S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 1032–1038 (2015) УДК 512.542
DOI 10.17377/semi.2015.12.088 MSC 20D99

ПРОНОРМАЛЬНОСТЬ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП В ПОЧТИ ПРОСТЫХ ГРУППАХ

М.Н. НЕСТЕРОВ

Abstract. We prove that the Hall subgroups of almost simple groups are pronormal.

Keywords: Hall subgroup, pronormal subgroup, almost simple group, symplectic group.

Введение

Термин «группа» употребляется нами в значении «конечная группа».

Всюду через π обозначается некоторое фиксированное множество простых чисел, а через π' — дополнение к нему в множестве всех простых чисел.

Подгруппа H группы G называется *π-холловой*, если она является π-группой (т. е. все простые делители ее порядка лежат в π), а её индекс не делится на числа из π. Понятие π-холловой подгруппы обобщает понятие силовской p-подгруппы и совпадает с ним, если $\pi = \{p\}$. Множество π-холловых подгрупп группы G будем обозначать символом $\mathrm{Hall}_\pi(G)$. Подгруппу, которая является π-холловой для некоторого множества π, будем называть просто *холловой*, т. е. подгруппа H группы G называется холловой, если $(|H|, |G:H|) = 1$.

Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g\rangle$. Классическими примерами пронормальных подгрупп являются

- нормальные подгруппы,
- максимальные подгруппы,
- силовские подгруппы,

Nesterov, M.N., Pronormality of hall subgroups in almost simple groups.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00065).

Поступила 29 мая 2015 г., опубликована 28 декабря 2015 г.

- холловы подгруппы разрешимых групп.

Однако в неразрешимой группе может существовать более одного класса сопряженных π-холловых подгрупп. Как следствие холловы подгруппы могут оказаться непронормальными. Например в группе $X = \mathrm{GL}_3(2)$ порядка $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ стабилизатор H прямой и стабилизатор K плоскости в естественном модуле являются несопряженными $\{2,3\}$-холловыми подгруппами. Рассмотрим регулярное сплетение $G = X \wr \mathbb{Z}_5$ с базой $Y = X \times X \times X \times X \times X$. Подгруппа $K \times H \times H \times H \times H$ из базы сплетения является $\{2,3\}$-холловой подгруппой в G и непронормальна в G.

В [1, теорема 1] доказано, что в любой простой группе холловы подгруппы пронормальны.

Группа называется *почти простой*, если её цоколь — неабелева простая группа. Другими словами, группа почти проста, если она изоморфна группе G такой, что

$$S \simeq \mathrm{Inn}(S) \leq G \leq \mathrm{Aut}(S)$$

для некоторой неабелевой простой группы S. Основным результатом данной работы является следующее обобщение упомянутого результата [1, теорема 1]

Теорема 1. *В любой почти простой группе холловы подгруппы пронормальны.*

1. Предварительные сведения и результаты

Используемые обозначения стандартны и могут быть найдены в [3, 4, 5]:
$\pi(n)$ — множество простых делителей числа n;
$\pi(G)$ — множество простых делителей порядка группы G;
A^B — множество $\{A^b \mid b \in B\}$ для $A \subseteq G$ и $B \subseteq G$;
$\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов;
если S является нормальной подгруппой группы G, то число классов сопряженности в S подгрупп вида $H \cap S$, где $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ будем обозначать через $k_\pi^G(S)$, а сами π-холловы подгруппы вида $H \cap S$ называть *G-индуцированными π-холловами подгруппами группы S*;
в случае, когда группа G действует на множестве Ω, образ элемента $i \in \Omega$ под действием элемента $g \in G$ будем записывать как i^g;
тот факт, что подгруппа H группы G пронормальна будем записывать: $H \,\mathrm{prn}\, G$.

Лемма 1. *Пусть A — нормальная и H — π-холлова подгруппы группы G. Тогда $H \cap A \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$, $HA/A \in \mathrm{Hall}_\pi(G/A)$.*

Доказательство. См. лемму 1 из [6]. □

Лемма 2. *Пусть A — нормальная и H — π-холлова подгруппы группы G. Обозначим через X множество $(A \cap H)^A$, т. е. класс подгрупп, сопряжённых в A с $A \cap H$. Пусть Ω — орбита множества X относительно действия группы G сопряжениями, т. е. $\Omega = \{X^g \mid g \in G\}$. Тогда $|\Omega|$ является π'-числом.*

Доказательство. Поскольку подгруппа $A \cap H$ нормальна в группе H, для любого элемента $h \in H$ выполняется

$$((A \cap H)^A)^h = (A \cap H)^{Ah} = (A \cap H)^{hA} = ((A \cap H)^h)^A = (A \cap H)^A.$$

Таким образом подгруппа H лежит в стабилизаторе точки X, следовательно индекс стабилизатора является π'-числом. Ввиду транзитивности действия G

на Ω, число элементов Ω равняется индексу стабилизатора точки, т. е. является π'-числом. $\square$

Наряду с [1, теорема 1] нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 3 ([7], теорема 1.1)**.** *Пусть G — почти простая группа с неабелевым цоколем S. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $2 \notin \pi$, то $k_\pi^G(S) \in \{0, 1\}$;*
(2) *если $3 \notin \pi$, то $k_\pi^G(S) \in \{0, 1, 2\}$;*
(3) *если $2, 3 \in \pi$, то $k_\pi^G(S) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 9\}$.*

Лемма 4. *Пусть G — почти простая группа с неабелевым цоколем S. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *$k_\pi^G(S) \leq 4$;*
(2) *$2, 3 \in \pi$ и $S \simeq \mathrm{PSp}_{2n}(q)$, q является степенью простого числа $p \notin \pi$.*

Доказательство. Следует из [7, лемма 8.1] и леммы 3. $\square$

Группа, обладающая (суб)нормальным рядом, все факторы которого являются π- или π'-группами, называется *π-разделимой*.

Обозначим через D_π класс групп, у которых выполняется полный аналог теоремы Силова для π-подгрупп, т.е. в которых существуют π-холловы подгруппы, все они сопряжены и любая π-подгруппа содержится в некоторой π-холловой подгруппе.

Лемма 5 ([2], лемма 6)**.** *Всякая π-разделимая группа обладает свойством D_π.*

Из леммы 5 вытекает

Лемма 6. *Пусть H и K — π-холловы подгруппы некоторой группы G. Предположим, что для некоторой нормальной подгруппы A группы G справедливы следующие утверждения*:

(1) *$HA = KA$;*
(2) *$H \cap A$ и $K \cap A$ сопряжены в A.*

Тогда H и K сопряжены в HA.

Доказательство. Обозначим подгруппу HA через G_0. Ввиду условия (2) найдётся элемент $a \in A$ такой, что $H \cap A = K^a \cap A$. Ввиду того, что $K^a A = KA = G_0$, можно считать, что $K = K^a$ и, в частности, $K \cap A = K^a \cap A = H \cap A$. Теперь H и K содержатся в $N_{G_0}(H \cap A)$. Так как $G_0 = HA$, имеем $G_0 = AN_{G_0}(H \cap A)$. Заметим, что группа

$$N_{G_0}(H \cap A)/N_A(H \cap A) \simeq AN_{G_0}(H \cap A)/A = G_0/A$$

является π-группой. Рассмотрим нормальный ряд

$$N_{G_0}(H \cap A) \trianglerighteq N_A(H \cap A) \trianglerighteq H \cap A \trianglerighteq 1$$

группы $N_{G_0}(H \cap A)$. Каждый его фактор является π- или π'-группой, поэтому группа $N_{G_0}(H \cap A)$ является π-разделимой. По лемме 5 имеем $N_{G_0}(H \cap A) \in D_\pi$. Таким образом, подгруппы H и K сопряжены в $N_{G_0}(H \cap A)$ и, в частности, в G. $\square$

Из леммы 6 вытекает

Лемма 7. *Пусть H — холлова подгруппа некоторой группы G. Предположим, что для некоторой нормальной подгруппы A группы G справедливы следующие утверждения:*

(1) $H \cap A \operatorname{prn} A$;
(2) $HA/A \operatorname{prn} G/A$;
(3) $(H \cap A)^A = (H \cap A)^G$.

Тогда H пронормальна в G.

Доказательство. Пусть $g \in G$. Покажем, что подгруппы H и H^g сопряжены в $G_0 = \langle H, H^g \rangle$. Обозначим $G_0 \cap A$ через A_0. Очевидно, $H \cap A = H \cap A_0$ и $H^g \cap A = H^g \cap A_0$. В силу утверждения (2) найдётся элемент $x \in G_0A$ такой, что $H^xA/A = H^gA/A$. Поскольку группы G_0A/A и G_0/A_0 канонически изоморфны и элемент $Ax \in G_0A/A$ сопрягает HA/A и H^gA/A, получаем, что его образ A_0x относительно естественного изоморфизма $G_0A/A \to G_0/A_0$ сопрягает HA_0/A_0 и H^gA_0/A_0. Не теряя общности, можно считать, что $HA_0/A_0 = H^gA_0/A_0$ и, следовательно $HA_0 = H^gA_0$.

В силу утверждения (3) справедливо равенство $H^g \cap A = H^a \cap A$, для некоторого $a \in A$. Из утверждения (1) вытекает $H^g \cap A = H^a \cap A = H^y \cap A$, для некоторого $y \in \langle H \cap A, H^a \cap A \rangle \subseteq A_0$. Таким образом подгруппы $H^g \cap A_0$ и $H \cap A_0$ сопряжены в A_0. Из леммы 6 вытекает сопряжённость подгрупп H и H^g в группе G_0. □

Лемма 8. *Пусть S — неабелева простая группа. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *π-холловы подгруппы пронормальны в любой почти простой группе G с цоколем S;*
(2) *π-холловы подгруппы пронормальны в любой почти простой группе G с цоколем S такой, что G/S — π'-группа.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть G — почти простая группа с цоколем S. Допустим G обладает π-холловой подгруппой H. Требуется показать, что $H \operatorname{prn} G$. Пусть $\overline{} : G \to G/S$ — естественный гомоморфизм. В силу гипотезы Шрайера группа $\overline{G}$ разрешима. Обозначим через U полный прообраз её π'-холловой подгруппы. Тогда $\overline{G} = \overline{HU}$ и $G = HU$.

Ввиду разрешимости группы G/S, подгруппа HS/S пронормальна в G/S. Поскольку подгруппа S является простой, подгруппа $H \cap S$ пронормальна в S. В силу леммы 7 осталось показать, что $(H \cap S)^S = (H \cap S)^G$.

Имеем
$$(H \cap S)^G = (H \cap S)^{HU} = (H \cap S)^U.$$
Далее, $H \cap S \in \mathrm{Hall}_\pi(S)$ и, ввиду (2), $H \cap S \operatorname{prn} U$. Поскольку $H \cap S \operatorname{prn} U$, для любого $u \in U$ найдётся $x \in \langle H \cap S, (H \cap S)^u \rangle$ такой, что $(H \cap S)^x = (H \cap S)^u$. Но $\langle H \cap S, (H \cap S)^u \rangle \subseteq S$, следовательно $(H \cap S)^u = (H \cap S)^x \in (H \cap S)^S$, откуда $(H \cap S)^S = (H \cap S)^U = (H \cap S)^G$. □

Обозначим через E_π класс групп, которые содержат π-холлову подгруппу.

Лемма 9 ([7], лемма 4.4)**.** *Пусть $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$ — симплектическая группа над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p. Обозначим через π множество простых чисел такое, что $2, 3 \in \pi$ и $p \notin \pi$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(*A*) *Пусть $G \in E_\pi$ и $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Тогда группы S_n и $\mathrm{SL}_2(q)$ обладают свойством E_π и $\pi \cap \pi(G) \subseteq \pi(q^2-1)$. При этом H является π-холловой подгруппой группы*

$$M = \mathrm{SL}_2(q) \wr S_n = (\underbrace{\mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_2(q) \times \cdots \times \mathrm{SL}_2(q)}_{n\ \textit{раз}}) : S_n \leq G,$$

где M — полный стабилизатор некоторой ортогональной суммы 2-мерных подпространств,

(*B*) *если группы S_n и $\mathrm{SL}_2(q)$ обладают свойством E_π и $\pi \cap \pi(G) \subseteq \pi(q^2-1)$, то $M \in E_\pi$ и $\mathrm{Hall}_\pi(M) \subseteq \mathrm{Hall}_\pi(G)$,*

(*C*) *π-холловы подгруппы группы M, сопряженные в G, сопряжены в M.*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть G — почти простая группа с неабелевым цоколем S. Предположим, что H — π-холлова подгруппа группы G. Покажем, что $H \operatorname{prn} G$.

Ввиду разрешимости группы G/S, подгруппа HS/S пронормальна в G/S. Поскольку подгруппа S является простой, подгруппа $H \cap S$ пронормальна в S. В силу леммы 7 осталось показать, что $(H \cap S)^S = (H \cap S)^G$.

Из леммы 4 вытекает, что имеет место один из следующих случаев:

(1) $k_\pi^G(S) \leq 4$;

(2) $2, 3 \in \pi$ и $S \simeq \mathrm{PSp}_{2n}(q)$, q является степенью простого числа $p \notin \pi$.

Случай (1). Рассмотрим множество $\Omega = \{(S \cap H)^{Sg} :\ g \in G\}$. Очевидно, что мощность этого множества не превышает $k_\pi^G(S)$. Ввиду леммы 3, мощность $|\Omega|$ является π-числом. С другой стороны, по лемме 2, мощность $|\Omega|$ является π'-числом. Таким образом Ω является одноэлементным множеством, следовательно $(H \cap S)^S = (H \cap S)^G$.

Случай (2). Обозначим группы $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ и $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, через PSp и Sp соответственно.

Ввиду леммы 8 достаточно рассмотреть случай, когда G/PSp — π'-группа. Следовательно $\mathrm{Hall}_\pi(G) = \mathrm{Hall}_\pi(\mathrm{PSp})$.

Поскольку $p \notin \pi$ и $2, 3 \in \pi$, получаем, что q — нечётное число, в частности, у $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ нет графовых автоморфизмов. Тогда в силу [8] любой автоморфизм группы $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ является произведением внутреннего, диагонального и полевого автоморфизма.

Следовательно, любой автоморфизм группы PSp может быть получен из подходящего автоморфизма группы Sp. Кроме того $Z(\mathrm{Sp}) \simeq Z_2$, т.е. все автоморфизмы группы Sp действуют на $Z(\mathrm{Sp})$ тривиально. Очевидно также, что индуцированное действие нееденичного автоморфизма группы Sp на PSp так же является нееденичным автоморфизмом. Поэтому группы Aut(PSp) и Aut(Sp) изморфны.

Поскольку $2 \notin \pi'$, т.е. не делит порядок $|G/\mathrm{PSp}\,|$, любой элемент G является произведением внутреннего и полевого автоморфизма группы PSp.

Обозначим через f преобразование вида

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2n,1} & \dots & \alpha_{2n,2n} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^p & \dots & \alpha_{1,2n}^p \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2n,1}^p & \dots & \alpha_{2n,2n}^p \end{pmatrix}.$$

С точностью до сопряжения любой полевой автоморфизм группы Sp является степенью преобразования f.

Поскольку центр группы Sp имеет порядок $2 \in \pi$, полные прообразы π-холловых подгрупп PSp относительно канонического гомоморфизма являются π-холловыми подгруппами Sp. Таким образом достаточно показать, что классы сопряжённости π -холловых подгрупп Sp инвариантны относительно π'-холловой подгруппы U группы $\langle f\rangle$.

Пусть $K \in \mathrm{Hall}_\pi(\mathrm{Sp})$. Рассмотрим в Sp подгруппу, изоморфную S_n, состоящую из клеточных матриц вида

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix},$$

клетки которой δ_{ij} имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причём единичная матрица в каждой строке и столбце встречается ровно один раз (будем обозначать эту подгруппу также символом S_n), и подгруппу A состоящую из клеточных матриц вида

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & X_n \end{pmatrix},$$

где ненулевые клетки X_i которых лежат в $\mathrm{Sp}_2(q) \simeq \mathrm{SL}_2(q)$. Заметим, что группа A является прямым произведением групп, изоморфных $\mathrm{SL}_2(q)$:

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n.$$

Ясно, что S_n нормализует A и, с точностью до сопряжения, группа M из утверждения (A) леммы 9 совпадает с $\langle A, S_n\rangle \simeq A \leftthreetimes S_n$. Заметим также, что группы S_n и A_i инвариантны относительно автоморфизмов из $\langle f\rangle$; в частности, группа $A \leftthreetimes S_n$ инвариантна относительно подгруппы U.

Пусть $u \in U$. Поскольку все подгруппы A_i субнормальны в MU, по лемме 1 имеем $K \cap A_i \in \mathrm{Hall}_\pi(A_i)$, для $i = 1, \dots, n$. Далее $K \cap A_i = (K \cap A_i U) \cap A_i$, т.е. подгруппы $K \cap A_i$ являются A_iU-индуцированными π-холловыми подгруппами групп A_i для любого i. Поскольку $k_\pi^{A_iU}(A_i) \le 3$ (см. [7, лемма 3.1 (C)]), то, используя рассуждение, аналогичное рассуждению в случае (1), заключаем, что $(K \cap A_i)^u = (K \cap A_i)^{x_i}$, для некоторого $x_i \in A_i$. Таким образом

$$(K \cap A)^u = \prod_{i=1}^{n} (K \cap A_i)^u = \prod_{i=1}^{n} (K \cap A_i)^{x_i} = (K \cap A)^x,$$

где $x = x_1 x_2 \dots x_n \in A$. Итак, подгруппы $K \cap A$ и $(K \cap A)^u$ сопряжены в группе A.

Ввиду того что матрицы из S_n инвариантны относительно u, справедливо равенство $AK = AK^u$. В силу леммы 6 подгруппы $(K \cap \mathrm{Sp})^u$ и $K \cap \mathrm{Sp}$ сопряжены в группе $M \subseteq \mathrm{Sp}$.

References

[1] E.P. Vdovin, D.O. Revin, *Pronormality of Hall subgroups in finite simple groups*, Siberian mathematical journal, **53**:3 (2012), 419–430. MR2978572

[2] E.P. Vdovin, D.O. Revin, *On the pronormality of Hall subgroups* Siberian mathematical journal, **54**:1 (2013), 22–28. MR3089323

[3] M. Aschbacher, *Finite Group Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986. MR0895134

[4] P.B. Kleidman, Liebeck M. W., *The Subgroup Structure of Finite Classical Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. MR1057341

[5] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985. MR0827219

[6] P. Hall, *Theorems like Sylow's*, Proc. London Math. Soc., **6**:22 (1956), 286–304. MR0077533

[7] E.P. Vdovin, D.O. Revin, *On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups*, Journal of Algebra, **324**:12 (2010), 3614–3652. MR2735402

[8] R.W. Carter, *Simple groups of Lie type*, John Wiley & Sons, 1989. MR1013112

Mikhail Nickolaevich Nesterov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: `mauk00@mail.ru`