S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 168–184 (2015) УДК 517.984
DOI 10.17377/semi.2015.12.014 MSC 81Q10

СПЕКТР ОДНОГО ТРЕХЧАСТИЧНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА РЕШЕТКЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Т.Х. РАСУЛОВ, З.Д. РАСУЛОВА

Abstract. A model operator H associated to a system of three particles on a d-dimensional lattice that interact via non-local potentials is considered. The channel operators are identified. An analogue of the Faddeev equation for the eigenfunctions of H is constructed and the spectrum of H is described. The location of the essential spectrum of H is described by the spectrum of channel operators. It is shown that the essential spectrum of H consists the union of at most $2n+1$ bounded closed intervals, where n is the rank of the kernel of non-local interaction operators. The upper bound of the spectrum of H is found. The lower bound of the essential spectrum of H for the case $\mathrm{d}=1$ is estimated.

Keywords: model operator, discrete Schrödinger operator, non-local interaction operators, Hubbard model, channel operator, Hilbert-Schmidt class, Faddeev equation, essential and discrete spectrum.

1. Введение

В последние годы заметно возрос интерес к исследованию операторов Шредингера (гамильтонианов), описывающих поведение решетчатых квантовых частиц. Один из важных вопросов в теории операторов Шредингера – описание существенного спектра и изучение числа собственных значений (связанных состояний), лежащих вне существенного спектра. Исследованию спектров

Rasulov T.Kh., Rasulova Z.D., On the spectrum of a three-particle model operator on a lattice with non-local potentials.

Работа поддержана программой фонда Эйнштейна при международном математическом обществе.

Поступила 4 августа 2014 г., опубликована 14 марта 2015 г.

непрерывных (стандартных) и дискретных операторов Шредингера посвящены многие работы (см. например [1, 2, 3] и [4, 5], соотвественно). Причем потенциалы, рассматриваемые в работах [4, 5], являются локальными, т.е. операторами умножения на функцию в координатном представлении. В монографии [1] изучены спектральные свойства некоторых многочастичных гамильтонианов, в частности, местоположение существенного спектра, а также конечность или бесконечность дискретного спектра таких гамильтонианов.

В настоящей работе изучен модельный оператор H, ассоциированный с гамильтонианом системы трех квантовых частиц, движущихся на d-мерной решетке и взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов, который возникает в модели Хаббарда [6, 7, 8] на примесной решетке. Здесь ядра нелокальных операторов взаимодействия имеют ранг $n \geq 3$ и роль двухчастичного дискретного оператора Шредингера играет модель Фридрихса. Напомним, что для периодического оператора нелокальные потенциалы [9] представляют собой сумму локального потенциала и некоторого конечномерного оператора. Отметим, что для многочастичных гамильтонианов нелокальные потенциалы в импульсном представлении являются частично-интегральными операторами. При этом получено очень мало результатов для таких гамильтонианов в том случае, когда ядро частично-интегрального оператора является невырожденным. В настоящее время представляет интерес получение точных результатов хотя бы для частных случаев, т.е. для нелокальных потенциалов с вырожденными ядрами. Так как двухчастичные и трехчастичные уравнения Шредингера легко разрешимы для нелокальных взаимодействий, их часто используют в ядерной физике и в многочастичных проблемах. Они также используются систематически вместе с уравнениями Фаддеева для систем трех частиц.

Спектральные свойства модельных операторов, ассоциированных с системой трех частиц на решетке, взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов, в случаях $n = 1$ и $n = 2$ изучены в работах [10, 11, 12] и [13], соответственно. Настоящая статья продолжает исследования, предпринятые в вышеупомянутых работах. При этом результаты, полученные ранее для $n = 1, 2$, переносятся здесь на $n \geq 3$. Кроме того, формулируются и доказываются несколько новых дополнительных утверждений.

Целью данной работы является решение следующих задач:

– выделить канальные операторы и изучить их спектр;

– получить аналог уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H;

– описать местоположение существенного спектра оператора H через спектры канальных операторов и доказать, что существенный спектр этого оператора состоит из объединения не более, чем $2n + 1$ отрезков;

– найти верхнюю грань спектра оператора H;

– изучить нижнюю грань существенного спектра оператора H в случае $\mathrm{d} = 1$ для специальных классов параметр-функций этого оператора.

В последующих параграфах мы подробно обсудим все эти вопросы. Отметим, что некоторые результаты данной работы представлены без доказательства в работе [14].

Структура статьи следующая. В параграфе 2 модельный оператор рассматривается как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и формулируются основные результаты работы. В параграфе 3 с использованием разложения в прямой операторный интеграл изучение спектральных свойств канальных операторов сводится к изучению спектральных свойств модели Фридрихса. Затем описывается спектр этих канальных операторов. В параграфе 4 построен аналог уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H. В параграфе 5 изучено местоположение существенного спектра оператора H. Параграф 6 посвящен исследованию нижней грани существенного спектра в случае $\mathrm{d} = 1$.

2. Модельный оператор и формулировка основных результатов

Через $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначим множества всех комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел, соответственно. Пусть $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi; \pi]^{\mathrm{d}}$ - d-мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^{\mathrm{d}}$. Например, если

$$a = (\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}),\ b = (\frac{2\pi}{3}, \ldots, \frac{2\pi}{3}) \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}},$$

то

$$a + b = (-\frac{5\pi}{6}, \ldots, -\frac{5\pi}{6}),\ 6a = (\pi, \ldots, \pi) \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}.$$

Пусть $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^{\alpha})$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^{\alpha}$, $\alpha = 1, 2$. В гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ рассмотрим модельный оператор H действующий по формуле

$$H := H_0 - V_1 - V_2,$$

где H_0 – оператор умножения на функцию $w(\cdot, \cdot)$ в $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$, а V_α, $\alpha = 1, 2$, – нелокальные операторы взаимодействия вида

$$(V_1 f)(p, q) = \sum_{i=1}^{n} v_{1i}(q) \int v_{1i}(t) f(p, t) dt, \quad f \in L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2),$$

$$(V_2 f)(p, q) = \sum_{i=1}^{n} v_{2i}(p) \int v_{2i}(t) f(t, q) dt, \quad f \in L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2).$$

При этом $n \in \mathbb{N}$, а $v_{\alpha i}(\cdot)$, $\alpha = 1, 2$, $i = 1, \ldots, n$ и $w(\cdot, \cdot)$ -вещественнозначные, непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$, соответственно. Операторы V_1 и V_2 являются частичными интегральными операторами с вырожденными ядрами ранга n.

Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

В этих предположениях оператор H является ограниченным и самосопряженным в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$.

Далее, если не оговорено противное, предполагается, что число α принимает значения 1 и 2.

Обозначим через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\mathrm{disc}}(\cdot)$, соответствено, спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора.

Для формулировки основных результатов работы сначала положим
$$w_1(p,q) := w(p,q), \quad w_2(p,q) := w(q,p).$$
Затем, наряду с оператором H, рассмотрим также оператор H_α, действующий в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ по формуле
$$H_\alpha := H_0 - V_\alpha,$$
и семейство моделей Фридрихса $h_\alpha(p)$, $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, действующих в $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ по формуле
$$h_\alpha(p) := h_\alpha^0(p) - v_\alpha,$$
где операторы $h_\alpha^0(p)$, $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, и v_α определяются по правилам:
$$(h_\alpha^0(p)f_\alpha)(q) = w_\alpha(p,q)f_\alpha(q), \quad f_\alpha \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}),$$
$$(v_\alpha f_\alpha)(q) = \sum_{i=1}^n v_{\alpha i}(q) \int v_{\alpha i}(t) f_\alpha(t)dt, \quad f_\alpha \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}).$$

Отметим, что операторы H_α и $h_\alpha(p)$ являются ограниченными и самосопряженными в $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ и $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$, соответственно.

Оператор возмущения v_α оператора $h_\alpha^0(p)$ является самосопряженным оператором ранга не более, чем n. Из известной теоремы Г. Вейля [1] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр $\sigma_{\mathrm{ess}}(h_\alpha(p))$ оператора $h_\alpha(p)$ совпадает с существенным спектром оператора $h_\alpha^0(p)$. Известно, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(h_\alpha^0(p)) = [m_\alpha(p), M_\alpha(p)]$, где числа $m_\alpha(p)$ и $M_\alpha(p)$ определяются равенствами
$$m_\alpha(p) := \min_{q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_\alpha(p,q), \quad M_\alpha(p) := \max_{q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_\alpha(p,q).$$

Из последних двух фактов следует, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(h_\alpha(p)) = [m_\alpha(p), M_\alpha(p)]$.

Отметим, что для некоторого $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ существенный спектр оператора $h_\alpha(p)$ может превратиться в точку $\{m_\alpha(p)\}$ и, следовательно, для любого $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ мы не можем сказать, что существенный спектр оператора $h_\alpha(p)$ является абсолютно непрерывным. Например, если функция $w(\cdot,\cdot)$ имеет вид
$$w(p,q) = \sum_{i=1}^{\mathrm{d}} (3 - \cos(p_i) - \cos(p_i + q_i) - \cos(q_i)), \quad q = (q_1, \ldots, q_{\mathrm{d}}) \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}},$$
и $p = \overline{\pi} := (\pi, \ldots, \pi) \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, то $\sigma_{\mathrm{ess}}(h_\alpha(\overline{\pi})) = \{4\mathrm{d}\}$.

При каждом фиксированном $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ определим регулярные в области $\mathbb{C} \setminus [m_\alpha(p), M_\alpha(p)]$ функции
$$I_{ij}^{(\alpha)}(p\,;z) := \int \frac{v_{\alpha i}(t) v_{\alpha j}(t)dt}{w_\alpha(p,t) - z}, \quad i,j = 1, \ldots, n,$$
$$\Delta_\alpha(p\,;z) := \det \left(\delta_{ij} - I_{ij}^{(\alpha)}(p\,;z)\right)_{i,j=1}^n,$$
где
$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, \text{ если } i = j \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases}.$$
Видно, что $I_{ij}^{(\alpha)}(p\,;z) = I_{ji}^{(\alpha)}(p\,;z)$ при всех $i,j = 1, \ldots, n$. Функция $\Delta_\alpha(p\,;\cdot)$ называется детерминантом Фредгольма, ассоциированным с оператором $h_\alpha(p)$. Тогда имеет место равенство (см. лемму 1)
$$\sigma_{\mathrm{disc}}(h_\alpha(p)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m_\alpha(p), M_\alpha(p)] : \Delta_\alpha(p\,;z) = 0\}.$$

Положим

$$m := \min_{p,q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w(p,q), \quad M := \max_{p,q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w(p,q), \quad \sigma_\alpha := \bigcup_{p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \sigma_{\mathrm{disc}}(h_\alpha(p)).$$

Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Для спектра оператора H_α имеет место равенство*

$$\sigma(H_\alpha) = \sigma_\alpha \cup [m, M].$$

Пусть

$$L_2^{(n)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) := \{g = (g_1, \dots, g_n) : g_i \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}),\ i = 1, \dots, n\},$$
$$L_2^{(2n)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) := L_2^{(n)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \oplus L_2^{(n)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}).$$

При каждом $z \in \mathbb{C} \setminus [m, M]$ вводим блочно-операторные матрицы $A(z)$ и $K(z)$, действующие в пространстве $L_2^{(2n)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ по формулам

$$A(z) := \begin{pmatrix} A_1(z) & 0 \\ 0 & A_2(z) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad K(z) := \begin{pmatrix} 0 & K_2(z) \\ K_1(z) & 0 \end{pmatrix},$$

где матричные элементы $A_\alpha(z)$ и $K_\alpha(z)$ также являются блочно-операторными матрицами, действующими в пространстве $L_2^{(n)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ по формуле

$$A_\alpha(z) := \left(A_{ij}^{(\alpha)}(z)\right)_{i,j=1}^n \quad \text{и} \quad K_\alpha(z) := \left(K_{ij}^{(\alpha)}(z)\right)_{i,j=1}^n.$$

Здесь для каждого $i, j = 1, \dots, n$ и $z \in \mathbb{C} \setminus [m, M]$ оператор

$$A_{ij}^{(\alpha)}(z) : L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \to L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$$

есть оператор умножения на функцию $\delta_{ij} - I_{ij}^{(\alpha)}(\cdot\,; z)$, а

$$K_{ij}^{(\alpha)}(z) : L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \to L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$$

есть интегральный оператор с ядром:

$$K_{ij}^{(\alpha)}(p, t\,; z) := \frac{v_{\beta j}(p) v_{\alpha i}(t)}{w_\alpha(p, t) - z},$$

где t-переменная интегрирования и $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2$.

Заметим, что при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus [m, M]$ интегральные операторы $K_{ij}^{(\alpha)}(z)$ принадлежат классу Гильберта-Шмидта, следовательно, $K(z)$ является компактным оператором.

Так как при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ оператор $A(z)$ является ограниченным и обратимым (см. лемму 3), для таких z мы можем определить блочно-операторную матрицу $T(z)$, действующую в пространстве $L_2^{(2n)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ как

$$T(z) := A^{-1}(z) K(z) = \begin{pmatrix} 0 & A_1^{-1}(z) K_2(z) \\ A_2^{-1}(z) K_1(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

Следующая теорема устанавливает связь между собственными значениями операторов H и $T(z)$.

Теорема 2. *Число $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $T(z)$ имеет собственное значение, равное единице, и их кратности совпадают.*

Пусть I - единичный оператор в $L_2^{(2n)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$. Из определения блочно-операторной матрицы $T(z)$ видно, что при каждом фиксированном $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ ядра элементов этой матрицы являются непрерывными в $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$. Поэтому (см. теорему XIII.106 [1]) определитель Фредгольма $D(z)$ оператора $I - T(z)$ существует и является аналитической функцией в $\mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$. В силу теоремы 2 и теоремы XIII.105 [1] имеем, что число $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда $D(z) = 0$, т.е.

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(H) = \{z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)) : D(z) = 0\}.$$

Теперь сформулируем результат, который описывает местоположение существенного спектра оператора H.

Теорема 3. *Существенный спектр оператора H совпадает с объединением спектров операторов H_1 и H_2, т.е. $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)$. Более того, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ представляет собой объединение не более $2n+1$ отрезков. Причем* $\max(\sigma_{\mathrm{ess}}(H)) = M$.

Множества $\sigma_1 \cup \sigma_2$ и $[m, M]$ называются двухчастичной и трехчастичной ветвями существенного спектра оператора H, соответственно.

Очевидно, что операторы H_1 и H_2 выбраны единственным образом из оператора H в силу свойства разложимости в прямой операторный интеграл (см. п. 3). Согласно теореме 3 операторы H_1 и H_2 обладают характеристическим свойством канального оператора соответствующего дискретного оператора Шредингера (см. например [4, 5]). По этой причине мы назовем их канальными операторами, соответствующими оператору H. Заметим, что канальные операторы H_1 и H_2 имеют более простую структуру, чем H, и поэтому теорема 3 играет важную роль при дальнейших исследованиях спектра оператора H.

Линейный ограниченный самосопряженный оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$–гильбертово пространство) называется положительным и пишется $A \geq 0$ или $0 \leq A$, если $(Af, f) \geq 0$ для всех $f \in \mathcal{H}$. Так как $V_1 + V_2 \geq 0$ и $\max(\sigma_{\mathrm{ess}}(H)) = \max(\sigma(H_0)) = M$, для любых $z > M$ и $f \in L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ имеет место соотношение

$$((H - z)f, f) = ((H_0 - z)f, f) - ((V_1 + V_2)f, f) < 0,$$

т.е. оператор H не имеет собственных значений больших, чем M. Поэтому $\max(\sigma(H)) = M$.

Таким образом, собственные значения оператора H могут лежать только левее точки m. Следует отметить, что в работе [12] методом асимптотики исследовано бесконечное множество собственных значений оператора H, лежащих левее существенного спектра (эффект Ефимова), в случае, когда $n = 1$, $\mathrm{d} = 3$ и параметр-функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет вид:

$$w(p, q) = \sum_{i=1}^{3} (3 - \cos(mp_i) - \cos(m(p_i + q_i)) - \cos(mq_i)), \quad m \in \mathbb{N}.$$

А в работе [15] с использованием инструментов принципа минимакса для ограниченных самосопряженных операторов и свойств положительных интегральных операторов, изучено существование эффекта Ефимова для оператора H, когда ядра оператора V_1 и V_2 являются невырожденными.

3. Спектры операторов H_α и $h_\alpha(p)$

В этом пункте с использованием разложения в прямой операторный интеграл фон Неймана изучение спектральных свойств оператора канала H_α сводится к изучению спектральных свойств модели Фридрихса $h_\alpha(p)$. Затем описывается дискретный спектр оператора $h_\alpha(p)$ и доказывается теорема 1.

Легко можно проверить, что оператор H_1 (соот. H_2) коммутирует с любым оператором умножения на ограниченную функцию $u_1(p)$ (соот. $u_2(q)$) в $L_2((\mathbb{T}^{\rm d})^2)$.

Из разложения в прямой интеграл пространства $L_2((\mathbb{T}^{\rm d})^2)$:

$$L_2((\mathbb{T}^{\rm d})^2) = \int \oplus L_2(\mathbb{T}^{\rm d}) dp \tag{1}$$

следует, что оператор H_α может быть разложен в прямой операторный интеграл

$$H_\alpha = \int \oplus h_\alpha(p) dp.$$

Отметим, что в разложении (1) под знаком прямого интеграла стоят одинаковые слои.

Установим связь между собственными значениями оператора $h_\alpha(p)$ и нулями функции $\Delta_\alpha(p\,;\cdot)$.

Лемма 1. *При каждом фиксированном $p \in \mathbb{T}^{\rm d}$ число $z \in \mathbb{C} \setminus [m_\alpha(p), M_\alpha(p)]$ является собственным значением оператора $h_\alpha(p)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\alpha(p\,; z) = 0$.*

Доказательство. Пусть число $z \in \mathbb{C} \setminus [m_\alpha(p), M_\alpha(p)]$ есть собственное значение оператора $h_\alpha(p)$, а $f_\alpha \in L_2(\mathbb{T}^{\rm d})$ - соответствующая собственная функция. Тогда функция f_α удовлетворяет уравнению

$$w_\alpha(p,q) f_\alpha(q) - \sum_{i=1}^{n} v_{\alpha i}(q) \int v_{\alpha i}(t) f_\alpha(t) dt = z f_\alpha(q). \tag{2}$$

Заметим, что для любых $z \in \mathbb{C} \setminus [m_\alpha(p), M_\alpha(p)]$ и $q \in \mathbb{T}^{\rm d}$ имеет место соотношение $w_\alpha(p,q) - z \neq 0$. Тогда из уравнения (2) для f_α имеем

$$f_\alpha(q) = \frac{1}{w_\alpha(p,q) - z} \sum_{i=1}^{n} C_{\alpha i} v_{\alpha i}(q), \tag{3}$$

где

$$C_{\alpha i} := \int v_{\alpha i}(t) f_\alpha(t) dt, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Подставляя выражение (3) для f_α в равенства (4), получим, что уравнение (2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} (\delta_{1j} - I_{1j}^{(\alpha)}(p\,; z)) C_{\alpha j} = 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (\delta_{2j} - I_{2j}^{(\alpha)}(p\,; z)) C_{\alpha j} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (\delta_{nj} - I_{nj}^{(\alpha)}(p\,; z)) C_{\alpha j} = 0 \end{cases}$$

или матричное уравнение

$$\left(\delta_{ij} - I_{ij}^{(\alpha)}(p\,;z)\right)_{i,j=1}^{n} \begin{pmatrix} C_{\alpha 1} \\ \vdots \\ C_{\alpha n} \end{pmatrix} = 0$$

имеют ненулевое решение $(C_{\alpha 1}, \ldots, C_{\alpha n}) \in \mathbb{C}^n$, т.е. когда $\Delta_\alpha(p\,;z) = 0$, где $\mathbb{C}^n$ - декартова n-ная степень множества $\mathbb{C}$. Лемма 1 доказана. $\square$

Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и ограниченного самосопряженного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, обозначим через $\mathcal{H}_A(\lambda)$ такое подпространство, что $(Af, f) < \lambda \|f\|$ для любого $f \in \mathcal{H}_A(\lambda)$, и положим

$$N(\lambda, A) := \sup_{\mathcal{H}_A(\lambda)} \dim(\mathcal{H}_A(\lambda)).$$

Число $N(\lambda, A)$ равно бесконечности, если $\lambda > \min \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ и если число $N(\lambda, A)$ конечно, то оно равно числу собственных значений оператора A (с учетом кратности), меньших чем λ.

Следующая лемма описывает число и местонахождение собственных значений оператора $h_\alpha(p)$.

Лемма 2. *При каждом фиксированном $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ оператор $h_\alpha(p)$ может иметь не более, чем n собственных значений (с учетом кратности), лежащих левее $m_\alpha(p)$ и не имеет собственных значений, лежащих правее $M_\alpha(p)$.*

Доказательство. Так как v_α является n-мерным оператором в силу теоремы 9.3.3 из книги [16] имеем

$$N(m_\alpha(p), h_\alpha^0(p)) - n \leq N(m_\alpha(p), h_\alpha(p)) \leq N(m_\alpha(p), h_\alpha^0(p)) + n,$$
$$N(-M_\alpha(p), -h_\alpha^0(p)) - n \leq N(-M_\alpha(p), -h_\alpha(p)) \leq N(-M_\alpha(p), -h_\alpha^0(p)) + n.$$

Учитывая равенства $\sigma(h_\alpha^0(p)) = [m_\alpha(p), M_\alpha(p)]$, получим, что

$$N(m_\alpha(p), h_\alpha^0(p)) = N(-M_\alpha(p), -h_\alpha^0(p)) = 0.$$

Следовательно, $N(m_\alpha(p), h_\alpha(p)) \leq n$.

Из $v_\alpha \geq 0$ следует, что при всех $z > M_\alpha(p)$ и $f_\alpha \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ имеет место соотношение

$$((h_\alpha(p) - z)f_\alpha, f_\alpha) = \int (w_\alpha(p,t) - z)|f_\alpha(t)|^2 dt - (v_\alpha f_\alpha, f_\alpha) < 0.$$

Это означает, что оператор $h_\alpha(p)$ не имеет собственных значений, лежащих правее $M_\alpha(p)$, т.е. $N(-M_\alpha(p), -h_\alpha(p)) = 0$. Лемма 2 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1. Применяя теорему о спектре разложимых операторов и учитывая равенства

$$\sigma(h_\alpha(p)) = \sigma_{\mathrm{disc}}(h_\alpha(p)) \cup [m_\alpha(p), M_\alpha(p)] \quad \text{и} \quad \bigcup_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} [m_\alpha(p), M_\alpha(p)] = [m, M],$$

мы приходим к утверждению теоремы 1. $\square$

4. Аналог уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H

В этом параграфе получен аналог системы интегральных уравнений Фаддеева и его симметризованный вариант для собственных функций оператора H, который играет важную роль при исследовании спектра этого оператора, т.е. доказана теорема 2. Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение.

Пусть

$$A_\alpha(p\,;z) := \Big(\delta_{ij} - I_{ij}^{(\alpha)}(p\,;z)\Big)_{i,j=1}^{n}, \quad \Delta_{ij}^{(\alpha)}(p\,;z) := (-1)^{i+j} M_{ij}^{(\alpha)}(p\,;z),$$

где $M_{ij}^{(\alpha)}(p\,;z)$–дополнительный минор, определитель матрицы, получающейся из матрицы $A_\alpha(p\,;z)$ путем вычёркивания i–й строки и j–го столбца ($i,j = 1,\ldots,n$).

Лемма 3. *При каждом $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ оператор $A(z)$ является ограниченным и обратимым. При этом*

$$A^{-1}(z) = \begin{pmatrix} A_1^{-1}(z) & 0 \\ 0 & A_2^{-1}(z) \end{pmatrix},$$

где $A_\alpha^{-1}(z)$ есть оператор умножения на матрицу

$$A_\alpha^{-1}(p\,;z) := \frac{1}{\Delta_\alpha(p\,;z)} \begin{pmatrix} \Delta_{11}^{(\alpha)}(p\,;z) & \Delta_{21}^{(\alpha)}(p\,;z) & \ldots & \Delta_{n1}^{(\alpha)}(p\,;z) \\ \Delta_{12}^{(\alpha)}(p\,;z) & \Delta_{22}^{(\alpha)}(p\,;z) & \ldots & \Delta_{n2}^{(\alpha)}(p\,;z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n}^{(\alpha)}(p\,;z) & \Delta_{2n}^{(\alpha)}(p\,;z) & \ldots & \Delta_{nn}^{(\alpha)}(p\,;z) \end{pmatrix}$$

Доказательство. Так как $A(z)$ является диагональным оператором, достаточно показать ограниченность и обратимость диагональных элементов $A_\alpha(z)$. По определению $A_\alpha(z)$ является оператором умножения на матрицу $A_\alpha(p\,;z)$.

Очевидно, что $A_\alpha(\cdot\,;z)$ есть матричнозначная непрерывная функция в компактном множестве $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ при каждом фиксированном $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_\alpha)$. Отсюда следует ограниченность $A_\alpha(z)$. Далее, учитывая соотношение $\det(A_\alpha(p\,;z)) = \Delta_\alpha(p\,;z)$ и $z \notin \sigma(H_\alpha)$ имеем $\det(A_\alpha(p\,;z)) \neq 0$. Следовательно, при каждом $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ матрица $A_\alpha(p\,;z)$ обратима. Теперь с помощью определения $A_\alpha(p\,;z)$ и матрицы алгебраических дополнений легко показывается, что оператор $A_\alpha^{-1}(z)$, определенный в лемме 3, является обратным к оператору $A_\alpha(z)$. Лемма 3 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ - собственное значение оператора H и $f \in L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ -соответствующая собственная функция. Тогда функция f удовлетворяет уравнению

$$(w(p,q)-z)f(p,q) - \sum_{i=1}^{n}\Big[v_{1i}(q)\int v_{1i}(t)f(p,t)dt + v_{2i}(p)\int v_{2i}(t)f(t,q)dt\Big] = 0. \tag{5}$$

Так как $z \notin [m, M]$, из уравнения (5) для f имеем равенство

$$f(p,q) = \frac{1}{w(p,q)-z}\sum_{i=1}^{n}\left[v_{1i}(q)g_{1i}(p) + v_{2i}(p)q_{2i}(q)\right], \tag{6}$$

где

$$g_{1i}(p) := \int v_{1i}(t) f(p,t) dt, \quad g_{2i}(p) := \int v_{2i}(t) f(t,p) dt, \quad i = 1, \dots, n. \tag{7}$$

При каждом $i, j = 1, \dots, n$, и $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2$, положим

$$\widehat{g}_{ij}^{(\alpha)}(p\,; z) := \int \frac{v_{\beta i}(t) g_{\alpha j}(t)}{w_\beta(p,t) - z} dt, \quad p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}, \quad z \notin [m, M].$$

Подставляя выражение (6) для f в равенство (7) получим, что система $2n$ линейных уравнений с $2n$ неизвестными

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (\delta_{1i} - I_{1i}^{(\alpha)}(p\,; z)) g_{\alpha i}(p) = \sum\limits_{j=1}^{n} v_{2j}(p) \widehat{g}_{1j}^{(\beta)}(p\,; z) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (\delta_{2i} - I_{2i}^{(\alpha)}(p\,; z)) g_{\alpha i}(p) = \sum\limits_{j=1}^{n} v_{2j}(p) \widehat{g}_{2j}^{(\beta)}(p\,; z) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (\delta_{ni} - I_{ni}^{(\alpha)}(p\,; z)) g_{\alpha i}(p) = \sum\limits_{j=1}^{n} v_{2j}(p) \widehat{g}_{nj}^{(\beta)}(p\,; z) \end{cases}$$

(здесь $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2$) или матричное уравнение

$$A(z) g = K(z) g, \quad g = (g_{11}, \dots, g_{1n}, g_{21}, \dots, g_{2n}) \in L_2^{(2n)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \tag{8}$$

имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда уравнение (5) имеет нетривиальное решение и линейные подпространства, порожденные решениями уравнений (5) и (8), имеют одинаковые размерности.

По лемме 3 при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ оператор $A(z)$ обратим и, следовательно, уравнение $g = A^{-1}(z) K(z) g$, т.е. уравнение $g = T(z) g$ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда уравнение (8) имеет нетривиальное решение. Здесь вновь линейные подпространства, порожденные решениями уравнений (8) и $g = T(z) g$, имеют одинаковые размерности. Теорема 2 доказана. □

Операторное уравнение $T(z) g = g$ обычно называется аналогом уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H.

Можно показать, что при каждом $z < \min(\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ оператор $A(z)$ является строго положительным и, следовательно, существует его положительный квадратный корень $A^{-\frac{1}{2}}(z)$. Для таких z определим оператор $\widehat{T}(z) := A^{-\frac{1}{2}}(z) K(z) A^{-\frac{1}{2}}(z)$. Тогда операторное уравнение $\widehat{T}(z) g = g$ называется симметризованным вариантом уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H. Аналогично теореме 2 можно доказать, что число $z < \min(\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $\widehat{T}(z)$ имеет собственное значение, равное единице, и их кратности совпадают.

5. Существенный спектр оператора H

В этом параграфе, пользуясь утверждениями параграфов 3 и 4, а также критерием Вейля и теоремой о спектре разложимых операторов, докажем теорему 3.

Пусть I_α -единичный оператор в $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^\alpha)$.

Доказательство теоремы 3. Сначала докажем, что $\sigma(H_1)\cup\sigma(H_2)\subset\sigma_{\rm ess}(H)$. С этой целью множество $\sigma(H_1)\cup\sigma(H_2)$ перепишем в виде

$$\sigma(H_1)\cup\sigma(H_2)=\sigma_1\cup\sigma_2\cup[m,M].$$

Докажем, что $[m,M]\subset\sigma_{\rm ess}(H)$. Пусть $z_0\in[m,M]$ - произвольная точка. Покажем, что $z_0\in\sigma_{\rm ess}(H)$. Для этого удобно воспользоваться критерием Вейля [1], т.е. достаточно построить последовательность ортонормированных векторов $\{f_k\}\subset L_2((\mathbb{T}^{\rm d})^2)$, для которых $\|(H-z_0I_2)f_k\|\to 0$ при $k\to\infty$. Здесь и далее символ $\|\cdot\|$ означает норму в соответствующих гильбертовых пространствах.

Так как $w(\cdot,\cdot)$ - непрерывная функция в компактном множестве $(\mathbb{T}^{\rm d})^2$, существует точка $(p_0,q_0)\in(\mathbb{T}^{\rm d})^2$ такая, что $z_0=w(p_0,q_0)$.

При $k\in\mathbb{N}$ рассмотрим следующую окрестность точки $(p_0,q_0)\in(\mathbb{T}^{\rm d})^2$:

$$W_k:=V_k(p_0)\times V_k(q_0),$$

где

$$V_k(p_0):=\Big\{p\in\mathbb{T}^{\rm d}:\frac{1}{k+1}<|p-p_0|<\frac{1}{k}\Big\}$$

- выколотая окрестность точки $p_0\in\mathbb{T}^{\rm d}$.

Пусть $\mu(\Omega)$ - Лебегова мера множества Ω, $\chi_\Omega(\cdot)$ - характеристическая функция множества Ω.

Последовательность функций $\{f_k\}\subset L_2((\mathbb{T}^{\rm d})^2)$ выбираем следующим образом:

$$f_k(p,q):=\frac{1}{\sqrt{\mu(W_k)}}\chi_{W_k}(p,q).$$

Очевидно, что $\{f_k\}$ - ортонормированная последовательность.

При каждом $k\in\mathbb{N}$ рассмотрим $(H-z_0I_2)f_k$ и оценим ее норму:

$$\|(H-z_0I_2)f_k\|^2\le 2\sup_{(p,q)\in W_k}|w(p,q)-z_0|^2+$$

$$+4n\,\mu(V_k(p_0))\sum_{i=1}^n\Big[\|v_{1i}\|^2\max_{p\in\mathbb{T}^{\rm d}}|v_{1i}(p)|^2+\|v_{2i}\|^2\max_{q\in\mathbb{T}^{\rm d}}|v_{2i}(q)|^2\Big].$$

Из построения множества $V_k(p_0)$ и из непрерывности функции $w(\cdot,\cdot)$ следует, что $\|(H-z_0I_2)f_k\|\to 0$ при $k\to\infty$, т.е. $z_0\in\sigma_{\rm ess}(H)$. Из произвольности точки z_0 следует, что $[m,M]\subset\sigma_{\rm ess}(H)$.

Теперь докажем, что $\sigma_1\subset\sigma_{\rm ess}(H)$. Пусть $z_1\in\sigma_1$ - произвольная точка. Тогда по лемме 1 существует точка $p_1\in\mathbb{T}^{\rm d}$ такая, что $z_1\in\sigma_{\rm disc}(h_1(p_1))$. Поэтому существует ненулевая функция $\psi\in L_2(\mathbb{T}^{\rm d})$ такая, что

$$(h_1(p_1)-z_1I_1)\psi=0. \tag{9}$$

Положим

$$f_k(p,q):=\frac{\chi_{V_k(p_1)}(p)}{\sqrt{\mu(V_k(p_1))}}\frac{\psi(q)}{\|\psi\|}.$$

Легко можно проверить, что $\{f_k\}$ является ортонормированной системой. Покажем, что для системы $\{f_k\}$ при $z_1\in\sigma_1$ верно $\lim\limits_{k\to+\infty}\|(H-z_1I_2)f_k\|=0$. Заметим, что

$$\|(H-z_0I_2)f_k\|^2\le 2\int\Big|\sum_{i=1}^n v_{2i}(p)\int\frac{\chi_{V_k(p_1)}(t)v_{2i}(t)}{\sqrt{\mu(V_k(p_1))}}dt\Big|^2dp$$

$$+\frac{2}{\|\psi\|^2}\int\frac{\chi_{V_k(p_1)}(p)}{\mu(V_k(p_1))}\Big[\int\Big|(w(p,q)-z_1)\psi(q)-\sum_{i=1}^{n}v_{1i}(q)\int v_{1i}(t)\psi(t)dt\Big|^2dq\Big]dp.$$

Тогда существует число $C_n>0$ такое, что первое слагаемое можно оценить через $C_n\mu(V_k(p_1))$, которое по построению множества $V_k(p_1)$ стремится к нулю при $k\to+\infty$. Второе слагаемое оценим через

$$\int\frac{\chi_{V_k(p_1)}(p)}{\mu(V_k(p_1))}\|h_1(p)-z_1I_1\|^2dp\le\sup_{p\in V_k(p_1)}\|h_1(p)-z_1I_1\|^2.$$

В силу равенства (9) оценочное выражение стремится к нулю при $k\to+\infty$. Таким образом, $z_1\in\sigma_{\text{ess}}(H)$. Из произвольности точки $z_1\in\sigma_1$ вытекает, что $\sigma_1\subset\sigma_{\text{ess}}(H)$.

Включение $\sigma_2\subset\sigma_{\text{ess}}(H)$ доказывается аналогично.

Таким образом, мы доказали, что $\sigma(H_1)\cup\sigma(H_2)\subset\sigma_{\text{ess}}(H)$.

Теперь докажем обратное включение, а именно, $\sigma_{\text{ess}}(H)\subset\sigma(H_1)\cup\sigma(H_2)$. В силу компактности оператора $K(z)$ и ограниченности оператора $A^{-1}(z)$ получаем, что $T(z)$ - компактнозначная аналитическая функция в $\mathbb{C}\setminus(\sigma(H_1)\cup\sigma(H_2))$. Из самосопряженности оператора H и теоремы 2 следует, что операторнозначная функция $(I-T(z))^{-1}$ существует при всех $\mathrm{Im}z\ne0$. Согласно аналитической теореме Фредгольма ([1], теорема XIII.13) заключаем, что операторнозначная функция $(I-T(z))^{-1}$ существует на $\mathbb{C}\setminus(\sigma(H_1)\cup\sigma(H_2))$ всюду, за исключением дискретного множества S, где она имеет вычеты конечного ранга. Это означает, что $\sigma(H)\setminus(\sigma(H_1)\cup\sigma(H_2))$ состоит только из изолированных точек, которые могут иметь предельные точки только в граничных точках множества $\sigma(H_1)\cup\sigma(H_2)$. Отсюда имеем, что $\sigma(H)\setminus(\sigma(H_1)\cup\sigma(H_2))\subset\sigma(H)\setminus\sigma_{\text{ess}}(H)$, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(H)\subset\sigma(H_1)\cup\sigma(H_2)$. В итоге мы доказали, что $\sigma_{\text{ess}}(H)=\sigma(H_1)\cup\sigma(H_2)$.

В силу леммы 2 при каждом $p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ оператор $h_\alpha(p)$ имеет не более, чем n собственных значений (с учетом кратности), лежащих левее $m_\alpha(p)$, и не имеет собственных значений, лежащих правее $M_\alpha(p)$. Тогда в силу теоремы о спектре разложимых операторов из определения множества σ_α вытекает, что оно состоит из объединения не более, чем n отрезков, которые расположены левее точки M. Следовательно, множество $\sigma_{\text{ess}}(H)$ состоит из объединения не более чем $2n+1$ отрезков и $\max(\sigma_{\text{ess}}(H))=M$. Теорема 3 полностью доказана. □

6. Приложения: нижняя грань существенного спектра оператора H. Случай $\mathrm{d}=1$

В настоящем параграфе мы рассмотрим специальный класс параметр-функций $v_{\alpha i}(\cdot)$, $i=1,\ldots,n$ и $w(\cdot,\cdot)$, и получим оценку для нижней грани существенного спектра оператора H в случае $\mathrm{d}=1$.

Пусть $\mathrm{d}=1$ и $P_0\in(0,\pi]$ - фиксированный элемент. В этом параграфе предположим, что существуют числа $\alpha\in\{1,2\}$ и $j\in\{1,\ldots,n\}$ такие, что функция $v_{\alpha i}(\cdot)$ является P_0-периодической при всех $i\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{j\}$, а функция $v_{\alpha j}(\cdot)$ является аналитической в $\mathbb{T}$ и удовлетворяющей условию

$$\int v_{\alpha j}(t)g(t)dt=0 \tag{10}$$

для любой P_0-периодической функции $g\in L_2(\mathbb{T})$. Допустим также, что $w_\alpha(\cdot,\cdot)$ является аналитической функцией, являющейся P_0-периодической по второй переменной. Пусть существует конечное множество $\Lambda\subset\mathbb{T}$ такое, что функция $w_\alpha(\cdot,\cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках множества $\Lambda\times\Lambda$.

Следующий пример показывает непустоту класса функций $v_{\alpha i}(\cdot)$, $i=1,\ldots,n$, и $w(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющих вышеупомянутым условиям. Положим

$$v_{11}(x) := c_1\cos(x), \quad v_{1i}(x) := c_i(\cos(2x))^i, \quad c_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad i=2,\ldots,n.$$

Тогда функции $v_{1i}(\cdot)$, $i=2,\ldots,n$, являются π-периодическими, т.е. $P_0=\pi$. Если $g\in L_2(\mathbb{T})$ является π-периодическая фунция, то

$$\int v_{11}(t)g(t)dt = \int v_{11}(t+\pi)g(t+\pi)dt = -\int v_{11}(t)g(t)dt,$$

из него вытекает справедливость равенства (10). Функция $w(\cdot,\cdot)$, определенная по формуле

$$w(x,y) := 3-\cos(2x)-\cos(2x+2y)-\cos(2y),$$

является π-периодической функцией по каждой переменной и имеет невырожденный минимум в точках множества $\Lambda\times\Lambda$, где $\Lambda=\{0,\pi\}$.

Далее, не нарущая общности, предположим, что $\alpha=j=1$.

Пусть оператор $h_{11}(x)$ действует в $L_2(\mathbb{T})$ по формуле

$$(h_{11}(x)f)(y) = w_1(x,y)f(y) - v_{11}(y)\int v_{11}(t)f(t)dt.$$

Полагая $n=1$ и $\Delta_{11}(x\,;z) := 1-I_{11}^{(1)}(x\,;z)$, из леммы 1 имеем

$$\sigma_{\rm disc}(h_{11}(x)) = \{z\in\mathbb{C}\setminus[m_1(x),M_1(x)] : \Delta_{11}(x\,;z)=0\}. \tag{11}$$

Следует отметит, что при каждом фиксированном $x\in\mathbb{T}$, $i\in\{2,\ldots,n\}$ и $z\in\mathbb{C}\setminus[m_1(x),M_1(x)]$ функция $v_{1i}(\cdot)(w_1(x,\cdot)-z)^{-1}$ является P_0-периодической непрерывной на компактном множестве $\mathbb{T}$. Поэтому в силу равенства (10), для любого $x\in\mathbb{T}$ имеем

$$\int \frac{v_{11}(t)v_{1i}(t)dt}{w_1(x,t)-z} = 0, \quad i=2,\ldots,n.$$

Следовательно, из определения функции $\Delta_1(\cdot\,;\cdot)$ следует, что

$$\Delta_1(x\,;z) = \Delta_{11}(x\,;z)\det\Big(\delta_{ij}-I_{ij}^{(1)}(x\,;z)\Big)_{i,j=2}^n.$$

Это означает, что $\sigma_{\rm disc}(h_{11}(x))\subset\sigma_{\rm disc}(h_1(x))$. Таким образом

$$\min\sigma_1 \le \min\bigcup_{x\in\mathbb{T}}\sigma_{\rm disc}(h_{11}(x)).$$

Для $\delta>0$ и $a\in\mathbb{T}$ определим

$$U_\delta(a) := \{x\in\mathbb{T} : |x-a|<\delta\}.$$

Теперь исследуем дискретный спектр оператора $h_{11}(x)$.

Лемма 4. *Пусть $v_{11}(x')\neq 0$ для некоторого $x'\in\Lambda$. Тогда существует число $\delta>0$ такое, что для любого $x\in U_\delta(x')$ оператор $h_{11}(x)$ имеет единственное простое собственное значение $z(x)$, лежащее левее $m_1(x)$.*

Доказательство. Так как функция $w_1(\cdot,\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(x',x')\in\mathbb{T}^2$, в силу теоремы о неявной функции существуют число $\delta>0$ и аналитическая функция $y_0(\cdot)$ в $U_\delta(x')$ такие, что при всех $x\in U_\delta(x')$ точка $y_0(x)$ является единственной точкой невырожденного минимума функции $w_1(x,\cdot)$ и $y_0(x')=0$. Следовательно, при всех $x\in U_\delta(x')$ имеет место равенство $w_1(x,y_0(x))=m_1(x)$.

Рассмотрим функцию $\widetilde{w}_1(\cdot,\cdot)$, определенную в $U_\delta(x')\times\mathbb{T}$ как

$$\widetilde{w}_1(x,y) := w_1(x,y+y_0(x)) - m_1(x).$$

Тогда для любого $x\in U_\delta(x')$ функция $\widetilde{w}_1(x,\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум, равный нулю в точке $y=0\in\mathbb{T}$. Теперь, используя равенство

$$\int\frac{v_{11}^2(t)dt}{w_1(x,t)-m_1(x)} = \int\frac{v_{11}^2(t+y_0(x))dt}{\widetilde{w}_1(x,t)},\quad x\in U_\delta(x'),$$

непрерывность функции $v_{11}(\cdot)$, а также условия $v_{11}(x')\neq 0$ и $y_0(x')=x'$, можно легко проверить, что

$$\lim_{z\to m_1(x)-0}\Delta_{11}(x\,;z) = -\infty$$

при всех $x\in U_\delta(x')$.

Так как для любого $x\in\mathbb{T}$ функция $\Delta_{11}(x\,;\cdot)$ является непрерывной и монотонно убывающей в $(-\infty,m_1(x))$, из равенства

$$\lim_{z\to-\infty}\Delta_{11}(x\,;z) = 1 \tag{12}$$

вытекает, что для любого $x\in U_\delta(x')$ функция $\Delta_{11}(x\,;\cdot)$ имеет единственный ноль $z=z(x)$, лежащий в $(-\infty,m_1(x))$. В силу равенства (11) число $z(x)$ является собственным значением оператора $h_{11}(x)$. Лемма 4 доказана. □

Отметим, что если $v_{11}(x')=0$ при некотором $x'\in\Lambda$, то из аналитичности функции $v_{11}(\cdot)$ в $\mathbb{T}$ следует, что существуют положительные числа C_1,C_2 и δ такие, что имеет место неравенство

$$C_1|x-x'|^{\theta(x')}\leq|v_{11}(x)|\leq C_2|x-x'|^{\theta(x')},\quad x\in U_\delta(x') \tag{13}$$

для некоторого $\theta(x')\in\mathbb{N}$. Так как функция $w_1(x',\cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках множества Λ, существуют положительные числа C_1,C_2 и δ такие, что имеет место неравенства

$$C_1(|x-x'|^2+|y-y'|^2)\leq w(x,y)-m\leq C_2(|x-x'|^2+|y-y'|^2),\ (x,y)\in U_\delta(x')\times U_\delta(y'),$$

$$w(x,y)-m\geq C_1\quad (x,y)\notin\bigcup_{x',y'\in\Lambda}\{U_\delta(x')\times U_\delta(y')\}.$$

Следовательно, если $v_{11}(x')=0$ при всех $x'\in\Lambda$, то используя последние неравенства и неравенство (13), получим положительность и конечность интеграла

$$\int\frac{v_{11}^2(t)dt}{w_1(x,t)-m}$$

для любого $x\in\mathbb{T}$.

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что $\Delta_{11}(x'\,;m)=\lim\limits_{x\to x'}\Delta_{11}(x\,;m)$, $x'\in\Lambda$, следовательно, если $v_{11}(x')=0$ для любого $x'\in\Lambda$, то функция $\Delta_{11}(\cdot\,;m)$ является непрерывной в $\mathbb{T}$.

Лемма 5. *Пусть $v_{11}(x')=0$ для всех $x'\in\Lambda$.*
а) *Если $\min\limits_{x\in\mathbb{T}}\Delta_{11}(x\,;m)\geq 0$, то для любого $x\in\mathbb{T}$ оператор $h_{11}(x)$ не имеет собственных значений, лежащих левее m;*
б) *Если $\min\limits_{x\in\mathbb{T}}\Delta_{11}(x\,;m)<0$, то существует непустое множество $G\subset\mathbb{T}$ такое, что для любого $x\in G$ оператор $h_{11}(x)$ имеет единственное простое собственное значение $z(x)$, лежащее левее m. А при всех $x\in\mathbb{T}\setminus G$ оператор $h_{11}(x)$ не имеет собственных значений в $(-\infty,m)$.*

Доказательство. Сначала заметим, что если $v_{11}(x')=0$ для всех $x'\in\Lambda$, то функция $\Delta_{11}(\cdot\,;m)$ является непрерывной в компактном множестве $\mathbb{T}$.

Возможны два случая: $\min\limits_{x\in\mathbb{T}}\Delta_{11}(x\,;m)\ge 0$ или $\min\limits_{x\in\mathbb{T}}\Delta_{11}(x\,;m)<0$.

Пусть $\min\limits_{x\in\mathbb{T}}\Delta_{11}(x\,;m)\ge 0$. Для любого $x\in\mathbb{T}$ функция $\Delta_{11}(x\,;\cdot)$ монотонно убывает на полуоси $(-\infty,m)$. Поэтому

$$\Delta_{11}(x\,;z)>\Delta_{11}(x\,;m)\ge\min_{x\in\mathbb{T}}\Delta_{11}(x\,;m)\ge 0,$$

т.е. $\Delta_{11}(x\,;z)>0$ для любых $x\in\mathbb{T}$ и $z<m$. Следовательно, в силу равенства (11), для любого $x\in\mathbb{T}$ оператор $h_{11}(x)$ не имеет собственных значений в $(-\infty,m)$.

Пусть теперь $\min\limits_{x\in\mathbb{T}}\Delta_{11}(x\,;m)<0$. Положим

$$G:=\{x\in\mathbb{T}:\Delta_{11}(x\,;m)<0\}.$$

Из непрерывности функции $\Delta_{11}(\cdot\,;m)$ в компактном множестве $\mathbb{T}$ следует, что существует точка $x_0\in\mathbb{T}$ такая, что

$$\min_{x\in\mathbb{T}}\Delta_{11}(x\,;m)=\Delta_{11}(x_0\,;m),$$

т.е. $x_0\in G$. Таким образом, множество G является непустым. При этом, если $\max\limits_{x\in\mathbb{T}}\Delta_{11}(x\,;m)<0$, то для любого $x\in\mathbb{T}$ верно $\Delta_{11}(x\,;m)<0$ и, следовательно, в этом случае $G=\mathbb{T}$.

Так как для любого $x\in\mathbb{T}$ функция $\Delta_{11}(x\,;\cdot)$ является непрерывной и монотонно убывающей на $(-\infty,m]$, в силу равенства (12) для любого $x\in G$ существует единственная точка $z(x)\in(-\infty,m)$ такая, что $\Delta_{11}(x\,;z(x))=0$. В силу равенства (11) для любого $x\in G$ точка $z(x)$ является единственным простым собственным значением оператора $h(x)$.

По построению множества G для любого $x\in\mathbb{T}\setminus G$ имеет место неравенство $\Delta_{11}(x\,;m)\ge 0$. В этом случае для любого $x\in\mathbb{T}\setminus G$ оператор $h_{11}(x)$ не имеет собственных значений в $(-\infty,m)$. Лемма 5 доказана. □

Положим

$$E_{\min}:=\min\{\lambda:\lambda\in\sigma_{\mathrm{ess}}(H)\}.$$

Тогда $E_{\min}\in\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$. Число $E_{\min}$ будем называть нижней гранью (краем) существенного спектра оператора H.

Лемма 6. *Если $v_{11}(x')\ne 0$ для некоторого $x'\in\Lambda$ или $v_{11}(x')=0$ для всех $x'\in\Lambda$ и $\min\limits_{x\in\mathbb{T}}\Delta_{11}(x\,;m)<0$, то $E_{\min}<m$.*

Доказательство. Пусть $v_{11}(x')\ne 0$ для некоторого $x'\in\Lambda$. Тогда в силу леммы 4 существует число $\delta>0$ такое, что для любого $x\in U_\delta(x')$ оператор $h_{11}(x)$ имеет простое собственное значение $z(x)$, лежащее левее $m_1(x)$. В частности, $z(x')<m_1(x')$. Так как $m=\min\limits_{x\in\mathbb{T}}m_1(x)=m_1(x')$ из $\min\sigma_1\le z(x')<m$ вытекает, что $E_{\min}<m$.

Пусть $v_{11}(x')=0$ для всех $x'\in\Lambda$ и $\min\limits_{x\in\mathbb{T}}\Delta_{11}(x\,;m)<0$. Тогда в силу утверждения б) леммы 5 существует непустое множество $G\subset\mathbb{T}$ такое, что для любого $x\in G$ оператор $h_{11}(x)$ имеет простое собственное значение $z(x)$, лежащее левее $m_1(x)$. Поэтому для любого $x\in G$ имеет место $\min\sigma_1\le z(x)<m$, т.е., $E_{\min}<m$. Лемма 6 доказана. □

Замечание 1. *Отметим, что при* $v_{11}(x') = 0$ *для всех* $x' \in \Lambda$ *и* $\min\limits_{x \in \mathbb{T}} \Delta_{11}(x\,; m) \geq 0$ *расположение граней* $E_{\min}$ *и* m *зависит от нулей функции*

$$\det\Big(\delta_{ij} - I_{ij}^{(1)}(x\,;\cdot)\Big)_{i,j=2}^{n}$$

и $\Delta_2(x\,;\cdot)$. *Если при всех* $x \in \mathbb{T}$ *эти функции не имеют нулей, лежащих левее точки* m, *то* $E_{\min} = m$. *Если при некотором* $x = x_0 \in \mathbb{T}$ *одна из этих функций имеет нуль на полуоси* $(-\infty, m)$, *то* $E_{\min} < m$.

Отметим, что результаты, полученные в этом разделе, играют важную роль при нахождении условий конечности или бесконечности дискретного спектра оператора H в одномерном случае.

Первый автор приносит благодарность Берлинской математической школе и институту Вейерштрасса по прикладному анализу и стохастике за приглашение, поддержку и гостеприимство. Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ценные и полезные замечания.

Список литературы

[1] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Москва: Мир, 1982. MR0684840

[2] Г. М. Жислин, *Исследование спектра оператора Шредингера для системы многих частиц*, Труды Московского математического общества, **9** (1960), 81–120. Zbl 0121.10004

[3] W. Hunziker, *On the spectra of Schrödinger multi-particle Hamiltonians*, Helvetica Physica Acta, **39** (1966), 451–462. MR0211711

[4] С. Н. Лакаев, М. Э. Муминов, *Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке*, Теоретическая и математическая физика, **135**:3, (2003), 478–503. MR1984451

[5] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operators on lattices*, Mathematische Nachrichten, **280**:7 (2007), 699–716. MR2321135

[6] D. Mattis, *The few-body problem on a lattice*, Reviews of Modern Physics, **58**:2 (1986), 361–379.

[7] Б. В. Карпенко, В. В. Дякин, Г. А. Будрина, *Два электрона в модели Хаббарда*, Физика металлов и металловедение, **61**:4 (1986), 702–706.

[8] Ю. А. Изюмов, Ю. Н. Скрябин, *Статистическая механика магнитно-упорядоченных систем*, Наука, Москва, 1974.

[9] В. Хейне, М. Коэн, Д. Уэйр, *Теория псевдопотенциала*, Москва: Мир, 1973.

[10] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on lattices*, Russian Journal of Mathematical Physics, **14**:4 (2007), 377–387. MR2366194

[11] S. Albeverio, S. N. Lakaev, R. Kh. Djumanova, *The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical quantum particles*, Reports on Mathematical Physics, **63**:3 (2009), 359–380. MR2537935

[12] Т. Х. Расулов, *Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке*, Теоретическая и математическая физика, **163**:1 (2010), 34–44. Zbl 1196.81123

[13] Т. Х. Расулов, *Существенный спектр одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке*, Теоретическая и математическая физика, **166**:1 (2011), 95–109. MR3165781

[14] Z. D. Rasulova, *Investigations of the essential spectrum of a model operator associated to a system of three particles on a lattice*, Journal of Pure and Applied Mathematics: Advances and Applications, **11**:1 (2014), 37–41.

[15] Ю. Х. Эшкабилов, *Эффект Ефимова для одного модельного «трехчастичного» дискретного оператора Шредингера*, Теоретическая и математическая физика, **164**:1 (2010), 78–87. Zbl 1256.81044

[16] М. Ш. Бирман, М. З. Саломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Издательство ЛГУ, Ленинград, 1980. MR0609148

Tulkin Husenovich Rasulov
Bukhara State University,
Muhammad Igbol, 11
705018 Bukhara, Uzbekistan
E-mail address: rth@mail.ru

Zilola Durdimurotovna Rasulova
Bukhara State University,
Muhammad Igbol, 11
705018, Bukhara, Uzbekistan
E-mail address: zdrasulova@mail.ru