S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 210–222 (2015) УДК 512.54
DOI 10.17377/semi.2015.12.017 MSC 20B05

О БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУППАХ АЛЬПЕРИНА

Б.М. ВЕРЕТЕННИКОВ

Abstract. A group G is called Alperin group if any 2-generated subgroup of G has a cyclic commutator subgroup. We prove the existence of Alperin torsion-free groups and Alperin groups, generated by involutions, with free abelian second commutator subgroups of any finite and countable rank. Also we prove that nilpotent torsion-free Alperin group has nilpotence class ≤ 2. The last theorem of the article implies that the following condition is insufficient for a group G to be Alperin group:

for any $a, b \in G$ commutator $[a, b, b]$ is a power of $[a, b]$.

Keywords: Alperin group, commutator subgroup, generators and defining relations, Hopfian group, torsion-free group.

1. Введение

Определение. Группа G называется группой Альперина, если для любых ее элементов a и b коммутант $\langle a, b\rangle'$ цикличен.

Дж. Альперин в [1] доказал несколько теорем для групп из этого класса. В частности, он доказал, что при нечетном простом p конечная p-группа Альперина метабелева и что любая конечная группа Альперина разрешима. Второй из этих результатов по утверждению Альперина принадлежит Г. Хигмэну. В [2] и [3] построены примеры конечных неметабелевых 2-групп Альперина с вторыми коммутантами, изоморфными соответственно Z_{2^n} и E_{2^n}, где n может быть любым натуральным числом. Кроме того, в [3] построена группа Альперина, в которой второй коммутант – бесконечная элементарная абелева 2-группа.

Veretennikov, B.M., On infinite Alperin groups.

Поступила 18 февраля 2015 г., опубликована 20 марта 2015 г.

В [4] построен пример конечной группы Альперина G, порожденной n инволюциями, в которой G'' – гомоциклическая группа экспоненты m и ранга $\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix}$, где m, n – любые натуральные числа, но $n \geq 3$.

Из существования этого примера следует, что в конечных группах Альперина второй коммутант может быть любой конечной абелевой группой.

Заметим также, что в указанном выше примере $G'' \leq Z(G)$ и для любых $x, y \in G$ имеет место $[x, y, y] = 1$ или $[x, y, y] = [x, y]^{-2}$.

В Коуровской тетради [5] имеется два вопроса, поставленные автором. На вопрос 17.46 ответила Б. Уилкенс [6], доказав, что в конечной 2-группе Альперина 4-й коммутант равен 1. Надо заметить, что вопрос о существовании конечной 2-группы Альперина с нетривиальным третьим коммутантом остается открытым.

В вопросе 18.33 спрашивается, ограничена ли ступень разрешимости в классе всех конечных групп Альперина?

В предлагамой статье конструкция примера из [4] переносится на бесконечные группы. А именно, получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть n – натуральное число, $n \geq 3$, группа G задана образующими a_i, f_{ij}, τ_{ijk}, где $1 \leq i, j, k \leq n$, и определяющими соотношениями:*

1) $[a_i, a_j] = f_{ij}$,

2) $[f_{ij}, a_k] = f_{jk}^2 f_{ki}^2 \tau_{ijk}^{-2}$,

3) $[\tau_{ijk}, a_s] = 1$,

4) $[f_{ij}, f_{ks}] = \tau_{kjs}\tau_{ksi}$,

5) $(f_{ij}f_{jk}f_{ki})^4 = \tau_{ijk}$,

6) $\tau_{sij}\tau_{sjk}\tau_{ski} = \tau_{ijk}$,

где для всех соотношений индексы i, j, k, s – любые натуральные числа из $[1, n]$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

I) группа G имеет субнормальный ряд:

$$1 < \langle \tau_{ijk} | 1 \leq i, j, k \leq n \rangle = G'' < G''\langle f_{12}\rangle < G''\langle f_{12}\rangle\langle f_{13}\rangle < \cdots <$$
$$G''\langle f_{12}\rangle\langle f_{13}\rangle \ldots \langle f_{1n}\rangle = H < H\langle f_{23}\rangle < H\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle < \cdots <$$
$$H\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle \ldots \langle f_{n-1,n}\rangle = G' < G'\langle a_1\rangle < G'\langle a_1\rangle\langle a_2\rangle < \cdots <$$
$$G'\langle a_1\rangle\langle a_2\rangle \ldots \langle a_n\rangle = G,$$

в котором первая фактор-группа – свободная абелева группа ранга $\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix}$, следующие $(n-1)$ фактор-групп – бесконечные циклические группы, затем следующие $\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ фактор-групп – циклические порядка 4, и последние n фактор-групп – бесконечные циклические группы;

II) $d(G) = n$, $G = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$, $d(G') = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$, $G' = \langle f_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\rangle$, $G'' = \prod\limits_{2 \leq i < j \leq n} \langle \tau_{1ij}\rangle$, $G'' < Z(G)$, $Z(G) = \prod\limits_{2 \leq i < j \leq n} \langle f_{1i}f_{ij}f_{j1}\rangle \times \prod\limits_{k=1}^{n} \langle a_k^2\rangle$ – свободная абелева группа ранга $\frac{n^2-n+2}{2}$, G – группа без кручения;

III) G – группа Альперина, причем для произвольных элементов x, y из G выполняется хотя бы одно из двух равенств: $[x, y, y] = 1$ или $[x, y, y] = [x, y]^{-2}$.

Заметим, что $d(G)$ выше означает минимальное число порождающих группы G.

Следствие 1. *Существует счетно порожденная группа Альперина без кручения, в которой второй коммутант – свободная абелева группа счетного ранга.*

Следствие 2. *Для любой конечно или счетно порожденной абелевой группы H существует такая, соответственно, конечно или счетно порожденная группа Альперина G, что $G'' \simeq H$, $G'' < Z(G)$, G/G' – без кручения.*

Заметим, что теорема 1 анонсирована в [7].

Точно так же, как теорема 1, с небольшими добавлениями, доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть n – натуральное число, $n \geq 3$, группа G задана образующими a_i, f_{ij}, τ_{ijk}, где $1 \leq i, j, k \leq n$, и определяющими соотношениями:*

1) $a_i^2 = 1$,
2) $[a_i, a_j] = f_{ij}$,
3) $[f_{ij}, a_k] = f_{jk}^2 f_{ki}^2 \tau_{ijk}^{-2}$,
4) $[\tau_{ijk}, a_s] = 1$,
5) $[f_{ij}, f_{ks}] = \tau_{kjs}\tau_{ksi}$,
6) $(f_{ij}f_{jk}f_{ki})^4 = \tau_{ijk}$,
7) $\tau_{sij}\tau_{sjk}\tau_{ski} = \tau_{ijk}$,

где для всех соотношений индексы i, j, k, s – любые натуральные числа из $[1, n]$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

I) группа G имеет субнормальный ряд:

$$1 < \langle \tau_{ijk} | 1 \leq i, j, k \leq n \rangle = G'' < G''\langle f_{12}\rangle < G''\langle f_{12}\rangle\langle f_{13}\rangle < \dots <$$
$$G''\langle f_{12}\rangle\langle f_{13}\rangle \dots \langle f_{1n}\rangle = H < H\langle f_{23}\rangle < H\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle < \dots <$$
$$H\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle \dots \langle f_{n-1,n}\rangle = G' < G'\langle a_1\rangle < G'\langle a_1\rangle\langle a_2\rangle < \dots <$$
$$G'\langle a_1\rangle\langle a_2\rangle \dots \langle a_n\rangle = G,$$

в котором первая фактор-группа – свободная абелева группа ранга $\binom{n-1}{2}$, следующие $(n-1)$ фактор-групп – бесконечные циклические группы, затем следующие $\binom{n-1}{2}$ фактор-групп – циклические порядка 4, и последние n фактор-групп – группы порядка 2;

II) $d(G) = n$, $G = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$, $|a_i| = 2$ для всех i, $d(G') = \binom{n}{2}$, $G' = \langle f_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\rangle$, $G'' = \prod_{2 \leq i < j \leq n} \langle \tau_{1ij}\rangle$, $G'' < Z(G)$, $Z(G) = \prod_{2 \leq i < j \leq n} \langle f_{1i}f_{ij}f_{j1}\rangle$ – свободная абелева группа ранга $\binom{n-1}{2}$;

III) G – группа Альперина, причем для произвольных элементов x, y из G выполняется хотя бы одно из двух равенств: $[x, y, y] = 1$ или $[x, y, y] = [x, y]^{-2}$.

К этой теореме есть соответствующие следствия:

Следствие 3. *Существует группа Альперина, порожденная счетным множеством инволюций, в которой второй коммутант – свободная абелева группа счетного ранга.*

Следствие 4. *Для любой конечно или счетно порожденной абелевой группы H существует группа Альперина G порожденная, соответственно, конечным или счетным множеством инволюций, такая, что $G'' \simeq H$ и $G'' < Z(G)$.*

Теоремы 1 и 2 и их следствия доказываются во 2-й и 3-й частях статьи. В четвертой части статьи доказываются теоремы 3 и 4: о нильпотентных группах Альперина без кручения и о том, что условие

"$[a,b,b]$ – степень $[a,b]$ для любых элементов a,b группы G"

не означает в общем случае, что G – группа Альперина.

Используемые в статье обозначения и определения являются стандартными (см., например, [8, 9]). Отметим некоторые из них.

$[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$ – коммутатор элементов a и b в группе G;

G_m – m-й член нижнего центрального ряда группы G, в частности, $G_3 = [G', G]$;

$G'' = [G', G']$ – второй коммутант группы G;

id_G – тождественное преобразование группы G;

$G = A \rightthreetimes B$ – полупрямое произведение групп A и B, т. е. $A \trianglelefteq G$ и $A \cap B = \{1\}$.

Группой без кручения называется группа, в которой только 1 имеет конечный порядок.

Группа называется хопфовой, если она не изоморфна никакой своей собственной фактор-группе.

Группа G называется финитно аппроксимируемой, если для любого неединичного элемента a из G существует подгруппа в G конечного индекса, не содержащая a.

Группа называется полициклической, если она имеет субнормальный ряд с циклическими фактор-группами.

В вычислениях автор использует основные коммутаторные тождества $[ab,c] = [a,c]^b[b,c]$ и $[a,bc] = [a,c][a,b]^c$. Кроме того, будет часто использоваться тот факт, что если в группе G выполняется условие $[G', G_3] = 1$, то для любых $x \in G, t \in G'$ и любого целого числа k верно равенство $[t,x]^k = [t^k, x]$.

Условимся также считать все встречающиеся ниже индексы i, j, k, s положительными целыми числами, если противное не оговаривается.

Для удобства читателя приведем несколько результатов, используемых в доказательстве теоремы.

Предложение 1. *Пусть G – группа, конечная или бесконечная. Тогда G – группа Альперина, если и только если для любых элементов a,b из G тройные коммутаторы $[a,b,b], [a,b,b^{-1}]$ – степени коммутатора $[a,b]$.*

Доказательство.

Пусть G – группа Альперина и $a, b \in G$. Обозначим $\langle a,b\rangle = H$. Тогда $\langle [a,b]\rangle \trianglelefteq H$, т.к. H' – цикличен. Поскольку, как хорошо известно, $H' = \langle [a,b]^x | x \in H\rangle$, то $H' = \langle [a,b]\rangle$ и необходимость доказана.

Обратно, если для любых a, b из G $[a,b]^b, [a,b]^{b^{-1}}$ – степени коммутатора $[a,b]$, то $[a,b]^a = \left([b,a]^{-1}\right)^a = \left([b,a]^a\right)^{-1}$ и $[a,b]^{a^{-1}} = \left([b,a]^{-1}\right)^{a^{-1}} = \left([b,a]^{a^{-1}}\right)^{-1}$ – также степени $[a,b]$.

Тогда для любого x из H выполняется $[a,b]^x \in \langle [a,b]\rangle$, откуда $H' = \langle [a,b]\rangle$. Достаточность доказана.

Предложение 2. *([10], см. также раздел 6.5 в [9]) Конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа является хопфовой.*

Предложение 3. *([11], см. также раздел 6.5 в [9]) Полициклическая группа финитно аппроксимируема и, в частности, хопфова.*

Следующие два предложения – обобщения лемм 1 и 2 из работы [3] и доказываются аналогично.

Предложение 4. *Пусть хопфова группа H задана образующими $b_1,...,b_k$ и множеством определяющих соотношений:*

$$w_1(b_1,\dots,b_k)=1,\dots,w_s(b_1,\dots,b_k)=1.$$

Пусть задано отображение φ, определенное на множестве $\{b_1,\dots,b_k\}$: $b_i \stackrel{\varphi}{\mapsto} v_i(b_1,\dots,b_k), i\in[1,k]$, где $v_i(b_1,\dots,b_k)$ – групповое слово для каждого i, построенное из $b_1,...,b_k$, причем выполнены два условия:

1) $\langle v_1(b_1,\dots,b_k),\dots,v_k(b_1,\dots,b_k)\rangle = H$,

2) φ сохраняет все определяющие соотношения группы H, указанные выше, т.е. $w_i(b_1^{\varphi},\dots,b_k^{\varphi})=1$ в группе H для любого $i\in[1,s]$.

Тогда отображение φ однозначно продолжается до автоморфизма ψ группы H, причем для любого x из H, если x представлен словом $w(b_1,\dots,b_k)$ от образующих $b_1,...,b_k$, то $x^{\psi}=w(b_1^{\varphi},\dots,b_k^{\varphi})$.

Предложение 5. *Пусть m – натуральное число и H – хопфова группа, заданная образующими $b_1,\dots,b_k$ и множеством определяющих соотношений: $w_1(b_1,\dots,b_k)=1,\dots,w_s(b_1,\dots,b_k)=1$.*

Рассмотрим группу G с образующими $b_1,\dots,b_k,b$, множество определяющих соотношений которой состоит из соотношений, указанных выше, и новых соотношений: $b^m=w(b_1,\dots,b_k)$, $b_i^b=v_i(b_1,\dots,b_k)$ для $i=\overline{1,k}$, где w и v_i для $i=\overline{1,k}$ – некоторые групповые слова от $b_1,\dots,b_k$, причем

$$\langle v_1(b_1,\dots,b_k),\dots,v_k(b_1,\dots,b_k)\rangle = H$$

и отображение φ, определенное формулой $b_i \stackrel{\varphi}{\mapsto} v_i(b_1,\dots,b_k)$ на множестве $\{b_1,\dots,b_k\}$, сохраняет все определяющие соотношения группы H, указанные выше. Пусть ψ – автоморфизм группы H, индуцированный отображением φ, как в предыдущем предложении, и выполнены два условия:

1) $w(b_1^{\varphi},\dots,b_k^{\varphi})=w(b_1,\dots,b_k)$, т. е. $w(b_1,\dots,b_k)$ остается неподвижным под действием ψ;

2) ψ^m – внутренний автоморфизм группы H, индуцированный элементом $w(b_1,\dots,b_k)$.

Тогда G – циклическое расширение группы H с фактор-группой G/H порядка m, причем $G/H=\langle bH\rangle$.

Предложение 6. *Пусть H – хопфова группа, заданная образующими $b_1,...,b_k$ и множеством определяющих соотношений:*

$$w_1(b_1,\dots,b_k)=1,\dots,w_s(b_1,\dots,b_k)=1. \tag{1}$$

Рассмотрим группу G с образующими $b_1,\dots,b_k,b$, множество определяющих соотношений которой состоит из соотношений (1) и новых соотношений:

$$b_i^b=v_i(b_1,\dots,b_k),\ \text{для } i=\overline{1,k}, \tag{2}$$

где v_i для $i = \overline{1,k}$ – некоторые групповые слова от $b_1, \dots, b_k$, причем

$$\langle v_1(b_1, \dots, b_k), \dots, v_k(b_1, \dots, b_k)\rangle = H$$

и отображение φ, определенное формулой $b_i \overset{\varphi}{\mapsto} v_i(b_1, \dots, b_k)$ на множестве $\{b_1, \dots, b_k\}$, сохраняет определяющие соотношения (1) группы H, указанные выше.

Тогда G – циклическое расширение группы H с фактор-группой G/H бесконечного порядка, причем $G = H \leftthreetimes \langle b\rangle$.

Доказательство.

Пусть ψ – автоморфизм группы H, индуцированный отображением φ, как в предложении 4, и $G_0 = H \leftthreetimes \langle b\rangle$ – полупрямое произведение H и бесконечной циклической группы $\langle b\rangle$ относительно гомоморфизма $\alpha : \langle b\rangle \to Aut(H)$, где для любого целого m выполняется $(b^m)^\alpha = \psi^m$, и пусть $K = \langle b_1, \dots, b_k, b\rangle$ – группа, в которой выполнены соотношения (1) и (2).

Обозначим буквой T подгруппу $\langle b_1, \dots, b_k\rangle$ в K. Тогда ясно, что $T \trianglelefteq K, K/T = \langle bT\rangle$ и отображение $b_i \mapsto b_i$, где $i = \overline{1,k}$, множества образующих группы H на множество образующих группы T индуцирует гомоморфизм $g : H \to T$.

Определим отображение $f : G_0 \to K$ следующим образом: для любого $m \in Z$ и любого $h \in H$ $f(b^m h) = b^m g(h)$. Корректность определения f очевидна, т.к. любой элемент из G_0 однозначно представим в виде произведения $b^m h$. Имеем:

$$f(b^{m_1}h_1 \cdot b^{m_2}h_2) = f(b^{m_1+m_2}h_1^{b^{m_2}}h_2) =$$

$$b^{m_1+m_2}g(h_1^{b^{m_2}}h_2) = b^{m_1+m_2}g(h_1^{b^{m_2}})g(h_2).$$

С другой стороны,

$$f(b^{m_1}h_1)f(b^{m_2}h_2) = b^{m_1}g(h_1)b^{m_2}g(h_2) = b^{m_1+m_2}(g(h_1))^{b^{m_2}}g(h_2). \qquad (3)$$

Поскольку элемент $g(h_1)$ из T представлен тем же словом от $b_1, \dots, b_k$, что и h_1 в H, и соотношения (2) присутствуют в группе K, как и в группе G_0, то

$$g(h_1)^{b^{m_2}} = g(h_1^{b^{m_2}}),$$

откуда с учетом (3) получаем гомоморфность f.

Таким образом, мы доказали, что любая группа $K = \langle b_1, \dots, b_n, b\rangle$ с соотношениями (1) и (2) является гомоморфным образом группы G_0. Предложение 6 доказано.

Предложение 7. *Пусть в группе G для любых элементов a и b выполняется либо равенство $[a, b, b] = 1$, либо равенство $[a, b, b] = [a, b]^{-2}$, т.е. $[a, b]^b = [a, b]$ или $[a, b]^b = [a, b]^{-1}$. Тогда G – группа Альперина.*

Доказательство. Пусть $[a, b]^b = [a, b]$. Тогда очевидно, что и $[a, b]^{b^{-1}} = [a, b]$, т.е. $[a, b, b^{-1}] = 1$. Пусть $[a, b]^b = [a, b]^{-1}$. Тогда $[a, b] = ([a, b]^{-1})^{b^{-1}}$, откуда $[a, b]^{b^{-1}} = [a, b]^{-1}$, т.е. $[a, b, b^{-1}] = [a, b]^{-2}$. По предложению 1 имеем, что G – группа Альперина.

2. Доказательство пунктов I и II теорем 1 и 2

Заметим, что в группе Альперина, построенной в [4], присутствуют, кроме определяющих соотношений 1) – 6) из теоремы 1 еще два типа соотношений: $\tau_{ijk}^m = 1$, $f_{ij}^{4m} = 1$ для некоторого натурального m и $1 \leq i, j, k \leq n$.

Однако, вычисления при построении требуемой группы G из теоремы 1 и доказательство того, что G – группа Альперина, не считая вычислений, касающихся упомянутых выше двух типов соотношений, почти полностью соответствуют аналогичным вычислениям в [4]. Поэтому ниже мы постоянно ссылаемся на соответствующие фрагменты доказательства теоремы 1 из [4].

Сначала рассмотрим группу

$T = \prod\limits_{2 \leq j < k \leq n} \langle \tau_{1jk} \rangle$ – свободную абелеву группу ранга $\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

При $n \geq j > k \geq 2$. определим элемент τ_{1jk} равным τ_{1kj}^{-1}, а также будем считать, что $\tau_{11j} = \tau_{1j1} = \tau_{1jj} = 1$ для любого $j \in [1, n]$.

Тем самым символ $\tau_{1\alpha\beta}$ определен нами для любых целых $\alpha, \beta \in [1, n]$. Далее, при $i \neq 1$ и любых $j, k \in [1, n]$ определим $\tau_{ijk} = \tau_{1ij}\tau_{1jk}\tau_{1ki}$, и, следовательно, символ τ_{ijk} определен теперь при любых $i, j, k \in [1, n]$.

Лемма 1. *Пусть i, j, k, s – произвольные целые числа из $[1, n]$. Тогда в группе T выполняются условия:*

1) $\tau_{ijk} = \tau_{1ij}\tau_{1jk}\tau_{1ki}$;

2) $\tau_{ijk} = \tau_{kij}$, т.е. элемент τ инвариантен относительно циклического сдвига его индексов;

3) Если в тройке (i, j, k) имеются два одинаковых индекса, то $\tau_{ijk} = 1$;

4) При перемене местами двух индексов в τ_{ijk} получается элемент, обратный к исходному;

5) $\tau_{sij}\tau_{sjk}\tau_{ski} = \tau_{ijk}$.

Доказательство.

Для доказательства равенства 1) достаточно рассмотреть случай $i = 1$. Считаем правую часть равенства:

$$\tau_{11j}\tau_{1jk}\tau_{1k1} = \tau_{1jk},$$

что и требовалось. Далее, имеем

$$\tau_{ijk} = \tau_{1ij}\tau_{1jk}\tau_{1ki} = \tau_{1ki}\tau_{1ij}\tau_{1jk} = \tau_{kij},$$

и 2) доказано. Подобным образом имеем:

$$\tau_{iik} = \tau_{1ii}\tau_{1ik}\tau_{1ki} = 1$$

и, следовательно, с учетом 2) пункт 3) доказан. Далее,

$$\tau_{jik} = \tau_{1ji}\tau_{1ik}\tau_{1kj} = (\tau_{1jk}\tau_{1ki}\tau_{1ij})^{-1} = \tau_{jki}^{-1} = \tau_{ijk}^{-1},$$

и утверждение 4) доказано. И, наконец,

$$\tau_{sij}\tau_{sjk}\tau_{ski} = (\tau_{1si}\tau_{1ij}\tau_{1js})(\tau_{1sj}\tau_{1jk}\tau_{1ks})(\tau_{1sk}\tau_{1ki}\tau_{1is}) = \tau_{1ij}\tau_{1jk}\tau_{1ki} = \tau_{ijk},$$

Лемма 1 доказана.

Затем рассмотрим $T_2 = T \times \langle f_{12} \rangle$, где $|f_{12}| = \infty$. Очевидно, что T_2 – хопфова.

Теперь рассмотрим группу T_3, заданную образующими τ_{1jk} $(2 \leq j < k \leq n)$, f_{12}, f_{13} и определяющим соотношением $[f_{12}, f_{13}] = \tau_{123}$, где, заметим, $\tau_{123} = \tau_{123}\tau_{131}$ в соответствии с формулой (4) в формулировке теоремы 1.

Из предложения 6 следует, что $T_3 = T_2 \leftthreetimes \langle f_{13}\rangle$, $|f_{13}| = \infty$. T_3 – тоже хопфова по предложению 3.

Далее, рассуждая так же, как в статье [4] после леммы 2, с использованием предложения 6 вместо предложения 4 той статьи, получим группу

$$T_n = T\langle f_{12}\rangle \dots \langle f_{1n}\rangle,$$

для которой выполняются следующие условия:

1) T_n порождена образующими τ_{1ij} и f_{1s}, где $2 \le i < j \le n$, $2 \le s \le n$, с определяющими соотношениями группы T и дополнительными определяющими соотношениями:

$$\tau_{1ij}^{f_{1s}} = \tau_{1ij} \text{ и } [f_{1s}, f_{1t}] = \tau_{1st}, \text{ где } 2 \le i < j \le n, 2 \le s, t \le n,$$

где $\tau_{1st} = \tau_{1st}\tau_{1t1}$ в силу леммы 1 и в соответствии с формулой (4) в формулировке теоремы 1;

2) T_n имеет нормальный ряд

$$1 < T < T\langle f_{12}\rangle < \dots < T\langle f_{12}\rangle \dots \langle f_{1n}\rangle = T_n,$$

в котором все фактор-группы, начиная со второй, – бесконечные циклические группы.

Обозначим $T_n = S$.

Аналогично, с использованием предложения 5, проводя необходимые проверки, как в статье [4] между леммами 2 и 3, построим группу $S_{n-1,n}$ (обозначение из указанной статьи), которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $S_{n-1,n}$ порождена образующими τ_{1ij}, f_{st}, где $2 \le i < j \le n, 1 \le s < t \le n$ с определяющими соотношениями

$$[\tau_{1ij}, f_{st}] = 1, \text{ где } 2 \le i < j \le n, 1 \le s < t \le n;$$

$$[f_{ij}, f_{st}] = \tau_{sjt}\tau_{sti} \text{ при } 1 \le i < j \le n, 1 \le s < t \le n;$$

$$f_{ks}^4 f_{1s}^{-4} f_{1k}^4 = \tau_{ks1}^7 \text{ при } 2 \le k < s \le n;$$

2) $S_{n-1,n}$ имеет ряд нормальных подгрупп:

$$T = \prod_{2\le i<j\le n} \langle \tau_{1ij}\rangle < T\langle f_{12}\rangle < \dots < T\langle f_{12}\rangle \dots \langle f_{1n}\rangle = S <$$

$$S\langle f_{23}\rangle < S\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle < \dots < S\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle \dots \langle f_{n-1,n}\rangle = S_{n-1,n},$$

в котором первые $(n-1)$ фактор-групп – бесконечные циклические группы, а остальные $\binom{n-1}{2}$ фактор-групп – циклические порядка 4.

А именно, на 1-м шаге получим группу $S\langle f_{23}\rangle$ с определяющими соотношениями группы S, указанными выше и дополнительными соотношениями: $f_{23}^4 = \tau_{231}^7 f_{12}^{-4} f_{13}^4$, $[\tau_{1ij}, f_{23}] = 1$, $[f_{1i}, f_{23}] = \tau_{2i3}\tau_{231}$ $(2 \le i, j \le n)$. Далее, таким же образом получим группу $S\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle$, и т.д., как в [4] после леммы 2.

Обозначим $F = S_{n-1,n}$.

Далее, определим f_{ij} равным f_{ji}^{-1} при $i > j$ и $f_{ii} = 1$ для любого i.

Следующая лемма - это лемма 3 из статьи [4] без пункта 7).

Лемма 2. *Для любых индексов $i, j, k, s \in [1, n]$ и любого целого t выполняются следующие соотношения в группе F:*

1) $[f_{ij}, f_{sk}] = \tau_{sjk}\tau_{ski}$,

2) $[f_{ij}, f_{jk}^t f_{ki}^t] = 1$,

3) $f_{ij}^t f_{jk}^t f_{ki}^t \in Z(F)$,

4) $f_{ij}^4 f_{jk}^4 f_{ki}^4 = \tau_{ijk}^7$,

5) $(f_{ij}f_{jk}f_{ki})^4 = \tau_{ijk}$,
6) $f_{ij}^2 f_{jk}^2 f_{ki}^2 = (f_{ij}f_{jk}f_{ki})^2\tau_{ijk}$.

Итак, построена группа F, имеющая нормальный ряд

$$1 < T = \prod_{2\le\alpha<\beta\le n}\langle\tau_{1\alpha\beta}\rangle < T\langle f_{12}\rangle < \cdots < T\langle f_{12}\rangle\ldots\langle f_{1n}\rangle = S <$$
$$S\langle f_{23}\rangle < S\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle < \cdots < S\langle f_{23}\rangle\langle f_{24}\rangle\ldots\langle f_{n-1,n}\rangle = F,$$

в котором первая фактор-группа – свободная абелева группа ранга $\binom{n-1}{2}$, следующие $(n-1)$ фактор-групп – бесконечные циклические группы и последние $\binom{n-1}{2}$ фактор-групп – циклические порядка 4, причем в силу лемм 1 и 2 можно считать, что группа F задана образующими τ_{ijk}, f_{ij}, где $1 \le i,j,k \le n$, и определяющими соотношениями:

$$[\tau_{ijk}, f_{st}] = 1,$$
$$f_{ij} = f_{ji}^{-1}, f_{ii} = 1, [f_{ij}, f_{ks}] = \tau_{kjs}\tau_{ksi},$$

$(f_{ij}f_{jk}f_{ki})^4 = \tau_{ijk}$ и $\tau_{sij}\tau_{sjk}\tau_{ski} = \tau_{ijk}$ для любых индексов $i,j,k,s,t \in [1,n]$.

Аналогично построению групп S и F, построим теперь требуемую группу G, присоединяя к F последовательно бесконечные циклические группы $\langle a_1\rangle, \ldots, \langle a_n\rangle$.

Это делается точно так же как в статье [4] после леммы 3, за n шагов с использованием предложения 6 и предложения 3.

Так, на первом шаге рассмотрим группу F_1, заданную образующими τ_{1ij}, f_{kl} группы F, где $2 \le i,j \le n, 1 \le k,l \le n$, и a_1 с определяющими соотношениями группы F и добавочными соотношениями $[\tau_{1ij}, a_1] = 1$, $[f_{ij}, a_1] = f_{j1}^2 f_{1i}^2 \tau_{ij1}^{-2}$. Используя предложения 3 и 6, установим, что $F_1 = F \leftthreetimes \langle a_1\rangle$, где $|a_1| = \infty$. Дальнейший процесс построения – точно такой же, как в статье [4] после леммы 3.

Таким образом, группа G с определяющими соотношениями из формулировки теоремы 1, удовлетворяющая всем условиям пункта I теоремы 1, построена. Следовательно, пункт I теоремы 1 доказан.

Заметим, что на последнем этапе построения группы G, как в статье [4] после леммы 3, можно последовательно присоединять в F циклические группы $\langle a_1\rangle, \ldots, \langle a_n\rangle$ порядка 2.

В результате мы получим группу, удовлетворяющую условию теоремы 2 и пункту I этой теоремы. Поэтому, можно считать, что пункт I теоремы 2 также доказан.

Все утверждения пункта II теоремы 1 очевидны, кроме двух последних.

Доказательство следующей леммы такое же, как доказательство леммы 4 из [4].

Лемма 3. *Для любых индексов $i,j,k \in [1,n]$ и любого целого числа t выполняется условие $f_{ij}^t f_{jk}^t f_{ki}^t \in Z(G)$.*

Следующая лемма уточняет строение группы G.

Лемма 4. *Группа G имеет субнормальный ряд:*

$$1 < L = \prod_{2\le i<j\le n}\langle f_{1i}f_{ij}f_{j1}\rangle < L_2 = L \leftthreetimes \langle f_{12}\rangle <$$

$$L_3 = L_2 \leftthreetimes \langle f_{13} \rangle < \dots < L_n = L_{n-1} \leftthreetimes \langle f_{1n} \rangle = G' <$$

$$K_1 = G' \leftthreetimes \langle a_1 \rangle < K_2 = K_1 \leftthreetimes \langle a_2 \rangle < \dots < K_n = K_{n-1} \leftthreetimes \langle a_n \rangle = G,$$

в котором первая фактор-группа – свободная абелева группа ранга $\binom{n-1}{2}$*, а все остальные фактор-группы – бесконечные циклические группы.*

Доказательство.

Поскольку $(f_{1i}f_{ij}f_{j1})^4 = \tau_{1ij}$ ввиду пункта 5) леммы 2, то L – свободная абелева группа ранга $\binom{n-1}{2}$. Кроме того, $[f_{1i}, f_{1j}] = \tau_{1ij} = (f_{1i}f_{ij}f_{j1})^4$, $[a_i, a_j] = f_{ij} \in G'$, откуда следуют остальные утверждения леммы.

Теперь из леммы 4 сразу следует, что группа G – без кручения.

Осталось доказать утверждение пункта II теоремы 1, касающееся $Z(G)$.

Лемма 5. *Пусть* $i \in [1, n]$*. Тогда* $a_i^2 \in Z(G)$*.*

Доказательство.

Для любых $i, j \in [1, n]$ выполняется

$$[a_i^2, a_j] = f_{ij}^{a_i} f_{ij} = f_{ij}^{-1} f_{ij} = 1.$$

Лемма доказана.

Из лемм 3 и 5 следует, что $\prod\limits_{2 \le i < j \le n} \langle f_{1i}f_{ij}f_{j1} \rangle \times \prod\limits_{k=1}^{n} \langle a_k^2 \rangle \subseteq Z(G)$.

Сначала докажем, что $Z(G') = L = \prod\limits_{2 \le i < j \le n} \langle f_{1i}f_{ij}f_{j1} \rangle$. Из леммы 4 следует, что любой элемент x из G' представим в виде $f_{12}^{\alpha_2} \dots f_{1n}^{\alpha_n} t$, где $t \in L$, и все числа α_i – целые. Пусть $x \in Z(G')$ и какое-то $\alpha_i \neq 0$. Без ограничения общности считаем, что $\alpha_2 \neq 0$. Тогда:

$$[x, f_{13}] = [f_{12}, f_{13}]^{\alpha_2} [f_{14}, f_{13}]^{\alpha_4} \dots [f_{1n}, f_{13}]^{\alpha_n} =$$

$$(\tau_{123}\tau_{131})^{\alpha_2} (\tau_{143}\tau_{131})^{\alpha_4} \dots (\tau_{1n3}\tau_{131})^{\alpha_n} = \tau_{123}^{\alpha_2} \tau_{143}^{\alpha_4} \dots \tau_{1n3}^{\alpha_n} \neq 1.$$

Получили противоречие, которое доказывает, что $Z(G') = L$.

Пусть теперь $x = a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} f \in Z(G)$, где $f \in G'$ и какое-то α_i – нечетное. Без ограничения общности и с учетом леммы 5 можно считать, что $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_i \in \{0, 1\}$ при $2 \le i \le n$, т. е. $x = a_1 a_{i_2} \dots a_{i_s} f$, где все сомножители различны.

Тогда

$$[x, a_2] = [a_1, a_2][a_1, a_2, a_{i_2} \dots a_{i_s} f][a_{i_2} \dots a_{i_s} f, a_2] \equiv$$

$$[a_1, a_2][a_{i_2}, a_2] \dots [a_{i_s}, a_2] \equiv f_{12} f_{i_2,2} \dots f_{i_s,2} \bmod G_3 \not\equiv 1 \bmod G_3,$$

откуда вытекает, что $x \notin Z(G)$. Получили противоречие, которое доказывает, что $Z(G) = \prod\limits_{2 \le i < j \le n} \langle f_{1i}f_{ij}f_{j1} \rangle \times \prod\limits_{k=1}^{n} \langle a_k^2 \rangle$.

Таким образом, пункт II теоремы 1 доказан. Аналогично доказывается пункт II теоремы 2.

3. Доказательство пунктов III теорем 1 и 2.

Лемма 6 выполняет такую же роль, как лемма 5 из [4].

Лемма 6. *Пусть* $i \in [1, n]$. *Тогда для любого элемента* $x \in G$ *выполняется равенство* $[x, a_i, a_i] = [x, a_i]^{-2}$.

Доказательство.
В силу леммы 5 имеем:

$$1 = [x, a_i^2] = [x, a_i][x, a_i]^{a_i}, \text{откуда}$$

$$[x, a_i]^{a_i} = [x, a_i]^{-1}, \text{ т.е. } [x, a_i, a_i] = [x, a_i]^{-2}.$$

Лемма доказана.

С учетом леммы 5, для доказательства пункта III теоремы 1 достаточно доказать, что для любых индексов $i_1, \dots, i_k$, $j_1, \dots, j_l$ выполняется

$$[a_{i_1} \dots a_{i_k}, a_{j_1} \dots a_{j_l}]^{a_{j_1} \dots a_{j_l}} = [a_{i_1} \dots a_{i_k}, a_{j_1} \dots a_{j_l}]^{(-1)^l}.$$

Это делается так же, как в [4] (леммы 5-13).

И, наконец, группа G из теоремы 2 является, очевидно, фактор-группой группы G из теоремы 1. Поэтому, она также является группой Альперина.

Таким образом, теоремы 1 и 2 доказаны.

Обозначим H_n – группу G из теоремы 1. Тогда имеем бесконечную цепочку вложенных друг в друга групп

$$H_3 \subset H_4 \subset H_5 \subset \dots$$

Обозначим $H = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} H_n$.

Тогда H – группа Альперина с вторым коммутантом $\prod\limits_{1 \le i < j} \langle \tau_{1ij} \rangle$ – свободной абелевой группой счетного ранга. Следствие 1 к теореме 1 доказано.

Следствие 2 к теореме 1 вытекает из следствия 1, поскольку $G'' \le Z(G)$ и любая абелева группа является фактор-группой соответствующей свободной абелевой группы.

Следствия 3 и 4 к теореме 2 вытекают из теоремы 2 аналогичным образом.

4. Доказательство теорем 3 и 4.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7. *Если* G *– группа без кручения, то* G *– группа Альперина тогда и только тогда, когда для любых* $a, b \in G$ *либо* $[a, b]^b = [a, b]$, *либо* $[a, b]^b = [a, b]^{-1}$.

Доказательство.
Пусть G – группа Альперина и $H = \langle a, b \rangle$ – неабелева группа в G. Тогда H' – бесконечная циклическая группа и $\langle [a, b] \rangle \le H'$, $\langle [a, b] \rangle \trianglelefteq H$. Так как $H' = \langle [a, b]^x | x \in H \rangle$, то $H' = \langle [a, b] \rangle$. Как известно, бесконечные циклические группы имеют ровно 2 автоморфизма – тождественный и инвертирующий, т.е. такой, который любой элемент переводит в обратный.

Т.к. $\langle [a, b] \rangle \trianglelefteq H$, то сопряжение элементом b индуцирует автоморфизм группы $\langle [a, b] \rangle$. Следовательно, в силу вышесказанного $[a, b]^b = [a, b]$ или $[a, b]^b = [a, b]^{-1}$.

И, наконец, если для любых $a, b \in G$ либо $[a, b]^b = [a, b]$, либо $[a, b]^b = [a, b]^{-1}$, то по предложению 7 введения группа G – группа Альперина. Лемма доказана.

Теорема 3. *Если G – нильпотентная группа Альперина без кручения, то ступень нильпотентности $G\ \leq 2$.*

Доказательство.
Пусть $a, b \in G$ и $[a, b] \neq 1$. Если $[a, b]^b = [a, b]^{-1}$, то

$$[a, b, b] = [a, b]^{-2},$$
$$[a, b, b, b] = [[a, b]^{-2}, b] = [a, b, b]^{-2} = [a, b]^4$$

и т.д. Таким образом,

$$[a, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{k}] = [a, b]^{(-2)^{k-1}}.$$

Т.к. $|[a, b]| = \infty$, то группа G не нильпотентна, что противоречит условию. Следовательно, для любых $[a, b] \in G$ выполняется $[a, b, b] = 1$. Тогда по теореме Леви ([12], с. 288) с учетом того, что в G нет элементов порядка 3, получаем, что G имеет ступень нильпотентности 2. Теорема доказана.

Заметим, что в работе [1] доказано с привлечением одного нетривиального результата Грюнберга, что нильпотентная группа Альперина без кручения метабелева. Это утверждение сразу следует из теоремы 2 выше.

В заключение докажем, что в бесконечном случае условие

$$\text{"}[a, b]^{b^{-1}} \text{ – степень коммутатора } [a, b]\text{"}$$

в формулировке предложения 2 существенно.

Теорема 4. *Существует бесконечная группа G, такая, что для любых $a, b \in G$ $\ [a, b, b]$ – степень коммутатора $[a, b]$, но G – не группа Альперина.*

Доказательство
Пусть Q – группа рациональных чисел относительно обычного сложения. Как известно, голоморф группы Q изоморфен группе

$$G = Q \leftthreetimes Q^* = \{(x, y) | x \in Q^*, y \in Q\},$$

в которой умножение определяется формулой:

$$(x, y)(u, v) = (xu, yu + v)$$

для любых $x, u \in Q^*$ и для любых $y, v \in Q$, где xu, yu – обычные произведения чисел и $yu + v$ – обычная сумма чисел yu и v. Обратным элементом для (x, y) является $(x^{-1}, -yx^{-1})$, а роль единицы выполняет $(1, 0)$.

Пусть $a = (p, 0), b = (1, 1)$, p – натуральное, $p \geq 2$. Имеем:

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab = (p^{-1}, 0)(1, -1)(p, 0)(1, 1) = (p^{-1}, -1)(p, 1) = (1, -p + 1).$$

Считаем тройной коммутатор

$$[a, b, a^{-1}] = [(1, -p + 1), (p^{-1}, 0)] = (1, p - 1)(p, 0)(1, -p + 1)(p^{-1}, 0) =$$
$$(p, p^2 - p)\left(p^{-1}, \frac{1 - p}{p}\right) = \left(1, p - 1 + \frac{1 - p}{p}\right) = \left(1, \frac{(p - 1)^2}{p}\right) \text{ – не степень } [a, b],$$

т.к. $\frac{(p-1)^2}{p}$ – не целое число.

Таким образом, G не является группой Альперина.

Рассмотрим теперь произвольные элементы $(p, q), (s, t)$ из G. Имеем:

$$[(p, q), (s, t)] = (p^{-1}, -p^{-1}q)(s^{-1}, -s^{-1}t)(p, q)(s, t) =$$
$$(p^{-1}s^{-1}, -p^{-1}qs^{-1} - s^{-1}t)(ps, qs + t) =$$

$$(1, (-p^{-1}qs^{-1} - s^{-1}t)ps + qs + t) =$$
$$(1, -q - tp + qs + t) = (1, q(s-1) + t(1-p)).$$

Далее считаем:

$$[(p,q),(s,t),(s,t)] = [(1, q(s-1) + t(1-p), (s,t)] =$$
$$(1, q(1-s) + t(p-1))(s^{-1}, -ts^{-1})(1, q(s-1) + t(1-p))(s,t) =$$
$$(s^{-1}, (q(1-s) + t(p-1))s^{-1} - ts^{-1})(s, (q(s-1) + t(1-p))s + t) =$$
$$(1, q(1-s) + t(p-1) - t + (q(s-1) + t(1-p))s + t) =$$
$$(1, (q(s-1) + t(1-p))(s-1)) = [(p,q),(s,t)]^{s-1}.$$

Таким образом, доказано, что для любых $a, b \in G$ имеем:

$$[a,b,b] \text{ – степень коммутатора } [a,b],$$

но G – не группа Альперина. Теорема доказана.

References

[1] J.L. Alperin, *On a special class of regular p-groups*, Trans. Am. Mat. Soc., **106**:1 (1963), 77–99. MR0142640

[2] B.M. Veretennikov, *Finite Alperin 2-groups with cyclic second commutants*, Algebra and Logic, **50**:3 (2011), 226–244. MR2882198

[3] B.M. Veretennikov, *On finite Alperin 2-groups with elementary abelian second commutants*, Sib. Mat. Zh., **53**:3 (2012), 431–443. MR2978573

[4] B.M. Veretennikov, *On the second commutants of finite Alperin groups*, Sib. Mat. Zh., **55**:1 (2014), 19–34. MR3220583

[5] *Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook. No. 18*, Novosibirsk, 2014.

[6] B. Wilkens, *On the derived length of a finite Alperin 2-group*, Journal of Group Theory, **17**:1 (2014), 151–174. MR3176656

[7] B. M. Veretennikov, *On infinite Alperin groups with abelian second commutator subgroups*, In: Proceedings of the International Conference “Algebra and Logic, Theory and Applications”, Krasnoyarsk, (2013), 175–176.

[8] M. Hall *The theory of groups*, Chelsea Pub. Co., N.Y., 1959. MR0103215

[9] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Wiley, N.Y., 1966. MR0207802

[10] A.I. Maltsev, *On isomorphic representation of infinite groups by means of matrices*, Mat. Sbornik (in Russian), **8** (1940), 405–422. Zbl 0025.00804

[11] K. Hirsch, *Eine kennreichnende Eigenschaft nilpotenter Gruppen*, Math. Nachr., **4** (1950), 47–49.

[12] B. Huppert, *Endliche Gruppen*, **I**, Springer Verlag, Berlin, 1967. MR0224703

Boris Michailovich Veretennikov
Ural Federal University, Ekaterinburg,
Mira 19,
620002, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: boris@veretennikov.ru