S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 190–209 (2015) УДК 517.55

DOI 10.17377/semi.2015.12.016 MSC 32A027

О ВЫЧИСЛЕНИИ СТЕПЕННЫХ СУММ КОРНЕЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

A.M. KYTMANOV, E.K.MYSHKINA

Abstract. The aim of this paper is evaluation power sums of roots in negative degree for systems of non-algebraic equations containing from entire functions of finite order of growth.

Keywords: non-algebraic systems of equations, order of growth entire functions, power sums of roots in negative degree.

1. Введение

Для систем нелинейных алгебраических уравнений в $\mathbb{C}^n$ на основе многомерного логарифмического вычета ранее были получены формулы для нахождения степенных сумм корней системы, не вычисляя самих корней (см. [1], [2], [3]). Для разных типов систем такие формулы имеют разный вид.

На этой основе в $\mathbb{C}^n$ построен новый метод исключения неизвестных. Он возник в работе Л.А.Айзенберга [1], а его разработка продолжена в монографиях [2, 4]. Его основная идея заключается в нахождении степенных сумм корней системы (в положительной степени), а затем в использовании одномерных или многомерных рекуррентных формул Ньютона. В отличие от классического метода исключения он менее трудоемок и не увеличивает кратности корней.

В работе [5] рассмотрена система алгебраических уравнений вида

$$f_i(z) = (z_1 - a_{i1})^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot (z_n - a_{in})^{m_{in}} + Q_i(z) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n)$, m_{ij} — натуральные числа, $Q_i(z)$ — многочлены, степени которых по переменной z_j меньше, чем m_{ij}, a_{ij} — такие комплексные числа, что для каждого $j = 1, \ldots, n$ все $a_{1j}, \ldots, a_{nj}$ различны. Показано, что число корней

Kytmanov, A.M., Myshkina, E.K., On calculation of power sums of roots for one class of systems of non-algebraic equations.

Работа поддержана РФФИ (гранты 15-01-00277-а, 14-01-00544-а).

Поступила 12 января 2014 г., опубликована 18 марта 2015 г.

системы (1) конечно и их число в $\mathbb{C}^n$ (с учетом их кратности) равно перманенту, составленному из чисел m_{ij}. Данная система отсутствует в монографиях [2, 3, 4]

С помощью многомерного логарифмического вычета в [5] получена формула для нахождения суммы значений произвольного многочлена в корнях заданной системы алгебраических уравнений.

Для систем неалгебраических уравнений формулы для суммы значений корней системы получить, как правило, нельзя, поскольку корней системы может быть бесконечное число и ряд из таких корней — расходящийся. В работах [6], [7], [8], [9] рассмотрены степенные суммы корней в отрицательной степени для разных систем неалгебраических уравнений. Для вычисления этих степенных сумм используется вычетный интеграл, интегрирование в котором ведется по остовам поликругов с центром в нуле.

Объектом исследования данной работы являются степенные суммы корней в отрицательной степени для системы уравнений, аналогичных системе (1) и состоящих из целых или мероморфных функций конечного порядка роста. Степенные суммы вычисляются с помощью вычетных интегралов, циклы интегрирования в которых зависят от вида системы. Целью работы является получение формулы для вычисления степенных сумм. В качестве приложения найдены суммы некоторых двойных рядов.

2. Вычисление интегралов

Рассмотрим систему уравнений $f_1(z),\ f_2(z),\dots,f_n(z)$ вида

$$\begin{cases} f_1(z) = [(1-a_{11}z_1)^{m_{11}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{1n}z_n)^{m_{1n}} + Q_1(z)]\, e^{P_1(z)} = 0,\\ f_2(z) = [(1-a_{21}z_1)^{m_{21}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{2n}z_n)^{m_{2n}} + Q_2(z)]\, e^{P_2(z)} = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f_n(z) = [(1-a_{n1}z_1)^{m_{n1}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{nn}z_n)^{m_{nn}} + Q_n(z)]\, e^{P_n(z)} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где m_{ij} — натуральные числа, $a_{ij}\neq 0$ — комплексные числа, различные при каждом фиксированном j, $P_i(z)$ и $Q_i(z)$ — целые функции.

Обозначим через $q_i(z_1,\dots,z_n)$ многочлены вида

$$q_i(z) = q_i(z_1,\dots,z_n) = (1-a_{i1}z_1)^{m_{i1}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{in}z_n)^{m_{in}},\quad i=1,\dots n, \tag{3}$$

тогда наша система примет вид

$$f_i(z_1,\dots,z_n) = [q_i(z_1,\dots,z_n) + Q_i(z_1,\dots,z_n)]\, e^{P_i(z_1,\dots,z_n)} = 0,\ i=1,2,\dots,n. \tag{4}$$

Система уравнений

$$q_i(z) = 0,\quad i=1,2,\dots,n,$$

имеет $n!$ изолированных корней, и эти корни равны $a_K^{-1} = (a_{1k_1}^{-1},\dots,a_{nk_n}^{-1})$, где $K=(k_1,\dots,k_n)$ — мультииндекс, являющийся перестановкой $(1,\dots,n)$. Обозначим, также, $a_K=(a_{1k_1},\dots,a_{nk_n})$.

Рассмотрим цикл

$$\Gamma_q = \{z\in\mathbb{C}^n : |q_i(z)| = |(1-a_{i1}z_1)^{m_{i1}}\cdots(1-a_{in}z_n)^{m_{in}}| = r,\quad r>0,\ i=1,\dots,n\}. \tag{5}$$

Как показано в [3, с. 24] в более общей ситуации, этот цикл имеет конечное число связных компактных компонент при достаточно малых r и эти локальные циклы представляют собой гладкие поверхности размерности n для почти всех r.

Лемма 1. *Глобальный цикл Γ_q при достаточно малых r, имеет связные компоненты (локальные циклы), лежащие в окрестности корней a_K^{-1}, и гомологичен сумме локальных циклов $\Gamma_{q,a_K^{-1}}$.*

Доказательство. Рассмотрим глобальный цикл Γ_q равный

$$(6)\qquad \begin{cases} |(1-a_{11}z_1)^{m_{11}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{1n}z_n)^{m_{1n}}| = r,\\ |(1-a_{21}z_1)^{m_{11}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{2n}z_n)^{m_{2n}}| = r,\\ \dotfill\\ |(1-a_{n1}z_1)^{m_{n1}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{nn}z_n)^{m_{nn}}| = r. \end{cases}$$

В окрестности точки a_K^{-1} он гомотопен циклу $\Gamma_{q,a_K^{-1}}$ равному

$$(7)\qquad \begin{cases} |1-a_{1k_1}z_1| = r,\\ |1-a_{2k_2}z_2| = r,\\ \dotfill\\ |1-a_{nk_n}z_n| = r, \end{cases}$$

где гомотопия имеет вид

$$(8)\qquad \begin{cases} |1-ta_{11}z_1|^{m_{11}}\cdot\ldots\cdot|1-a_{1k_1}z_{k_1}|^{m_{1k_1}}\cdot\ldots\cdot|1-ta_{1n}z_n|^{m_{1n}} = r,\\ |1-ta_{21}z_1|^{m_{21}}\cdot\ldots\cdot|1-a_{2k_2}z_{k_2}|^{m_{2k_2}}\cdot\ldots\cdot|1-ta_{2n}z_n|^{m_{2n}} = r,\\ \dotfill\\ |1-ta_{n1}z_1|^{m_{n1}}\cdot\ldots\cdot|1-a_{nk_n}z_{k_n}|^{m_{nk_n}}\cdot\ldots\cdot|1-ta_{nn}z_n|^{m_{nn}} = r, \end{cases}$$

где $t\in[0,1]$. При $t=1$ получаем первоначальный цикл, при $t=0$ — цикл $\Gamma_{q,a_J^{-1}}$.

Например, в окрестности точки $(a_{11}^{-1},\ldots,a_{nn}^{-1})$ получаем гомотопию

$$(9)\qquad \begin{cases} |1-a_{11}z_1|\cdot|1-ta_{12}z_2|\cdot\ldots\cdot|1-ta_{1n}z_n| = r,\\ |1-ta_{21}z_1|\cdot|1-a_{22}z_2|\cdot\ldots\cdot|1-ta_{2n}z_n| = r,\\ \dotfill\\ |1-ta_{n1}z_1|\cdot|1-ta_{n2}z_2|\cdot\ldots\cdot|1-a_{nn}z_n| = r. \end{cases}$$

Поэтому цикл Γ_q гомологичен сумме циклов

$$\Gamma_q \approx \sum_K \Gamma_{q,a_K^{-1}}.$$

□

Рассмотрим систему уравнений

$$(10)\qquad F_i(z,t) = (q_i(z)+t\cdot Q_i(z))e^{P_i(z)} = 0,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

зависящую от действительного параметра $t\geq 0$.

Пусть $r>0$ — фиксированное число, тогда при t достаточно близких к нулю на цикле

$$\Gamma_q = \{z\in\mathbb{C}^n : |q_i| = r,\quad i=1,2,\ldots,n\}$$

в силу его компактности, выполняется неравенство

$$|q_i(z)| > |t \cdot Q_i(z)| \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим через $J_\gamma(t)$ интеграл

$$J_\gamma(t) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\Gamma_q} \frac{1}{z^{\gamma+I}} \cdot \frac{dF}{F} = \tag{11}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\Gamma_q} \frac{1}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot z_2^{\gamma_2+1} \cdots z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{dF_1}{F_1} \wedge \frac{dF_2}{F_2} \wedge \ldots \wedge \frac{dF_n}{F_n},$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots \gamma_n)$ — мультииндекс, а $I = (1, \dots, 1)$. В соответствии с [10] назовем этот интеграл *вычетным интегралом.*

Пусть I_s — мультииндекс порядка n, состоящий из s единиц и $n - s$ нулей $(s = 0, \dots, n)$. Рассмотрим определители Δ_{I_s} — якобианы системы функций, таких, что единице, стоящей на j-ом месте из I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции G_j, а нулю, стоящему на k-ом месте в I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции P_k.

Теорема 1. *При сделанных предположениях для функций F_i вида (10) справедливы формулы для $J_\gamma(t)$ в виде сходящихся рядов:*

$$J_\gamma(t) = \sum_K \sum_{s=0}^{n} \sum_{I_s} \sum_{\alpha^s} (-t)^{||\alpha^s||} (-1)^{s(K)} \frac{1}{\beta(\alpha^s, K)!} \times$$

$$\times \frac{\partial^{||\beta^s||}}{\partial z^{\beta^s}} \left[\frac{\Delta_{I_s}(t)}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{Q^{\alpha^s}(I_s)}{q^{\alpha^s+I}(I_s, K)} \right]_{z=a_K^{-1}},$$

где $K = (k_1, \dots, k_n)$ — перестановка чисел $1, 2, \dots, n$, $(-1)^{s(K)} = 1$, когда K образует четную перестановку и $(-1)^{s(K)} = -1$, когда K — нечетная перестановка, $\alpha^s = (\alpha_1^s, \dots, \alpha_s^s)$ — мультииндекс длины s, i_l — номер l-й единицы в I_s, $q^{\alpha^s+I}(I_s, K) = q_1^{\alpha_1^s+1}[k_1] \cdot \ldots \cdot q_s^{\alpha_s^s+1}[k_s]$, а $q_p[k_p]$ — это произведение всех $(1 - a_{p1} z_1)^{m_{p1}} \cdot \ldots \cdot (1 - a_{pn} z_n)^{m_{pn}}$ кроме $(1 - a_{pk_p} z_{k_p})^{m_{pk_p}}$, $Q^{\alpha^s}(I_s) = Q_{i_1}^{\alpha_1^s} \cdot \ldots \cdot Q_{i_s}^{\alpha_s^s}$,

$$\beta(\alpha^s, K) = (m_{1k_1} \cdot (\alpha_{k_1}^s + 1) - 1, \dots, m_{sk_n} \cdot (\alpha_{k_n}^s + 1) - 1),$$

$$\beta(\alpha^s, K)! = \prod_p (m_{pk_p} \cdot (\alpha_{k_p}^s + 1) - 1)!, \quad \|\alpha^s\| = \alpha_1^s + \ldots + \alpha_s^s,$$

$$\frac{\partial^{||\beta||}}{\partial z^\beta} = \frac{\partial^{m_{1j_1} \cdot (\alpha_{j_1}^s + 1) - 1 + \ldots + m_{sj_n} \cdot (\alpha_{j_n}^s + 1) - 1}}{\partial z_1^{m_{1j_1} \cdot (\alpha_{j_1}^s + 1) - 1} \cdot \ldots \cdot \partial z_n^{m_{sj_n} \cdot (\alpha_{j_n}^s + 1) - 1}}.$$

Доказательство. Обозначим через G_i функции $q_i(z) + t \cdot Q_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$J_\gamma(t) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\Gamma_q} \frac{1}{z^{\gamma+I}} \cdot \frac{dF}{F} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\Gamma_q} \frac{1}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot z_2^{\gamma_2+1} \cdots z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{dF_1}{F_1} \wedge \frac{dF_2}{F_2} \wedge \ldots \wedge \frac{dF_n}{F_n} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\Gamma_q} \frac{1}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot z_2^{\gamma_2+1} \cdots z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{d(G_1 e^{P_1})}{G_1 e^{P_1}} \wedge \frac{d(G_2 e^{P_2})}{G_2 e^{P_2}} \wedge \ldots \wedge \frac{d(G_n e^{P_n})}{G_n e^{P_n}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int\limits_{\Gamma_q}\frac{1}{z_1^{\gamma_1+1}\dots z_n^{\gamma_n+1}}\cdot\left(\frac{dG_1}{G_1}+dP_1\right)\wedge\ldots\wedge\left(\frac{dG_n}{G_n}+dP_n\right).$$

Так как

$$(dG_1+dP_1)\wedge(dG_2+dP_2)\wedge\ldots\wedge(dG_n+dP_n)=\sum_{s=0}^{n}\sum_{I_s}\Delta_{I_s}dz,$$

то (используя формулу геометрической прогрессии) $J_\gamma(t) =$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int\limits_{\Gamma_q}\frac{1}{z_1^{\gamma_1+1}\dots z_n^{\gamma_n+1}}\cdot\left(\frac{dG_1}{G_1}+dP_1\right)\wedge\ldots\wedge\left(\frac{dG_n}{G_n}+dP_n\right)=$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\sum_{s=0}^{n}\sum_{I_s}\sum_{\|\alpha^s\|\geqslant 0}(-t)^{\|\alpha^s\|}\int\limits_{\Gamma_q}\frac{\Delta_{I_s}(t)}{z_1^{\gamma_1+1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\gamma_n+1}}\cdot\frac{Q_1^{\alpha_1^s}\cdot\ldots\cdot Q_s^{\alpha_s^s}}{q_1^{\alpha_1^s+1}\cdot\ldots\cdot q_s^{\alpha_s^s+1}}dz=$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\sum_{K}\sum_{s=0}^{n}\sum_{I_s}\sum_{\|\alpha^s\|\geqslant 0}\int\limits_{\Gamma_{q,a_K^{-1}}}\frac{(-1)^{s(K)}(-t)^{\|\alpha^s\|}\Delta_{I_s}(t)}{z_1^{\gamma_1+1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\gamma_n+1}}\cdot\frac{Q_1^{\alpha_1^s}\cdot\ldots\cdot Q_s^{\alpha_s^s}}{q_1^{\alpha_1^s+1}\cdot\ldots\cdot q_s^{\alpha_s^s+1}}dz=$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\sum_{K}\sum_{s=0}^{n}\sum_{I_s}(-1)^{s(K)}\sum_{\|\alpha^s\|\geqslant 0}(-t)^{\|\alpha^s\|}\int\limits_{\Gamma_{q,a_K^{-1}}}\frac{\Delta_{I_s}(t)}{z^{\gamma+I}}\cdot\frac{Q^{\alpha^s}(I_s)}{q^{\alpha^s+I}(I_s,K)}dz=$$

$$= \sum_{K}\sum_{s=0}^{n}\sum_{I_s}\sum_{\alpha^s}\frac{(-t)^{||\alpha^s||}(-1)^{s(K)}}{\beta(\alpha^s,K)!}\cdot\frac{\partial^{||\beta||}}{\partial z^\beta}\left[\frac{\Delta_{I_s}(t)}{z_1^{\gamma_1+1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\gamma_n+1}}\cdot\frac{Q^{\alpha^s}(I_s)}{q^{\alpha^s+I}(I_s,K)}\right]_{z=a_K^{-1}}.$$

Полученный ряд сходится при достаточно малых t. □

Теорема 1 показывает, что интегралы $J_\gamma(t)$ могут быть вычислены через коэффициенты Тейлора рассматриваемых функций. Далее мы рассматриваем системы более простого вида, в которых вычетные интегралы $J_\gamma(t)$ связываются со степенными суммами корней систем вида (2). Причем суммирование в интеграле $J_\gamma(t)$ ведется по конечному множеству индексов.

3. Вычисление степенных сумм

Предположим теперь, что $Q_i(z)$ — многочлены вида

(12) $$Q_i(z)=z_1\cdots z_n\sum_{\|\alpha\|\geq 0}C_\alpha^i z^\alpha\quad i=1,2,\ldots,n,$$

где α — мультииндекс, $\|\alpha\|=\alpha_1+\ldots\alpha_n$, $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\alpha_n}$, и $\deg_{z_j}Q_i\leq m_{ij}$, $i,j=1,\ldots,n$. Здесь $\deg_{z_j}Q_i$ — степень многочлена $Q_i(z)$ по переменной z_j при фиксированных остальных переменных.

Функции P_j $(j=1,2,\ldots,n)$ — многочлены вида

(13) $$P_j(z)=\sum_{0\leqslant\|\eta\|\leqslant p_j}b_\eta^j z^\eta,$$

где $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ — мультииндекс.

Сделаем в функциях $F_i(z,t) = (q_i(z) + t\cdot Q_i(z))\, e^{P_i(z)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, замену $z_j = \dfrac{1}{w_j}$, $j = 1, \ldots, n$, предполагая, что все $w_j \neq 0$. Получаем

$$F_i\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}, t\right) = \left(q_i\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right) + t\cdot Q_i\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right)\right) e^{P_i\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right)},$$

тогда

$$F_i\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}, t\right) =$$

$$= \left(\left(1 - a_{i1}\frac{1}{w_1}\right)^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot \left(1 - a_{in}\frac{1}{w_n}\right)^{m_{in}} + t\cdot Q_i\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right)\right) e^{P_i\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right)} =$$

$$= \left(\left(\frac{1}{w_1}\right)^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{w_n}\right)^{m_{in}} \cdot (w_1 - a_{i1})^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot (w_n - a_{in})^{m_{in}} + \right.$$

$$\left. + t\cdot Q_i\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right)\right) e^{P_i\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right)} =$$

$$= \left(\frac{1}{w_1}\right)^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{w_n}\right)^{m_{in}} \cdot \left(\widetilde{q}_i(w) + t\cdot \widetilde{Q}_i(w)\right) e^{P_i\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right)}, \tag{14}$$

где $\widetilde{q}_i$ функции $\widetilde{q}_i = (w_1 - a_{i1})^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot (w_n - a_{in})^{m_{in}}$, а $\widetilde{Q}_i$ многочлены вида $\widetilde{Q}_i = w_1^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_{in}} \cdot Q_i\left(\dfrac{1}{w_1}, \ldots, \dfrac{1}{w_n}\right)$. Из вида функций Q_i (12) получаем, что $\deg_{w_j} \widetilde{Q}_i < m_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Обозначим через $\widetilde{G_i}$ функции

$$\widetilde{G_i}(w) = \widetilde{q}_i(w) + t\cdot \widetilde{Q}_i(w), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Система (15) при $0 \leq t \leq 1$ имеет конечное число нулей, зависящих от параметра t, и их число в $\mathbb{C}^n$ (с учетом их кратности) равно перманенту, составленному из чисел m_{ij} (см. [5]).

При t достаточно близких к нулю на цикле

$$\widetilde{\Gamma}_q = \{w \in \mathbb{C}^n : \left|q_i\left(\frac{1}{w_1}, \ldots \frac{1}{w_n}\right))\right| = \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

в силу его компактности, выполняется неравенство

$$\left|q_i\left(\frac{1}{w_1}, \ldots \frac{1}{w_n}\right)\right| > \left|t\cdot Q_i\left(\frac{1}{w_1}, \ldots \frac{1}{w_n}\right)\right|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

И цикл $\widetilde{\Gamma}_q$ гомологичен сумме циклов $\widetilde{\Gamma}_{q,a_K}$

$$\begin{cases} \left|1 - a_{1k_1}\frac{1}{w_1}\right| = \varepsilon_1, \\ \left|1 - a_{2k_2}\frac{1}{w_2}\right| = \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left|1 - a_{nk_n}\frac{1}{w_n}\right| = \varepsilon_n. \end{cases} \tag{16}$$

Цикл $\left|1 - a_{jk_j}\dfrac{1}{w_j}\right| = \varepsilon_j$ является окружностью, так как

$$\left|1 - a_{jk_j}\frac{1}{w_j}\right| = \varepsilon_j \Rightarrow |w_j - a_{jk_j}| = \varepsilon_j |w_j|,$$

$$|w_j - a_{jk_j}|^2 = \varepsilon_j^2 |w_j|^2 \Rightarrow (1-\varepsilon_j^2)\left|w_j - \frac{a_{jk_j}}{1-\varepsilon_j^2}\right|^2 = \frac{\varepsilon_j^2 \cdot |a_{jk_j}|^2}{(1-\varepsilon_j^2)},$$

$$\left|w_j - \frac{a_{jk_j}}{1-\varepsilon_j^2}\right|^2 = \frac{\varepsilon_j^2 \cdot |a_{jk_j}|^2}{(1-\varepsilon_j^2)^2}, \quad j = 1, \dots, n.$$

При достаточно малых ε точки a_K лежат внутри поликруга с остовом (16), а остов (16) гомологичен остову

$$\begin{cases} |w_1 - a_{1k_1}| = \varepsilon_1, \\ |w_2 - a_{2k_2}| = \varepsilon_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |w_n - a_{nk_n}| = \varepsilon_n. \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть P_j имеют вид (13) и для мультииндекса γ справедливо неравенство*

$$l^1 + \dots + l^n \leqslant \gamma, \tag{17}$$

где $l^j = (l_1^j, \dots, l_n^j)$ и l_i^j — степень i-ого многочлена P_i по j-ой переменной z_j; $i, j = 1, \dots, n$.

Тогда интеграл $J_\gamma(t)$ равен

$$J_\gamma(t) = \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_q} w_1^{\gamma_1+1} \cdot w_2^{\gamma_2+1} \cdots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{d\widetilde{G_1}}{\widetilde{G_1}} \wedge \frac{d\widetilde{G_2}}{\widetilde{G_2}} \wedge \dots \wedge \frac{d\widetilde{G}_n}{\widetilde{G}_n}. \tag{18}$$

(Неравенство (17) означает, что оно выполняется покоординатно).

Доказательство. Рассмотрим

$$\frac{dF_j\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}, t\right)}{F_j\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}, t\right)} = \frac{d\widetilde{G}_j(w,t)}{\widetilde{G}_j(w,t)} - \sum_{k=1}^n m_{jk} \cdot \frac{dw_k}{w_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_j)'_{(z_k)} dw_k.$$

Тогда, используя формулу (14) и учитывая изменение ориентации пространства при замене $z_j = \dfrac{1}{w_j}$, $j = 1, \dots, n$, интеграл $J_\gamma(t)$ примет вид

$$J_\gamma(t) = \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_q} w^{\gamma+I} \cdot \frac{dF}{F} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_q} w_1^{\gamma_1+1} \cdot w_2^{\gamma_2+1} \cdots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{dF_1}{F_1} \wedge \frac{dF_2}{F_2} \wedge \dots \wedge \frac{dF_n}{F_n} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_q} w^{\gamma+I} \left(\frac{d\widetilde{G}_1(w)}{\widetilde{G}_1(w)} - \sum_{k=1}^n m_{1k} \cdot \frac{dw_k}{w_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_1)'_{(z_k)} dw_k \right) \wedge \dots\dots \wedge$$

$$\wedge \left(\frac{d\widetilde{G}_n(w)}{\widetilde{G}_n(w)} - \sum_{k=1}^n m_{nk} \cdot \frac{dw_k}{w_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_n)'_{(z_k)} dw_k \right).$$

Все интегралы вида

$$\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_q} w^{\gamma+I}\frac{d\widetilde{G}_{i_1}(w)}{\widetilde{G}_{i_1}(w)}\wedge\ldots\wedge\frac{d\widetilde{G}_{i_l}(w)}{\widetilde{G}_{i_l}(w)}\wedge\frac{dw_{j_1}}{w_{j_1}}\wedge\ldots\wedge\frac{dw_{j_{n-l}}}{w_{j_{n-l}}}, \tag{19}$$

не содержащие

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{w_k^2}\cdot(P_l)'_{(z_k)}dw_k,$$

равны нулю, если $0\leqslant l<n$ и ε_j достаточно велики.

Действительно, при достаточно больших ε_j, $j=1,2,\ldots,n$, справедливы неравенства

$$|\widetilde{q}_j|>|t\cdot\widetilde{Q}_j(w)| \quad \text{на} \quad \widetilde{\Gamma}_q, \tag{20}$$

поэтому

$$\frac{1}{\widetilde{G}_j(w)}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p t^p\widetilde{Q}_j^p(w)}{\widetilde{q}_j^{(p+1)}}, \tag{21}$$

следовательно, интегралы (19) являются абсолютно сходящимися рядами из интегралов вида

$$\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_q} w^{\gamma+I}\frac{w^{\alpha}\,dw_1\wedge dw_2\wedge\ldots\wedge dw_n}{\widetilde{q}_1^{(p_1+1)}\cdot\widetilde{q}_2^{(p_2+1)}\cdots\widetilde{q}_{i_l}^{(p_l+1)}\cdot w_{j_{i_1}}\cdots w_{j_{n-l}}}.$$

Все они равны нулю по формуле Стокса, поскольку подынтегральные функции голоморфны и $l<n$. Аналогично доказывается, что если в подынтегральное выражении входят дифференциалы dP_j и $\dfrac{dw_k}{w_k}$, то такие интегралы также равны нулю.

Покажем, что интегралы вида

$$\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_q} w^{\gamma+I}\frac{d\widetilde{G}_1(w)}{\widetilde{G}_1(w)}\wedge\ldots\wedge\frac{d\widetilde{G}_l(w)}{\widetilde{G}_l(w)}\wedge$$

$$\wedge dP_{l+1}\left(\frac{1}{w_1},\frac{1}{w_2},\ldots,\frac{1}{w_n}\right)\wedge\ldots\wedge dP_n\left(\frac{1}{w_1},\frac{1}{w_2},\ldots,\frac{1}{w_n}\right) \tag{22}$$

при условии (17), равны нулю, если $0\leqslant l<n$ и ε_j достаточно велики.

Действительно, при достаточно больших ε_j, $j=1,2,\ldots,n$, справедливы неравенства (20), поэтому справедливо разложение (21), а также

$$P_j\left(\frac{1}{w_1},\frac{1}{w_2},\ldots,\frac{1}{w_n}\right)=\sum_{0\leqslant\|\eta\|\leqslant p_j}\frac{b_\eta^j}{w^\eta},$$

$$dP_j\left(\frac{1}{w_1},\frac{1}{w_2},\ldots,\frac{1}{w_n}\right)=\sum_{0\leqslant\|\eta\|\leqslant p_j}\sum_{k=0}^{n}\frac{-\eta_k^j b_\eta^j dw_j}{w^{\eta+e^j}},$$

где e^j — мультииндекс, у которого все координаты равны нулю за исключением j-й, а она равна 1.

Следовательно, интегралы (22) являются суммами абсолютно и равномерно сходящихся рядов из интегралов вида

$$\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_h} w^{\gamma+I} \frac{w^\alpha\, dw_1 \wedge dw_2 \wedge \ldots \wedge dw_n}{\widetilde{q}_1^{(p_1+1)} \cdot \widetilde{q}_2^{(p_2+1)} \cdots \widetilde{q}_l^{(p_l+1)} \cdot w^{\eta^{j_1}+e^{j_1}} \cdots w^{\eta^{j_{n-l}}+e^{j_{n-l}}}}.$$

Все они равны нулю по формуле Стокса (см. предыдущее рассуждение), поскольку $l < n$, $l^1 + \ldots + l^n \leqslant \gamma$ и тогда $\eta^{j^1} + \ldots + \eta^{j^{n-l}} < \gamma$.

Аналогично рассматриваются интегралы, в которые входят дифференциалы других функций F_j, лишь бы их было строго меньше n.

Поэтому получаем

$$(23) \qquad J_\gamma(t) = \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_q} w_1^{\gamma_1+1} \cdot w_2^{\gamma_2+1} \cdots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{d\widetilde{G}_1}{\widetilde{G}_1} \wedge \frac{d\widetilde{G}_2}{\widetilde{G}_2} \wedge \ldots \wedge \frac{d\widetilde{G}_n}{\widetilde{G}_n}.$$

$\square$

Приведем утверждение из [5], которое мы будем использовать в дальнейшем. Пусть задана система алгебраических уравнений в $\mathbb{C}^n$ вида

$$(24) \qquad f_i(z) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

имеющая конечное число корней в $\mathbb{C}^n$ и не имеющая бесконечных корней в $\overline{\mathbb{C}}^n$ ($\overline{\mathbb{C}}^n$ — пространство теории функций).

Обозначим $m_{ij} = \deg_{z_j} f_i$. А цикл

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |f_1(z)| = r_1, \ldots, |f_n(z)| = r_n\}$$

при достаточно малых положительных $r_1, \ldots, r_n$ гомологичен сумме циклов, лежащих в окрестности корней системы (24).

Лемма 3 ([5]). *При сделанных предположениях*

$$\int_\Gamma \frac{P(z)dz}{f_1(z) \cdots f_n(z)} = 0$$

для любого полинома $P(z)$ такого, что $p_j = \deg_{z_j} P \leqslant m_{1j} + \ldots + m_{nj}$ для всех j от 1 до n.

Лемма доказывается с помощью теоремы о полной сумме вычетов на компактном комплексном многообразии.

Лемма 4. *Пусть $\widetilde{\Delta}$ — якобиан системы функций $\widetilde{G}_1(w), \ldots, \widetilde{G}_n(w)$ из (15). Тогда $J_\gamma(t) =$*

$$= \sum_{S \in \Re} (-t)^{n+||S||} \sum_K \frac{(-1)^{s(K)}}{\beta(S,K)!} \cdot \frac{\partial^{||\beta||}}{\partial w^\beta} \left[\widetilde{\Delta}(t) \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\widetilde{Q}^S}{\widetilde{q}^{S+I}(K)} \right]_{w=a_K},$$

где множество индексов

$\Re = \{S = (s_1, \ldots, s_n) :$ *существует* $\ i\ (i = 1, \ldots, n)$ *такое, что* $\ \gamma_i + 2 > \|S\|\}$.

Доказательство. Имеем по лемме 2

$$J_\gamma(t) = \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_q} w_1^{\gamma_1+1} \cdot w_2^{\gamma_2+1} \cdots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{d\widetilde{G}_1}{\widetilde{G}_1} \wedge \frac{d\widetilde{G}_2}{\widetilde{G}_2} \wedge \ldots \wedge \frac{d\widetilde{G}_n}{\widetilde{G}_n} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_q} w_1^{\gamma_1+1} \cdot w_2^{\gamma_2+1} \cdots w_n^{\gamma_n+1} \sum_{\|K\|\geqslant 0} (-t)^{||K||} \widetilde{\Delta}(t) \cdot \frac{\widetilde{Q}_1^{k_1} \cdots \widetilde{Q}_n^{k_n}}{\widetilde{q}_1^{k_1+1} \cdots \widetilde{q}_n^{k_n+1}} dz =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \sum_{\|S\|\geqslant 0} (-t)^{||S||} \sum_K (-1)^{s(K)} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_{q,a_K}} \widetilde{\Delta}(t) \cdot w_1^{\gamma_1+1} \ldots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\widetilde{Q}_1^{k_1} \cdots \widetilde{Q}_n^{k_n} dz}{\widetilde{k}_1^{s_1+1} \cdots \widetilde{k}_n^{s_n+1}} =$$

$$= \sum_{\|S\|\geqslant 0} (-t)^{n+||S||} \sum_K (-1)^{s(K)} \frac{1}{\beta(S,K)!} \cdot \frac{\partial^{||\beta||}}{\partial w^\beta} \left[\widetilde{\Delta}(t) \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\widetilde{Q}^S}{\widetilde{q}^{S+I}} \right]_{w=a_K}.$$

Докажем теперь, что суммирование в этих формулах идет по конечному множеству мультииндексов. Для этого оценим степени по переменным w_i числителя выражения и сопоставим их с соответствующими степенями знаменателя.

Степень числителя по w_i не превосходит величины

$$p_i = m_{1i} + \ldots + m_{ni} - 1 + \gamma_i + 1 + (m_{1i} - 1)s_1 + \ldots + (m_{ni} - 1)s_n.$$

Степень знаменателя по этой переменной равна

$$q_i = m_{1i}(s_1 + 1) + \ldots + m_{ni}(s_n + 1).$$

Согласно лемме 3 нулевыми являются интегралы, для которых для всех i $(i = 1, \ldots, n)$ выполняется неравенство $p_i \le q_i - 2$, что эквивалентно тому, что

$$m_{1i} + \ldots + m_{ni} - 1 + \gamma_i + 1 + (m_{1i} - 1)s_1 + \ldots + (m_{ni} - 1)s_n \le$$

$$\le m_{1i}(s_1 + 1) + \ldots + m_{ni}(s_n + 1) - 2,$$

$$\gamma_i + 1 - s_1 - \ldots - s_n - 1 \le -2,$$

$$\gamma_i \le s_1 + \ldots + s_n - 2,$$

$$\gamma_i + 2 \le \|S\|.$$

Таким образом, ненулевыми могут быть лишь только те интегралы, для которых S пробегает множество $\Re$, состоящее из таких мультииндексов S,что хотя бы для какого-нибудь γ_i выполняется $\gamma_i + 2 > \|S\|, \quad i = 1, \ldots, n$ □

Лемма 5. *Пусть $w_1(t), \ldots, w_s(t)$ — все нули системы (15) (с учетом их кратностей), где $w_j(t) = (w_{j1}(t), \ldots, w_{jn}(t)), \quad j = 1, \ldots, n$. (Эти нули зависят от t.) Тогда*

$$J_\gamma(t) = (-1)^n \sum_{j=1}^{s} w_{j1}(t)^{\gamma_1+1} \cdot w_{j2}(t)^{\gamma_2+1} \cdots w_{jn}(t)^{\gamma_n+1}.$$

Утверждение следует из леммы 2 и теоремы Руше для логарифмического вычета (см. [3, с. 56]). □

Обозначим через $z_j(t) = (z_{j1}(t), \ldots, z_{jn}(t))$, $j = 1, \ldots p$, — корни системы (2) с функциями tQ_i, где Q_i вида (12), а P_j вида (13), не лежащими на координатных плоскостях. Этих корней конечное число поскольку, если w_j не лежит на координатных плоскостях, то $z_{jm}(t) = \dfrac{1}{w_{jm}(t)}$, $m = 1, \ldots, n$. Поэтому $p \le s$.

Теорема 2. *Пусть P_j имеют вид* (13) *и для мультииндекса γ справедливо неравенство (17), тогда*

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{z_{j1}(t)^{\gamma_1+1}\cdot z_{j2}(t)^{\gamma_2+1}\cdots z_{jn}(t)^{\gamma_n+1}}=$$

$$=\sum_{S\in\Re}(-t)^{n+||S||}\sum_{K}\frac{(-1)^{s(K)}}{\beta(S,K)!}\cdot\frac{\partial^{||\beta||}}{\partial w^{\beta}}\left[\widetilde{\Delta}(t)\cdot w_1^{\gamma_1+1}\cdots w_n^{\gamma_n+1}\cdot\frac{\widetilde{Q}^S(K)}{\widetilde{q}^{S+I}(K)}\right]_{w=a_K}$$

Доказательство. Вытекает из лемм 4, 5. $\square$

Таким образом, степенная сумма корней является многочленом по t, поэтому это равенство верно и при $t=1$. Обозначим

$$z_j=(z_{j1},\dots,z_{jn})=(z_{j1}(1),\dots,z_{jn}(1)),\quad j=1,\dots p.$$

Теорема 3. *Для системы (2) с функциями f_j вида (4), Q_j вида (12), P_j вида* (13) *и для мультииндексов γ с условием (17) справедливы формулы*

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1}\cdot z_{j2}^{\gamma_2+1}\cdots z_{jn}^{\gamma_n+1}}=$$

$$=\sum_{S\in\Re}(-1)^{n+||S||}\sum_{K}\frac{(-1)^{s(K)}}{\beta(S,K)!}\cdot\frac{\partial^{||\beta||}}{\partial w^{\beta}}\left[\widetilde{\Delta}\cdot w_1^{\gamma_1+1}\cdot\ldots\cdot w_n^{\gamma_n+1}\cdot\frac{\widetilde{Q}^S(K)}{\widetilde{q}^{S+I}(K)}\right]_{w=a_K}.$$

Доказательство. Это следствие теоремы 2. $\square$

4. Общая ситуация

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть целые в $\mathbb{C}^n$ функции f_j конечного порядка роста не выше ρ имеют вид

$$f_j(z)=\prod_{s=1}^{\infty}f_{j,s}(z),\quad j=1,2,\dots,n, \tag{25}$$

где $f_{j,s}(z)$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$ конечного порядка роста не выше ρ, разлагающиеся в бесконечные произведения, равномерно сходящиеся в $\mathbb{C}^n$, причем каждый из сомножителей имеет форму

$$(q_{j,s}+Q_{j,s}(z))e^{P_{j,s}(z)},$$

а $q_{j,s}(z)$, $Q_{j,s}(z)$ — многочлены вида (3), (12). А функции $P_{j,s}$ — многочлены вида

$$P_{j,s}(z)=\sum_{0\leqslant||\gamma||\leqslant\rho}b^j_\gamma z^\gamma, \tag{26}$$

т.е. степени всех многочленов $P_{j,s}$, входящих в систему, $\deg P_{j,s}\leqslant\rho$, $j=1,2,\dots,n$, $s=1,2,\dots$

Условие существования такого разложения в виде сходимости расстояний от начала координат до нулевых множеств функций $q_{j,s}+Q_{j,s}(z)$ можно найти в [11].

Нули системы (25), с учетом их кратностей обозначим $z_j=(z_{j1},\dots,z_{jn})$, $j=1,\dots$.

Теорема 4. *Для системы с функциями вида (25), для которых в разложении степени всех P_j ограничены числом ρ и для произвольного мультииндекса γ такого, что*

$$l^1 + \ldots + l^n \leqslant \gamma, \tag{27}$$

справедливы формулы

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1} \cdot z_{j2}^{\gamma_2+1} \cdots z_{jn}^{\gamma_n+1}} = \tag{28}$$

$$= \sum_{S \in \Re} (-1)^{n+||S||} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{K} \frac{(-1)^{s(K)}}{\beta(S,K)!} \cdot \frac{\partial^{||\beta||}}{\partial w^{\beta}} \left[\widetilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\widetilde{Q}^S(s)}{\widetilde{q}^{S+I}(K,s)} \right]_{w=a_K},$$

где $l^j = (l_1^j, \ldots, l_n^j)$ и l_i^j — степень i-ого многочлена P_i по j-ой переменной z_j; $i,j = 1,\ldots,n$, $\widetilde{Q}^S(s) = \widetilde{Q}_{1,s}^{s_1} \cdots \widetilde{Q}_{n,s}^{s_n}$, а $\widetilde{q}^{S+I}(K,s)$ имеют вид многочленов $\widetilde{q}^{S+I}(K)$ из теоремы 3 для каждого множителя $q_{j,s}$ системы (25).

Степенная сумма (28) является абсолютно сходящимся рядом.

Доказательство. Т.к.

$$\frac{d\, f_j(z)}{f_j(z)} = \frac{d \prod\limits_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)}{\prod\limits_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d\, f_{js}(z)}{f_{js}(z)}.$$

Рассматриваемый ряд сходится равномерно на Γ_q. Действительно, легко проверить, что если задана последовательность непрерывных функций f_m на компакте K, равномерно на нем сходящаяся к функции f, и $f \neq 0$ на K, то начиная с некоторого номера функции $f_m \neq 0$ на K и последовательность $1/f_m$ равномерно сходится к $1/f$ на K. Точно также проверяется, что последовательности функций, равномерно сходящиеся на компакте, можно почленно умножать и равномерная сходимость остается.

По условию все бесконечные произведения $\prod\limits_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)$ сходятся равномерно на Γ_q к некоторой функции. Поэтому ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{d\, f_{j,s}(z)}{f_{j,s}(z)} = \frac{d \prod\limits_{s=1}^{\infty} f_{j,s}(z)}{\prod\limits_{s=1}^{\infty} f_{j,s}(z)} = \lim_{m\to\infty} \frac{d \prod\limits_{s=1}^{m} f_{j,s}}{\prod\limits_{s=1}^{m} f_{j,s}}$$

сходится равномерно на Γ_q. Таким образом, сходится ряд из интегралов вида

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_q} \frac{1}{z^{\gamma+I}} \cdot \frac{d\, f_{1,s_1}(z)}{f_{1s_1}(z)} \wedge \frac{d\, f_{2,s_2}(z)}{f_{2s_2}(z)} \wedge \ldots \wedge \frac{d\, f_{ns_n}(z)}{f_{n,s_n}(z)}, \tag{29}$$

в котором суммирование ведется по кубам. А для каждого такого интеграла (29) нужная формула доказана (теорема 3).

Если бесконечные произведения $f_{j,s}(z)$ сходятся абсолютно, то их значение не зависит от перестановки сомножителей. Т.е., меняя нумерацию корней, значение бесконечных произведений не изменится. Из предыдущего тогда получаем, что ряд J_γ также не зависит от перестановки его членов. Поэтому он сходится безусловно, а значит абсолютно. $\square$

5. Вычисление сумм двойных рядов

Рассматриваемые ряды не содержатся в книгах [12], [13].

Пример 1.1. Рассмотрим систему уравнений от двух комплексных переменных

$$\begin{cases} f_1(z_1,z_2) = 1 - a_1z_1 - a_2z_2 = (1-a_1z_1)(1-a_2z_2) - a_1a_2z_1z_2 = 0, \\ f_2(z_1,z_2) = 1 - b_1z_1 - b_2z_2 = (1-b_1z_1)(1-b_2z_2) - b_1b_2z_1z_2 = 0, \end{cases} \tag{30}$$

причем ее якобиан $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$ отличен от нуля, а коэффициенты системы — действительны.

Корень системы (30) равен $z_1 = -\dfrac{a_2-b_2}{\Delta}$, $z_2 = \dfrac{a_1-b_1}{\Delta}$. Если он не лежит на координатных плоскостях, то $a_1-b_1 \neq 0$, $a_2-b_2 \neq 0$, а по лемме 5

$$J_\gamma = \frac{(-1)^{\gamma_1+1}\cdot\Delta^{\gamma_1+\gamma_2+2}}{(a_1-b_1)^{\gamma_2+1}(a_2-b_2)^{\gamma_1+1}}.$$

В частности $J_{(0,0)}$

$$J_{(0,0)} = \frac{-\Delta^2}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)}.$$

Сделаем замену переменных $z_1 = \dfrac{1}{w_1}$ и $z_2 = \dfrac{1}{w_2}$. Наша система примет вид

$$\begin{cases} \widetilde{f_1} = w_1w_2 - a_1w_2 - a_2w_1 = (w_1-a_1)(w_2-a_2) - a_1a_2 = 0, \\ \widetilde{f_2} = w_1w_2 - b_1w_2 - b_2w_1 = (w_1-b_1)(w_2-b_2) - b_1b_2 = 0. \end{cases} . \tag{31}$$

Якобиан системы (31) $\widetilde{\Delta} = (w_2-a_2)(w_1-b_1) - (w_1-a_1)(w_2-b_2)$.

Теперь по теореме 3 получаем

$$J_\gamma = \sum_{S\in\Re,K}\frac{1}{(2\pi i)^2}\times$$

$$\times\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_{q,a_K}} \frac{w_1^{\gamma_1+1}\cdot w_2^{\gamma_2+1}\cdot(a_1a_2)^{k_1}(b_1b_2)^{k_2}\cdot\widetilde{\Delta}}{(w_1-a_1)^{k_1+1}\cdot(w_2-a_2)^{k_1+1}\cdot(w_1-b_1)^{k_2+1}\cdot(w_2-b_2)^{k_2+1}}dw_1\wedge dw_2, \tag{32}$$

где $\Re = \{S=(s_1,s_2): \quad \exists i \quad \gamma_i+2 > s_1+s_2, \quad i=1,2\}$, а $\widetilde{\Gamma}_{q,a_K}$ это циклы вида: первый $\{|w_1-a_1| = r_{11}, |w_2-b_2| = r_{22}\}$, взятый с положительной ориентацией, и второй $\{|w_2-a_2| = r_{12}, |w_1-b_1| = r_{21}\}$, взятый с отрицательной ориентацией.

Поэтому

$$J_{(0,0)} = \frac{-\Delta^2}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)} = a_1b_2 + a_2b_1 + \frac{a_1b_1(b_2-a_2)}{a_1-b_1} + \frac{a_2b_2(b_1-a_1)}{a_2-b_2}. \tag{33}$$

Пример 1.2. Напомним известные разложения синуса в бесконечное произведение и степенной ряд:

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k^2\pi^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kz^k}{(2k+1)!},$$

которые равномерно и абсолютно сходятся на любом компакте из комплексной плоскости. Целая функция $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ имеет порядок роста равный 1/2.

Рассмотрим систему уравнений

$$(34)\qquad \begin{cases} f_1(z_1,z_2) = \dfrac{\sin\sqrt{a_1z_1+a_2z_2}}{\sqrt{a_1z_1+a_2z_2}} = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_1z_1+a_2z_2}{k^2\pi^2}\right) = 0,\\ f_2(z_1,z_2) = \dfrac{\sin\sqrt{b_1z_1+b_2z_2}}{\sqrt{b_1z_1+b_2z_2}} = \prod\limits_{s=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{b_1z_1+b_2z_2}{s^2\pi^2}\right) = 0. \end{cases}$$

Каждая из функций этой системы разлагается в бесконечное произведение функций из системы (30). Корнями системы (34) являются точки

$$\left(\frac{-\pi^2(a_2s^2-b_2k^2)}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{\pi^2(a_1s^2-b_1k^2)}{a_1b_2-a_2b_1}\right),$$

при условии, что $a_1b_2 \neq a_2b_1$. Будем также считать, что числа $a_1,\ b_1$ и $a_2,\ b_2$ имеют разные знаки.

К системе (34) применима теорема 4 с $\gamma = (0,\dots,0)$. Поэтому интеграл $J_{(0,0)}$ равен сумме абсолютно сходящегося ряда

$$J_{(0,0)} = \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{-(a_1b_2-a_2b_1)^2}{\pi^4(a_1s^2-b_1k^2)(a_2s^2-b_2k^2)},$$

знаменатели в котором не обращаются в 0. Абсолютная сходимость ряда следует из того, что при положительных a и b выполнено неравенство $as^2+bk^2 \geq csk$, где $c>0$ и не зависит от s и k. Поэтому абсолютная сходимость ряда для $J_{(0,0)}$ следует из сходимости ряда

$$\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{1}{k^2s^2}.$$

Используя равенство (33), находим,

$$J_{(0,0)} = \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_1b_2+a_2b_1}{\pi^4k^2s^2} + \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_1b_1(b_2k^2-a_2s^2)}{\pi^4k^2s^2(a_1s^2-b_1k^2)} + \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_2b_2(b_1k^2-a_1s^2)}{\pi^4k^2s^2(a_2s^2-b_2k^2)}.$$

То есть, имеем

$$\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{-(a_1b_2-a_2b_1)^2}{\pi^4(a_1s^2-b_1k^2)(a_2s^2-b_2k^2)} = \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_1b_2+a_2b_1}{\pi^4k^2s^2} + \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_1b_1(b_2k^2-a_2s^2)}{\pi^4k^2s^2(a_1s^2-b_1k^2)} + $$

$$+\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_2b_2(b_1k^2-a_1s^2)}{\pi^4k^2s^2(a_2s^2-b_2k^2)}.$$

Преобразуем данное тождество

$$\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{-(a_1b_2-a_2b_1)^2}{\pi^4(a_1s^2-b_1k^2)(a_2s^2-b_2k^2)} = \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_1b_2+a_2b_1}{\pi^4k^2s^2} + \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_1b_1b_2}{\pi^4s^2(a_1s^2-b_1k^2)} -$$

$$-\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_1a_2b_1}{\pi^4k^2(a_1s^2-b_1k^2)} + \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_2b_1b_2}{\pi^4s^2(a_2s^2-b_2k^2)} - \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_1a_2b_2}{\pi^4k^2(a_2s^2-b_2k^2)}$$

Используя равенство [12, гл. 5, п. 5.1.25, № 4] (при условии $a>0$)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi\,\mathrm{cth}(\pi a)}{2a},$$

имеем
$$\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{-(a_1b_2-a_2b_1)^2}{\pi^4(a_1s^2-b_1k^2)(a_2s^2-b_2k^2)}=\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_1b_2+a_2b_1}{\pi^4k^2s^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_1a_2}{\pi^4k^4}-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{b_1b_2}{\pi^4s^4}-$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi^3k^3}\left[\frac{a_2b_1}{\sqrt{-b_1/a_1}}\operatorname{cth}(\pi\sqrt{-b_1/a_1}k)+\frac{a_1b_2}{\sqrt{-b_2/a_2}}\operatorname{cth}(\pi\sqrt{-b_2/a_2}k)\right]-$$
$$-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi^3s^3}\left[\frac{a_2b_1}{\sqrt{-a_2/b_2}}\operatorname{cth}(\pi\sqrt{-a_2/b_2}s)+\frac{a_1b_2}{\sqrt{-a_1/b_1}}\operatorname{cth}(\pi\sqrt{-a_1/b_1}s)\right].$$

Пусть ${}_2\Phi_1(e^{2t},e^{2t};e^{4t},x)$ — базисный гипергеометрический ряд (см., например, [12, с. 793]).

Воспользуемся известной формулой [12, гл. 5, п. 5.2.18, № 13]
$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^{2ts}-1}=\frac{1}{x}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{x^s}{e^{2ts}-1}=$$
$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{e^{4t}-1}\cdot{}_2\Phi_1(e^{2t},e^{2t};e^{4t},x)=\frac{1}{e^{4t}-1}{}_2\Phi_1(e^{2t},e^{2t};e^{4t},x).$$

Получаем
$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\operatorname{cth}(ts)}{s^3}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^3}+2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^3(e^{2ts}-1)}=$$
$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^3}+2\frac{1}{e^{4t}-1}\int_0^1\frac{1}{y}\,dy\int_0^y\frac{1}{v}\,dv\int_0^v{}_2\Phi_1(e^{2t},e^{2t};e^{4t},u)\,du.$$

Интегрируя по частям, легко показать, что
$$\int_0^1\frac{1}{y}\,dy\int_0^y\frac{1}{v}\,dv\int_0^v{}_2\Phi_1(e^{2t},e^{2t};e^{4t},u)\,du=\frac{1}{2}\int_0^1\ln^2 y\cdot{}_2\Phi_1(e^{2t},e^{2t};e^{4t},y)\,dy.$$

Тогда
$$\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{-(a_1b_2-a_2b_1)^2}{\pi^4(a_1s^2-b_1k^2)(a_2s^2-b_2k^2)}=\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_1b_2+a_2b_1}{\pi^4k^2s^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_1a_2}{\pi^4k^4}-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{b_1b_2}{\pi^4s^4}-$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi^3k^3}\left[\frac{a_2b_1}{\sqrt{-b_1/a_1}}+\frac{a_1b_2}{\sqrt{-b_2/a_2}}\right]-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi^3s^3}\left[\frac{a_1b_2}{\sqrt{-a_1/b_1}}+\frac{a_2b_1}{\sqrt{-a_2/b_2}}\right]-$$
$$-\frac{a_1b_2}{\sqrt{-a_1/b_1}}\frac{\pi}{2\left(e^{4\sqrt{-a_1/b_1}\pi}-1\right)}\times$$
$$\times\int_0^1\ln^2 y\cdot{}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{-a_1/b_1}\pi},e^{2\sqrt{-a_1/b_1}\pi};e^{4\sqrt{-a_1/b_1}\pi},y)\,dy-$$
$$-\frac{a_2b_1}{\sqrt{-a_2/b_2}}\frac{\pi}{2\left(e^{4\sqrt{-a_2/b_2}\pi}-1\right)}\times$$
$$\times\int_0^1\ln^2 y\cdot{}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{-a_2/b_2}\pi},e^{2\sqrt{-a_2/b_2}\pi};e^{4\sqrt{-a_2/b_2}\pi},y)\,dy-$$

$$-\frac{a_2 b_1}{\sqrt{-b_1/a_1}} \frac{\pi}{2\left(e^{4\sqrt{-b_1/a_1}\pi} - 1\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{-b_1/a_1}\pi}, e^{2\sqrt{-b_1/a_1}\pi}; e^{4\sqrt{-b_1/a_1}\pi}, y)\, dy -$$

$$-\frac{a_1 b_2}{\sqrt{-b_2/a_2}} \frac{\pi}{2\left(e^{4\sqrt{-b_2/a_2}\pi} - 1\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{-b_2/a_2}\pi}, e^{2\sqrt{-b_2/a_2}\pi}; e^{4\sqrt{-b_2/a_2}\pi}, y)\, dy.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{-(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{\pi^4 (a_1 s^2 - b_1 k^2)(a_2 s^2 - b_2 k^2)} = \frac{\pi^4 (a_1 b_2 + a_2 b_1)}{36} - \frac{\pi^4 (a_1 a_2 + b_1 b_2)}{90} -$$

$$-\frac{\pi \zeta(3)}{2} \left[\frac{a_2 b_1}{\sqrt{-b_1/a_1}} + \frac{a_1 b_2}{\sqrt{-b_2/a_2}} + \frac{a_1 b_2}{\sqrt{-a_1/b_1}} + \frac{a_2 b_1}{\sqrt{-a_2/b_2}} \right] -$$

$$-\frac{a_1 b_2}{\sqrt{-a_1/b_1}} \frac{\pi}{2\left(e^{4\sqrt{-a_1/b_1}\pi} - 1\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{-a_1/b_1}\pi}, e^{2\sqrt{-a_1/b_1}\pi}; e^{4\sqrt{-a_1/b_1}\pi}, y)\, dy -$$

$$-\frac{a_2 b_1}{\sqrt{-a_2/b_2}} \frac{\pi}{2\left(e^{4\sqrt{-a_2/b_2}\pi} - 1\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{-a_2/b_2}\pi}, e^{2\sqrt{-a_2/b_2}\pi}; e^{4\sqrt{-a_2/b_2}\pi}, y)\, dy -$$

$$-\frac{a_2 b_1}{\sqrt{-b_1/a_1}} \frac{\pi}{2\left(e^{4\sqrt{-b_1/a_1}\pi} - 1\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{-b_1/a_1}\pi}, e^{2\sqrt{-b_1/a_1}\pi}; e^{4\sqrt{-b_1/a_1}\pi}, y)\, dy -$$

$$-\frac{a_1 b_2}{\sqrt{-b_2/a_2}} \frac{\pi}{2\left(e^{4\sqrt{-b_2/a_2}\pi} - 1\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{-b_2/a_2}\pi}, e^{2\sqrt{-b_2/a_2}\pi}; e^{4\sqrt{-b_2/a_2}\pi}, y)\, dy,$$

здесь $\zeta(3)$ — ζ-функция Римана.

Пример 2.1. Рассмотрим систему уравнений от двух комплексных переменных

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = (1 + a_1 z_1 - a_2 z_2) e^{(c_1 z_1 + c_2 z_2)} = 0, \\ f_2(z_1, z_2) = (1 - b_1 z_1 + b_2 z_2) e^{(d_1 z_1 + d_2 z_2)} = 0. \end{cases} \tag{35}$$

причем ее якобиан $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$ отличен от нуля, а коэффициенты действительны.

Корень системы (35) равен $z_1 = -\dfrac{a_2 + b_2}{\Delta}$, $z_2 = -\dfrac{a_1 + b_1}{\Delta}$. Если он не лежит на координатных плоскостях, то $a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, а по лемме 5

$$J_\gamma = \frac{(-1)^{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \Delta^{\gamma_1 + \gamma_2 + 2}}{(a_1 + b_1)^{\gamma_2 + 1} (a_2 + b_2)^{\gamma_1 + 1}}.$$

В частности,

$$J_{(1,1)} = \frac{\Delta^4}{(a_1 + b_1)^2 (a_2 + b_2)^2}.$$

Сделаем замену переменных $z_1 = \dfrac{1}{w_1}$ и $z_2 = \dfrac{1}{w_2}$. Наша система примет вид

$$\begin{cases} \widetilde{f}_1 = w_1 w_2 + a_1 w_2 - a_2 w_1 = (w_1 + a_1)(w_2 - a_2) + a_1 a_2 = 0, \\ \widetilde{f}_2 = w_1 w_2 - b_1 w_2 + b_2 w_1 = (w_1 - b_1)(w_2 + b_2) + b_1 b_2 = 0, \end{cases} \tag{36}$$

где якобиан системы (36) $\widetilde{\Delta} = (w_2 - a_2)(w_1 - b_1) - (w_1 + a_1)(w_2 + b_2)$.

Теперь по теореме 3 получаем

$$J_\gamma = \sum_{S \in \Re, K} \frac{1}{(2\pi i)^2} \times$$

$$\times \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_{q, a_K}} \frac{w_1^{\gamma_1 + 1} \cdot w_2^{\gamma_2 + 1} \cdot (a_1 a_2)^{k_1} (b_1 b_2)^{k_2} \cdot \widetilde{\Delta}}{(w_1 + a_1)^{k_1 + 1} \cdot (w_2 - a_2)^{k_1 + 1} \cdot (w_1 - b_1)^{k_2 + 1} \cdot (w_2 + b_2)^{k_2 + 1}} dw_1 \wedge dw_2, \tag{37}$$

где $\Re = \{S = (s_1, s_2) : \quad \exists i \quad \gamma_i + 2 > s_1 + s_2, \quad i = 1, 2\}$, а $\widetilde{\Gamma}_{q, a_K}$ это циклы вида: первый $\{|w_1 + a_1| = r_{11}, |w_2 + b_2| = r_{22}\}$, взятый с положительной ориентацией и второй $\{|w_2 - a_2| = r_{12}, |w_1 - b_1| = r_{21}\}$, взятый с отрицательной ориентацией.

Поэтому получаем

$$\frac{\Delta^4}{(a_1 + b_1)^2 (a_2 + b_2)^2} = a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - \frac{2 a_1 a_2^2 b_1^2}{a_1 + b_1} - \frac{2 a_1^2 a_2 b_2^2}{a_2 + b_2} - \frac{2 a_1^2 b_1 b_2^2}{a_1 + b_1} - \frac{2 a_2^2 b_1^2 b_2}{a_2 + b_2} + \tag{38}$$

$$+ \frac{2 a_1^2 b_1^2 b_2^2}{(a_1 + b_1)^2} + \frac{2 a_2^2 b_1^2 b_2^2}{(a_2 + b_2)^2} + \frac{2 a_1^2 a_2^2 b_1^2}{(a_1 + b_1)^2} + \frac{2 a_1^2 a_2^2 b_2^2}{(a_2 + b_2)^2} + \frac{2 a_1^2 a_2 b_1^2 b_2}{(a_1 + b_1)^2} + \frac{2 a_1 a_2^2 b_1 b_2^2}{(a_2 + b_2)^2}.$$

Пример 2.2. Напомним известное разложение Г-функции Эйлера в бесконечное произведение:

$$\frac{1}{\Gamma(1 - z)} = e^{-\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{\frac{z}{k}},$$

где γ — постоянная Эйлера.

Рассмотрим систему уравнений

(39)
$$\begin{cases} f_1(z_1,z_2) = \dfrac{e^{\gamma(-a_1z_1+a_2z_2)}}{\Gamma(1-(-a_1z_1+a_2z_2))} = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{-a_1z_1+a_2z_2}{k}\right)e^{\frac{-a_1z_1+a_2z_2}{k}} = 0, \\ f_2(z_1,z_2) = \dfrac{e^{\gamma(b_1z_1-b_2z_2)}}{\Gamma(1-(b_1z_1-b_2z_2))} = \prod\limits_{s=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{b_1z_1-b_2z_2}{s}\right)e^{\frac{b_1z_1-b_2z_2}{s}} = 0. \end{cases}$$

Каждая из функций этой системы разлагается в бесконечное произведение функций из системы (36). Корнями системы (39) являются точки

$$\left(\frac{a_2s+b_2k}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{a_1s+b_1k}{a_1b_2-a_2b_1}\right),$$

при условии, что $a_1b_2 \neq a_2b_1$, и $k,s \in \mathbb{N}$.

Поэтому интеграл $J_{(1,1)}$ равен сумме сходящегося ряда

$$J_{(1,1)} = \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{(a_1b_2-a_2b_1)^4}{(a_1s+b_1k)^2(a_2s+b_2k)^2},$$

члены которого определены, если $a_1,\ b_1$ и $a_2,\ b_2$ имеют один знак.

Используя формулу (38), находим, что

$$J_{(1,1)} = \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2}{k^2s^2} - \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{2a_1^2a_2b_2^2}{k^2s(a_2s+b_2k)} - \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{2a_1a_2^2b_1^2}{k^2s(a_1s+b_1k)} -$$
$$-\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{2a_2^2b_1^2b_2}{ks^2(a_2s+b_2k)} - \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{2a_1^2b_1b_2^2}{ks^2(a_1s+b_1k)} + \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{2a_2^2b_1^2b_2^2}{s^2(a_2s+b_2k)^2} +$$
$$+\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{2a_1^2b_1^2b_2^2}{s^2(a_1s+b_1k)^2} + \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{2a_1^2a_2^2b_2^2}{k^2(a_2s+b_2k)^2} + \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{2a_1^2a_2^2b_1^2}{k^2(a_1s+b_1k)^2} +$$
$$+\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{2a_1a_2^2b_1b_2^2}{ks(a_2s+b_2k)^2} + \sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{2a_1^2a_2b_1^2b_2}{ks(a_1s+b_1k)^2}.$$

Используя равенства [12, гл. 5, п. 5.1. № 2,12] для ψ-функции $\left(\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+a)^n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\psi^{(n-1)}(a),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(kn+m)} = \frac{1}{m}\left[\psi\left(\frac{m}{n}+1\right)+C\right],$$

имеем

$$\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(s+ak)^2} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a^2k^4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\psi'(ak),$$

$$\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{1}{s^2k(ak+bs)} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{bs^3}\left[\psi\left(\frac{bs}{a}+1\right)+C\right] =$$
$$= \sum_{s=1}^{\infty}\frac{C}{bs^3} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{bs^3}\left[\psi\left(\frac{bs}{a}\right)+\frac{a}{bs}\right],$$

$$\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{1}{ks(k+as)^2}=\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{1}{as^2k(k+as)}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{as^2(k+as)^2}=$$
$$=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{a^2s^3}\left[\psi(as+1)+C\right]+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{a^3s^4}-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{as^2}\psi'(as).$$

Далее

$$J_{(1,1)}=\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{(a_1b_2-a_2b_1)^4}{\pi^4(a_1s+b_1k)^2(a_2s+b_2k)^2}=(a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2)\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{1}{k^2s^2}+$$
$$+\left(\frac{4a_2b_1^3b_2}{a_1}+\frac{4a_1b_1b_2^3}{a_2}-8a_1^2a_2^2-8b_1^2b_2^2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}-(2a_1^2a_2b_2+2a_1a_2^2b_1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C}{k^3}-$$
$$-2a_1^2a_2b_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi\left(\frac{b_2k}{a_2}\right)}{k^3}-2a_1a_2^2b_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi\left(\frac{b_1k}{a_1}\right)}{k^3}+$$
$$+(2a_1b_1b_2^2-2a_2b_1^2b_2)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\psi\left(\frac{a_2s}{b_2}\right)}{s^3}+(2a_2b_1^2b_2-2a_1b_1b_2^2)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\psi\left(\frac{a_1s}{b_1}\right)}{s^3}+$$
$$+2a_1^2b_2^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi'\left(\frac{b_2k}{a_2}\right)}{k^2}+2a_2^2b_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi'\left(\frac{b_1k}{a_1}\right)}{k^2}+$$
$$+(2a_2^2b_1^2-2a_1a_2b_1b_2)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\psi'\left(\frac{a_2s}{b_2}\right)}{s^2}+(2a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\psi'\left(\frac{a_1s}{b_1}\right)}{s^2}.$$

Рассмотрим выражение

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(tk)}{k^3}$$

продифференцируем его по t, получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(tk)}{k^3}\right)'_t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi'(tk)}{k^2}.$$

Таким образом, наш ряд выражается через сумму однотипных одномерных рядов.

References

[1] L.A. Aizenberg *On a formula of the generalized multidimensional logarithmic residue and the solution of system of nonlinear equations*, Sov. Math. Doc, **18** (1977), 691–695. MR0588632

[2] L.A. Aizenberg, A.P. Yuzhakov, *Integral representations and residues in multidimensional complex analysis*, Trans. Amer. Math. Monographs, AMS, Providence, 1983. MR0735793

[3] A.K.Tsikh, *Multidimensional residues and their applications.*, Translations of Mathematical Monographs, 103. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. MR1181199

[4] V. Bykov, A. Kytmanov, M. Lazman, M. Passare, (ed), *Elimination Methods in Polynomial Computer Algebra*, Math. and Appl., **v. 448**, Kluwer Acad. Publ., Dordreht, Boston, London, 1998. MR1657794

[5] A.K. Tsikh, *Bezout theorem in the space of theory function. On solution of systems of algebraic equations*, Nekotorye voprosy mnogomernogo kompleksnogo analiza, Institut fiziki SO AN SSR, Krasnoyarsk, 1980, 185–196 (in Russian). MR0616310

[6] A.M. Kytmanov, Z.E. Potapova, *Formulas for determining power sums of roots of systems of meromorphic functions*, Izvestiya VUZ. Matematika. **49**:8 (2005), 36-–45 (in Russian). MR2205801

[7] V.I. Bykov, A.M. Kytmanov, S.G. Myslivets, *Power sums of nonlinear systems of equations*, Docl. Math., **76**:2 (2007), 641–645. MR2458590

[8] A.M. Kytmanov, E.K. Myshkina, *Evaluation of power sums of roots for systems of non-algebraic equations in* $\mathbb{C}^n$, Russian Mathematics, **57**:12 (2013), 31–43. MR3230394

[9] A.M. Kytmanov, E.K. Myshkina, *On power sums of roots of systems of entire functions of finite order of growth*, Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika, Mekhanika, Informatika, **14**:3, (2014) 62–82 (in Russian).

[10] M. Passare, A. Tsikh, *Residue integrals and their Mellin transforms*, Can. J. Math. **47**:5 (1995), 1037–1050. MR1350649

[11] E.K. Myshkina, *On One Condition for the Decomposition of an Entire Function into an Infinite Product*, Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, **7**:1 (2013), 91–94.

[12] A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev, *Integrals and series. Vol. 2. Special functions*, Translated from the Russian by N. M. Queen. Second edition. Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1988. MR0950173

[13] I.S. Gradstein, I.M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums, series and products*, Fizmatgis, Moscow, 1963 (in Russian).

Alexander Mechislavovich Kytmanov
Institute of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University,
av. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: akytmanov@sfu-kras.ru

Evgeniya Konstantinovna Myshkina
Institute of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University,
av. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: elfifenok@mail.ru