S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 150–167 (2015) УДК 517.53

MSC 30J05,30J10

О КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ Р. НЕВАНЛИННЫ И α-ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ИЗ ВЕСОВЫХ L^p ПРОСТРАНСТВ

Ф.А. ШАМОЯН, В.А. БЕДНАЖ, О.В. КАРБАНОВИЧ

Abstract. Under certain restrictions on the weight function in the article studied classes of analytic functions in the disk, Nevanlinna's characteristic and α - characteristic which belongs to the weighted L^p spaces

Keywords: Unit disk. Analytic function. Nevanlinna characteristic function

1. Введение

Пусть $\mathbf{D} = \{z : |z| < 1\}$ - единичный круг на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $\mathbf{T} = \{z : |z| = 1\}$ - единичная окружность, $\triangle := \{t : 0 < t \leq 1\}$.

Обозначим через Ω класс неотрицательных суммируемых функций ω на $\triangle$, для которых существуют неотрицательные числа q_ω , $0 < g_\omega < 1$, m_ω, M_ω такие, что

$$m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega,\ \lambda \in [q_\omega, 1],\ r \in \triangle.$$

Простейшими примерами таких функций являются функции вида

$$\omega(x) = x^\alpha \left(\ln \ldots \ln \frac{c}{x}\right)^\beta,\ x \in \triangle,\ \text{где}\ \alpha > -1,\ \beta \in \mathbf{R}.$$

Shamoyan, F.A., Bednazh, V.A., Karbanovich, O.V. On classes of analytic functions in a disk with a characteristic R. Nevanlinny and α-characteristic of weighted L^p spaces.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-97508).

Задание №1.1704.2014К Минобрнауки РФ на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности.

Поступила 31 октября 2014 г., опубликована 26 февраля 2015 г.

В дальнейшем нам потребуются также следующие обозначения: через $H(\mathbf{D})$ обозначим множество всех аналитических в $\mathbf{D}$ функций. Если $f \in H(\mathbf{D})$, то через $T(r,f)$ обозначим характеристику Р.Неванлинны функции f (см. [1]), т.е.

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|d\varphi, \text{ где } 0 < r < 1,$$

где $\ln^+|a| = \max(0, \ln|a|)$.

Если $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $0 < p < +\infty$, то

$$N^p_{\omega_1,\omega_2} := \{f \in H(\mathbf{D}) :$$
$$\left.\int_0^1 \omega_2(1-r)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \omega_1(1-x)\ln|f(rxe^{i\theta})|dx\right)^+ d\theta\right)^p dr < +\infty\right\}.$$

Для удобства будем обозначать функцию

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \omega_1(1-x)\ln|f(rxe^{i\theta})|dx\right)^+ d\theta$$

через $T_{\omega_1}(r,f)$. Характеристика такого типа была впервые введена М.М. Джрбашяном в работе [2] при $\omega_1(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$, и была названа $\alpha-$ характеристикой.

Обозначим также через $S^p_{\omega_1,\omega_2}$ следующий класс функций

$$S^p_{\omega_1,\omega_2} := \left\{f \in H(\mathbf{D}) : \int_0^1 \omega_2(1-r)\omega_1(1-r)^p(1-r)^p T^p(r,f)dr < +\infty\right\},$$

$0 < p < +\infty$.

Основная цель этой статьи доказать, что при определенных условиях на веса ω_1, ω_2 классы $N^p_{\omega_1,\omega_2}$ и $S^p_{\omega_1,\omega_2}$ совпадают, при этом при всех $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ и $0 < p < +\infty$ $S^p_{\omega_1,\omega_2} \subset N^p_{\omega_1,\omega_2}$. Тогда, учитывая результаты работы [3], (см. также [4]), мы получим полное описание корневых множеств и построим факторизационное представление класса $N^p_{\omega_1,\omega_2}$, при всех $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ и $0 < p < +\infty$.

2. Формулировка и доказательство результатов статьи

Для изложения дальнейших результатов введем следующие обозначения: $\mathbf{R}_+ = \{t : 0 \le t < +\infty\}$, m_2 - плоская мера Лебега на плоскости $\mathbf{C}$. Если $X, Y \in \mathbf{R}_+$, то обычно символ $X \approx Y$ означает, что существуют положительные числа A и B такие, что $AY \le BY$, а $X \lesssim Y$, если $X \le AY$. Сначала докажем следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть* $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $f \in N^p_{\omega_1,\omega_2}$, $0 < p < +\infty$, $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ $f(0) = 1$, $n_k = card\left\{z_m : |z_m| \le 1 - \frac{1}{2^k}\right\}$, $k = 1, 2, \ldots$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_{k^p}\,\omega_2(\frac{1}{2^k})\omega_1^p(\frac{1}{2^k})}{2^{k(2p+1)}} < +\infty.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы используем равенство Йенсена (см. [1]), согласно которому, если $f \in H(\mathbf{D})$ и $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$ $f(0) = 1$, тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|d\varphi = \int_0^r \frac{n(t)}{t}dt,\ r \in [0,1), \tag{1}$$

где $n(r) = card\{z_k : |z_k| \le r\}$.

В дальнейшем, если не оговорено обратное, всегда будем предполагать, что $f(0) = 1$.

Поэтому, если $f \in N^p_{\omega_1, \omega_2}$, то согласно определению класса $N^p_{\omega_1, \omega_2}$ имеем

$$\int_0^1 \omega_2(1-r) \times \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 \omega_1(1-x)\ln|f(rxe^{i\theta})|dx\right)^+ d\theta\right)^p dr < +\infty.$$

Следовательно, учитывая равенство (1), имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \omega_1(1-t)\ln|f(rte^{i\varphi})|dtd\varphi = \int_0^1 \omega_1(1-t)\left(\int_0^{rt}\frac{n(u)}{u}du\right)dt. \tag{2}$$

Теперь заметим, что для произвольного $a \in \mathbf{C}$ справедливо равенство $\ln|a| = \ln^+|a| - \ln^-|a|$, где $\ln^+|a| = \max(0, \ln|a|)$, $\ln^-|a| = \max(0, -\ln|a|)$. Поэтому из равенства (2) окончательно получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \omega_1(1-t)\ln|f(rte^{i\varphi})|dt\right)^+ d\varphi -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \omega_1(1-t)\ln|f(rte^{i\varphi})|dt\right)^- d\varphi =$$

$$= \int_0^1 \omega_1(1-t)\left(\int_0^{rt}\frac{n(u)}{u}du\right)dt.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \omega_1(1-t)\left(\int_0^{rt}\frac{n(u)}{u}du\right)dt \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \omega_1(1-t)\ln|f(rte^{i\varphi})|dt\right)^+ d\varphi.$$

Отсюда получаем оценку

$$\int_0^1 \omega_1(1-t)\left(\int_0^{rt}\frac{n(u)}{u}du\right)dt \le T_{\omega_1}(r,f) \tag{3}$$

Поэтому, если $f \in N^p_{\omega_1, \omega_2}$ и $f(0) = 1$, то

$$\int_0^1 \omega_2(1-r)\left(\int_0^1 \omega_1(1-t)\int_0^{rt}\frac{n(u)}{u}dudt\right)^p dr \le$$

$$\leq \int\limits_0^1 \omega_2(1-r)T^p_{\omega_1}(r,f)dr < +\infty. \tag{4}$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить, что из (4) следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p\,\omega_2(\frac{1}{2^k})\omega_1^p(\frac{1}{2^k})}{2^{k(2p+1)}} < +\infty.$$

С этой целью преобразуем интеграл

$$I(r) = \int\limits_0^1 \omega_1(1-t)\int\limits_0^{rt} \frac{n(u)}{u}dudt = \int\limits_0^1 \omega_1(1-t)\int\limits_0^{t} \frac{n(ru)}{u}dudt. \tag{5}$$

Интегрируя его по частям, получаем

$$I(r) = -\int\limits_0^1 \int\limits_0^t \frac{n(ru)}{u}dud\int\limits_t^1 \omega_1(1-v)dvdt = -\int\limits_0^t \frac{n(ru)}{u}du\int\limits_t^1 \omega_1(1-v)dv +$$

$$+\int\limits_0^1 \frac{n(rt)}{t}\int\limits_t^1 \omega_1(1-v)dvdt = \int\limits_0^1 \frac{n(rt)}{t}\int\limits_t^1 \omega_1(1-v)dvdt \tag{6}$$

Используя свойства функций из класса Ω (см. [4] стр.14), получим

$$I(r) \approx \int\limits_0^r n(u)\omega_1(1-u)(1-u)du \tag{7}$$

Следовательно, из условия(4) получим, что

$$\int\limits_0^1 \omega_2(1-r)\left(\int\limits_0^r n(u)\omega_1(1-u)(1-u)du\right)^p dr < +\infty \tag{8}$$

Теперь, учитывая оценки, полученные в работе [4], (см. [4] стр.93), окончательно получаем, что сходимость интеграла (8) равносильна сходимости интеграла

$$\int\limits_0^1 \omega_2(1-r)n^p(r)\omega_1^p(1-r)(1-r)^{2p}dr < +\infty.$$

Снова учитывая результаты работ [3] и [4], из последней оценки легко вывести сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n_k^p\,\omega_2(\frac{1}{2^k})\omega_1^p(\frac{1}{2^k})}{2^{k(2p+1)}} < +\infty.$$

Теорема доказана.

Теперь докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть* $\omega_1,\, \omega_2 \in \Omega,\ 0 < p < +\infty$, *тогда справедливо вложение* $S^p_{\omega_1,\,\omega_2} \subset N^p_{\omega_1,\,\omega_2}$, *причем выполняется оценка*

$$\int_0^1 \omega_2(1-t)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \omega_1(1-u)\ln|f(ute^{i\theta})|du\right)^+ d\theta\right)^p dt \le$$

$$\le c_1\int_0^1 \omega_2(1-t)\omega_1^p(1-t)(1-t)^p T^p(t,f)dt,\ f\in H(\mathbf{D}),\ 0<p<+\infty,$$

где c_1 - *положительное число, не зависящее от* f.

Доказательство теоремы основано на следующем вспомогательном утверждении:

Лемма 1. *Пусть* $f \in H(\mathbf{D})$, *тогда для любой неотрицательной функции* $\omega \in L^1(\Delta)$ *справедлива оценка*

$$T_\omega(r,f) \le \int_0^1 \omega(1-t)T(rt,f)dt,\ r\in[0,1]. \tag{9}$$

Доказательство. По определению

$$T_\omega(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \omega(1-t)\ln|f(rte^{i\varphi})|dt\right)^+ d\varphi,$$

в то же время

$$\int_0^1 \omega(1-t)\ln|f(rte^{i\varphi})|dt \le \int_0^1 \omega(1-t)\ln^+|f(rte^{i\varphi})|dt \tag{10}$$

поскольку для произвольных $\varphi\in[-\pi,\pi]$, $t,\ r\in[0,1]$ справедлива оценка

$$\ln|f(rte^{i\varphi})| \le \ln^+|f(rte^{i\varphi})|.$$

То из (10) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \omega(1-t)\ln|f(rte^{i\varphi})|dt\right)^+ d\varphi \le \int_0^1 \omega(1-t)T(rt,f)dt.$$

По определению это эквивалентно неравенству

$$T_\omega(r,f) \le \int_0^1 \omega(1-t)T(rt,f)dt.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Докажем теорему сначала в случае $1 < p < +\infty$.

Из леммы 1 непосредственно следует:

$$\int_0^1 \omega_1(1-r)\left(T_{\omega_2}(r,f)\right)^p dr \le \int_0^1 \omega_1(1-r)\left(\int_0^1 \omega_2(1-t)T(rt,f)dt\right)^p dr.$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить оценку

$$\int_0^1 \omega_1(1-r)\left(\int_0^1 \omega_2(1-t)T(rt,f)dt\right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \int_0^1 \omega_1(1-r)\omega_2^p(1-r)(1-r)^p T^p(r,f)dr,\ 0<p<+\infty.$$

Ясно, что

$$I := \int_0^1 \omega_1(1-r)\left(\int_0^1 \omega_2(1-t)T(rt,f)dt\right)^p dr \leq$$

$$\leq 2^p\left(\int_0^1 \omega_1(1-r)\left(\int_0^r \omega_2(1-t)T(rt,f)dt\right)^p dr+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 \omega_1(1-r)\left(\int_r^1 \omega_2(1-t)T(rt,f)dt\right)^p dr\right)=$$

$$=2^p(I_1+I_2).$$

Сначала оценим I_2. Имеем

$$I_2=\int_0^1 \omega_1(1-r)T^p(r,f)\left(\int_r^1 \omega_2(1-t)dt\right)^p dr.$$

Учитывая свойства функций из класса Ω (см. [4] стр. 13), имеем

$$\int_r^1 \omega_2(1-t)dt \leq c\omega_2(1-r)(1-r). \tag{11}$$

Поэтому

$$I_2 \lesssim \int_0^1 \omega_1(1-r)T^p(r,f)\omega_2^p(1-r)(1-r)^p dr \tag{12}$$

Перейдем к оценке I_1:

$$I_1=\int_0^1 \omega_1(1-r)\left(\int_0^r \omega_2(1-t)T(rt,f)dt\right)^p dr.$$

Сначала заметим, что существует функция $\psi\in L^q(\Delta)$, для которой почти всюду на Δ выполняется условие $\psi(t)\geq 0$, причем $\|\psi\|_{L^q}=1$, где $q=\dfrac{p}{p-1}$ и такая, что

$$I_1^{\frac{1}{p}}=\int_0^1 \omega_1^{\frac{1}{p}}(1-r)\int_0^r \omega_2(1-u)T(ur,f)du\psi(r)dr.$$

Изменяя порядок интегрирования в последнем интеграле, получаем

$$I_1^{\frac{1}{p}} = \int_0^1 \omega_2(1-u) \int_u^1 \omega_1^{\frac{1}{p}}(1-r) T(ur,f)\psi(r)dudr.$$

Но если $\omega_1 \in \Omega$ и $u \le r < 1$, то $\omega_1(1-r) \sim \omega_1(1-u)$ (см. [4] стр.13). Поэтому $\omega_1(1-r) \lesssim \omega_1(1-u)$ при $0 \le u \le r < 1$.

Следовательно,

$$I_1^{\frac{1}{p}} \lesssim \int_0^1 \omega_2(1-u) T(u,f) \omega_1^{\frac{1}{p}}(1-u) \int_u^1 \psi(r)dudr.$$

Применяя неравенство Гильберта, получаем

$$I_1^{\frac{1}{p}} \le c \left(\int_0^1 \omega_2^p(1-u) T^p(u,f) \omega_1(1-u)(1-u)^p du \right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left(\int_0^1 \frac{1}{(1-u)^q} \left(\int_u^1 \psi(t)dt \right)^q du \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{13}$$

Теперь к внутреннему интегралу применим неравенство Харди (см. [5] стр.319), тогда из оценки (13) получим

$$I_1 \lesssim \int_0^1 \omega_2^p(1-r) T^p(r,f) \omega_1(1-r)(1-r)^p dr. \tag{14}$$

Из оценок (12) and (14) следует утверждение теоремы при $1 < p < +\infty$.

Перейдем к доказательству теоремы при $0 < p \le 1$. Снова разбиваем интеграл

$$I_1 = \int_0^1 \omega_1(1-r) \left(\int_0^1 \omega_2(1-t) T(rt,f)dt \right)^p dr$$

на две части и учтем, что $0 < p \le 1$, тогда

$$I_1 \le \int_0^1 \omega_1(1-r) \left(\int_0^r \omega_2(1-t) T(rt,f)dt \right)^p dr +$$

$$+ \int_0^1 \omega_1(1-r) \left(\int_r^1 \omega_2(1-t) T(rt,f)dt \right)^p dr := I_1 + I_2.$$

Оценка I_2: опять используя то, что функция $T(r,f)$ монотонно растет на $[0,1)$ (см. [1] стр.27), получаем

$$I_2 \le \int_0^1 \omega_1(1-r) T^p(r,f) \left(\int_r^1 \omega_2(1-t)dt \right)^p dr, \tag{15}$$

но

$$\int\limits_r^1 \omega_2(1-t)dt = \int\limits_0^{1-r} \omega_2(u)du.$$

Учитывая свойства функции $\omega_2 \in \Omega$ (см. [4], §1.2), получим

$$\int\limits_0^{1-r} \omega_2(u)du \lesssim \omega_2(1-r)(1-r).$$

Поэтому из (15) приходим к оценке

$$I_2 \leq \int\limits_0^1 \omega_1(1-r)\omega_2^p(1-r)(1-r)^p T^p(r,f)dr. \tag{16}$$

Перейдем к оценке I_1. Пусть

$$r_k = 1 - \frac{1}{2^k}, \text{ тогда } \Delta = \bigcup_{k=0}^{\infty} [r_k, r_{k+1}). \tag{17}$$

Предположим $r_n \leq r \leq r_{n+1}$. Тогда

$$\left(\int\limits_0^r \omega_1(1-t)T(rt,f)dt \right)^p \leq \left(\int\limits_{r_n}^r \omega_1(1-t)T(rt,f)dt \right)^p +$$

$$+ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{r_k}^{r_{k+1}} \omega_1(1-t)T(rt,f)dt \right)^p \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}} \omega_1(1-t)T(rt,f)dt \right)^p + \left(\int\limits_{r_n}^r \omega_1(1-t)T(rt,f)dt \right)^p.$$

Положим

$$I_k := \left(\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}} \omega_1(1-t)T(rt,f)dt \right), \ 0 \leq k \leq n-1.$$

Тогда

$$I_k \leq T(rr_k,f) \left(\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}} \omega_1(1-t)dt \right) \lesssim T(rr_{k+1},f)\omega_1(1-r_k)(r_{k+1}-r_k). \tag{18}$$

В последней оценке мы воспользовались принадлежностью функции ω_1 классу Ω (см. [4], §1.2) и монотонностью функции $T(r,f)$ на Δ.

Аналогично получим

$$\int\limits_{r_n}^r \omega_1(1-t)T(rt,f)dt \lesssim T(r^2,f)\omega_1(1-r_k)(r-r_k), \tag{19}$$

Из (17) и (18) получаем

$$I \leq c \sum_{k=0}^{n-1} T^p(rr_k,f)\omega_1(1-r_k)(r_{k+1}-r_k)^p + T^p(r^2,f)\omega_1^p(1-r_k)(r-r_k)^p. \tag{20}$$

Из (18), (19), (20), нетрудно получить неравенство

$$I_1 \lesssim \int_0^1 \omega_1(1-r)\left(\int_0^r \omega_2(1-t)T(rt,f)dt\right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \int_0^1 \omega_1(1-r)\int_0^r \omega_2^p(1-t)^{p-1}T^p(rt,f)dtdr.$$

Проинтегрировав последний интеграл по частям, получим

$$\int_0^1 \omega_1(1-r)\int_0^r \omega_2^p(1-t)(1-t)^{p-1}T(r,f)dtdr =$$

$$= \int_0^1 T^p(t,f)\omega_2^p(1-t)^{p-1}(1-t)\int_t^1 \omega_1(1-r)drdt.$$

И снова учитывая принадлежность ω_1 классу Ω, приходим к оценке

$$\int_0^1 T^p(t,f)\omega_2^p(1-t)(1-t)^{p-1}\int_t^1 \omega_1(1-r)drdt \lesssim \int_0^1 T^p(rt,f)\omega_2^p(1-t)(1-t)^p\omega_1(1-t)dt$$

Теорема доказана.

Таким образом из теоремы 2 следует:

Следствие 1. *При всех ω_1, $\omega_2 \in \Omega$, $0 < p < +\infty$, выполняется включение*

$$S^p_{\omega_1,\,\omega_2} \subset N^p_{\omega_1,\,\omega_2}.$$

Используя результаты работы [3] и теорему 2, получаем:

Следствие 2.*Пусть $\{z_k\}_1^{+\infty}$ произвольная последовательность из единичного круга* **D**. *Тогда следующие утверждения равносильны*

1) существует функция $f \in N^p_{\omega_1,\,\omega_2}$ такая, что

$$f(z_k) = 0,\ k = 1, 2, \dots\ f(0) = 1;$$

2) последовательность $\{z_k\}_1^{+\infty}$ удовлетворяет условию теоремы 1.

Теперь докажем, что если $\omega_1(t) = t^\alpha$, $\omega_2(t) = t^\beta$, то классы $N^p_{\omega_1,\,\omega_2}$ и $S^p_{\omega_1,\,\omega_2}$ совпадают.

В дальнейшем для удобства обозначим через $N^p_{\alpha,\,\beta}$ и $S^p_{\alpha,\,\beta}$ классы $N^p_{\omega_1,\,\omega_2}$ и $S^p_{\omega_1,\,\omega_2}$ при $\omega_1(t) = t^\alpha$, $\omega_2(t) = t^\beta$, α, $\beta > -1$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $0 < p < +\infty$, α, $\beta > -1$. Тогда классы $N^p_{\alpha,\,\beta}$ и $S^p_{\alpha,\,\beta}$ совпадают.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что $S^p_{\alpha,\,\beta} \subset N^p_{\alpha,\,\beta}$ при указанных значениях параметров α, β, p.

остается доказать, что $N^p_{\alpha,\,\beta} \subset S^p_{\alpha,\,\beta}$. Из теоремы 2 также следует, что

$$\int_0^1 (1-r)^\beta T^p_\alpha(r,f)dr \lesssim \int_0^1 (1-r)^\beta(1-r)^{\alpha\,p}(1-r)^p\,T^p(r,f)dr \tag{21}$$

Используя результаты из [1] и оценку (21), получим, что если $f \in N^p_{\alpha,\beta}$, $f(z_k) = 0$, $f(0) = 1$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k^p}{2^{k(p(\alpha+2)+1+\beta)}} < +\infty.$$

Снова используя результаты работы [3], получаем, что бесконечное произведение М.М. Джрбашяна $\pi_\gamma(z, z_k)$ при $\gamma > \alpha + 1 + \frac{\beta}{p}$ принадлежит классу $S^p_{\alpha,\beta}$.

Теперь снова учитывая оценку (21), получим, что $\pi_\gamma \in N^p_{\alpha,\beta}$.

Тогда используя соотношение равновесия из [2] (см. также [6]), получим, что если $g(z) = \dfrac{f(z)}{\pi_\gamma(z, z_k)}$, $z \in \mathbf{D}$, то $T_\alpha(r, g) \lesssim T_\alpha(r, \pi_\gamma) + T_\alpha(r, f)$. Поэтому из условия f, $\pi_\gamma \in N^p_{\alpha,\beta}$, следует, что $g \in N^p_{\alpha,\beta}$, α, $\beta > -1$, $0 < p < +\infty$.

Таким образом,

$$f(z) = \pi_\gamma(z, z_k)\; g(z), \tag{22}$$

где $\pi_\gamma(z, z_k)$, $g \in S^p_{\alpha,\beta}$, $g(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}$. Но по теореме 1 $S^p_{\alpha,\beta} \subset N^p_{\alpha,\beta}$, поэтому функции π_γ и g принадлежат также классу $N^p_{\alpha,\beta}$.

Чтобы установить утверждение теоремы, остается показать, что если $g \in N^p_{\alpha,\beta}$, $g(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}$, то $g \in S^p_{\alpha,\beta}$. Для этого нужно установить оценку

$$\int_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} T^p(r, g)dr \lesssim \int_0^1 (1-r)^\beta\, T^p_\alpha(r, g)dr$$

при всех $-1 < \alpha$, $\beta < +\infty$, $0 < p < +\infty$, $g(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D}$, $g \in H(\mathbf{D})$.

Для краткости положим

$$A(g) := \int_0^1 (1-r)^\beta T^p_\alpha(r, g)dr. \tag{23}$$

Пусть $g(z) = e^{u(z)+iv(z)}$, $z \in \mathbf{D}$. Тогда условие (23) означает

$$A(g) = \int_0^1 (1-r)^\beta \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 (1-t)^\alpha u(tre^{i\varphi})dt \right)^+ \right)^p dr < +\infty.$$

Учитывая, что функция $u_\alpha(z) = \int\limits_0^1 (1-t)^\alpha u(tre^{i\varphi})dt$ является гармонической в $\mathbf{D}$, и применяя теорему о среднем, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_\alpha(re^{i\varphi})d\varphi = u_\alpha(0) = \frac{u(0)}{\alpha+1}.$$

Поэтому используя равенство

$$\begin{aligned} u_\alpha(re^{i\varphi}) = \max\big(u_\alpha(re^{i\varphi}), 0\big) + \max\big(-u_\alpha(re^{i\varphi}), 0\big) := \\ := u^+_\alpha(re^{i\varphi}) + u^-_\alpha(re^{i\varphi}), \end{aligned} \tag{24}$$

получаем

$$\begin{aligned}(25)\qquad &\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{\alpha}u_{\alpha}(rte^{i\varphi})dt\right)^{+}d\varphi=\\ &=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{\alpha}u_{\alpha}(rte^{i\varphi})dt\right)^{-}d\varphi+u_{\alpha}(0).\end{aligned}$$

Из последнего равенства и из (23), получаем

$$(26)\qquad \int\limits_{0}^{1}(1-r)^{\beta}\left(\int\limits_{0}^{2\pi}\left|\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{\alpha}u(rte^{i\varphi})dt\right|d\varphi\right)^{p}dr\le 2A(g).$$

Таким образом, функция $u_\alpha(z)$ принадлежит известному классу h^p_β, $0<p<+\infty$ (см. [4], гл.2, а также [7]). Согласно теореме 2.11 (гл.2 из [4]) гармоническая функция $v_\alpha(z)$, сопряженная с u_α, тоже принадлежит классу h^p_β. Следовательно, функция $F_\alpha(z)=u_\alpha(z)+iv_\alpha(z)$, $z\in\mathbf{D}$, принадлежит классу A^p_β, т.е.

$$(27)\qquad \int\limits_{0}^{1}(1-r)^{\beta}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_{\alpha}(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^{p}d\rho<+\infty.$$

Но используя представление (22), нетрудно заметить, что

$$(28)\qquad F_{\alpha}(z)=\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{\alpha}\ln g(tz)dt,\ \ z\in\mathbf{D},$$

где выбрана главная ветвь логарифмической функции.

Положим $G(z)=\ln(g(z))$, $z\in\mathbf{D}$, тогда

$$(29)\qquad F_{\alpha}(z)=\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{\alpha}G(tz)dt,\ \ z\in\mathbf{D}.$$

Пусть $G(w)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k w^k,\ \ w\in\mathbf{D}$. Из представления (29) имеем

$$(30)\qquad F_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k z^k\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{\alpha}t^k dt=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}a_k z^k,\ \ z\in\mathbf{D}.$$

Очевидно, что

$$(31)\qquad G(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k z^k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbf{D}}\frac{F_{\alpha}(t)}{(1-\bar{t}z)^{\alpha+2}}dm_2(t).$$

Но поскольку $F_\alpha(t) = \dfrac{\gamma+1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbf{D}} \dfrac{(1-|\zeta|^2)^\gamma F_\alpha(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}t)^{\gamma+2}} dm_2(\zeta)$ (см. [4] гл.2), подставив в (30) указанное представление, получим

$$G(z) = C(\alpha,\gamma)\int\limits_{\mathbf{D}}\int\limits_{\mathbf{D}} \frac{F_\alpha(\zeta)(1-|\zeta|^2)^\gamma}{(1-\bar{\zeta}t)^{\gamma+2}(1-\bar{t}z)^{\alpha+2}} dm_2(t)dm_2(\zeta) =$$

$$= C(\alpha,\gamma)\int\limits_{\mathbf{D}} F_\alpha(\zeta)(1-|\zeta|^2)^\gamma \int\limits_{\mathbf{D}} \frac{1}{(1-\bar{\zeta}t)^{\gamma+2}(1-\bar{t}z)^{\alpha+2}} dm_2(t)dm_2(\zeta).$$

Как установлено в [7], последний интеграл модно записать в виде

$$\int\limits_{\mathbf{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^\gamma P(\bar{\zeta}\cdot z)F_\alpha(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}z)^{\gamma+3+\alpha}} dm_2(\zeta),$$

где $P(w)$ - некоторый многочлен порядка $m = m(\alpha,\gamma)$.

Таким образом, окончательно получаем

$$G(z) = \int\limits_{\mathbf{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^\gamma P(\bar{\zeta}\cdot z)F_\alpha(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}z)^{\gamma+3+\alpha}} dm_2(\zeta), \tag{32}$$

где γ - достаточно большое положительное число, F_α удовлетворяет условию (27).

Применяя представление (32), получаем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G(re^{i\varphi})\right| d\varphi \le \int\limits_{\mathbf{D}} (1-|z|^2)^\gamma \left|F_\alpha(\zeta)\right| \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\left|1-re^{i\varphi}\bar{\zeta}\right|^{\gamma+3+\alpha}} d\varphi\right) dm_2(\zeta).$$

Теперь учитывая хорошо известную оценку (см [4], гл.2)

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\left|1-re^{i\varphi}\bar{\zeta}\right|^{\gamma+\alpha+3}} d\varphi \le \frac{1}{(1-r\rho)^{\gamma+\alpha+2}}, \tag{33}$$

получаем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G(re^{i\varphi})\right| d\varphi \lesssim \int\limits_{\mathbf{D}} \frac{(1-|z|^2)^\gamma \left|F_\alpha(\zeta)\right|}{(1-r|\zeta|)^{\gamma+\alpha+2}} dm_2(\zeta),$$

т.е.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G(re^{i\varphi})\right| d\varphi \lesssim \left(\int\limits_{0}^{1} \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho\right) =$$

$$= \left(\int\limits_{0}^{r} \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{r}^{1} \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho\right) =$$

$$= C\left(I_1(r) + I_2(r)\right). \tag{34}$$

Пусть $J(r) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G(re^{i\varphi})\right| d\varphi$. Предположим, что $1 < p < +\infty$. Тогда

$$\int\limits_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} J^p(r)dr \le C \left(\int\limits_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} I_1^p(r)dr + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} I_2^p(r)dr \right). \tag{35}$$

Оценим каждый из этих интегралов по отдельности. Сначала оценим интеграл от I_2^p. Имеем

$$\int\limits_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} I_2^p(r)dr = \int\limits_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_r^1 \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho \right)^p dr =$$

$$= \int\limits_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} \frac{1}{(1-r)^{p(\gamma+\alpha+2)}} \left(\int\limits_r^1 (1-\rho^2)^\gamma \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi \right)^p dr \le$$

$$= \int\limits_0^1 (1-r)^{\beta-p(\gamma+1)} \left(\int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho \right)^p dr \tag{36}$$

Применяя неравенство Гёльдера с весом $(1-\rho)^\gamma$, получаем

$$\left(\int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho \right)^p \le \int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|F\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi \right)^p \times$$

$$\times \left(\int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma d\rho \right)^{p/q},$$

где $q = \dfrac{p}{p-1}$. Следовательно,

$$\left(\int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho \right)^p \le (1-r)^{(\gamma+1)(p-1)} \int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma \times$$

$$\times \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi \right)^p d\rho.$$

Теперь возвращаясь к оценке (ref 36), получаем

$$\int\limits_0^1 (1-r)^{\beta-p(\gamma+1)} \left(\int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho \right)^p dr \le$$

$$\leq \int\limits_0^1 (1-r)^{\beta-\gamma-1} \int\limits_r^1 (1-\rho)^{\gamma} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| F_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p d\rho dr.$$

Поменяв порядок интегрирования в последнем интеграле, получаем:

$$\int\limits_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} \left(\int\limits_r^1 \frac{(1-\rho^2)^{\gamma}}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| F_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi d\rho \right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 (1-\rho)^{\beta} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| F_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p d\rho. \tag{37}$$

Остается оценить интеграл $I_1^p(r)$. Используя тот факт, что интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| F_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi$ является монотонно растущей функцией от ρ, получим

$$\int\limits_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} \left(\int\limits_0^r \frac{(1-\rho^2)^{\gamma}}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| F_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi d\rho \right)^p dr \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| F_\alpha(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p dr \left(\int\limits_0^r \frac{(1-\rho^2)^{\gamma}}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} d\rho \right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| F_\alpha(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p \left(\frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}} \right)^p dr =$$

$$= \int\limits_0^1 (1-r)^{\beta} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| F_\alpha(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p dr.$$

Теорема доказана при $1 < p < +\infty$.

Перейдем к доказательству теоремы при $0 < p \leq 1$.

Используя оценку (34), имеем:

$$\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| G(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p \lesssim \left[\left(\int\limits_0^r \frac{(1-\rho^2)^{\gamma}}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| F_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi d\rho \right)^p + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_r^1 \frac{(1-\rho^2)^{\gamma}}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| F_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \right| d\varphi d\rho \right)^p \right] :=$$

$$:= C \left(I_1^p(r) + I_2^p(r) \right). \tag{38}$$

Приступим к оценке $\int\limits_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} J^p(r) dr$, где $J(r) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| G(re^{i\varphi}) \right| d\varphi$.

Учитывая (36), имеем

$$\int_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} J^p(r)dr \lesssim \left(\int_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} I_1^p(r)dr + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} I_2^p(r)dr \right). \tag{39}$$

Сначала оценим последний интеграл, т.е.

$$\int_0^1 (1-r)^{\beta+p(\alpha+1)} \left(\int_r^1 \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho \right)^p dr.$$

Пусть $r_k = 1 - \dfrac{1}{2^k}$, $k = 0, 1, ...$ Предположим $r_n \le r < r_{n+1}$, тогда

$$\int_r^1 \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho \le$$

$$\le \frac{2^\gamma}{(1-r)^{\gamma+\alpha+2}} \int_r^1 (1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho \le$$

$$\le \frac{2^\gamma}{(1-r)^{\gamma+\alpha+2}} \int_{r_n}^1 (1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho \le$$

$$\le \frac{2^\gamma}{(1-r)^{\gamma+\alpha+2}} \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{r_k}^{r_{k+1}} (1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho.$$

Теперь учитывая, что для произвольных $a, b \in \mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ выполняется неравенство $(a+b)^p \le a^p + b^p$, имеем:

$$I_2^p(r) \le \frac{2^\gamma}{(1-r)^{p(\gamma+\alpha+2)}} \left(\int_r^1 (1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho \right)^p \le$$

$$\le \frac{2^\gamma}{(1-r)^{p(\gamma+\alpha+2)}} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \int_{r_k}^{r_{k+1}} (1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho \right)^p.$$

Перейдем к оценке интеграла

$$J_k = \left(\int_{r_k}^{r_{k+1}} (1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho \right)^p, \;\; n \le k < +\infty, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Учитывая, что функция $\psi(\rho) := \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi$ - монотонно растущая на Δ (см. [1]), получаем

$$J_k \le \frac{1}{\gamma+1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(r_{k+1}e^{i\varphi})\right| d\varphi\right)^p \left[(1-r_k)^{\gamma+1}-(1-r_{k+1})^{\gamma+1}\right]^p \le$$

$$\le \frac{1}{\gamma+1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(r_{k+1}e^{i\varphi})\right| d\varphi\right)^p \left[\frac{1}{2^{k(\gamma+1)}}-\frac{1}{2^{(k+1)(\gamma+1)}}\right]^p \le$$

$$= \frac{1}{(\gamma+1)2^{k(\gamma+1)p}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(r_{k+1}e^{i\varphi})\right| d\varphi\right)^p \left[\frac{2^{\gamma+1}-1}{2^{\gamma+1}}\right]^p \lesssim$$

$$\lesssim \frac{1}{2^{k(\gamma+1)p}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(r_{k+1}e^{i\varphi})\right| d\varphi\right)^p. \tag{40}$$

Снова используя свойство функции $\psi(\rho)$, $\rho\in\Delta$, получаем

$$J_k \lesssim (\gamma)\int\limits_{r_{k+1}}^{r_{k+2}}(1-\rho)^{(\gamma+1)p-1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi\right)^p d\rho.$$

Следовательно, учитывая (40), получаем

$$I_2^p(r) \lesssim (\gamma)\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{(1-r)^{p(\gamma+\alpha+2)}}\int\limits_{r_{k+1}}^{r_{k+2}}(1-\rho)^{(\gamma+1)p-1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi\right)^p d\rho \lesssim$$

$$\lesssim (\gamma)\frac{1}{(1-r)^{p(\gamma+\alpha+2)}}\int\limits_{r}^{1}(1-\rho)^{(\gamma+1)p-1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi\right)^p d\rho.$$

Тогда из (40) выводим

$$\int\limits_0^1(1-r)^{\beta+p(\alpha+1)}\left(\int\limits_r^1\frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-r\rho)^{\gamma+\alpha+2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho\right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1(1-r)^{\beta-p(\gamma+1)}\int\limits_r^1(1-\rho)^{(\gamma+1)p-1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi\right)^p d\rho dr \tag{41}$$

Перейдем к оценке последнего интеграла. Проинтегрируем его по частям

$$\int\limits_0^1(1-r)^{\beta-p(\gamma+1)}\int\limits_r^1(1-\rho)^{(\gamma+1)p-1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi\right)^p d\rho dr =$$

$$= \frac{1}{\beta-p(\gamma+1)}\int\limits_0^1(1-r)^{p(\gamma+1)-1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi\right)^p dr+$$

$$+\frac{1}{p(\gamma+1)-\beta}\int\limits_0^1(1-r)^\beta\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr.$$

Ввиду того, что γ можно подобрать достаточно большим, в частности, $\gamma > \dfrac{\beta}{p+1}$, получаем

$$\int\limits_0^1(1-r)^{\beta+p(\alpha+1)}\left(\int\limits_r^1\frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-r\rho)^{\gamma+\alpha+2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)^p dr \le$$

$$\lesssim(\gamma)\int\limits_0^1(1-r)^\beta\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p. \tag{42}$$

Для доказательства теоремы остается получить аналогичную оценку для интеграла

$$\int\limits_0^1(1-r)^{\beta+p(\alpha+1)}\left(\int\limits_0^r\frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-r\rho)^{\gamma+\alpha+2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)^p dr.$$

Снова используя монотонность функции $\psi(\rho)$ на Δ, имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi \le \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(re^{i\varphi})\right|d\varphi$$

при $0\le\rho\le r<1$.

Поэтому из (42), получаем

$$\int\limits_0^1(1-r)^{\beta+p(\alpha+1)}I_1^p(r)dr\lesssim$$

$$\lesssim\int\limits_0^1(1-r)^{\beta+p(\alpha+1)}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p\left(\int\limits_0^r\frac{1}{(1-\rho^2)^{\alpha+2}}d\rho\right)^p dr\le$$

$$\lesssim\int\limits_0^1(1-r)^\beta\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|F_\alpha(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr. \tag{43}$$

Объединяя оценки (42) и (43), окончательно получаем

$$\int\limits_0^1(1-r)^{\beta+p(\alpha+1)}T^p(r,f)dr\le C\int\limits_0^1(1-r)^\beta T_\alpha^p(r,f)dr.$$

Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно доказать аналоги теорем 1-3 для соответствующих классов мероморфных в круге функций,если воспользоваться результатами, изложенными в 3-й главе монографии [4].

References

[1] W. K. Hayman, *Meromorfhic functions,* Oxford, 1964. MR0164038

[2] M.M. Dzhrbashyan, *On the parametric representation of certain general classes of meromorphic functions in the unit circle*, Dokl. Akad Nauk SSSR, **157**:5 (1964), 1024–1027. Zbl 0143.09801

[3] F.A. Shamoyan, *Parametric representation and description of the top sets of weighted classes of holomorphic functions in the disk*, Siberian Mathematical Journal, **40**:6 (1999), 1422–1440. MR1741095

[4] F.A. Shamoyan, E.N. Shubabko, *Introduction to the theory of weighted L^p - classes of meromorphic functions*, Bryansk State University, 2009.

[5] I. Stein, *Singular integrals and the differentiability properties of functions*, M: Mir. 1973. MR0348563

[6] M.M. Dzhrbashyan, *Integral transforms and representations of functions in the complex domain*, M.: Nauka, 1966. Zbl 0154.37702

[7] O.E. Antonenkova, F.A. Shamoyan, *The Cauchy transform of continuous linear functionals and projections on the weighted spaces of analytic functions* , Siberian math.j., **46**:6 (2005), 1208–1234. MR2195025

Faizo A. Shamoyan,Vera A.Bednazh, Olga V. Karbanovich
Bryansk State University
Bezhitskaya,14,
241036, Bryansk, Russia
E-mail address: shamoyanfa@yandex.ru, verabednazh@rambler.ru, olyaprix@mail.ru