S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 122–129 (2015) УДК 512.554.5
MSC 17D05,17A99

О СТРОЕНИИ КОНЕЧНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ КОЛЕЦ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ГРАФЫ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ

А.С. КУЗЬМИНА

Abstract. We describe alternative and associative on zero nilpotent finite rings with Eulerian, regular and complete bipartite zero-divisor graphs. Moreover, in this paper, it is proved that associative on zero nilpotent finite rings with planar zero-divisor graphs are associative.

Keywords: alternative ring, associative on zero ring, nilpotent ring, finite ring, zero-divisor graph, Eulerian graph, regular graph, complete bipartite graph, planar graph.

1. Введение

Графом делителей нуля произвольного кольца R называется граф, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем две различные вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$.

Часто граф делителей нуля кольца R обозначается через $\Gamma(R)$. Мы также будем использовать это обозначение.

Понятие графа делителей нуля было введено в работе [5]. И. Бек ввел это понятие для *коммутативного* ассоциативного кольца и вершинами графа делителей нуля считал все элементы кольца. В статье [4] определение было изменено: в качестве вершин графа делителей нуля коммутативного ассоциативного кольца авторы работы рассматривали лишь ненулевые делители нуля. Затем понятие графа делителей нуля было распространено и на *некоммутативный*

Kuzmina, A.S., On structure of finite nilpotent rings with some restrictions on zero-divisor graphs.

Работа проведена в рамках задания № 2014/418 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России.

Поступила 17 июля 2014 г., опубликована 26 февраля 2015 г.

случай [11]. В работе [14] впервые стали исследоваться графы делителей неассоциативных колец. Заметим, что графы делителей нуля ассоциативных, ассоциативных по нулю и альтернативных колец являются связными (см. [4, 11, 14]).

Одним из направлений исследований в этой области стало описание колец, граф делителей нуля которых удовлетворяет определенному условию. Так, в работах [3, 6, 8, 15] полностью описаны конечные ассоциативные кольца с планарными графами делителей нуля. В [9] описаны конечные ассоциативные кольца, имеющие эйлеровы графы делителей нуля. Также были описаны конечные кольца с полными двудольными графами делителей нуля [1]. Заметим, что до сих пор не существует полного описания колец с гамильтоновыми графами делителей нуля. В работе [2] получено описание конечных разложимых коммутативных колец с единицей, графы делителей которых гамильтоновы. Позже, в статье [16] этот результат был обобщен на некоммутативный случай. Более того, в работе [16] полностью описаны многообразия ассоциативных колец, в которых все конечные кольца имеют гамильтоновы графы делителей нуля. Однако полного описания конечных ассоциативных колец с гамильтоновыми графами делителей нуля пока нет. Известна теорема Дирака о том, что любой граф, в котором степень каждой вершины не меньше, чем $n/2$, где n – число вершин в данном графе, причем $n \geq 3$, является гамильтоновым [12, С. 233]. В работах [16, 10] исследуются свойства ассоциативных колец, графы делителей нуля которых удовлетворяют условию теоремы Дирака. В частности, полностью описаны конечные ассоциативные кольца с единицей, графы делителей нуля которых удовлетворяют условию теоремы Дирака. Кроме того, в статье [16] приведено описание конечных ассоциативных колец с однородными графами делителей нуля. В статье [7] доказано, что конечные альтернативные нильпотентные кольца с планарными графами делителей нуля ассоциативны.

В настоящей статье мы описываем альтернативные и ассоциативные по нулю нильпотентные конечные кольца, графы делителей нуля которых являются эйлеровыми, регулярными или полными двудольными. Кроме того, доказывается, что конечные нильпотентные ассоциативные по нулю кольца с планарными графами делителей нуля ассоциативны.

Введем обозначения и понятия, используемые в настоящей работе.

Пусть аддитивная группа кольца R разлагается в прямую сумму своих аддитивных подгрупп $A_i, i = 1, \ldots, n$ и $n \geq 2$, т.е. $R = A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_n$. Если все A_i являются двусторонними идеалами кольца R, то кольцо R называют *разложимым* и пишут $R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Соответственно кольцо называется *неразложимым*, если оно не является разложимым.

Под $\langle b \rangle$ будем понимать аддитивную циклическую группу, порожденную элементом b кольца R.

Кольцо R называется *антикоммутативным*, если $xy = -yx$ для всех элементов $x, y \in R$. Кольцо R называется *ассоциативным по нулю*, если для любых элементов $a, b, c \in R$ равенство $(ab)c = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $a(bc) = 0$ [13, С. 404].

Для произвольного элемента a кольца R положим $l_R(a) = \{x \in R; xa = 0\}$, $r_R(a) = \{x \in R; ax = 0\}$, $ann_R(a) = l_R(a) \cap r_R(a)$, $N(R) = \{a \in R;\ a^2 = 0\}$, $ann(R) = \{x \in R; xR = Rx = 0\}$. Через $deg(a)$ обозначим степень вершины $a \in R$ графа делителей нуля кольца R.

Для любого простого числа p будем полагать $N_{0,p^n} = \big\langle a;\ p^n a = 0, a^2 = 0 \big\rangle$.

Количество элементов в конечном множестве A мы будем обозначать через $|A|$.

2. Альтернативные и ассоциативные по нулю конечные нильпотентные кольца с эйлеровыми графами делителей нуля

В данном разделе описываются альтернативные и ассоциативные по нулю конечные нильпотентные кольца с эйлеровыми графами делителей нуля. Граф называется эйлеровым, если существует цикл, в котором содержатся все ребра данного графа, причем каждое ребро встречается ровно один раз. Напомним, что связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны [12, С. 34–35]. Известно, что граф делителей нуля альтернативного кольца связен [14].

Лемма 1. *Пусть R – произвольное кольцо и $x^2 = 0$ для всех $x \in R$. Тогда R – антикоммутативное кольцо.*

Доказательство. Пусть R – конечное кольцо, удовлетворяющее тождеству $z^2 = 0$. Тогда для любых $x, y \in R$ выполняется $0 = (x+y)^2 = x^2+xy+yx+y^2 = xy + yx$. Отсюда $xy = -yx$ для всех $x, y \in R$. □

Теорема 1. *Альтернативное конечное нильпотентное кольцо R имеет эйлеров граф делителей нуля в том и только в том случае, если порядок кольца R является четным числом и $x^2 = 0$ для всех $x \in R$.*

Доказательство. Пусть R – конечное нильпотентное альтернативное кольцо с эйлеровым графом делителей нуля и n – индекс нильпотентности кольца R, т.е. $R^n = (0), R^{n-1} \neq (0)$. Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Пусть $|R| = p^m$, где p – простое число и $m \in \mathbb{N}$.

Возьмем ненулевой элемент $a \in R^{n-1}$. Тогда $aR = Ra = (0)$, т.е.

$$deg(a) = |R| - |\{0, a\}| = |R| - 2.$$

Поскольку $\Gamma(R)$ эйлеров, то $|R|$ является четным числом. Отсюда $|R| = 2^m$.

Пусть x – такой элемент кольца R, что $x^2 \neq 0$. Поскольку числа $|ann_R(x)|$, $|l_R(x)|$, $|r_R(x)|$ являются степенями числа 2 и $|ann_R(x)| \geq 2$, то

$$deg(x) = |l_R(x)| + |r_R(x)| - |ann_R(x)| - |\{0\}|,$$

т.е. степень вершины x является нечетным числом. Противоречие. Следовательно, для всех $x \in R$ имеем $x^2 = 0$.

Случай 2. Пусть $|R| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$, где $m \geq 2$ и $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – попарно различные простые числа.

Тогда $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_m$, где $|R_i| = p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть также $R_i^{n_i} = (0)$, $R_i^{n_i - 1} \neq (0)$, $i = \overline{1, m}$.

Возьмем ненулевой элемент $a \in R_1^{n_1 - 1}$. Тогда $a^2 = 0$ и

$$deg((a, 0, \ldots, 0)) = |R| - 2.$$

Так как граф $\Gamma(R)$ эйлеров, то $deg((a, 0, \ldots, 0))$ является четным числом. Поэтому и $|R|$ является четным числом. Значит, одно из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_m$ равно 2. Итак, не нарушая общности, можно считать, что $|R_1| = 2^{\alpha_1}$, где $\alpha_1 \geq 1$.

Возьмем произвольный элемент $a \in R_1$. Пусть $a^2 \neq 0$. С вершиной $(a, 0, \ldots, 0)$ смежны все ненулевые элементы $(b, r_2, \ldots, r_m)$, где $b \in l_{R_1}(a) \cup r_{R_1}(a)$, $r_i \in R_i$, $i = \overline{2, m}$, и только они. Поэтому

$$deg((a, 0, \ldots, 0)) = (|l_{R_1}(a)| + |r_{R_1}(a)| - |ann_{R_1}(a)|) \cdot |R_2| \cdot \ldots \cdot |R_m| - 1,$$

т.е. степень данной вершины является нечетным числом; противоречие. Следовательно, $a^2 = 0$ для любого $a \in R_1$.

Предположим, что найдется элемент $b \in R_2$, такой, что $b^2 \neq 0$. Тогда

$$deg((0, b, 0, \ldots, 0)) = |R_1| \cdot |l_{R_2}(b) \cup r_{R_2}(b)| \cdot |R_3| \cdot \ldots \cdot |R_m| - 1,$$

т.е. является нечетным числом, поскольку $|R_1| = 2^{\alpha_1}$. Противоречие. Следовательно, для всех $b \in R_2$ имеем $b^2 = 0$. Аналогично доказывается, что $c^2 = 0$ для всех элементов $c \in R_3$ и т.д. Следовательно, $x^2 = 0$ для всех $x \in R$.

Обратно, пусть $|R| = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$, где $m \geq 1, \alpha_1 \geq 1$ $p_2, p_3, \ldots, p_m$ – попарно различные простые числа и $b^2 = 0$ для всех $b \in R$. Тогда имеем, что $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_m$, где $|R_1| = 2^{\alpha_1}$ и $|R_i| = p_i^{\alpha_i}$, $i = 2, 3, \ldots, m$. Возьмем произвольный ненулевой элемент $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in R$, $a_i \in R_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Заметим, что лемме 1 кольцо R антикоммутативно. Следовательно, $ann_{R_i}(a_i) = r_{R_i}(a_i) = l_{R_i}(a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Поэтому

$$deg(a) = |ann_{R_1}(a_1)| \cdot |ann_{R_2}(a_2)| \cdot \ldots |ann_{R_m}(a_m)| - |\{0, a\}|.$$

Так как $|ann_{R_1}(a_1)|$ – четное число, то $deg(a)$ тоже является четным числом. □

Заметим, что доказательство теоремы 1 справедливо, если вместо альтернативных колец рассматривать кольца, ассоциативные по нулю. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Конечное нильпотентное ассоциативное по нулю кольцо R имеет эйлеров граф делителей нуля в том и только в том случае, если порядок кольца R является четным числом и $x^2 = 0$ для всех $x \in R$.*

3. Альтернативные и ассоциативные по нулю конечные нильпотентные кольца с однородными графами делителей нуля

Третий раздел посвящен описанию альтернативных и ассоциативных по нулю конечных нильпотентных колец, графы делителей нуля которых однородные. Напомним, что граф называется *однородным*, если все вершины этого графа имеют одинаковую степень [12, C. 19].

Теорема 3. *Пусть R – конечное нильпотентное альтернативное кольцо. Тогда граф $\Gamma(R)$ является однородным в том и только в том случае, если $R^2 = (0)$.*

Доказательство. Пусть R – конечное нильпотентное альтернативное кольцо с однородным графом делителей нуля, $n = |R|$ и k – индекс нильпотентности кольца R, $k \geq 2$. Заметим, что для любого ненулевой элемента $a \in R^{k-1}$ имеем $deg(a) = n - 2$. В силу однородности графа $\Gamma(R)$ все вершины этого графа имеют степень $n - 2$. Докажем, что кольцо R удовлетворяет тождеству $x^2 = 0$. Предположим, что в кольце R существует элемент b, такой, что $b^2 \neq 0$. Тогда вершина b в графе $\Gamma(R)$ не смежна с вершинами b и $b + b^2$, т.е. $deg(b) \leq n - 3$, чего быть не может. Следовательно, кольцо R удовлетворяет тождеству $x^2 = 0$

и по лемме 1 является антикоммутативным. Докажем, далее, что $R^2 = (0)$. Предположим противное, т.е. что $R^2 \neq (0)$. Тогда найдутся различные элементы $b, c \in R$, такие что $cb = -bc \neq 0$. В этом случае вершина c не является смежной с вершинами b и $b + c$, т.е. $deg(c) \leq n - 3 < deg(a)$; противоречие. Значит, $R^2 = (0)$.

Обратное утверждение очевидно. □

Следствие 1. *Пусть R – конечное нильпотентное альтернативное кольцо. Тогда граф $\Gamma(R)$ является однородным в том и только в том случае, если кольцо R ассоциативное.*

Заметим, что аналог теоремы 3 справедлив и для ассоциативных по нулю колец.

Теорема 4. *Пусть R – конечное нильпотентное ассоциативное по нулю кольцо. Тогда граф $\Gamma(R)$ является однородным в том и только в том случае, если $R^2 = (0)$.*

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

4. Конечные нильпотентные ассоциативные по нулю кольца с планарными графами делителей нуля

В данном разделе мы докажем, что любое ассоциативное по нулю конечное нильпотентное кольцо с планарным графом делителей нуля является ассоциативным. В работе [7] аналогичный результат был доказан для альтернативных колец.

Напомним, что граф называется *планарным,* если его можно изобразить на плоскости таким образом, чтобы никакие два его ребра не пересекались. *Полным n-вершинным графом K_n* называется граф (без петель и кратных ребер), в котором каждая вершина смежна с любой другой вершиной этого графа. *Двудольный граф G* – это граф, множество вершин V которого можно разбить на два непересекающихся непустых подмножества V_1 и V_2 таким образом, что каждое ребро графа G соединяет вершины из разных подмножеств. Если двудольный граф G содержит все ребра, соединяющие множества V_1 и V_2, то этот граф называется *полным двудольным* [12, С. 29–30]. Полные двудольные графы будем обозначать $K_{n,m}$, где $n = |V_1|$ и $m = |V_2|$. Два графа называются *гомеоморфными,* если их можно получить из одного и того же графа с помощью включений в его ребра новых вершин степени 2. Известно, что граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного $K_{3,3}$ и K_5 (теорема Куратовского, [12, С. 103]). На протяжении данного раздела мы будем пользоваться этой теоремой.

Лемма 2. *Пусть R – произвольное нильпотентное конечное разложимое кольцо с планарным графом делителей нуля. Тогда $R \cong N_{0,2} \oplus N_{0,2}$.*

Доказательство. Пусть R – конечное кольцо, удовлетворяющее условию леммы. Тогда $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_m$, где R_i – неразложимое подкольцо кольца R, $i = 1, 2, \ldots, m$, и $m \geq 2$. Предположим, что $m \geq 3$. Для каждого числа $i = 1, 2, 3$ возьмем элемент $a_i \in R_i$, такой, что $a_i^2 = 0$. Тогда элементы $\{a_1, a_2, a_3, a_1 + a_2, a_1 + a_3\}$ образуют в графе $\Gamma(R)$ подграф, гомеоморфный графу K_5. Противоречие показывает, что $m = 2$, т.е. $R = R_1 \oplus R_2$.

Предположим, далее, что $|R_1| \geq 3$. Тогда мы можем взять два ненулевых элемента $a, b \in R_1$, такие, что $a \neq b$ и $a \in ann(R_1)$. Пусть $c \in ann(R_2) \setminus \{0\}$. Следовательно, вершины $\{a, c, a+c\} \cup \{b, a+b, a+b+c\}$ образуют подграф, гомеоморфный графу $K_{3,3}$; противоречие. Значит, $|R_1| = 2$. Аналогичные рассуждения показывают, что и $|R_2| = 2$. Поэтому $R_1 \cong N_{0,2}$ и $R_2 \cong N_{0,2}$. $\square$

Теперь мы можем приступить к доказательству следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть R – конечное нильпотентное ассоциативное по нулю кольцо с планарным графом делителей нуля. Тогда R – ассоциативное кольцо.*

Доказательство. Пусть R – конечное нильпотентное ассоциативное по нулю кольцо с планарным графом делителей нуля. Если $R^2 = (0)$ или $R^3 = (0)$, то R – ассоциативное кольцо. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $R^3 \neq (0)$.

Предположим, что $R^k = (0)$, $R^{k-1} \neq (0)$, причем $k \geq 5$, $k = 2t$ или $k = 2t+1$, где t – некоторое натуральное число. Тогда в цепи $R^{k-1} \subseteq \ldots \subseteq R^{t+1} \subseteq R^t$ содержится по крайней мере три различных подкольца, поскольку $k \geq 5$. Следовательно, $|R^{t+1}| \geq 4$, $|R^t| \geq 8$. Заметим также, что $R^t \cdot R^{t+1} = (0)$. Поэтому в графе $\Gamma(R)$ содержится подграф, гомеоморфный графу $K_{3,3}$. Противоречие доказывает, что $R^4 = (0)$.

Далее, если $|R^2| \geq 6$, то граф $\Gamma(R)$ содержит подграф, гомеоморфный графу K_5, чего быть не может. Значит, $|R^2| \leq 5$. Если $|R^3| \geq 4$, то $|R^2| \geq 8$, что, как мы только что показали, невозможно. Следовательно, $|R^3| \leq 3$. Если кольцо R разложимо, то по лемме 2 оно ассоциативное. Поэтому мы можем считать, что кольцо R неразложимое. Тогда из условий $|R^2| \leq 5$, $0 < |R^3| \leq 3$ получаем, что $|R^2| = 4$ и $|R^3| = 2$.

Пусть $R^3 = \{0, x\}$. Поскольку кольцо R ассоциативное по нулю, то для любых элементов $a, b, c \in R$ элементы $(ab)c$ и $a(bc)$ либо одновременно равны нулю, либо одновременно равны x, т.е. кольцо R ассоциативное. $\square$

5. Альтернативные и ассоциативные по нулю конечные нильпотентные кольца с полными двудольными графами делителей нуля

В данном разделе доказывается, что любое альтернативное (ассоциативное по нулю) нильпотентное конечное, имеющее полный двудольный граф делителей нуля, является ассоциативным.

Лемма 3. *Пусть R – произвольное нильпотентное кольцо, $\Gamma(R) = K_{n,m}$ и существует элемент $a \in N(R)$, такой, что $2a \neq 0$. Тогда $R \cong N_{0,3}$ и, в частности, кольцо R является ассоциативным.*

Доказательство. Пусть R – произвольное нильпотентное кольцо с полным двудольным графом делителей нуля, a – элемент кольца R, такой, что $a^2 = 0$ и $2a \neq 0$. Поскольку граф $\Gamma(R)$ полный двудольный, то множество его вершин состоит из двух долей V_1 и V_2. Мы можем считать, что $a \in V_1$. Тогда $-a \in V_2$. Предположим, что во множестве V_1 содержится элемент $v \in V_1$, отличный от a. Тогда $v(-a) = 0$ или $-av = 0$, т.е. $va = 0$ или $av = 0$; противоречие. Следовательно, $V_1 = \{a\}$. Аналогично доказывается, что $V_2 = \{-a\}$. Таким образом, $R = \{0, a, -a\}$, т.е. кольцо R ассоциативное. $\square$

Лемма 4. *Пусть R – произвольное нильпотентное кольцо, не являющееся ассоциативным, такое, что $\Gamma(R) = K_{n,m}$. Для любых различных элементов $a, b \in N(R)$ выполняется $ab \neq 0$ и $ba \neq 0$.*

Доказательство. Пусть R – произвольное нильпотентное кольцо, удовлетворяющее условию леммы. Пусть также $a, b \in R$ – различные элементы, такие, что $a^2 = 0, b^2 = 0$. Докажем, что $ab \neq 0$ и $ba \neq 0$. Предположим противное: например, $ab = 0$. Поскольку граф $\Gamma(R)$ полный двудольный, то множество его вершин состоит из двух непересекающихся долей V_1 и V_2. Можно считать, что $a \in V_1$, а $b \in V_2$. Поскольку кольцо R не является ассоциативным, то лемме 3 получаем $2a = 0, 2b = 0$. Далее, $a(a+b) = 0$ и $(a+b)b = 0$. Следовательно, элемент $a+b$ должен быть равен a, b или 0, поскольку элементы a и b содержатся в разных долях двудольного графа $\Gamma(R)$. Если $a + b = 0$, то $a = -b = b$; противоречие. Ясно, что первые два случая также невозможны. Следовательно, $ab \neq 0$. Аналогично доказывается, что $ba \neq 0$. □

Лемма 5. *Пусть R – нильпотентное альтернативное (ассоциативное по нулю) кольцо, не являющееся ассоциативным, и $\Gamma(R) = K_{n,m}$. Тогда $|N(R)| = 2$.*

Доказательство. Пусть R – альтернативное (или ассоциативное по нулю) нильпотентное кольцо, $\Gamma(R) = K_{n,m}$ и множество вершин графа $\Gamma(R)$ состоит из двух долей V_1 и V_2. Предположим, что $a, b \in N(R)$ – различные ненулевые элементы. По лемме 4 имеем $ab \neq 0$, $ba \neq 0$ и, более того, можно считать, что $N(R) \subset V_1$. Поскольку $a(ab) = 0$ и $(ba)a = 0$, то $ab, ba \in V_2$. Однако $(ab)(ba) = 0$. Следовательно, $ab = ba$. Поэтому $(ab)^2 = (ab)(ba) = 0$. Значит, $ab \in N(R) \subset V_1$; противоречие. Таким образом, $|N(R)| = 2$. □

Теорема 6. *Пусть R – конечное нильпотентное альтернативное кольцо. Если $\Gamma(R) = K_{n,m}$, то кольцо R ассоциативное (более того, $R^3 = (0)$) и $\Gamma(R) = K_{1,m}$.*

Доказательство. Пусть R – конечное нильпотентное альтернативное кольцо и $\Gamma(R) = K_{n,m}$. По лемме 5 имеем $|N(R)| = 2$. Следовательно, существует единственный ненулевой элемент $x \in R$, такой, что $xR = Rx = (0)$. Поэтому граф $\Gamma(R)$ является звездой, т.е. $\Gamma(R) = K_{1,m}$. (В частности, граф делителей нуля кольца R планарный.) Пусть k – индекс нильпотентности кольца R. Предположим, что $k \geq 4$. Тогда $(0) \neq R^{k-2} \subseteq N(R)$ и $|N(R)| \geq 4$. Однако по лемме 5 $|N(R)| = 2$; противоречие. Значит, $R^3 = (0)$ и, в частности, кольцо R является ассоциативным. □

Аналогично доказывается следующая теорема (единственное, при доказательстве будем ссылаться на теорему 5 настоящей статьи).

Теорема 7. *Пусть R – конечное нильпотентное ассоциативное по нулю кольцо. Если $\Gamma(R) = K_{n,m}$, то кольцо R ассоциативное и $\Gamma(R) = K_{1,m}$.*

Автор выражает глубокую признательность и благодарность за внимание к настоящей работе профессору Ю.Н. Мальцеву.

Список литературы

[1] S. Akbari, A. Mohammadian, *Zero-divisor graphs of non-commutative rings*, J. Algebra, **296**:2 (2006), 462–479. MR2201052

[2] S. Akbari, A. Mohammadian, *On the zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra, **274** (2004), 847–855. MR2043378

[3] S. Akbari, H.R. Maimani, S. Yassemi, *When zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph*, J.Algebra, **270**:1 (2003), 169–180. MR2016655

[4] D.F. Anderson, P.S. Livingston, *The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring*, J. Algebra, **217**:2 (1999), 434–447. MR1700509

[5] I. Beck, *Coloring of Commutative Rings*, J.Algebra **116** (1988), 208–226.

[6] R. Belshoff, J. Chapman, *Planar zero-divisor graphs*, J. Algebra, **316**:1 (2007), 471–480. MR2354873

[7] A.S. Kuzmina, *On Nilpotent Finite Alternative Rings with Planar Zero-Divisor Graphs*, Algebra Colloq. (it is accepted in the press).

[8] A.S. Kuz'mina, Yu.N. Maltsev, *Nilpotent Finite Rings with Planar Zero-Divisor Graphs*, Asian-European J. Math., **1**:4 (2008), 565–574. MR2474188

[9] A.S. Kuzmina, *Finite rings with Eulerian zero-divisor graphs*, J. of Algebra and Its Appl., **11**:3 (2012), 551–559. MR2928123

[10] A.S. Kuzmina, Yu.N. Maltsev. *On Finite Rings in Which Zero-Divisor Graphs Satisfy the Dirac's condition*, an International Conference "Algebra and Mathematical Logic: Theory and Applications" with a satellite summer school "Computability and Computable Structures", Kazan (Russia), June 2-6, 2014, 91–92.

[11] S.P. Redmond, *The zero-divisor graph of a noncommutative ring*, Int. J.Commut. rings, **1**:4 (2002), 203–211. MR2037657

[12] R. Diestel, *Graph theory*, Novosibirsk, 2002 (in Russian).

[13] K.A. Zhevlakov, A.M. Slinko, I.P. Shestakov, A.I. Shirshov, *Rings that are nearly associative*, Nauka, Moscow, 1978 (in Russian). Zbl 0445.17001

[14] I.M. Isaev, A.S. Kuzmina, *On Connectivity of Zero-Divisor Graphs of Algebras*, Vestnik Altai State Pedagogical Academy. Natural sciences, **7** (2011), 7–10.

[15] A.S. Kuzmina, *On finite non-nilpotent rings with planar zero-divisor graphs*, Discretnaya Matematika, **4** (2009), 60–75 (in Russian). MR2641018

[16] A.S. Kuzmina, Yu.N. Maltsev, *Describing ring varieties in which all finite rings have Hamiltonian zero-divisor graphs*, Algebra and Logic, **52**:2 (2013), 137–146. MR3134783

[17] A.S. Kuzmina, Yu.N. Maltsev, *Finite rings with some restrictions on zero-divisor graphs*, Russian Mathematics, **58**:12 (2014), 41–50.

Anna S. Kuzmina
Altai State Pedagogical University,
55, Molodeghnaya st.,
Barnaul, Russia, 656031
E-mail address: `akuzmina1@yandex.ru`