q\|_2}$ от числа итераций видно, что численное решение быстро сходится к точному.

На рисунке 3.2 изображено сравнение функции $x(t)$ для задачи с начальным приближением, точным решением и в некоторых итерациях численного решения. Видно, что уже на 25 итерации численное решение практически не отличается от точного.

Таблица 1. Значения параметров модели

Параметры	Точное значение	Начальный набор
k_{01}	0.064	0.2
k_{21}	0.054	0.1
k_{12}	0.056	0.2
m	0.57	1.5
α	0.065	–
β	11.32	–
h	4.94	20
x_0	4000	400

Рис. 3.1. Зависимость относительной погрешности от числа итераций в виде: а) графика, б) таблицы



а)

Число итераций	Относительная ошибка решения
30	10^{-1}
40	10^{-3}
50	10^{-5}
70	10^{-8}
100	10^{-12}

б)

Рис. 3.2. Графики $x(t)$ для: точного решения (красная линия), начального набора (зеленая линия), 10 итерации (синий пунктир) и 25 итерации (черный пунктир)

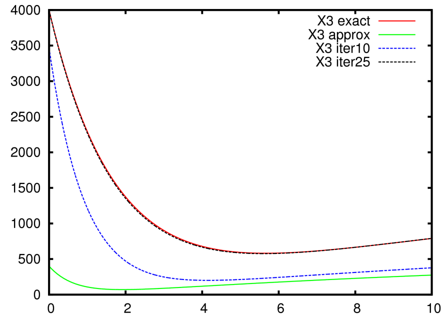
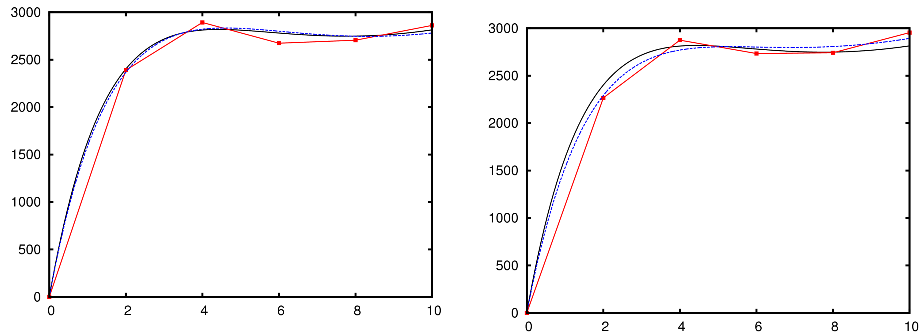


Рис. 3.3. График $cp_1(t)$ с ошибкой 5% в данных для точного решения (черная линия), дополнительных данных (красная линия), численного решения (синий пунктир)



а) с равномерной ошибкой б) с нормальной ошибкой

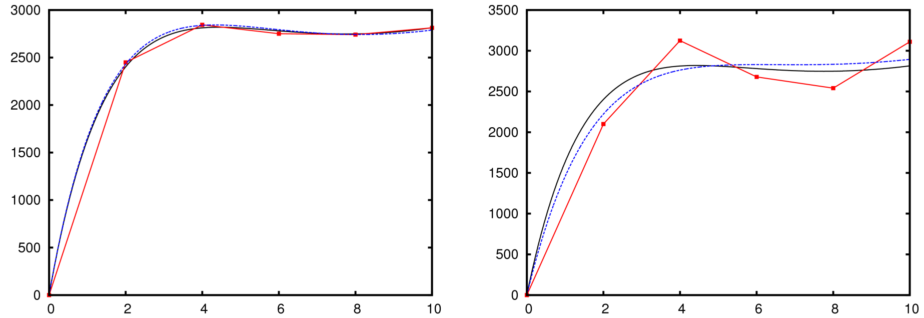
3.3. **Эксперимент с зашумленными данными.** Также рассмотрена обратная задача для дополнительных данных, заданных с ошибкой. Точные параметры и начальный набор параметров остались те же (Таблица 1). Графические результаты были показаны для функции cp_1; для других функций картина не меняется. Сначала ошибка была задана случайной величиной с равномерным распределением. Результат для ошибки 5% можно видеть на рисунке 3.3(а).

Известно, что фармакокинетические данные чаще всего имеют стандартное нормальное распределение [7]. Поэтому рассмотрим теперь обратную задачу с ошибкой в данных, заданной таким распределением. На рисунках 3.3(б) и 3.4 и видны результаты для уровней ошибки 2%, 5% и 10%.

4. Вывод

В статье показано, что обратная задача определения параметров сводится к дискретной задаче решения системы линейных алгебраических уравнений.

Рис. 3.4. Графики $cp_1(t)$ для: точного решения (черная линия), дополнительных данных (красная линия), численного решения (синий пунктир)



а) с нормальной ошибкой 2% б) с нормальной ошибкой 10%

В работе [6] сказано, что кинетические параметры и параметры секреции не могут быть оценены одновременно с приемлемой точностью. Тем не менее, в этой статье был сделан вывод, что возможно совместное нахождение параметров кинетики и секреции с некоторыми фиксированными параметрами секреции.

В данной работе показано, что несмотря на проблемы прямого измерения секреции инсулина, ее количественное оценивание возможно через вычисление секреции C-пептида. Представлен метод решения обратных задач, основанный на сведении задачи к системе линейных алгебраических уравнений. Были приведены результаты численного решения обратной задачи, в том числе для дополнительных данных, заданных с ошибкой. Показано, что, несмотря на выбор начального набора параметров, достаточно отдаленного от точных значений, алгоритм позволяет оценивать параметры с приемлемой точностью.

References

[1] S.I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-posed Problems*, Novosibirsk: Siberian scientific publishing, 2009, (in Russian).

[2] S.I. Kabanikhin, D.A. Voronov, A.A. Grodz, O.I. Krivorotko, *Identifiability of mathematical models in medical biology*, Vavilov Journal of Genetics and Breeding, **19, 6** (2015), 738–744, (in Russian).

[3] N. Meshkat, Ch.E. Kuo, J. DiStefano, *On Finding and Using Identifiable Parameter Combinations in Nonlinear Dynamic Systems Biology Models and COMBOS: A Novel Web Implementation*, PLoS One, **9(10): e110261** (2014).

[4] E. Carson, C. Cobelli, *Modelling Methodology for Physiology and Medicine*, Academic Press, 2001.

[5] R. Eaton, R. Allen, D. Schade, K. Erickson, J. Standefer, *Prehepatic Insulin Production in Man:Kinetic Analysis Using Peripheral Connecting Peptide Behavior*, Journal of Clinical Endocrinology and Metabolism, **51 No. 3** (1980), 520–528.

[6] G. Toffolo, C. Cobelli, F. De Grandi, *Estimation of β-Cell Sensitivity From Intravenous Glucose Tolerance Test C-Peptide Data: Knowledge of the Kinetics Avoids Errors in Modeling the Secretion*, Diabetes, **44, No.7** (1995), 845–854.

[7] H.T. Banks, Sh. Hu, W. Clayton Thompson, *Modeling and Inverse Problems in the Presence of Uncertainty*, Chapman and Hall/CRC, 2014.

Sergey Igorevich Kabanikhin
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

Dmitriy Andreevich Voronov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: dmitriy.voronov.89@gmail.com

Olga Igorevna Krivorotko
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: krivorotko.olya@mail.ru

Anatoly Yurevich Belonog
Novosibirsk State University,
Pirogova Str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: anatolybelonog@gmail.com

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.255–С.263 (2015) УДК 519.62
MSC 65M32

КОРРЕКТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛАУ: АНАЛИЗ И МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ

С.И. КАБАНИХИН, Е.Ы. БИДАЙБЕКОВ, В.С. КОРНИЛОВ, Б.Б. ШОЛПАНБАЕВ, Н.Ш. АКИМЖАН

Abstract. We discuss the questions about methods of teaching of bachelors and masters of physical-mathematical and natural-science directions of high school concerning to inverse and ill-posed problems.

Keywords: inverse and ill-posed problems

В настоящее время во многих высших учебных заведениях стран СНГ на физико-математических и естественнонаучных направлениях подготовки для бакалавров и магистрантов преподаются специальные курсы по обратным и некорректным задачам (ОНЗ) (см., например, [2–5, 8, 10, 12, 13, 17]). Среди таких вузов – Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский городской педагогический университет, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Ростовский государственный университет, Санкт-Петербургский государственный университете, Уральский государственный университет и другие вузы. Содержание обучения обратным и некорректным задачам формируется на основе современных достижений теории и практики обратных и некорректных задач – одного из направлений прикладной математики.

Kabanikhin,S.I., Bidaibekov, E.Y., Kornilov, V.S., Sholpanbaev, B.B., Akimjan N.S., Well and ill-posed problems for systems of linear algebraic equations: analysis and methods of teaching.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации, договором No 107 “Разработка программного обеспечения для исследования численного решения прямых и обратных задач фармакокинетики и эпидемиологии” и Министерством образования и науки Республики Казахстан № 1746/GF4 “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания”.

Поступила 30 октября 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

Широкий интерес к таким задачам обусловлен их большой прикладной важностью. Обратные и некорректные задачи находят свое широкое применение в приложениях: физике (электродинамика, квантовая теория рассеяния, акустика), геофизике (сейсморазведка, электроразведка, гравиразведка и магниторазведка), химии (сорбция, молекулярная химия), медицине (УЗИ, ЯМР – томография, рентген), биологии (анализ молекул, исследование популяций), экономике (оптимальное управление, финансовая математика), экологии (дистанционное зондирование, радары, лазеры, диагностика состояния воздуха, воды, земной поверхности), промышленности (дефектоскопия, неразрушающий контроль, управление технологическими процессами) и других приложениях. Обратные и некорректные задачи находят свое применение в математике: алгебра (несовместные системы, плохо обусловленные системы, вырожденные системы), анализе (дифференцирование, интерполяция), геометрия (восстановление функции по интегралам, по прямым, окружностям, геодезическим), интегральные уравнения (уравнение Фредгольма и Вольтера первого рода, нелинейные интегральные уравнения 1 рода, задача Радона, интегральная геометрия), обыкновенные дифференциальные уравнения (обратная задача рассеяния, спектральные обратные задачи), дифференциальные уравнения в частных производных (эллиптические, параболические, гиперболические, интегро-дифференциальные уравнения), операторные уравнения (обращение компактных операторов, нелинейные операторные уравнения), оптимальное управление (градиентные методы) и других разделах математики [8]. Это научное направление прикладной математики развивается в исследованиях А.К. Амирова, Ю.Е. Аниконова, А.В. Баева, М.А. Бектемесова, П.Н. Вабишевича, А.О. Ватульяна, В.В. Васина, А.В. Гончарского, А.М. Денисова, К.Т. Искакова, С.И. Кабанихина, А.Л. Карчевского, Д.Б. Нурсеитова, В.И. Прийменко, В.Г. Романова, В.С. Сизикова, У.М. Султангазина, Ю.М. Тимофеева, А.М. Федотова, Г.В. Хромовой, В.А. Чеверды, В.Г. Чередниченко, М.А. Шишленина, В.А. Юрко, В.Г. Яхно, J. Gottlieb, M. Grasselli, G. Kunetz, A. Lorenzi, M. Yamamoto и других ученых (см., например, [1, 5–9, 11–18]).

В содержании обучения ОНЗ имеется специфичная терминология, используются различные математические модели и методы исследования, присутствуют широкие межпредметные связи изучаемых вузовских математических курсов, таких, как математический и функциональный анализ, алгебра и геометрия, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных, методы оптимизации, интегральные уравнения, численные методы, информатика и другие учебные дисциплины. Достижение качественных результатов в процессе обучения ОНЗ, которые бы демонстрировали у бакалавров и магистрантов наличие системы фундаментальных знаний в области теории и методологии исследования обратных и некорректных задач, возможно при условии применения конкретных методов их решения. В этом случае решение таких задач выступает и как цель, и как средство обучения. Этот вид учебной деятельности студентов служит средством формирования и развития их творческих способностей, способствует глубокому и прочному усвоению сложных определений, понятий, методов и подходов, используемых при решении широкого круга ОНЗ, формированию умений и навыков исследования ОНЗ, создает условия для осуществления профессиональной ориентации.

В процессе обучения ОНЗ у бакалавров и магистрантов формируются умения и навыки применять фундаментальные знания из многих предметных областей и методы математического моделирования и вычислительного эксперимента для поиска решения конкретной прикладной задачи, грамотно объяснять и обосновывать практические выводы прикладного и гуманитарного характера полученного решения обратных и некорректных задач. В результате такие выпускники в своей профессиональной деятельности способны строить корректные математические модели изучаемых процессов и применять для их исследования эффективные методы современной мировой науки.

При обучении бакалавров и магистрантов обратным задачам для дифференциальных уравнений большое внимание уделяется численным методам их решения. Это обстоятельство связано с тем, что обратные задачи имеют математические особенности. Теория обратных задач, по сути, по своей постановке является информационной и требует информационно –математической обработки информации о решении поставленной задачи, что впервые было подчеркнуто В.Г.Романовым в 1971 году на Симпозиуме по обратным задачам. Поэтому изучение вопросов, касающихся теории и практики исследования обратных задач является важным для информационной подготовки не только бакалавров и магистрантов физико-математических естественнонаучных направлений подготовки, но и для будущих учителей математики и информатики [2]. Одна из таких особенностей — нелинейность, которая, как правило, не позволяет получить точное решение обратной задачи в виде формулы. Как правило, строится система уравнений обратной задачи в виде интегро-дифференциальных уравнений, которая может быть решена при помощи итерационных процессов, включающих в себя многократное решение соответствующих прямых задач. В этой ситуации численные методы, среди которых конечно-разностные методы, оптимизационные методы, метод Ньютона-Канторовича, метод линеаризации и другие численные методы, выступают в качестве эффективных методов исследования таких обратных задач. Существенный вклад в развитие численных методов решения обратных задач внесли работы А.С. Алексеева, Г.Б.Баканова, М.А.Бектемесова, П.Н. Вабишевича, В.И. Дмитриева, С.И. Кабанихина, А.Л.Карчевского, М.М. Лаврентьева, Д.Б.Нурсеитова, Г.И.Марчука, В.Г. Романова, А.А. Самарского и других ученых. В настоящее время численные методы применяются многими авторами при исследовании различных обратных задач для дифференциальных уравнений (см., например, [7–9, 16]).

В процессе обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений студенты учатся находить приближенные решения таких задач при помощи вычислительных алгоритмов, в том числе, с использованием компьютерных технологий. В процессе построения вычислительных алгоритмов решения широкого класса таких задач студентам приходится иметь дело с поиском решений систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В качестве примера, для краткости записи, приведем постановку обратной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, вошедшую в содержание обучения ОНЗ [4].

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с неизвестным коэффициентом

$$(1) \qquad y'' + a(x)y = 0, y = y(x, \alpha), y'' = \frac{d^2}{dx^2}y, a(x) \in C(-\infty, +\infty); x, \alpha \in R,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$(2) \qquad y(x, \alpha)|_{x=\alpha} = 1,\, y'(x, \alpha)|_{x=\alpha} = 0.$$

Здесь x– независимая переменная, α – числовой параметр.

По заданной дополнительной информации о решении прямой задачи (1), (2) при фиксированном значении переменной $x = x^*$

$$(3) \qquad y(x^*, \alpha) = \varphi(\alpha), x^* - const, \alpha \in R$$

требуется восстановить неизвестный коэффициент $a(x)$ и найти решение $y = y(x, \alpha)$.

Единственность и существование решения обратной задачи (1)–(3) исследованы в работе [1].

Вычислительный алгоритм нахождения приближенного решения обратной задачи (1)–(3) ($\{v_k^i\}$, $\{a_k\}$, $k, i = -\overline{n,\, n}$) строится на основе ее конечно-разностного аналога:

$$\frac{v_{k+1}^i - 2\, v_k^i + v_{k-1}^i}{h^2} \; + \; a_k\, v_k^i \; = \; 0,$$

$$(4) \qquad (i, k) \in D\,(h) = \{\, (k\,h, \;\; i\,h) : \;\; k = -\overline{n, n}, \quad i = -\overline{n, n}\,\}\,, h > 0$$

$$(5) \qquad v_i^i = 1, \qquad i = -\overline{n, n},$$

$$(6) \qquad \frac{v_{i+1}^i - v_{i-1}^i}{2t} = 0, \quad i = -\overline{n+1,\; n-1},$$

$$(7) \qquad v_0^i = \overline{\varphi_i}, \;\; i = -\overline{n, n},$$

В приведенных соотношениях (4)–(7) наглядно присутствует СЛАУ, решение которой предполагается находить. Нередко нахождение решений подобных СЛАУ, являются некорректной задачей. Данное обстоятельство настоятельно аргументирует включение в содержание обучения обратным и некорректным задачам раздел, посвященный СЛАУ. Решение СЛАУ может оказаться некорректной задачей, когда ее матрица прямоугольная, квадратная вырожденная, плохо обусловленная.

Наличие таких проблемных ситуаций требует выбора эффективного метода решения СЛАУ. Сочтем нужным продемонстрировать алгоритм поиска решения различных СЛАУ.

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n = f_1 \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n = f_2 \\ \ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n = f_m \end{cases}$$

Эта система может быть записана в матричном виде: $Aq = f$, где A — действительная $m \times n$-матрица коэффициентов системы, такая, что$A : R^n \to R^m$, $f = (f_1, f_2, \ldots f_m)^T \in R^m$ — вектор-столбец правых частей,
$q = (q_1, q_2, \ldots q_n)^T \in R^n$ — вектор-столбец неизвестных.

Определение 1. *Система уравнений*

$$A^T Aq = A^T f \tag{8}$$

называется нормальной системой по отношению к системе $Aq = f$.

Определение 2. *Вектор $q \in R^n$, реализующий минимум нормы невязки*

$$J(q) = \|Aq - f\|^2 \to \min \tag{9}$$

называется псевдорешением системы $Aq = f$, т.е. $q_p = \arg \min\limits_{q \in R^n} \|Aq - f\|^2$.

Нетрудно убедиться в том, что множество решений нормальной системы (8) совпадает с множеством псевдорешений системы $Aq = f$. Обозначим это множество через Q_f^p.

Определение 3. *Нормальное относительно нулевого вектора (наименьшее по норме) псевдорешение системы $Aq = f$называется нормальным псевдорешением этой системы (или нормальным обобщенным решением) и обозначается q_{np} : $q_{np} = \arg \min\limits_{q_p \in Q_f^p} \|q_p\|$.*

Случай невырожденной матрицы (определитель матрицы отличен от нуля).

(1) *Случай когда $m < n$.* В этом случае система имеет бесконечно много решений. В случае, когда система уравнений имеет много решений, среди решений выбирается минимальное по норме, которое называется нормальным решением и обозначается q_n и находится по формуле $q_n := \arg \min\limits_{q \in Q_f(A)} \|q\|$.

(2) *Случай когда m=n.* Рассмотрим случай невырожденной квадратной матрицы A. Теоретически этот случай можно считать хорошим в смысле существования и единственности решения. Однако в теории вычислительных методов невырожденные матрицы подразделяют на две категории: «плохо обусловленные» и «хорошо обусловленные». Плохо обусловленными называют матрицы, для которых решение системы уравнений практически является неустойчивым. Иначе говоря, небольшие погрешности в правой части системы или погрешности, неизбежно возникающие при численной реализации, приводят к существенному отклонению полученного решения от точного. Одной из важных характеристик практической устойчивости решения системы линейных уравнений является число обусловленности. Задача нахождения точного решения системы будет некорректной, если число обусловленности очень велико и корректной в противном случае.

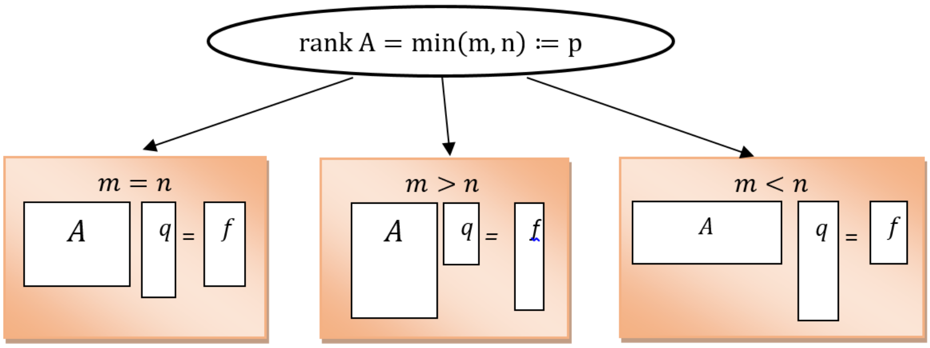


Рис. 1. Случай невырожденной матрицы

(3) *Случай когда* $m > n$. В этом случае если для системы существует точное решение, то оно единственное.

На рисунке 1 приведена схема разветвления в случае невырожденной матрицы. Здесь формы четырехугольников указывают на виды матрицы A (квадратная, прямоугольная) и соответствующих векторов q, f.

Случай вырожденной матрицы. Вырожденная СЛАУ – это система, описываемая матрицей с нулевым определителем (сингулярной матрицей). Поскольку некоторые уравнения, входящие в такую систему, представляются линейной комбинацией других уравнений, то, фактически, сама система является недоопределенной. Несложно сообразить, что, в зависимости от конкретного вида вектора правой части f, существует либо бесконечное множество решений, либо не существует ни одного. Если СЛАУ имеет бесконечно много решений, то также как в случае $m<n$, находится нормальное решение которое находится по формуле $q_n = \arg \min\limits_{q \in Q_f(A)} \|q\|$. Если система не имеет ни одного решения, то существует для него псевдорешение $q_p = \arg \min\limits_{q \in R^n} \|Aq - f\|^2$. Если псевдорешений более одного, то существует единственное нормальное псевдорешение, которое находится по формуле $q_{np} = \arg \min\limits_{q_p \in Q_f^p} \|q_p\|$.

Ниже на рисунке 3 приводится схема алгоритма поиска решения СЛАУ.

Очевидно, что знание особенностей поиска некорректных решений СЛАУ имеет исключительно важное значение для изучения и понимания численных методов решения линейных обратных и некорректных задач, поскольку все они так или иначе сводятся к системам линейных алгебраических уравнений и в дальнейшем как в зеркале, отображаются основные понятия теории некорректных задач, такие как регуляризация, квазирешение, нормальное решение и т. д. Исследование некорректных задач линейной алгебры является не только необходимым этапом численного решения линейных некорректных задач. Математики решали практические задачи с переопределенными или недоопределенными системами уравнений задолго до появления термина "некорректная (или обратная) задача". Именно в линейной алгебре начали изучать нормальное решение (позволяющее выбрать единственное среди множества возможных решений), псевдорешение (обобщенное решение, совпадающее с обычным, если решение существует), плохо обусловленные системы, сингулярное разложение,

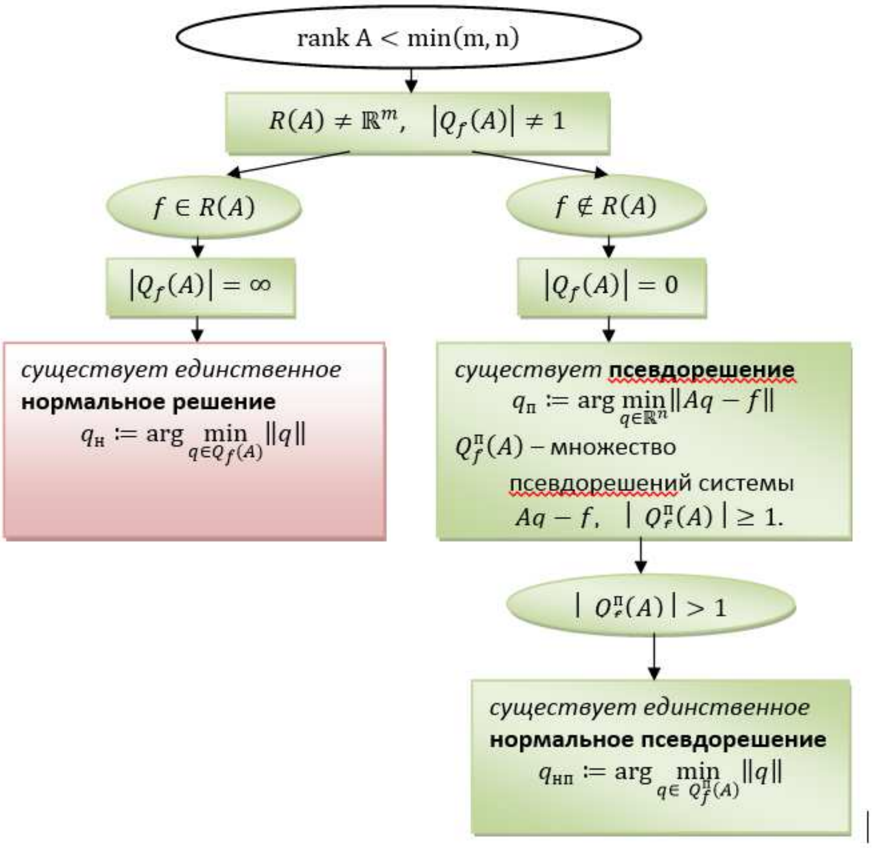


Рис. 2. Случай вырожденной матрицы

которое, подобно рентгеновскому снимку, высвечивает степень некорректности задачи и подсказывает пути численного решения.

References

[1] Е.Ы. Бидайбеков, *О некоторых обратных задачах для линейных дифференциальных уравнений*, Известия АН КазССР, Серия физико-математическая, **1** (1981), 15–22.

[2] Е.Ы. Бидайбеков, Г.Б. Камалова, *О содержании курса «Обратные задачи для дифференциальных уравнений» в подготовке будущих учителей информатики*, Вестник Казахского национального педагогического университета имени Абая, Серия Физико-математические науки, **4(24)** (2008), 54–61.

[3] Е.Ы. Бидайбеков, В.С. Корнилов, Г.Б. Камалова, *Обучение будущих учителей математики и информатики обратным задачам для дифференциальных уравнений*, Вестник Московского городского педагогического университета, Серия Информатика и информатизация образования, **3 (29)** (2014), 57–69.

[4] Е.Ы. Бидайбеков, В.С. Корнилов, Г.Б. Камалова, Н.Ш. Акимжан, *Применение компьютерных технологий при обучении студентов вузов обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Вестник Российского университета дружбы народов, Серия Информатизация образования, **2** (2015), 57–72.

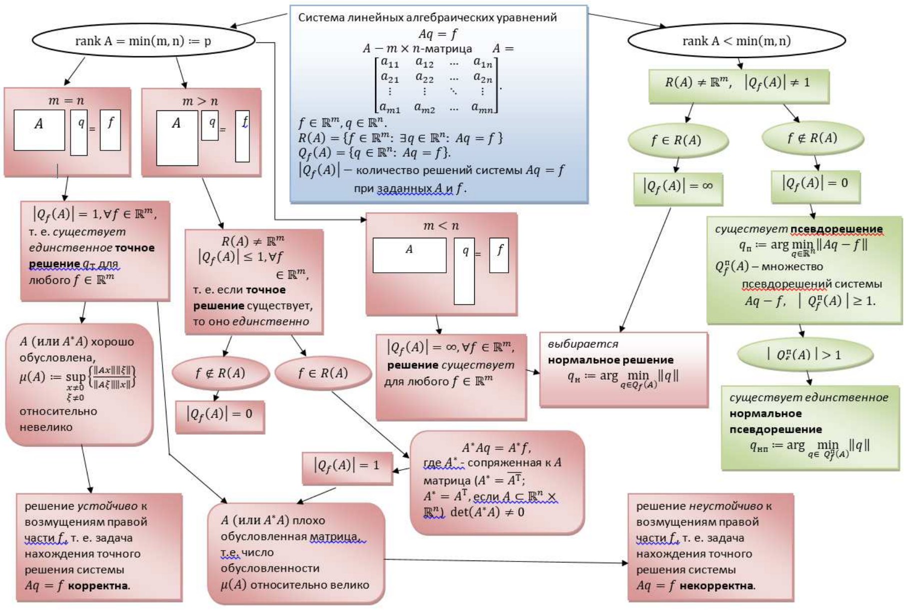


Рис. 3. Алгоритм поиска решений СЛАУ

[5] А.М. Денисов, *Введение в теорию обратных задач*, М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1994.

[6] В.К. Иванов, В.В. Васин, В.Н. Танана, *Теория линейных некорректных задач*, М.: Наука, 1986.

[7] С.И. Кабанихин, *Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений*, Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988.

[8] С.И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

[9] S.I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications*, De Gruyter, Germany, 2011.

[10] В.С. Корнилов, *Обучение обратным задачам для дифференциальных уравнений как фактор гуманитаризации математического образования*, М.: МГПУ, 2006.

[11] М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, М.: Наука, 1980.

[12] Ю.П. Петров, В.С. Сизиков, *Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями*, Санкт-Петербург: Политехника, 2003.

[13] В.Г. Романов, *Обратные задачи для дифференциальных уравнений*, Новосибирск: НГУ, 1973.

[14] В.Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, М.: Наука, 1984.

[15] В.Г. Романов, *Устойчивость в обратных задачах*, М.: Научный мир, 2005.

[16] А.А. Самарский, П.Н. Вабишевич, *Численные методы решения обратных задач математической физики*, М.: Едиториал УРСС, 2004.

[17] Ю.М. Тимофеев, А.В. Поляков, *Математические аспекты решения обратных задач атмосферной оптики*, СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2001.

[18] А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, М.: Наука, 1986.

Sergey Igorevich Kabanikhin
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

Esen Yklasovich Bidaibekov
Kazakh National Pedagogical University named after Abai,
pr. Dostyk, 13,
050010, Almaty, Kazakhstan
E-mail address: esen_bidaibekov@mail.ru

Viktor Semenovich Kornilov
Moscow City Teacher Training University,
The 2nd Selskohozyaistvenny proezd,
129226, Moscow, Russia
E-mail address: vs_kornilov@mail.ru

Bakytgerey Bakturovich Sholpanbaev
Kazakh National Pedagogical University named after Abai,
pr. Dostyk, 13,
050010, Almaty, Kazakhstan
E-mail address: Bahtygerey@mail.ru

Nagima Shopankysy Akimjan
Kazakh National Pedagogical University named after Abai,
pr. Dostyk, 13,
050010, Almaty, Kazakhstan
E-mail address: nagima_akim@mail.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.264–С.275 (2015) УДК 517.946
MSC 35R30,35K20,35L20

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.И. КОЖАНОВ

Abstract. The solvability results are presented for the inverse linear problems: a) to find a solution and unknown boundary regimes; b) to find a solution and an unknown right-hand side. The existence of regular solutions is proved.
Keywords: parabolic equations, hyperbolic equations, linear inverse problems, unknown boundary data, unknown external source, regular solutions, existence.

1. Линейные обратные задачи определения граничных режимов для параболических и гиперболических уравнений

Обратные задачи нахождения неизвестных граничных режимов и далее решений тех или иных краевых задач для соответствующих дифференциальных уравнений изучались в ряде работ — см., например, монографии [1-3], статьи [4-8]. Эти задачи изучались в разных постановках — разных прежде всего по типу необходимых условий переопределения.

Рассматриваемые в работе обратные задачи предполагают, что условия переопределения в них задаются в виде некоторых интегралов от решения по пространственной области.

С одной стороны, задачи для различных классов нестационарных дифференциальных уравнений с условием в виде интегралов от решения по пространственной области активно изучаются в последнее время — см. работы [9-19]. С

Kozhanov A.I., Linear inverse problems for some classes of nonstationary equations.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-06582.

Поступила 22 ноября 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

другой же стороны — большинство этих работ относится к одномерному случаю, задачи же для многомерных дифференциальных уравнений с краевыми условиями интегрального вида изучались лишь в работах [13-17]. Отметим, что в работах [8, 10, 18, 19] задачи с интегральными условиями трактовались именно как задачи с неизвестными граничными условиям, но при этом лишь в работе [8] рассматривался многомерный случай.

Целью исследований автора как раз и является изучение разрешимости обратных задач восстановления граничных данных и нахождения решения для некоторых нестационарных дифференциальных уравнений именно в многомерном случае.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0,T)$, $f(x,t)$, $h(x)$, $N(x)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

Обратная задача I: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, такие, что*

$$u_t - \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q; \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = q(t)h(x), \quad (x,t) \in S; \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega} N(x)u(x,t)\,dx = 0, \quad 0 < t < T \tag{4}$$

(здесь и далее $\nu = (\nu_{x_1}, \ldots, \nu_{x_n})$ — вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке x).

Обратная задача II: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, такие, что для них выполняются условия (3) и (4), а также условия*

$$u_{tt} - \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q; \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

Всюду ниже будем считать, что функция $N(x)$ принадлежит классу $C^1(\overline{\Omega})$.

Положим

$$f_0(t) = \int\limits_{\Omega} N(x)f(x,t)\,dx, \quad h_0 = \int\limits_{\Omega} N(x)h(x)\,dx.$$

Далее, обозначим через l дифференциальный оператор

$$l = \sum_{i=1}^{n} N_{x_i}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \quad .$$

Пусть выполняются условия:

$$h_0 \neq 0; \tag{7}$$

$$\exists\, v(x): \quad v(x) \in C^3(\overline{\Omega}), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial \nu} = h(x) \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma; \tag{8}$$

$$h_0 + \int\limits_{\Omega} lv(x)\,dx \neq 0. \tag{9}$$

Введем еще обозначение. Именно, положим

$$\alpha = 1 + \frac{1}{h_0} \int\limits_\Omega lv(x)\,dx,$$

$$V_0 = \max_i \max_{\overline{\Omega}} |v_{x_i}(x)|, \quad N_0 = \max_i \left[\int\limits_\Omega N^2_{x_i}(x)\,dx \right],$$

$$F_0(x,t) = \frac{v(x)f_0(t)}{\alpha h_0^2} \int\limits_\Omega lv(y)\,dy - \frac{v(x)f_0(t)}{h_0},$$

$$f_1(x,t) = f(x,t) + F_{0t}(x,t) - \Delta F_0(x,t).$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условие*

$$N(x) \in C^1(\overline{\Omega}),$$

а также условия (7)-(9). Далее, пусть функции $N(x)$ и $h(x)$ таковы, что существует положительное число δ_0, для которого выполняется неравенство

$$\delta_0^2 + \frac{nV_0^2 N_0}{\alpha^2 h_0^2 \delta_0^2} < 2. \tag{10}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f(x,0) = 0$ при $x \in \Omega$, обратная задача I имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega))$, $q(t) \in W_2^1([0,T])$, $q(0) = 0$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$w_t - \Delta w = f_1(x,t) + \frac{v(x)}{\alpha h_0} \int\limits_\Omega lw_t(y,t)\,dy - \frac{\Delta v(x)}{\alpha h_0} \int\limits_\Omega lw(y,t)\,dy$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial \nu} = 0, \quad (x,t) \in S,$$

$$w(x,0) = 0, \quad x \in \Omega.$$

При выполнении условий теоремы эта задача имеет решение $w(x,t)$ такое, что $w(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $w(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega))$, $w_t(x,t) \in L_2(0,T; W_2^1(\Omega))$ — доказательство этого факта проводится с помощью метода регуляризации и метода продолжения по параметру, детали доказательства см. [8].

Положим

$$u(x,t) = w(x,t) - \frac{v(x)}{\alpha h_0} \int\limits_\Omega lw(y,t)\,dy - F_0(x,t), \quad q(t) = \frac{1}{h_0} \int\limits_\Gamma N(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}\,ds_x.$$

Эти функции и дадут решение обратной задачи I из требуемого класса.

Теорема доказана. $\square$

При выполнении дополнительных условий

$$N(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \frac{\partial N(x)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma$$

и при замене в условии (10) числа N_0 на число $N_1 = \|\Delta N\|^2_{L_2(\Omega)}$ нетрудно аналогичным вышеизложенному образом доказать теорему существования регулярного решения и для задачи II.

Следующие результаты о разрешимости обратных задач I и II будут получены с помощью иного, чем представленный выше, подхода.

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ есть система собственных функций второй краевой задачи для оператора Лапласа, λ_k, $k = 1, \ldots$, есть соответствующие собственные числа.

Определим функцию $v_0(x,t)$ как решение второй краевой задачи для уравнения (1), удовлетворяющее условию (2). Далее, определим функцию $\widetilde{h}(x)$ как решение задачи

$$\Delta\widetilde{h} = 0 \quad \textit{в} \quad \Omega, \quad \frac{\partial\widetilde{h}(x)}{\partial\nu} = h(x) \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma.$$

Решение $u(x,t)$ обратной задачи I определим равенством

$$u(x,t) = v_0(x,t) + V(x,t) + w(x,t),$$

в котором $V(x,t) = q(t)\widetilde{h}(x)$, $w(x,t)$ есть решение задачи

$$w_t - \Delta w = -q'(t)\widetilde{h}(x),$$

$$w(x,0) = 0, \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial\nu} = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S.$$

Представим функцию $\widetilde{h}(x)$ рядом Фурье по системе $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\widetilde{h}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k(x).$$

Функцию $w(x,t)$ также определим рядом Фурье:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_k(x);$$

неизвестные функции $c_l(t)$ здесь являются решениями задачи Коши

$$c_k'(t) - \lambda_k c_k(t) = -a_k q'(t), \quad c_k(0) = 0.$$

Потребуем, чтобы для функции $q(t)$ выполнялось равенство $q(0) = 0$. Тогда функции $c_k(t)$ определяются равенствами

$$c_k(t) = -a_k q(t) - \lambda_k a_k \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} q(\tau)\, d\tau.$$

Представление функций $c_k(t)$ дает представление функции $u(x,t)$:

$$u(x,t) = v_0(x,t) - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lambda_k a_k \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} q(\tau)\, d\tau \right] w_k(x). \tag{11}$$

Введем обозначения:

$$\psi(t) = \int\limits_{\Omega} N(x) v_0(x,t)\, dx, \quad b_k = \int\limits_{\Omega} N(x) w_k(x)\, dx, \quad k = 1,2,\ldots,$$

$$R_{1,p}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p a_k b_k e^{\lambda_k t}, \quad p = 1,2.$$

Представление (11) вместе с условием (4) и с учетом введенных обозначений дает равенство

$$\int_0^t R_{1,1}(t-\tau)q(\tau)\,d\tau = \psi(t). \tag{12}$$

Это равенство представляет собой интегральное уравнение Вольтерра первого рода; найдя решение $q(t)$ этого уравнения, далее автоматически находим функции $V(x,t)$, $w(x,t)$ и в целом функцию $u(x,t)$.

Теорема 2. *Пусть функции $h(x)$ и $N(x)$ таковы, что выполняются условия*
а) $\widetilde{h}(x) \in W_2^2(\Omega)$, $N(x) \in L_2(\Omega)$;
б) числовые ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p a_k b_k$, $p = 1,2,3$, абсолютно сходятся;
в) $R_{1,1}(0) \neq 0$.
Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f(x,0) = 0$ при $(x,t) \in \Omega$, обратная задача I имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega))$, $q(t) \in W_2^1([0,T])$, $q(0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение

$$R_{1,1}(0)q(t) + \int_0^t R_{1,2}(t-\tau)q(\tau)\,d\tau = \psi'(t).$$

Вследствие условий б) и в) теоремы, условий на функцию $f(x,t)$ и вследствие общих результатов о разрешимости интегральных уравнений Вольтерра это уравнение имеет решение $q(t)$, принадлежащее пространству $W_2^1([0,T])$. Поскольку для функции $q(t)$ выполняется уравнение (12), то для функции $u(x,t)$, определенной равенством $u(x,t) = v_0(x,t) + q(t)\widetilde{h}(x) + w(x,t)$, будет выполняться условие переопределения (4). Выполнение остальных требуемых условий для функции $u(x,t)$, а также условия $q(0) = 0$, очевидно. Следовательно, функции $u(x,t)$ и $q(t)$ дадут требуемое решение обратной задачи I.

Теорема доказана. □

Положим $\mu_k = \sqrt{|\lambda_k|}$, $k = 1,2,\ldots$.

Теорема 3. *Пусть функции $h(x)$ и $N(x)$ таковы, что выполняются условия а) и в) теоремы 2, а также условие*
б′) числовые ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k^p a_k b_k$, $p = \overline{1,5}$, абсолютно сходятся.
Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $\frac{\partial^l f(x,t)}{\partial t^l}$, $l = \overline{0,3}$, принадлежат пространству $L_2(Q)$, $f(x,0) = f_t(x,0) = 0$ при $(x,t) \in \Omega$, обратная задача II имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in W_2^2(Q)$, $q(t) \in W_2^2([0,T])$, $q(0) = q'(0) = 0$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы проводится вполне аналогично доказательству теоремы 2. □

2. Линейные обратные задачи с граничным переопределением для параболических и гиперболических уравнений

В работе изучается разрешимость начально-краевых задач для параболических и гиперболических уравнений в ситуации, когда правая часть (свободный член) содержит некоторую неизвестную компоненту. Как правило, в подобных ситуациях предполагается, что неизвестная компонента имеет некоторый специальный вид — в настоящей работе мы предполагаем, что неизвестная компонента имеет вид произведения неизвестного множителя, зависящего только от временной переменной, и известной функции.

Наличие в обратных задачах дополнительных неизвестных функций естественным образом требует задания дополнительных условий — условий переопределения. Для обратных задач с неизвестным множителем, являющимся функцией от временной переменной, искомые условия переопределения зачастую представляют собой либо условия интегрального переопределения по области (см., например, [1, 20-25]), либо условия внутреннего переопределения [26], либо же условия граничного переопределения. По поводу задач с граничным переопределением заметим следующее. Эти задачи достаточно хорошо изучены для одномерных параболических и гиперболических уравнений — см. [27-30], что же касается обратных задач для параболических или гиперболических уравнений с граничным переопределением в многомерном случае, то здесь можно отметить лишь работу автора [29].

Именно изложение результатов (в основном новых) о разрешимости линейных обратных задач для параболических и гиперболических уравнений с граничным переопределением в многомерном случае и является целью настоящей работы.

Хорошо известна связь между обратными задачами и нелокальными краевыми задачами для дифференциальных уравнений — примеры можно найти в монографиях [31, 32], статьях [33-36] и в ряде других работ. Нелокальные краевые задачи, появляющиеся при редукции изучаемых обратных задач с граничным переопределением в некотрых случаях можно трактовать как многомерное обобщение нелокальной задачи А.А. Самарского, предложенной в [37] для одномерного уравнения теплопроводности. Представленный ниже результат о разрешимости соответствующей нелокальной задачи имеет, на взгляд автора, и самостоятельное значение.

Пусть, как и ранее, Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ, $Q = \Omega \times (0,T)$, $S = \Gamma \times (0,T)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $h(x,t)$ и $N(x)$ суть заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

Обратная задача III: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{13}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{14}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = 0, \quad (x,t) \in S; \tag{15}$$

$$\int\limits_{\Gamma} N(x)u(x,t)\, ds_x = 0, \quad 0 < t < T. \tag{16}$$

Обратная задача IV: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*
$$u_{tt} - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t), \tag{17}$$
при выполнении для функции $u(x,t)$ условий
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{18}$$
а также условий (15) и (16).

Именно условием (16) и отличаются обратные задачи III и IV от ранее изученных.

Как уже говорилось выше, разрешимость обратных задач с граничным переопределением тесно связана с разрешимостью некоторой нелокальной (гранично-нелокальной) краевой задачи. Приведем постановку этой задачи и соответствующую теорему о разрешимости для параболических уравнений независимо от обратной задачи I.

Пусть $K(x,y,t)$ есть заданная функция, определенная при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

Нелокальная краевая задача: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*
$$u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t) \tag{19}$$
и такую, что для нее выполняются условие (14), а также условие
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Gamma} K(x,y,t)u(y,t)\,ds_x, \quad (x,t) \in S. \tag{20}$$

Пусть $K_1(x,y,t)$ есть функция такая, что
$$\frac{\partial K_1(x,y,t)}{\partial \nu} = K(x,y,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S, \quad y \in \Omega.$$
Далее, для чисел λ из отрезка $[0,1]$ определим оператор B_λ:
$$(B_\lambda v)(x,t) = v(x,t) - \lambda \int\limits_{\Gamma} K_1(x,y,t)v(y,t)\,ds_y.$$

Теорема 4. *Пусть выполняются условия*
$$c(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x,t) \geq c_0 > 0, \quad c_t(x,t) \leq 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \overline{Q};$$
$$K_1(x,y,t) \in C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0,T]);$$
для всех λ из $[0,1]$, всех t из $[0,T]$ оператор B_λ непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$, и для любой функции $v(x)$ из $L_2(\Gamma)$ равномерно по $\lambda \in [0,1]$, $t \in [0,T]$, выполняются неравенства
$$k_1\|v\|_{L_2(\Gamma)} \leq \|B_\lambda v\|_{L_2(\Gamma)} \leq k_2\|v\|_{L_2(\Gamma)}, \quad 0 < k_1 < k_2 < +\infty, \quad k_i = const;$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \nu_{x_i} \leq -m_0 < 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma.$$
Тогда для любой функции $f(x,t)$ такое, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, нелокальная задача (19), (14), (20) имеет решение $u(x,t)$ такой, что $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_2(S)$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы проводится с помощью метода регуляризации и метода продолжения по параметру. $\square$

Вернемся к обратной задаче III.

Положим

$$h_0(t) = \int\limits_{\Gamma} N(x)h(x,t)\,ds_x, \quad h_1(x,t) = \frac{h(x,t)}{h_0(t)},$$

$$f_1(x,t) = f(x,t) - h_1(x,t)\int\limits_{\Gamma} N(x)f(x,t)\,ds_x,$$

$$g(x,t) = \Delta f_1(x,t) - c(x,t)f_1(x,t),$$

$$K(x,y,t) = \frac{\partial h_1(x,t)}{\partial \nu}N(y).$$

Пусть выполняется условие:

существует функция $K_1(x,y,t)$ из класса $C^3(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times[0,T])$ такая, что

$$\frac{\partial K_1(x,y,t)}{\partial \nu} = K(x,y,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S. \tag{21}$$

Вновь для $\lambda \in [0,1]$ определим оператор B_λ:

$$(B_\lambda v)(x,t) = v(x,t) - \lambda\int\limits_{\Gamma} K_1(x,y,t)v(y,t)\,ds_y. \tag{22}$$

Теорема 5. *Пусть функции $c(x,t)$, $h(x,t)$, $N(x)$ и $f(x,t)$ таковы, что выполняются условие (21), а также условия*

$$c(x,t) \in C^3(\overline{Q}), \quad c(x,t) \geq c_0 > 0, \quad c_t(x,t) \leq 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{Q};$$

для всех λ из $[0,1]$, всех t из $[0,T]$ оператор B_λ непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$, и для любой функции $v(x)$ из $L_2(\Gamma)$ равномерно по $\lambda \in [0,1]$, $t \in [0,T]$, выполняются неравенства

$$k_1\|v\|_{L_2(\Gamma)} \leq \|B_\lambda v\|_{L_2(\Gamma)} \leq k_2\|v\|_{L_2(\Gamma)}, \quad 0 < k_1 < k_2 < +\infty, \quad k_i = const;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\nu_{x_i} \leq -m_0 < 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma;$$

$$g(x,t) \in L_2(Q), \quad g_t(x,t) \in L_2(Q).$$

Тогда обратная задача III имеет решение $\{u(x,t),q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $q(t) \in W_2^1([0,T])$.

Решение обратной задачи III строится с помощью решения нелокальной задачи типа задачи (19), (14), (20).

Замечание. На самом деле функция $u(x,t)$ обладает большей гладкостью.

Для обратной задачи IV приведем упрощенный вариант теоремы разрешимости.

Теорема 6. *Пусть функции $c(x,t)$, $h(x,t)$, $N(x)$ и $f(x,t)$ таковы, что выполняются условие (21), а также условия*

$$c(x,t) \in C^3(\overline{Q}), \quad c(x,t) \geq c_0 > 0, \quad c_t(x,t) \leq 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{Q};$$

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S;$$

$$g(x,t) \in L_2(Q), \quad g_t(x,t) \in L_2(Q).$$

Тогда обратная задача IV имеет решение $\{u(x,t),q(t)\}$ такое, что $u(x,t) \in W_2^2(Q) \cap L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$, $q(t) \in W_2^1([0,T])$.

Следующая теорема существования доказывается с помощью метода Фурье.

Обозначим через $u_0(x,t)$ решение начально-краевой задачи

$$u_{0tt} - \Delta u_0 + c(x,t)u_0 = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial \nu} = 0, \quad (x,t) \in S,$$

$$u_0(x,0) = u_{0t}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Далее, представим функцию $h(x,t)$ рядом Фурье по системе $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$h(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) w_k(x), \quad h_k(t) = \int\limits_{\Omega} h(x,t) w_k(x)\, dx.$$

Введем обозначения:

$$\psi_0(t) = \int\limits_{\Gamma} N(x) u_0(x,t)\, ds_x,$$

$$\beta_k = \int\limits_{\Gamma} N(x) w_k(x)\, ds_x,$$

$$\overline{h}_k = \operatorname*{vrai\,max}_{[0,T]} |h_k(t)|, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Теорема 7. *Пусть выполняются условия*

$$N(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad h(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega));$$

числовые ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^p |\beta_k| \overline{h}_k, \quad p = 0,1,$$

сходятся;

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k h_k(t) \right| \geq m_0 > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T];$$

$$\frac{\partial^m f(x,t)}{\partial t^m} \in L_2(Q) \quad \textit{при} \quad m = 0,1,2.$$

Тогда обратная задача IV имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega))$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2, исходная задача сводится к задаче нахождения функции $q(t)$ как решения некоторого интегрального уравнения Вольтерра первого рода. □

3. Усиления и обобщения

1. В целом вполне аналогичными вышеприведенным методами можно изучить обратные задачи типа задач I-IV в более общей постановке, связанной с наличием нескольких неизвестных функций. Например, вместо обратных задач I и II можно рассмотреть задачи нахождения функций $u(x,t)$, $q_1(t)$, $\ldots$, $q_m(t)$ таких, что для них выполняются уравнения (1) или (5), условия (2) или (6), а также условия

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^{m} q_k(t) h_k(x), \quad (x,t) \in S,$$

$$\int\limits_{\Omega} N_k(x)u(x,t)\,dx = 0, \quad 0 < t < T, \quad k = 1,\dots,m$$

(функции $h_k(x)$, $N_k(x)$, $k = 1,\dots,m$, известны). Вместо задач III и IV можно рассмотреть задачи нахождения функций $u(x,t)$, $q_1(t)$, ..., $q_m(t)$ таких, что выполняются либо уравнение

$$u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t) + \sum_{k=1}^{m} q_k(t)h_k(x,t),$$

либо соответственно уравнение

$$u_{tt} - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t) + \sum_{k=1}^{m} q_k(t)h_k(x,t),$$

условия (14) или (18), условие (15), а также условие

$$\int\limits_{\Gamma} N_k(x)u(x,t)\,ds_x = 0, \quad 0 < t < T, \quad k = 1,\dots,m$$

(функции $h_k(x,t)$, $N_k(x)$, $k = 1,\dots,m$, известны).

Для рассматриваемых более общих задач все выкладки и рассуждения вполне соответствуют выкладкам и рассуждениям теорем 1-3, 5-7, но отличаются при этом громоздкостью. Например, при доказательстве аналогов теорем 2, 3, 6 и 7 возникнут системы интегральных уравнений Вольтерра, и т.п.

2. Во многих случаях вместо оператора Лапласа в рассматриваемых уравнениях можно использовать более общий эллиптический оператор, в обратных задачах I и II функции $h(x)$ или $h_1(x)$, ..., $h_m(x)$ могут зависеть и от переменной t.

3. С помощью использованной при доказательстве теорем 1-3, 5-7 техники можно получить теоремы разрешимости обратных задач типа задач I-IV и для некоторых других уравнений — например, для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений, для других уравнений соболевского типа [38, 39].

4. Уравнение для функции $w(x,t)$, появившееся при доказательстве теоремы 1, в последнее время в литературе называют "нагруженным" [40, 41]. Полученные по ходу исследований результаты о разрешимости тех или иных краевых задач для этого уравнения, для подобных уравнений, возникающих при исследованиях разрешимости иных обратных задач имеют и самостоятельное значение.

References

[1] A.I. Prilepko, D.G Orlovsky, I.A. Vasin, *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*, New York: Marcel Dekker, (1999).

[2] S.I. Kabanikhin, *Inverse and ill-posed problems*, Siberian publishing, (2009).

[3] G.V. Alekseev, *Optimization in the stationary problems of heat and mass transfer and magnetic hydrodynamics*, Science world, (2010), 142–143.

[4] А.Б. Костин, А.И. Прилепко, *О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения, I. Дифференц. уравнения*, Дифференц. уравнения, **32** (1996), 1319–1328.

[5] В.Т. Борухов, В.И. Корзюк, *Применение неклассических краевых задач для восстановления граничных режимов процессов переноса*, Вестник Белорусского университета, **1** (1998), 54–57.

[6] В.Т. Борухов, П.Н. Вабищевич, В.И. Корзюк, *Сведение одного класса обратных задач теплопроводности к прямым начально-краевым задачам*, Вестник Белорусского университета, **4** (2000), 742–747.

[7] А.И. Короткий, Д.А. Ковтунов, *Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции несжимаемой жидкости*, Тр. ИММ ДВО АН, **12** (2006), 88–97.

[8] А.И. Кожанов, *Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений*, изд. БГУ, (2012), 87–96.

[9] Н.И. Ионкин, *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием*, Дифференц. уравнения, **13** (1997), 294–304.

[10] Л.С. Пулькина, *Нелокальная задача с двумя интегральными условиями для гиперболического уравнения на плоскости*, Институт математики СО РАН, Новосибирск, 2007.

[11] А.И. Кожанов, Л.С. Пулькина, *О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений*, Математический журнал, **9** (2009), 78–92.

[12] А.И. Кожанов, *О разрешимости краевых задач с нелокальными и интегральными условиями для параболических уравнений. Нелинейные граничные задачи*, ИПММ НАН Украины, **20** (2010), 54–76.

[13] Л.С. Пулькина, *Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений*, Самарский Государственный Университет, Самара, 2012.

[14] А.И. Кожанов, Л.С. Пулькина, *Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений*, Докл. АН, **404** (2009), 589–592.

[15] А.И. Кожанов, Л.С. Пулькина, *О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений*, Дифференц. уравнения, **42** (2006), 1166–1179.

[16] А.М. Абдрахманов, А.И. Кожанов, *Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка*, Изв. вузов. Математика, **5** (2007), 3–12.

[17] А.М. Абдрахманов, *О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием второго рода для уравнений нечетного порядка*, Математические заметки, **88**, 163–172.

[18] А.И. Кожанов, *Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений*, Докл. АН, **467** (2010), 152–156.

[19] А.И. Кожанов, *Разрешимость пространственно-нелокальных задач с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений*, Дифференц. уравнения, **51** (2015), 1048-1055.

[20] J.R. Cannon, Y. Lin, *Determination of a parameter $p(t)$ in some quasilinear parabolic differential equations*, **4** (1998), 35–45.

[21] В.Л. Камынин, Э. Франчини, *Об одной обратной задаче для параболического уравнения высокого порядка*, Математические заметки, **64** (1998), 680–691.

[22] В.Л. Камынин, М. Салорди, *Нелинейная обратная задача для параболического уравнения высокого порядка*, Журн. вычисл. матем. и мат. физики, **38** (1998), 1683–1691.

[23] А.И. Кожанов, *Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени*, Журн. вычисл. матем. и мат. физики, **45** (2005), 2168–2184.

[24] А.И. Кожанов, *О разрешимости обратных задач восстановления коэффициентов в уравненях составного типа*, Вестник НГУ, **8** (2008), 81–99.

[25] I.I. Мегралиев, *Обратная задача для уравнения Буссинеска-Лява с дополнительным интегральным условием*, Сиб. журн. индустр. матем., **16** (2013), 75–83.

[26] С.Г. Пятков, А.Е. Сафонов, *Об определении функции источника в математических моделях конвекции-диффузии*, Математические заметки СВФУ, **21** (2014), 117–130.

[27] M. Ivanchov, *Inverse Problems for Equations of Parabolic Type*, Mathematical studies, 2003.

[28] И.Р. Валитов, А.И. Кожанов, *Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени*, Вестник НГУ, **6** (2006), 3–18.

[29] А.И. Кожанов, *О разрешимости некоторых нелокальных и связанных сними обратных задач для параболических уравнений*, Математические заметки ЯГУ, **18** (2011), 64–78.

[30] Р.Р. Сафиуллова, *Обратная задача для гиперболического уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени*, Вестник Южно-Уральского государственного университета, **6** (2013), 73–86.

[31] A.I. Kozhanov, *Composite Type Equations and Inverse Problems* Utrecht: VSP, 1999.

[32] Yu.Ya. Belov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Utrecht: VSP, 2002.

[33] A.I. Kozhanov, An inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation. Inverse Ill-Posed Problems, 2003.

[34] А.И. Кожанов, *Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи*, Журн. вычисл. матем. и мат. физики, **44** (2004), 64–78.

[35] А.И. Кожанов, *Об одном нелинейном параболическом уравнении и связанной с ним обратной задаче*, Математические заметки, **76** (2004), 840–853.

[36] Г.В. Намсараева, *О разрешимости обратных задач для псевдопараболических уравнений*, Математические заметки ЯГУ, **20** (2013), 111–137.

[37] А.А. Самарский, *О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения*, **16** (1980), 1925–1935.

[38] А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Л. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, М.: Физматлит, 2007.

[39] М.О. Корпусов, *Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях*, М.: Либроком, 2010.

[40] М.Т. Дженалиев, *К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений*, Институт теоретической и прикладной математики, Алматы, 1995.

[41] А.М. Нахушев, *Нагруженные уравнения и их применения*, М.: Наука, 2012.

Aleksandr Ivanovich Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: kozhanov@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.276–С.283 (2015) УДК 519.6

MSC 65N21, 65M32, 65R32

ОЦЕНКА УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С.И. КАБАНИХИН, А.Т. НУРСЕИТОВА, М.А. ШИШЛЕНИН

Abstract. In this paper, we propose a new algorithm for numerical solution of the continuation problem for the wave equation, based on the reduction to the inverse problem and minimizing the corresponding misfit functional. The convergence rate estimate of the simple iteration method is based on the conditional stability estimate.

Keywords: hyperbolic equations, continuation problem, conditional stability estimate, convergence rate estimate.

1. Введение

В данном разделе будут исследованы задачи продолжения волновых полей с части границы, расположенной на поверхности Земли. Применение задач продолжения полей к решению интерпретационных задач сейсморазведки рассмотрен в таких работах, как [1, 2, 5, 3, 4, 6].

В данной работе мы предлагаем новый алгоритм численного решения задачи продолжения для волнового уравнения, основанный на сведении к обратной задачи и минимизации соответствующего целевого функционала. Оценка скорости сходимости метода простой итерации получена с учетом оценки условной устойчивости.

Kabanikhin, S.I., Nurseitova, A.T., Shishlenin, M.A., The conditional stability estimate and the convergence rate estimate for continuation problem for hyperbolic equations.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации и Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 14–01–31182 и 15–01–09230).

Поступила 12 марта 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

2. Оценка условной устойчивости

Для некоторого $T > 0$ в области $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in (0,h), y \in (0,L)\}$ рассматривается двумерная задача для гиперболического уравнения

$$u_{xx} = Au, \qquad (x,y) \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$u(x,y,0) = u(x,y,T) = 0, \qquad x \in [0,h], \quad y \in [0,L], \tag{2}$$

$$u(x,0,t) = u(x,L,t) = 0, \qquad x \in [0,h], \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u(0,y,t) = f(y,t), \qquad y \in [0,L], \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$u_x(0,y,t) = g(y,t), \qquad y \in [0,L], \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

где $A(x)u = u_{tt}(x,y,t) - u_{yy}(x,y,t) - \alpha^2 u(x,y,t)$, $x \in (0,h)$.

Задачу (1)–(5) рассматриваем как обратную к следующей *прямой задаче*

$$u_{xx} = Au, \qquad (x,y) \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{6}$$

$$u(x,y,0) = u(x,y,T) = 0, \qquad x \in [0,h], \quad y \in [0,L], \tag{7}$$

$$u(x,0,t) = u(x,L,t) = 0, \qquad x \in [0,h], \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$u_x(0,y,t) = g(y,t), \qquad y \in [0,L], \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$u(h,y,t) = q(y,t), \qquad y \in [0,L], \quad t \in [0,T]. \tag{10}$$

В *прямой задаче* (6)–(10) по заданным функциям q, $g \in L_2((0,L) \times (0,T))$ требуется определить функцию $u \in H^1(\Omega \times (0,T))$.

В *обратной задаче* (1)–(5) требуется определить функцию $q \in L_2((0,L) \times (0,T))$ по дополнительной информации о решении прямой задачи

$$u(0,y,t) = f(y,t), \qquad y \in [0,L], \quad t \in [0,T]. \tag{11}$$

Обратные задачи вида (6)–(11) исследовались в работах [7, 8].

Определение 1. *Функцию $u \in H^1(\Omega \times (0,T))$ будем называть* ***обобщенным решением прямой задачи*** (6)–(10), *если для любых $w \in H^1(\Omega \times (0,T))$ таких, что*

$$w(x,y,0) = w(x,y,T) = 0, \qquad x \in [0,h], \quad y \in [0,L], \tag{12}$$

$$w(x,0,t) = w(x,L,t) = 0, \qquad x \in [0,h], \quad t \in [0,T], \tag{13}$$

$$w(h,y,t) = 0, \qquad y \in [0,L], \quad t \in [0,T], \tag{14}$$

выполняется условие

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(w_x u_x - w_t u_t + w_y u_y - \alpha^2 wu \Big) \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \int_0^L w(0,y,t) g(y,t) \mathrm{d}y\mathrm{d}t = 0. \tag{15}$$

Теорема 1 ([11]). *Пусть для некоторых $q, g, f \in H^2((0,L) \times (0,T))$ функция $u \in H^2(\Omega \times (0,T))$ является решением задачи* (1)–(5), *тогда имеет место* *неравенство*

$$\|u\|^2(x) \le \Big(\|q\|^2 + \frac{1}{2}\Big|\|f_y\|^2 - \|f_t\|^2 - \alpha^2\|f\|^2 - \|g\|^2\Big|\Big)^{\frac{x}{h}} \times$$
$$\times \Big(\|f\|^2 + \frac{1}{2}\Big|\|f_y\|^2 - \|f_t\|^2 - \alpha^2\|f\|^2 - \|g\|^2\Big|\Big)^{\frac{(h-x)}{h}} \mathrm{e}^{2x(h-x)}$$
$$+ \frac{1}{2}\Big(\|f_t\|^2 + \alpha^2\|f\|^2 + \|g\|^2 - \|f_y\|^2\Big), \tag{16}$$

где

$$\|u\|^2(x) = \int_0^T \int_0^L u^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

Для доказательства теоремы приводим несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1.

$$\int_0^T \int_0^L \bar{u}A\bar{u}_x dydt = \int_0^T \int_0^L \bar{u}_x A\bar{u} dydt = \int_0^T \int_0^L \bar{u}_x \bar{u}_{xx} dydt. \tag{17}$$

Доказательство. Рассмотрим в (17) выражение слева и, учитывая (7), (8), проинтегрируем его дважды по частям

$$\int_0^T \int_0^L \bar{u}A\bar{u}_x dydt = \int_0^T \int_0^L \bar{u}(\bar{u}_{xtt} - \bar{u}_{xyy} - \alpha^2\bar{u}_x)dydt = \int_0^L \bar{u}\bar{u}_{xt}|_0^T - \int_0^L \bar{u}_t\bar{u}_x|_0^T$$
$$- \int_0^T \bar{u}\bar{u}_{xy}|_0^L + \int_0^T \bar{u}_y\bar{u}_x|_0^L + \int_0^T \int_0^L \bar{u}_x(\bar{u}_{tt} - \bar{u}_{yy} - \alpha^2\bar{u})$$
$$= \int_0^T \int_0^L \bar{u}_x\bar{u}_{xx}. \square$$

Лемма 2.

$$\int_0^T \int_0^L \bar{u}A\bar{u} = \int_0^T \int_0^L \bar{u}_x^2(x,y,t)dydt + \|\bar{f}_y\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))} - \|\bar{f}_t\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))}$$
$$-\alpha^2\|\bar{f}\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))} - \|\bar{g}\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))}. \tag{18}$$

Доказательство. Продифференцируем по x в (18) выражение слева

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^T \int_0^L \bar{u}A\bar{u} = \int_0^T \int_0^L \big(\bar{u}_x A\bar{u} + \bar{u}A\bar{u}_x\big). \tag{19}$$

Учитывая Лемму 1 и $\bar{u}_{xx} = A\bar{u}$, из (19) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^T \int_0^L \bar{u}A\bar{u} = \int_0^T \int_0^L \big(\bar{u}_x A\bar{u} + \bar{u}A\bar{u}_x\big) = \int_0^T \int_0^L \big(\bar{u}_x A\bar{u} + \bar{u}_x\bar{u}_{xx}\big)$$
$$= 2\int_0^T \int_0^L \bar{u}_x\bar{u}_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^T \int_0^L \bar{u}_x^2. \tag{20}$$

Проинтегрируем (20) от 0 до x

$$\int_0^T \int_0^L \bar{u}A\bar{u}(x,y,t)dydt - \int_0^T \int_0^L \bar{u}A\bar{u}(0,y,t)dydt$$
$$= \int_0^T \int_0^L \bar{u}_x^2(x,y,t)dydt - \int_0^T \int_0^L \bar{u}_x^2(0,y,t)dydt$$
$$= \int_0^T \int_0^L \bar{u}_x^2(x,y,t)dydt - \int_0^T \int_0^L \bar{g}^2(y,t)dydt.$$

Откуда, принимая во внимание (7)–(9), получаем

$$\int_0^T\int_0^L \bar{u}A\bar{u}(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t = \int_0^T\int_0^L \bar{f}(y,t)(\bar{f}_{tt}-\bar{f}_{yy}-\alpha^2\bar{f})(y,t)$$
$$+\int_0^T\int_0^L \bar{u}_x^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t - \int_0^T\int_0^L \bar{g}^2(y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^L \big(\bar{f}\bar{f}_t(y,T)-\bar{f}\bar{f}_t(y,0)\big)\mathrm{d}y - \int_0^T\int_0^L \bar{f}_t^2(y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$
$$-\int_0^T \big(\bar{f}\bar{f}_y(L,t)-\bar{f}\bar{f}_y(0,t)\big)\mathrm{d}t + \int_0^T\int_0^L \bar{f}_y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t - \alpha^2\int_0^T\int_0^L \bar{f}^2(y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T\int_0^L \bar{u}_x^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t - \int_0^T\int_0^L \bar{g}^2(y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T\int_0^L \bar{u}_x^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t + \|\bar{f}_y\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))} - \|\bar{f}_t\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))}$$
$$-\alpha^2\|\bar{f}\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))} - \|\bar{g}\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))}.\square$$

Замечание 1. *Напомним, что для любой выпуклой функции $s(t)$ на $[0,T]$ имеет место неравенство*

$$s(t) \le \frac{t}{T}s(T) + \frac{T-t}{T}s(0). \tag{21}$$

Доказательство Теоремы 1.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \int_0^T\int_0^L \bar{u}^2(x,y,t)dydt \tag{22}$$

и продифференцируем ее дважды

$$\varphi'(x) = 2\int_0^T\int_0^L \bar{u}\bar{u}_x(x,y,t)dydt, \tag{23}$$

$$\varphi''(x) = 2\int_0^T\int_0^L (\bar{u}_x^2+\bar{u}A\bar{u})(x,y,t)dydt. \tag{24}$$

Из Леммы 2 получаем

$$\begin{aligned}\varphi''(x) =& 4\int_0^T\int_0^L \bar{u}_x^2(x,y,t)dydt + 2\|\bar{f}_y\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))} - 2\|\bar{f}_t\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))}\\ &- 2\alpha^2\|\bar{f}\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))} - 2\|\bar{g}\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))}.\end{aligned} \tag{25}$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned}a = \frac{1}{2}\|\bar{f}_y\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))} - \frac{1}{2}\|\bar{f}_t\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))}&\\ - \frac{\alpha^2}{2}\|\bar{f}\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))} - \frac{1}{2}\|\bar{g}\|^2_{L_2((0,L)\times(0,T))},&\end{aligned} \tag{26}$$

тогда

$$\varphi''(x) = 4\int_0^T\int_0^L \bar{u}_x^2(x,y,t)dydt + 4a. \tag{27}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \ln[\varphi(x) + |a|]. \tag{28}$$

Продифференцируем $\psi(x)$ дважды

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x) + |a|} \tag{29}$$

$$\psi''(x) = \frac{\varphi''(x)\big(\varphi(x) + |a|\big) - \varphi'(x)\varphi'(x)}{\big(\varphi(x) + |a|\big)^2}. \tag{30}$$

Из Леммы 3 (Лемма 3 и ее доказательство приводятся ниже (в точности как в книге [11]) имеем $\psi''(x)+4 \geq 0$. Следовательно функция $\psi(x)+2x^2$ выпукла на $[0,h]$. Теперь, используя свойство выпуклых функций из Замечания 1, получим

$$\psi(x) + 2x^2 \leq \frac{x}{h}(\psi(h) + 2h^2) + \frac{h-x}{h}\psi(0), \tag{31}$$

или с учетом (28)

$$[\varphi(x) + |a|]\mathrm{e}^{2x^2} \leq [\varphi(h) + |a|]^{\frac{x}{h}}\mathrm{e}^{2h^2\cdot\frac{x}{h}} \cdot [\varphi(0) + |a|]^{\frac{h-x}{h}}. \tag{32}$$

Таким образом, учитывая обозначения (22), (26), из (32) получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_0^L \bar{u}^2(x,y,t)dydt + \Big|\frac{1}{2}\|\bar{f}_y\|^2 - \frac{1}{2}\|\bar{f}_t\|^2 - \frac{\alpha^2}{2}\|\bar{f}\|^2 - \frac{1}{2}\|\bar{g}\|^2\Big| \\ &\quad\leq \Big(\int_0^T\int_0^L \bar{u}^2(h,y,t)dydt + \Big|\frac{1}{2}\|\bar{f}_y\|^2 - \frac{1}{2}\|\bar{f}_t\|^2 - \frac{\alpha^2}{2}\|\bar{f}\|^2 - \frac{1}{2}\|\bar{g}\|^2\Big|\Big)^{\frac{x}{h}} \\ &\quad\times \Big(\int_0^T\int_0^L \bar{u}^2(0,y,t)dydt + \Big|\frac{1}{2}\|\bar{f}_y\|^2 - \frac{1}{2}\|\bar{f}_t\|^2 - \frac{\alpha^2}{2}\|\bar{f}\|^2 - \frac{1}{2}\|\bar{g}\|^2\Big|\Big)^{\frac{h-x}{h}}\mathrm{e}^{2x(h-x)}. \end{aligned} \tag{33}$$

Учитывая (9),(10), из (33) имеем

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\|^2(x) &\leq \Big(\|\bar{q}\|^2 + \frac{1}{2}\Big|\|\bar{f}_y\|^2 - \|\bar{f}_t^2\| - \alpha^2\|\bar{f}\|^2 - \|\bar{g}\|^2\Big|\Big)^{\frac{x}{h}} \\ &\times \Big(\|\bar{f}\|^2 + \frac{1}{2}\Big|\|\bar{f}_y\|^2 - \|\bar{f}_t\|^2 - \alpha^2\|\bar{f}\|^2 - \|\bar{g}\|^2\Big|\Big)^{\frac{(h-x)}{h}}\mathrm{e}^{2x(h-x)} \\ &+ \frac{1}{2}\Big(\|\bar{f}_t\|^2 + \alpha^2\|\bar{f}\|^2 + \|\bar{g}\|^2 - \|\bar{f}_y\|^2\Big).\square \end{aligned} \tag{34}$$

Лемма 3.

$$\psi''(x) + 4 \geq 0. \tag{35}$$

Доказательство. Из (22), (23), (27), (30) имеем

$$\begin{aligned} \psi''(x) + 4 &= \frac{\varphi''(x)\big(\varphi(x) + |a|\big) - \varphi'(x)\varphi'(x)}{\big(\varphi(x) + |a|\big)^2} + 4 \\ &= \frac{4\big(\int_0^T\int_0^L \bar{u}_x^2(x,y,t)dydt + a\big)\big(\int_0^T\int_0^L \bar{u}^2(x,y,t)dydt + |a|\big)}{\big(\varphi(x) + |a|\big)^2} \\ &\quad - \frac{4\big(\int_0^T\int_0^L \bar{u}\bar{u}_x(x,y,t)dydt\big)^2 - 4\big(\int_0^T\int_0^L \bar{u}^2(x,y,t)dydt + |a|\big)^2}{\big(\varphi(x) + |a|\big)^2}. \end{aligned} \tag{36}$$

Так как знаменатель (36) положителен, рассмотрим только его числитель, деленный на 4

$$\int_0^T\int_0^L \bar{u}_x^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\cdot\int_0^T\int_0^L \bar{u}^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t+|a|\int_0^T\int_0^L \bar{u}_x^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$
$$+a\int_0^T\int_0^L \bar{u}^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t+a\cdot|a|-\big(\int_0^T\int_0^L \bar{u}\bar{u}_x(x,y,t)dydt\big)^2$$
$$+\big(\int_0^T\int_0^L \bar{u}^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\big)^2+2|a|\int_0^T\int_0^L \bar{u}^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t+|a|^2$$
$$=\int_0^T\int_0^L \bar{u}_x^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\cdot\int_0^T\int_0^L \bar{u}^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t-\big(\int_0^T\int_0^L \bar{u}\bar{u}_x(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\big)^2$$
$$+(2|a|+a)\int_0^T\int_0^L \bar{u}^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t+|a|\int_0^T\int_0^L \bar{u}_x^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t+|a|(|a|+a)$$
$$+\left(\int_0^T\int_0^L \bar{u}^2(x,y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^2\geq 0.\square \tag{37}$$

Будем решать обратную задачу (6)—(11) минимизируя целевой функционал

$$J(q)=\int\limits_0^T\int\limits_0^L \big(u(0,y,t)-f(y,t)\big)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

Для этого применим метод простой итерации

$$q_{n+1}=q_n-\alpha J'(q_n),$$

где α — параметр спуска, $J'(q_n)$ — градиент функционала.

Градиент функционала вычисляется через решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned}
&\psi_{xx}=Au, && (x,y)\in\Omega,\quad t\in(0,T),\\
&\psi(x,y,0)=\psi(x,y,T)=0, && x\in[0,h],\quad y\in[0,L],\\
&\psi(x,0,t)=\psi(x,L,t)=0, && x\in[0,h],\quad t\in[0,T],\\
&\psi_x(0,y,t)=2\big(u(0,y,t)-f(y,t)\big), && y\in[0,L],\quad t\in[0,T],\\
&\psi(h,y,t)=0, && y\in[0,L],\quad t\in[0,T]
\end{aligned}$$

по формуле

$$J'(q_n)(y,t)=\psi_x(h,y,t).$$

Верна следующая теорема

Теорема 2. *(оценка скорости сходимости по функционалу). Пусть задача (1)–(5) имеет точное решение $q_T\in H^2((0,L)\times(0,T))$. Тогда выполняется следующая оценка*

$$J(q_n)\leq\frac{M}{n},\qquad n=1,2,\dots$$

Теорема 3. *Пусть задача $Aq=f$ имеет точное решение $q_T\in L_2$. Тогда последовательность решений $\{u_n\}$ прямых задач (6)–(10) для соответствующей итерации q_n сходится к точному решению $u_T\in L_2$ задачи (1)–(5) и* *выполняется оценка* [9, 12]*:*

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^L (u_n(x,y,t) - u_T(x,y,t))^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t \leq M n^{\frac{x-h}{h}}, \qquad x \in (0,h). \tag{38}$$

Замечание 2. *Отметим, что нулевые граничные условия не являются существенным ограничением для всех полученных результатов. В самом деле, применяя преобразование Фурье по переменной y к* (6), (9), (11)*, получим систему прямых задач*

$$u_{xx}^{(k)} = u_{tt}^{(k)} + k^2 u^{(k)} - \alpha^2 u^{(k)}, \tag{39}$$

$$u^{(k)}(0,t) = f^{(k)}(t), \tag{40}$$

$$u_x^{(k)}(0,t) = g^{(k)}(t). \tag{41}$$

Каждую из этих задач можно решить с помощью формулы Даламбера в характеристическом треугольнике, тем самым можно доказать единственность решения задачи продолжения (39)—(41)*, а следовательно и задачи продолжения* (1)—(5) *(т.е. исходной задачи продолжения без начальных условий).*

References

[1] В.Д. Завьялов, *О применимости принципов голографии в сейсморазведке*, М.: ВИЭМС, 1969.

[2] D. Silverman, *Seismic holography – oil finding tool of the future?*, Ocean Ind., **5(1)** (1970), 40–53.

[3] J. Behrens, R. Bortfold, G. Commlish, K. Köhler, *Interpretation of discontinuities by seismic imaging*, Geophysis, **38(3)** (1972), 481–498.

[4] C.M. Hoover, *Acoustical holography using digital processing*, Geophysics, **37(1)** (1972), 1–19.

[5] С.А. Васильев, А.К. Урупов, *Новое в принципах и оценках применимости сейсмической голографии*, Уч. зап. Пермск. унив., **292** (1972), 12–19.

[6] Г.И. Петрашень, С.А. Нахамкин, *Продолжение волновых полей в задачах сейсморазведки*, Л.: Наука, 1973.

[7] М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, М.: Наука, 1980.

[8] В.Г. Романов, *Устойчивость в обратных задачах*, М.: Научный мир, 2005.

[9] С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов, А.Т. Нурсеитова, *Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы*, Международный фонд обратных задач, Новосибирск—Алматы, 2006.

[10] С.И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Сибирское научное издательство, 2008.

[11] М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев, *Теория операторов и некорректные задачи*, Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010.

[12] S.I. Kabanikhin, Y.S. Gasimov, D.B. Nurseitov, M.A. Shishlenin, B.B. Sholpanbaev, S. Kasenov, *Regularization of the continuation problem for elliptic equations*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **21(6)** (2013), 871–884.

[13] S.I. Kabanikhin, D.B. Nurseitov, M.A. Shishlenin, B.B. Sholpanbaev, *Inverse problems for the ground penetrating radar*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **21(6)** (2013), 885–892.

[14] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, D.B. Nurseitov, A.T. Nurseitova, S.E. Kasenov, *Comparative Analysis of Methods for Regularizing an Initial Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation*, Journal of Applied Mathematics, **2014** (2014), (http://dx.doi.org/10.1155/2014/786326).

Sergey Igorevich Kabanikhin
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

Nurseitova Altyn
National Open Research Laboratory of Information and Space Technologies KazNTU,
av. Satpaev, 22,
050013, Almaty, Kazakhstan
E-mail address: altynna@mail.ru

Maxim Alexandrovich Shishlenin
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug avenue,
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: mshishlenin@ngs.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. С.284–С.293 (2015) УДК 519.633.2

MSC 13A99

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПОРОУПРУГОСТИ

Х.Х. ИМОМНАЗАРОВ, А.С. БЕРДЫШЕВ, А.Э. ХОЛМУРОДОВ

Аннотация. We study the problem of determining the shear modulus that depends on strain rate (given the coefficients of permeability, porosity, densities of the elastic porous body and fluid) from one-dimensional dynamic system equations of proprogate by the speed of displacement of the elastic porous body on the free surface. A theorem of local solvability for classical solutions of the direct problem was proved. It was proved the Frechet differentiability of the operator of the direct problem. The conditional stability estimates of the inverse problem were obtained.

Keywords: porous media, hyperbolic system, the coefficient of friction.

Рассмотрим следующую одномерную начально-краевую задачу для нелинейной системы уравнений пороупругости

$$\rho_s u_{tt} = (\mu(u_x)u_x)_x - \rho_l^2\left((u-v)\,\chi(u-v)\right)_t\,, \quad x\in(0,\,L), \quad t\in(0,\,T), \tag{1}$$

$$\rho_l v_t = \rho_l^2\,(u-v)\,\chi(u-v), \quad x\in(0,\,L), \quad t\in(0,\,T), \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x\in(0,\,L), \tag{3}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad x\in(0,\,L), \tag{4}$$

$$\mu(u_x)\,u_x|_{x=L} = f(t), \quad t\in(0,\,T), \tag{5}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad t\in(0,\,T). \tag{6}$$

Здесь u и v скорости упругого пористого тела с постоянной парциальной плотностью $\rho_s = \rho_s^f(1-d_0)$ и жидкости с постоянной парциальной плотностью

Imomnazarov, Kh.Kh., Berdyshev, A.S., Holmuordov, A.E., An optimization method for solving the one dimensional proprogate inverse problem.

Работа поддержана грантом КН МОН РК (номер гранта 3328/ГФ4).

Поступила 15 октября 2015 г., опубликована 30 декабря 2015 г.

$\rho_l = \rho_l^f d_0$ соответственно, d_0 пористость, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, f : [0, T] \to R, \quad u_0 : [0, L] \to R, \quad u_1 : [0, L] \to R, \quad \rho_s^f$ и ρ_l^f физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно, $\mu(\nu)$ - трижды непрерывно-дифференцируемая положительная функция, $\chi(\nu)$ - дважды непрерывная положительная функция.

Нелинейное волновое уравнение вида (1) ($\chi \equiv 0$ в обратимом приближении) возникает во многих задачах. Например, в случае колебаний струны с упругим коэффициентом, зависящим от деформации. Во многих моделях механики пористых сред, учитывающих диссипацию энергии, коэффициент трения (проницаемость) является функцией разности скоростей [1, 2].

Далее нас интересует классическое решение начально-краевой задачи (1)-(6), т.е. $u \in C^{2,2}\left([0, L] \times [0, T]\right), v \in C^{0,1}\left([0, L] \times [0, T]\right)$, где $C^{k,m}\left([0, L] \times [0, T]\right)$ - пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций по переменной x и m раз непрерывно дифференцируемых функций по переменной t, $H^k([0, L] \times [0, T])$ $-$ пространство Соболева.

В данной работе, на основе оптимизационного подхода решается обратная задачи для одномерной динамической системы уравнений пористых сред.

1. Обратная задача

Требуется определить u, v, μ из (1)-(6) (при заданных χ , ρ_s, ρ_l) по дополнительной информации

$$\tilde{u} := u(L, \cdot).$$

Удобно ввести новые функции $\tilde{\mu}(s) = s\,\mu(s)$, $\tilde{\chi}(s) = s\,\chi(s)$. Для исследования свойств нашей модели рассмотрим оператор F, отображающий функцию $\tilde{\mu}$ на данную $\tilde{u} := u(L, \cdot)$ решения u для следующей начально-краевой задачи

$$\rho_s u_{tt} = \left(\tilde{\mu}(u_x)\right)_x - \rho_l^2 \left(\tilde{\chi}(u - v)\right)_t \,, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \tag{7}$$

$$v_t = \rho_l \tilde{\chi}(u - v), \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \tag{8}$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in (0, L), \tag{9}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad x \in (0, L), \tag{10}$$

и граничными условиями

$$\tilde{\mu}(u_x)|_{x=L} = f(t), \quad t \in (0, T), \tag{11}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad t \in (0, T). \tag{12}$$

Тогда функция $\tilde{\mu}$ находится из решения операторного уравнения

$$F(\tilde{\mu}) = \tilde{u}. \tag{13}$$

Производная оператора F по некоторому направлению $\delta\tilde{\mu}$ вычисляется следующим образом

$$F^{'}(\tilde{\mu})[\delta\tilde{\mu}] = \widehat{u}(L, \cdot), \tag{14}$$

где функции $\widehat{u}$, $\widehat{v}$ являются решением начально-краевой задачи

$$\rho_s \widehat{u}_{tt} = \left(\tilde{\mu}'(u_x)\,\widehat{u}_x\right)_x -$$

$$-\rho_l^2 \left(\tilde{\chi}'(u-v)(\widehat{u}-\widehat{v})\right)_t + (\delta\tilde{\mu}(u_x))_x \ , \quad x \in (0,\, L), \quad t \in (0,\, T), \quad (15)$$

$$\widehat{v}_t = \rho_l \tilde{\chi}'(u-v)(\widehat{u}-\widehat{v}), \quad x \in (0,\, L), \quad t \in (0,\, T), \qquad (16)$$

с начальными условиями

$$\widehat{u}\Big|_{t=0} = 0, \quad \widehat{u}_t\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0,\, L), \qquad (17)$$

$$\widehat{v}\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0,\, L), \qquad (18)$$

и граничными условиями

$$\tilde{\mu}'(u_x(L,t))\widehat{u}_x(L,t) + \delta\tilde{\mu}(u_x(L,t)) = 0, \quad t \in (0,\, T), \qquad (19)$$

$$\widehat{u}\ (0,t) = 0, \quad t \in (0,\, T). \qquad (20)$$

В формулах (15)-(20) функции u, v являются решением начально-краевой задачи (7)-(12).

Предположим, что выполнены следующие условия

$$u_0 \in C^3(0,\, L), \quad u_1 \in C^2(0,\, L), \quad f \in C^2(0,\, T), \qquad (21)$$

и условия согласования

$$\left(\tilde{\mu}^{-1} \circ f\right)(0) = u_0'(L), \quad \left(\tilde{\mu}^{-1} \circ f\right)'(0) = u_1'(L),$$

$$\rho_s \left(\tilde{\mu}^{-1} \circ f\right)''(0) = \left(\tilde{\mu}(u_0')\right)''(L) - \rho_l^2 \left[\left(u_1 - \rho_l\, \tilde{\chi}(u_0)\right) \tilde{\chi}'(u_0)\right]'(L), \qquad (22)$$

на правой границе, а также

$$u_0(0) = u_1(0) = u_0''(0) = u_1''(0) = 0 \qquad (23)$$

на левой границе.

Далее предположим, что функции $\tilde{\mu}$, $\tilde{\chi}$ принадлежат множеству

$$D(F) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mu},\, \tilde{\chi} \in X |\, \tilde{\mu}'(s) \geq \mu_0,\, \tilde{\mu}''(s) \leq C,\, \tilde{\chi}''(s) \leq C,\, \forall\, s \in [0,S], \\ \text{и выполнены условии}\,(22) \end{array} \right\}, \quad (24)$$

для некоторых положительных констант μ_0 , C. Далее через C будем обозначать положительную постоянную, большую, чем предыдущие C,

$$X = \left\{\tilde{\mu} \in C^3(0,S),\, \tilde{\chi} \in C^2(0,S) |\, \tilde{\mu}(0) = 0,\, \tilde{\chi}(0) = 0\right\}, \qquad (25)$$

где $S > 0$. Заметим, что в приложениях параметры среды часто являются строго монотонно возрастающими и гладкими функциями. Этим условиям удовлетворяют область определения $D(F)$ и пространство X, определенные выше формулами (24), (25) . Предположение гладкости параметров среды также важно для эффективного решения исходной начально-краевой задачи. Если $\tilde{\mu}$, $\tilde{\chi}$ достаточно гладкие, тогда для определения параметров среды можно применить методы Ньютоновского типа.

Предложение 1. Предположим, что T достаточно мало, S достаточно большое, выполнено условие (21) и $D(F)$ определена формулой (24).

Тогда, для любого $\tilde{\mu}, \tilde{\chi} \in D(F)$ существует единственное решение $u \in C^{3,2}([0,\, L]\times[0,\, T])$, $\quad v \in C^{0,1}([0,\, L]\times[0,\, T])$ задачи (7)-(12). Следовательно, оператор прямой задачи

$$F : D(F) \subseteq X \to C^2(0,\, T), \quad \tilde{\mu} \mapsto u(L,\, \cdot),$$

где u, v есть решение задачи (7)-(12), корректно определен. Более того, для

$$X' := X \cap C^4(0,\, s), \quad D'(F) := D(F) \cap C^4(0,\, s),$$
$$F : D'(F) \subseteq X' \to C^2(0,\, T)$$

является непрерывно дифференцируемым по Фреше и производные вычисляются по формулам (14)-(20).

Доказательство дано в параграфе 3.

2. Оценки условной устойчивости обратной задачи

Используя разные нормы в образах и прообразах пространств, получим устойчивое решение на интервале $[0,\, \bar{s}] \subseteq [0,\, S]$, параметр среды $s \mapsto \tilde{\mu}(s)$ определяется единственным образом по заданному измерению.

Разность $F(\breve{\mu}) - F(\tilde{\mu})$ можно записать как правостороннее значение для $\widehat{u}$, $\widehat{v}$ следующей начально-краевой задачи

$$\rho_s\, \widehat{u}_{tt} = \Big(a\, \widehat{u}_x + \phi\Big)_x - \rho_l^2 \Big(b\,(\widehat{u} - \widehat{v})\Big)_t\,, \quad x \in (0,\, L), \quad t \in (0,\, T), \tag{26}$$

$$\widehat{v}_t = \rho_l\, b\,(\widehat{u} - \widehat{v}), \quad x \in (0,\, L), \quad t \in (0,\, T), \tag{27}$$

с нулевыми начальными условиями и граничными условиями

$$a\, \widehat{u}_x + \phi\Big|_{x=L} = 0, \quad t \in (0,\, T), \tag{28}$$

$$\widehat{u}\Big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,\, T), \tag{29}$$

где

$$a(x,t) = \int\limits_0^1 \tilde{\mu}'(\breve{u}_x(x,t) + (u_x(x,t) - \breve{u}_x(x,t))\,\theta)d\theta,$$

$$b(x,t) = \int\limits_0^1 \tilde{\chi}'(\breve{u}_x(x,t) - \breve{v}_x(x,t) + (u_x(x,t) - v_x(x,t) - (\breve{u}_x(x,t) - \breve{v}_x(x,t))\,\theta)d\theta,$$

$$\phi(x,t) = \delta\tilde{\mu}(u_x(x,t)), \tag{30}$$
$$\delta\tilde{\mu} = \breve{\mu} - \tilde{\mu},$$

функции $\breve{u}$, $\breve{v}$ являются решением начально-краевой задачи (7)-(12) при $\tilde{\mu} = \breve{\mu}$, т.е.

$$F(\breve{\mu}) - F(\tilde{\mu}) = \hat{u}(L,\, \cdot). \tag{31}$$

Сначала рассмотрим начально-краевую задачу (26)-(29) в случае постоянных коэффициентов, т.е. $a(x,t) = \bar{a}, \quad b(x,t) = \bar{b}, \quad \bar{a}, \bar{b} \in R$. Следовательно, рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\rho_s\, \widehat{u}_{tt} = \bar{a}\, \widehat{u}_{xx} - \rho_l^2 \bar{b}\,(\widehat{u}_t - \widehat{v}_t) + \phi_x\,, \quad x \in (0,\, L), \quad t \in (0,\, T), \tag{32}$$

$$\widehat{v}_t = \rho_l\, \bar{b}\,(\widehat{u} - \widehat{v}), \quad x \in (0,\, L), \quad t \in (0,\, T), \tag{33}$$

с нулевыми начальными условиями

$$\widehat{u}\Big|_{t=0} = 0, \quad \widehat{u}_t\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0,\, L), \tag{34}$$

$$\widehat{v}\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0,\, L), \tag{35}$$

и граничными условиями

$$\bar{a}\ \widehat{u}_x + \phi\Big|_{x=L} = 0, \quad t \in (0,\, T), \tag{36}$$

$$\widehat{u}\Big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,\, T) \qquad . \tag{37}$$

Используя метод характеристик, начально-краевую задачу (32)-(37) сведем к уравнению Вольтерра первого рода для разности $\delta\tilde{\mu}$ между параметрами среды.

Предположение 2. Пусть функции $\hat{u}$, $\hat{v}$ решение начально-краевой задачи (32)-(37). Функция ϕ определена формулой (30) для $u \in C^{3,2}([0,\, L] \times [0,\, T])$, $\quad v \in C^{0,1}([0,\, L] \times [0,\, T])$, удовлетворяющей граничным условиям (11), (12) и начальным условиям (9), (10) с условием гладкости (21), $f(0) = 0$ и f – строго монотонно возрастающая функция, $u_0' \equiv 0$, $\tilde{\mu} \in D(F)$, и $\delta\tilde{\mu} \in C^2([0,\, S_1])$, для некоторой $S_1 > 0$ такое, что
$\{u_x(x,t) \,|\, (x,t) \in [0,\, L] \times [0,\, T]\} \subseteq [0,\, S_1]$. Кроме того, предположим, что

$$\left| \pm\sqrt{\frac{\bar{a}}{\rho_s}}\, u_{xx}(x,t) + u_{xt}(x,t) \right| \geq c_1 \qquad \forall\, (x,t) \in (0,\, L) \times (0,\, \bar{t}) \tag{38}$$

выполнено для некоторой $c_1 > 0, \quad 0 < \bar{t} \leq T$.

Тогда для

$$\bar{s} = \tilde{\mu}^{-1}(f(\bar{t})) > 0 \tag{39}$$

справедлива оценка l устойчивости [3]

$$\|\delta\tilde{\mu}\|_{L_2(0,\,\bar{s})} \leq C \left\{ \|\hat{u}(L,\, \cdot)\|_{H^1(0,\,\bar{t})} + \rho_l^3\, \|\hat{u}\|_{H^1((0,\bar{t})\times(0,\,\bar{t}))} \right\} \tag{40}$$

с некоторой постоянной $C > 0$.

Доказательство дано в параграфе 3.

Утверждение 3. Пусть выполнены условия Предложения 2 и

$$f(0) = 0, \quad f(t) \geq 0, \quad f'(t) \geq f_0 > 0 \quad \forall\, t \in [0,\, \bar{t}], \tag{41}$$

$$u_0'(x) = 0 \quad \forall\, x \in [0,\, L], \tag{42}$$

для некоторого f_0. Пусть $\tilde{\mu} \in D(F)$, и $u, \quad v$ - решения начально-краевой задачи (7)-(12).

Дополнительно предположим, что

$$\left| \left(\pm\sqrt{\frac{\tilde{\mu}'(u_x)}{\rho_s}}\, u_{xx} + u_{xt} \right) (x(t), t) \right| \geq c_1 \qquad \forall\, t \in [0,\, \bar{t}], \tag{43}$$

выполнено на некотором интервале $[0,\, \bar{t}] \subseteq [0,\, T]$,с некоторой $c_1 > 0$, для всех характеристических кривых $t \mapsto x(t)$ уравнения (7), и $\bar{t}$, L - достаточно малы.

Тогда функция $u(L,\ t), t \in [0,\, \bar{t}]$ единственным образом определяет $\tilde{\mu}$ на интервале $[0,\, \bar{s}]$, где

$$\bar{s} = \tilde{\mu}^{-1}(f(\bar{t})) > 0 \tag{44}$$

и справедлива оценка l устойчивости

$$\left\|\breve{\mu} - \tilde{\mu}\right\|_{L_2(0,\,\bar{s})} \leq C \left\{ \left\|F(\breve{\mu}) - F(\tilde{\mu})\right\|_{H^1(0,\,\bar{t})} + \rho_l^3\, \|\hat{u}\|_{H^1((0,\bar{t})\times(0,\,\bar{t}))} \right\} \tag{45}$$

с некоторой постоянной $C > 0$ для всех $\tilde{\mu} \in D(F) \cap B_r(\tilde{\mu})$, где $B_r(\tilde{\mu})$ шар достаточно малого радиуса r (в C^3 норме) с центром $\tilde{\mu}$.

Доказательства этой утверждение проводится также как в [4].

3. Доказательства предположений 1.

Введем функции $\breve{u} = u_x$, $\breve{v} = v_x$. Продифференцируем обе части системы (27), (28) по x относительно $\breve{u}$, $\breve{v}$ и получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\rho_s \breve{u}_{tt} = \Big(\tilde{\mu}'(\breve{u})\breve{u}_x\Big)_x - \rho_l^2 \tilde{\chi}'(u-v)\,\breve{u}_t \\ &-\rho_l^2 \left\{ [\tilde{\chi}'(u-v)]_t - \rho_l \, [\tilde{\chi}'(u-v)]^2 \right\} (\breve{u} - \breve{v}), \quad x \in (0,\, L), \quad t \in (0,\, T), \end{aligned} \tag{46}$$

$$\breve{v}_t = \rho_l \tilde{\chi}'(u-v)(\breve{u} - \breve{v}), \quad x \in (0,\, L), \quad t \in (0,\, T), \tag{47}$$

Предположим, что на левой границе задано однородное условие Неймана (см. замечание 1) и, используя условие (5), получим

$$\tilde{\mu}'(\breve{u})\,\breve{u}_x\Big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,\, T),$$

$$\tilde{\mu}(\breve{u})\Big|_{x=L} = f(t), \quad t \in (0,\, T),$$

или

$$\breve{u}_x\Big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,\, T), \tag{48}$$

$$\breve{u}\Big|_{x=L} = \tilde{\mu}^{-1}(f(t)), \quad t \in (0,\, T). \tag{49}$$

Начальные условия имеют вид

$$\breve{u}\Big|_{t=0} = u_{0x}(x), \quad \breve{u}_t'\Big|_{t=0} = u_{1x}(x), \quad x \in (0,\, L), \tag{50}$$

$$\breve{v}\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0,\, L). \tag{51}$$

Чтобы показать существование решения этой нелинейной начально-краевой задачи, приведем уравнение (46) к стандартному виду с помощью гладкого преобразования переменных [5], используя характеристические кривые $\frac{d\dot{x}(t)}{dt} = \pm\sqrt{\tilde{\mu}'(\widehat{u})(x(t),t)/\rho_s}$.

Введем в рассмотрение новую функцию [5]

$$\breve{u}(x,t) = U(\varphi(x,t) + \psi(x,t), \varphi(x,t) - \psi(x,t)), \tag{52}$$

где $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t)$ удовлетворяют системе

$$\varphi_t + \sqrt{\tilde{\mu}'(u_x)/\rho_s}\varphi_x = 0, \tag{53}$$

$$\psi_t - \sqrt{\tilde{\mu}'(u_x)/\rho_s}\psi_x = 0. \tag{54}$$

После простых преобразований система уравнений (46), (47) относительно $\breve{v}$, U примет вид

$$\breve{v}_t = \rho_l \tilde{\chi}'(u-v)(U - \widehat{v}), \tag{55}$$

$$U_{\zeta\zeta} - U_{\eta\eta} = \frac{1}{8}\left(\frac{\tilde{b}_x}{\tilde{b}} + \frac{\tilde{b}_t}{\tilde{b}\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\rho_l^2}{\rho_s}\frac{\chi_1}{\sqrt{\tilde{b}}} \right) \frac{1}{\psi_x}\,(U_\eta + U_\zeta) +$$

$$+\frac{1}{8}\left(\frac{\tilde{b}_x}{\tilde{b}}-\frac{\tilde{b}_t}{\tilde{b}\sqrt{\tilde{b}}}-\frac{\rho_l^2}{\rho_s}\frac{\chi_1}{\sqrt{\tilde{b}}}\right)\frac{1}{\varphi_x}\left(U_\eta-U_\zeta\right)+\frac{\rho_l^2}{\rho_s}\frac{\chi_2}{4\tilde{b}\varphi_x\psi_x}(U-\breve{v}). \tag{56}$$

где $\tilde{b}=\tilde{\mu}'(\breve{u})/\rho_s$, $\chi_1=\tilde{\chi}'(U-v)$, $\chi_2=\left[\tilde{\chi}'(u-v)\right]_t-\rho_l\left[\tilde{\chi}'(u-v)\right]^2$.

Чтобы показать, что это преобразование переменных является регулярным и из класса C^2 на достаточно малом интервале $(0,\bar{t})$, при условии $\widehat{u}\in C^2$, $\widehat{v}\in C^1$, рассмотрим детерминант матрицы Якоби

$$\det\begin{pmatrix}\varphi_x+\psi_x & \varphi_t+\psi_t\\ \varphi_x-\psi_x & \varphi_t-\psi_t\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\varphi_x+\psi_x & -\sqrt{\tilde{\mu}'(\breve{u})/\rho_s}(\varphi_x-\psi_x)\\ \varphi_x-\psi_x & -\sqrt{\tilde{\mu}'(\breve{u})/\rho_s}(\varphi_x+\psi_x)\end{pmatrix}=$$

$$=-4\sqrt{\tilde{\mu}'(\breve{u})/\rho_s}\varphi_x\,\psi_x. \tag{57}$$

Покажем, что детерминант матрицы Якоби отличен от нуля, т.е.

$$\psi_x\neq 0,$$
$$\varphi_x\neq 0.$$

Из характеристики обыкновенного дифференциального уравнения (54) для ψ

$$t_\tau(\tau,\xi)=1,\quad t(0,\xi)=\xi,$$

$$x_\tau(\tau,\xi)=-\sqrt{\tilde{\mu}'(\breve{u})(x(\tau,\xi),t(\tau,\xi)/\rho_s},\quad x(0,\xi)=0. \tag{58}$$

$$\psi_\tau(\tau,\xi)=0,\quad \psi(0,\xi)=\xi,$$

получим

$$t(\tau,\xi)=\tau+\xi,\quad \psi(\tau,\xi)=\xi, \tag{59}$$

для $\tau\geq 0,\ \xi=t(0,\xi)\geq 0$.

Дифференцируя второе соотношение системы (59), получим

$$1=\psi_\xi=\psi_x x_\xi+\psi_t t_\xi=\psi_x(x_\xi+\sqrt{\tilde{\mu}'(\breve{u})/\rho_s}). \tag{60}$$

Отсюда получим $\psi_x\neq 0$. Аналогично доказывается, что $\varphi_x\neq 0$. Следовательно, определитель матрицы Якоби отличен от нуля. С другой стороны, ограниченность $|\psi_x|$ выполняется до тех пор, пока

$$x_\xi(\tau,\xi)\neq-\sqrt{\tilde{\mu}'(\breve{u})(x(\tau,\xi),t(\tau,\tau+\xi)/\rho_s}.$$

Это справедливо для всех t, таких, что $\tau=t-\xi$ меньше, чем некоторое $\tilde{t}>0$, которое может зависеть только от $\left\|\breve{u}\right\|_{C^1}$.

Продифференцируем второе соотношение системы (58) по переменной ξ. Получим относительно x_ξ обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с нулевым данным Коши. Решая его и используя неравенство Гронуолла, получим

$$|x_\xi(\tau,\xi)|\leq e^{\frac{C\|u\|_{C^2}}{2\sqrt{c\rho_s}}}-1<\sqrt{c/\rho_s}\leq\sqrt{\tilde{\mu}'(\breve{u}(x(\tau,\xi),\tau+\xi))/\rho_s}, \tag{61}$$

которое справедливо для

$$\tau\leq\tilde{t}=\frac{2\sqrt{c\rho_s}\ln(\sqrt{c/\rho_s}+1)}{C\left\|\breve{u}\right\|_{C^1}}.$$

Аналогичным образом можно доказать ограниченность всех производных до второго порядка включительно от функции φ и ψ [4].

Согласно теореме об обратной функции, существование решения $\breve{u} \in C^{2,2}$, $\breve{v} \in C^{0,1}$ задачи (46)-(51) следует из существования решения $U \in C^{2,2}$, $\breve{v} \in C^{0,1}$ задачи (55), (56) с преобразованными начальными и граничными условиями. Для доказательства существования решения системы (55), (56) воспользуемся теоремой Банаха [6]. А именно, мы определим неподвижную точку оператора $M = (M_1,\ M_2)$, отображающего функции $u \in C^{2,2}$, $\breve{v} \in C^{0,1}$ в решения $M_1(U,\ \breve{v}) = Y$, $M_2(U,\ \breve{v}) = y$ из

$$Y_{\zeta\zeta} - Y_{\eta\eta} = \frac{1}{8}\left(\frac{\tilde{b}_x}{\tilde{b}} + \frac{\tilde{b}_t}{\tilde{b}\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\rho_l^2}{\rho_s}\frac{\chi_1}{\sqrt{\tilde{b}}}\right)\frac{1}{\psi_x}\left(U_\eta + U_\zeta\right)$$

$$+\frac{1}{8}\left(\frac{\tilde{b}_x}{\tilde{b}} - \frac{\tilde{b}_t}{\tilde{b}\sqrt{\tilde{b}}} - \frac{\rho_l^2}{\rho_s}\frac{\chi_1}{\sqrt{\tilde{b}}}\right)\frac{1}{\varphi_x}\left(U_\eta - U_\zeta\right) + \frac{\rho_l^2}{\rho_s}\frac{\chi_2}{4\tilde{b}\varphi_x\psi_x}(U - \breve{v}), \tag{62}$$

$$y_t = \rho_l\tilde{\chi}'(u-v)(U-\breve{v}), \tag{63}$$

с преобразованными начальными и граничными условиями. Заметим, что правые части зависят от U, $\widehat{v}$ не только линейно относительно $U_\eta + U_\zeta$, $U_\eta - U_\zeta$, но также нелинейно через $\tilde{b} = \tilde{\mu}'(\breve{u})/\rho_s$, $\chi_1 = \tilde{\chi}'(U-v)$ и φ, ψ. Оператор M является сжимающим для малых значений $\overline{t}$ $(0 < t \le \overline{t})$ в силу ограниченности правых частей (62), (63) по норме $\|U\|_{C^{2,2}}$, $\left\|\breve{v}\right\|_{C^{0,1}}$. Это подразумевает существование решения $u \in C^{3,2}$, $v \in C^{1,1}$ нелинейной начально-краевой задачи (1)-(6) и, следовательно, согласно

$$u(x,t) = \int\limits_0^x \breve{u}(\xi,t)d\xi,$$

$$v(x,t) = \int\limits_0^x \breve{v}(\xi,t)d\xi + \rho_l\int\limits_0^t \left[\tilde{\chi}(u-v)\right](0,\tau)d\tau,$$

существует решение $\breve{u} \in C^{2,2}$, $\breve{v} \in C^{0,1}$ начально-краевой задачи (46)-(51). Единственность доказывается стандартным образом [4, 7], применяя теоремы 4 из [5] для системы

$$\rho_s\,\hat{u}_{tt} = \left(\int\limits_0^1 \tilde{\mu}(u_x^2 + (u_x^1 - u_x^2)\,\theta)d\theta\,\widehat{u}_x\right)_x$$

$$-\rho_l^2\left(\int\limits_0^1 \tilde{\chi}(u^2 - v^2 + (u^1 - v^1 - u^2 + v^2)\theta)d\theta\right)_t,$$

$$\hat{v}_t = \rho_l\int\limits_0^1 \tilde{\chi}(u^2 - v^2 + (u^1 - v^1 - u^2 + v^2)\theta)d\theta,$$

с однородными начальными и граничными условиями для разностей решений u^1, v^1 и u^2, v^2.

Аналогичным образом можно показать непрерывную зависимость решения $u \in C^{2,2}$, $v \in C^{0,1}$ от параметра $\tilde{\mu} \in C^3$.

Чтобы доказать дифференцируемость по Фреше оператора прямой задачи F заметим, что $F(\tilde{\mu}+\delta\tilde{\mu}) = \bar{u}(L,\cdot)$, где функции $\bar{u}$, $\bar{v}$ решение начально-краевой задачи (1)-(6) с $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}+\delta\tilde{\mu}$, функции $w := \bar{u} - u - u$, $\omega := \bar{v} - v - v$ являются решением начально-краевой задачи

$$\rho_s w_{tt} = (\tilde{\mu}'(u_x)w_x)_x - \rho_l^2\tilde{\chi}'(u-v)w_t + G_x - \\ -\rho_l^2\left[[\tilde{\chi}'(u-v)]_t - \rho_l\left[\tilde{\chi}'(u-v)\right]^2\right](w-\omega)\,, \tag{64}$$

$$\omega_t = \rho_l\tilde{\chi}'(u-v)(w-\omega), \tag{65}$$

с нулевыми начальными и граничными условиями

$$\tilde{\mu}'(u_x)w_x|_{x=L} = G(L,t), \tag{66}$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,T), \tag{67}$$

где

$$G = \tilde{\mu}(\bar{u}_x) - \tilde{\mu}(u_x) - \tilde{\mu}'(u_x)(\bar{u}_x - u_x) + \delta\tilde{\mu}(\bar{u}_x) - \delta\tilde{\mu}(u_x).$$

Следовательно, применяя характеристические преобразования из класса C^2 , известные результаты для волнового уравнения и неравенство Гронуолла, получим, что норму $\|w\|_{C^2}$ можно оценить через $\|\delta\mu\|_{C^3}$ [3]. Это означает непрерывность оператора F.

Аналогичным образом доказывается непрерывность производных по Фреше оператора F. Предположения 1 доказаны.

References

[1] В.Н. Доровский, Ю.В. Перепечко, Е.И. Роменский *Волновые прцессы в насыщенных пористых упругодеформирунмых средах*, ФГВ. № 1. С. 100-111, 1993.

[2] A.M. Blokhin, V.N. Dorovsky *Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum* Nova Science Publishers Inc, New York. 1995.

[3] А.Л. Бухгейм *Уравнения Вольтерра и обратные задачи* Новосибирск: Наука, 1984.

[4] B. Kaltenbacher *Identification of Nonlinear Coefficients in Hyperbolic PDEs, with Application to Piezoelectricity* K. Kunisch, G. Leugering, J. Sprekels, F. Troltzsch, eds., Optimal Control of Coupled Systems of PDEs. Springer, **155**, pp.193-216, 2006.

[5] L.C. Evans *Partial Differential Equations*, AMS, 1998.

[6] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин *Элементы теории функций и функционального анализа* М.: Наука, 1968.

[7] Kh.Kh. Imomnazarov, Sh.Kh. Imomnazarov, P.V. Korobov, A.E. Kholmuradov *About one inverse initial-boundary value problem for nonlinear one-dimensional poroelasticity equations*, Bull. Of the Novosibirsk Computing Center, series: Mathematical Modeling in Geophysics, Novosibirsk, № 18, pp.1-8, 2015.

Kholmatzhon Hudainazarovich Imomnazarov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
prospect Akademika Lavrentjeva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: imom@omzg.sscc.ru

Abdumauvlen Suleimanovich Berdyshev
Kazakh National Pedagogical University named after Abai,
pr. Dostyk, 13,
050010, Almaty, Kazakhstan
E-mail address: berdyshev@mail.ru

Abdulhamid Erkinovich Holmuordov
Karshi State University,
Kuchabag str., 17,
180103, Karshi, Uzbekistan
E-mail address: abish@mail.ru