S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

*Том 12, стр. 1–6 (2015)* УДК 512.552.4
MSC 16R40

# ПОЧТИ ЛИЕВО РАЗРЕШИМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР КОНЕЧНОГО БАЗИСНОГО РАНГА

О.Б. ФИНОГЕНОВА

Abstract. For arbitrary elements $x_1,\ x_2,\dots$ from an algebra we put $V_1(x_1,x_2)=[x_1,x_2]$ where $[x_1,x_2]=x_1x_2-x_2x_1$ and define inductively

$$V_n(x_1,\dots,x_{2^n})=[V_{n-1}(x_1,\dots x_{2^{n-1}}),V_{n-1}(x_{2^{n-1}+1},\dots x_{2^n})].$$

An algebra or a variety of algebras is called *Lie solvable* if it satisfies the identity $V_n(x_1,\dots,x_{2^n})=0$ for some $n$. Let $F$ be an associative commutative noetherian ring with 1. In the set of varieties of associative $F$-algebras we find all almost Lie solvable varieties of finite base rank.

**Keywords:** varieties of associative algebras, Lie solvable algebras, PI-algebras.

## 1. Введение

В работе рассматриваются ассоциативные алгебры над ассоциативно-коммутативным кольцом $F$. Мы считаем, что $F$ содержит единицу, действующую на элементы алгебры как тождественный оператор.

Будем обозначать через $M_n(U)$ алгебру всех матриц порядка $n\times n$ над алгеброй $U$, а через . $\mathsf{var}\,U$ — многообразие, порожденное алгеброй $U$. Как обычно, $[x,y]$ — это коммутатор элементов $x$ и $y$, равный $xy-yx$.

Finogenova, O.B., Almost Lie solvable associative algebra varieties of finite base rank.



Работа выполнена в рамках реализации базовой части госзадания на выполнение НИР (проект №2248 Министерства образования и науки РФ), поддержана грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-5161.2014.1) и грантом РФФИ №14-01-00524.

*Поступила 6 декабря 2014 г., опубликована 21 января 2015 г.*

Положим, $V_1(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$, и

$$V_n(\bar{x}) = V_n(x_1, \ldots, x_{2^n}) = [V_{n-1}(x_1, \ldots x_{2^{n-1}}), V_{n-1}(x_{2^{n-1}+1}, \ldots x_{2^n})].$$

Многообразие или кольцо называется *лиево разрешимым*, если оно при некотором натуральном $n$ удовлетворяет тождеству $V_n(\bar{x}) = 0$.

Для многообразия алгебр над полем нулевой характеристики лиева разрешимость эквивалентна нематричности многообразия, то есть отсутствию в нем полных матричных алгебр второго порядка над основным полем ([1]). В этом случае единственным *почти лиево разрешимым* многообразием, т.е. минимальным по включению элементом во множестве не разрешимых многообразий, является многообразие, порожденное $M_2(F)$. Нетрудно показать с помощью леммы Цорна, что каждое не лиево разрешимое многообразие содержит в качестве подмногообразия некоторое почти лиево разрешимое многообразие. Таким образом, отсутствие указанных почти разрешимых подмногообразий эквивалентно лиевой разрешимости. Отметим, что почти $\theta$-многообразия изучались для многих свойств $\theta$. Подробнее указанная тематика рассматривается в обзоре [2].

В данной работе мы описываем почти лиево разрешимые многообразия конечного базисного ранга. Напомним, что многообразие имеет *конечный базисный ранг*, если может быть порождено конечнопорожденной алгеброй, и *бесконечный* — в противном случае.

**Теорема 1.** *Пусть $F$ — нетерово кольцо с единицей. Многообразие $F$-алгебр является почти лиево разрешимым многообразием конечного базисного ранга тогда и только тогда, когда оно порождено либо алгеброй $M_2(K)$, где $K$ — конечное поле нечетной характеристики или поле характеристики 0, либо алгеброй $M_3(K)$, где $K$ — конечное поле характеристики 2, причем в обоих случаях $K$ — гомоморфный образ кольца $F$.*

Уточним результат для двух частных случаев.

**Следствие 1.** *Любое почти лиево разрешимое многообразие алгебр над бесконечным полем положительной характеристики имеет бесконечный базисный ранг.*

Отметим, что случай алгебр над конечным полем выглядит более похожим на ситуацию в поле нулевой характеристики.

**Следствие 2.** *Пусть $F$ — конечное поле характеристики $p$. Единственное почти лиево разрешимое многообразие $F$-алгебр, имеющее конечный базисный ранг, порождается алгеброй $M_2(F)$, если $p > 2$, и алгеброй $M_3(F)$, если $p = 2$.*

## 2. Доказательство теоремы 1

Нам понадобится два вспомогательных утверждения.

**Лемма 1.** *Пусть $A$ — коммутативная алгебра над полем характеристики $p \geq 0$.*

(1) *Если $p \neq 2$, алгебра $M_2(A)$ удовлетворяет тождеству $V_n(\bar{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $A^{2^n} = 0$.*
(2) *Если $p = 2$, алгебра $M_3(A)$ удовлетворяет тождеству $V_n(\bar{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $A^{2^n} = 0$.*

(3) *Если $p = 2$, алгебра $M_2(A)$ удовлетворяет тождеству*

$$[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], x_5] = 0.$$

*Доказательство.* Для любой алгебры $H$ обозначим через $V_n(H)$ — множество всех значений многочлена $V_n(\bar{x})$ на этой алгебре, а через $xe_{ij}$ матрицу, у которой на пересечении $i$ строки и $j$ столбца стоит элемент $x$, и все остальные элементы нулевые.

(1) Для любого $x \in A$ будем писать $x\rho_1 = xe_{11} - xe_{22}$, $x\rho_2 = xe_{12}$, $x\rho_3 = xe_{21}$. Если $B \subseteq A$, положим

$$B\rho_i = \{b\rho_i \mid b \in B\} \tag{1}$$

Легко проверить, что в $M_2(A)$ выполняются равенства:

$$[a\rho_1, b\rho_2] = 2ab\rho_2;$$
$$[a\rho_3, b\rho_1] = 2ab\rho_3;$$
$$[a\rho_2, b\rho_3] = ab\rho_1.$$

Следовательно, для любого $n$ верно включение

$$A^{2^n}\rho_1 \cup A^{2^n}\rho_2 \cup A^{2^n}\rho_3 \subseteq V_n(M_2(A)). \tag{2}$$

Если алгебра $M_2(A)$ удовлетворяет тождеству $V_n(\bar{x}) = 0$, то $V_n(M_2(A)) = 0$, и значит, $A^{2^n} = 0$. Обратное утверждение очевидно.

Для доказательства (2) положим, $x\rho_1 = xe_{11} + xe_{22}$, $x\rho_2 = xe_{23} + xe_{31}$, $x\rho_3 = xe_{13} + xe_{32}$ и для любого подмножества $B$ в $A$ будем использовать обозначение (1). Легко проверить, что в $M_3(A)$ выполняются равенства:

$$[a\rho_1, b\rho_2] = ab\rho_2;$$
$$[a\rho_1, b\rho_3] = ab\rho_3;$$
$$[a\rho_2, b\rho_3] = ab\rho_1.$$

Следовательно, в $A$ выполняется включения (2). Если алгебра $M_3(A)$ удовлетворяет тождеству $V_n(\bar{x}) = 0$, то $A^{2^n} = 0$. Обратное утверждение очевидно.

(3) Тождество $[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], x_5] = 0$ в случае характеристики 2 можно превратить в тождество Холла $[[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_3, x_4][x_1, x_2], x_5] = 0$, которое выполняется во всех алгебрах матриц второго порядка над произвольным полем. Нетрудно показать, что тогда этому тождеству удовлетворяет алгебра матриц второго порядка над любой коммутативной алгеброй над полем. □

Следующий результат хорошо известен и является фольклорным, тем не менее, мы приведем его доказательство для удобства читателя.

**Лемма 2.** *Пусть в многообразии $F$-алгебр $\mathcal{M}$ выполняется тождество, один из коэффициентов которого равен 1. Тогда идеал тождеств произвольной примитивной алгебры из $\mathcal{M}$ совпадает с идеалом тождеств полной матричной алгебры некоторого порядка над коммутативной $F$-алгеброй с делением.*

*Доказательство.* Пусть $P$ — примитивная алгебра из $\mathcal{M}$. По теореме Капланского-Амицура (см., например, [3], с.17-18) $P$ есть простая конечномерная алгебра над своим центром $C$, являющимся $F$-алгеброй с делением. Известно (см., например, [4], Предложение, стр. 497), что идеал тождеств такой центральной алгебры совпадает с идеалом тождеств $C$-алгебры $M_k(C)$ для подходящего натурального $k$. Очевидно, некоторое ненулевое фактор-кольцо $\bar{F}$ кольца $F$ вкладывается в $C$. Следовательно, любую $C$-алгебру можно считать $\bar{F}$-алгеброй, а значит, и $F$-алгеброй. Осталось заметить, что идеал тождеств $P$ как $\bar{F}$-алгебры совпадает с идеалом тождеств $\bar{F}$-алгебры $M_k(C)$. □

Теперь мы готовы доказать теорему 1.

*Доказательство.* **Необходимость**. Пусть $\mathcal{M}$ — почти лиево разрешимое многообразие. Докажем сначала, что в нем есть тождество, один из коэффициентов которого равен 1. Предположим, что это неверно. Обозначим через $I$ множество, состоящее из всех коэффициентов всех тождеств многообразия $\mathcal{M}$. Согласно нашему предположению, $1 \notin I$. Нетрудно убедиться, что $I$ является нетривиальным идеалом в кольце $F$.

Предположим, что для некоторого $\alpha \in I$ равенство $\alpha x = 0$ не является тождеством $\mathcal{M}$. Следовательно, идеал тождеств, порожденный $\alpha x = 0$ и всеми тождествами $\mathcal{M}$, задает собственное подмногообразие в $\mathcal{M}$. Многообразие $\mathcal{M}$ является минимальным элементом во множестве лиево не разрешимых многообразий, поэтому любое его собственное подмногообразие является лиево разрешимым. Следовательно, $\mathcal{M}$ удовлетворяет тождеству вида $V_s(\bar{x})+\alpha f(\bar{t}) = 0$. Это означает, что в $I$ есть элемент вида $1+\alpha\beta$ при некотором $\beta \in F$, и поэтому, $1 \in I$. Противоречие показывает, что для любого $\alpha \in I$ в многообразии $\mathcal{M}$ выполняется тождество $\alpha x = 0$. Следовательно, в многообразии $\mathcal{M}$ лежат все $F/I$-алгебры. Это невозможно, так как все собственные подмноообразия в $\mathcal{M}$ должны быть лиево разрешимыми. Противоречие показывает, что $1 \in I$.

По лемме 2 каждая примитивная алгебра из $\mathcal{M}$ порождает подмногообразие вида $\mathsf{var}\, M_n(G)$, где $G$ — некоторое поле, являющееся $F$-алгеброй. Предположим сначала, что для некоторой такой алгебры $n \geq 2$, и характеристика соответствующего поля $G$ не равна двум. По лемме 1 (1) алгебра $M_2(G)$ не является лиево разрешимой, следовательно, $\mathcal{M} = \mathsf{var}\, M_2(G)$. Аналогично, если для некоторого поля $G$ характеристики 2 верно включение $M_3(G) \in \mathcal{M}$, то по лемме 1 (2) имеем $\mathcal{M} = \mathsf{var}\, M_3(G)$. Докажем, что ни в том, ни в другом случае поле $G$ не может быть бесконечным положительной характеристики. Предположим противное: $G$ — бесконечное поле характеристики $p > 0$. Рассмотрим алгебру $A$, порожденную счетным числом элементов $a_i$, с определяющими отношениями $a_i a_j = a_j a_i$, $a_i^2 = 0$ ( $i, j = 1, 2, \dots$ ). Очевидно, $A$ коммутативна, ненильпотентна и удовлетворяет тождеству $x^p = 0$. Нетрудно проверить также, что $M_s(A) \in \mathsf{var}\, M_s(G)$ для любого $s$. Кроме того, в $M_s(A)$ выполняется тождество $x^{(p-1)s^2+1} = 0$. Это означает, что $M_s(A)$ порождает собственное подмногообразие в $\mathsf{var}\, M_s(G)$. Осталось заметить, что по лемме 1 и алгебра $M_2(A)$ при $p > 2$, и алгебра $M_3(A)$ при $p = 2$ не являются лиево разрешимыми. Противоречие с тем, что в $\mathcal{M}$ все собственные подмногообразия лиево разрешимы. Итак, в этом случае $\mathcal{M} = \mathsf{var}\, M_2(G)$, и $G$ — конечное поле нечетной характеристики или поле характеристики 0, или $\mathcal{M} = \mathsf{var}\, M_3(G)$, и $G$ — конечное поле характеристики 2. Остается заметить, что поскольку поле $G$ является $F$-алгеброй, оно содержит подполе $K$, являющееся ненулевым гомоморфным образом кольца $F$. По лемме 1 алгебры $M_2(K)$ при $charG \neq 2$ и $M_3(K)$ при $charG = 2$ не являются лиево разрешимыми, следовательно, каждая из них, в зависимости от случая, порождает $\mathcal{M}$.

Предположим теперь, что любая примитивная алгебра из $\mathcal{M}$ либо коммутативна, либо порождает подмногообразие вида $\mathsf{var}\, M_2(G)$, где $G$ — некоторое поле характеристики 2. По лемме 1 (3) каждая из них удовлетворяет тождеству $[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], x_5] = 0$, а значит, и тождеству $V_3(\bar{x}) = 0$. Пусть $B$ — конечнопорожденная $F$-алгебра, порождающая $\mathcal{M}$, а $J(B)$ — радикал Джекобсона алгебры $B$. Полупростая алгебра $B/J(B)$ является подпрямым произведением примитивных алгебр, поэтому $V_3(B) \subseteq J(B)$. По теореме Размыслова-Брауна-Кемера (см., например, [5]) $J(B)^m = 0$ для некоторого натурального $m$. Следовательно, $V_{m+3}(\bar{x}) = 0$ — тождество $B$. Противоречие показывает, что этот случай невозможен. Необходимость доказана.

Докажем **достаточность**. Пусть многообразие $\mathcal{M}$ порождено алгеброй $M_2(K)$, и $K$ — конечное поле или поле характеристики 0, или алгеброй $\mathsf{var}\, M_3(K)$, и $K$ — конечное поле характеристики 2, причем в обоих случаях $K$ — гомоморфный образ кольца $F$. Нам надо продемонстрировать, что каждое собственное подмногообразие в $\mathcal{M}$ является лиево разрешимым. В случае поля нулевой характеристики этот факт доказан А.Р.Кемером ([1]). Пусть $K$ — конечное поле, являющееся гомоморфным образом кольца $F$. Ясно, что все $F$-алгебры из $\mathcal{M}$ можно считать $K$-алгебрами. Заметим, что $\mathcal{M}$ порождено конечной $K$-алгеброй, поэтому все его подмногообразия также порождены конечными алгебрами (см. [6]). Следовательно, все подмногообразия имеют конечный базисный ранг. Если бы какое-то собственное подмногообразие в $\mathcal{M}$ не являлось лиево разрешимым, то $\mathcal{M}$ содержало бы собственное почти лиево разрешимое подмногообразие конечного базисного ранга, что невозможно благодаря уже установленному необходимому условию данной теоремы. $\square$

В заключении сформулируем утверждение, доказательство которого непосредственно вытекает из работ [7] и [8].

**Предложение 1.** *Если $F$ — бесконечное поле характеристики, большей 3, то многообразие $\mathsf{var}\, M_2(F)$ содержит ровно одно почти лиево разрешимое многообразие $F$-алгебр.*

Описание этого многообразия можно найти в статье [7]. Оно известно также, как построенный Ю.П.Размысловым пример $(p-1)$-энгелева многообразия, не являющегося лиево нильпотентным ([9]).

## Список литературы


[1] А.Р. Кемер, *Нематричные многообразия*, Алгебра и логика, **19**:3 (1980), 255–283. MR0609015

[2] O. Finogenova, *Characterizing non-matrix properties of varieties of algebras in the language of forbidden objects*, Serdica Math. J. **38** (2012), 473–496. MR3014509

[3] N. Jacobson, *PI-algebras*, Springer, Berlin, 1975. MR0369421

[4] Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры*, Мир, Москва, 1986. MR0890331

[5] И. В. Львов, *Теорема Брауна о радикале конечнопорожденной PI-алгебры*, препринт N63, Новосибирск, 1984

[6] И. В. Львов, *О многообразиях ассоциативных колец.I*, Алгебра и логика, **12** (1973), 3, 269–297. MR0389973

[7] A. R. Kemer, *Remarks on the prime varieties*, Israel J. Math. **96** (1996), 341–356. MR1433694

[8] A. R. Kemer, *Multilinear components of the prime subvarieties of the variety $VarM_2(F)$*, Algebras and Representation Theory **4** (2001), 87–104. MR1825809

[9] Ю.П. Размыслов, *Тождества алгебр и их представлений*, Наука, Москва, 1989. MR1007304

Ольга Борисовна Финогенова
Уральский федеральный университет,
пр. Ленина, 51,
620083, Екатеринбург, Россия
*E-mail address*: olgafinogenova@gmail.com