S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 232–247 (2015) УДК 512.572
DOI 10.17377/semi.2015.12.019 MSC 20M07

ПЛАНАРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ПОЛУГРУПП

Д.В. СОЛОМАТИН

Abstract. We study the property of planarity of Cayley graphs for varieties of semigroups. It is proved that the variety of semigroups with zero multiplication var$\{xy = zt\}$, the variety of left zero semigroups var$\{xy = x\}$ and the variety var$\{xy = xz\}$ are the only non-trivial planar variety of semigroups. We find the ranks of planarity for some important series of varieties of semigroups.

Keywords: semigroup, Cayley graph, variety of semigroups, planar graph, rank of planarity.

1. Введение

На заре становления теории полугрупп, как специального раздела универсальной алгебры, выкристаллизовалось несколько научных направлений, одним из наиболее продуктивных среди которых является изучение полугрупп на языке тождеств. Идея этого направления заключается в том, чтобы изучать не отдельные полугруппы, а их объединения в легко описываемые классы. Классы полугрупп, удовлетворяющих наперед заданному набору тождеств при этом называют многообразиями полугрупп. Не секрет, что эти классы образуют решетку по включению [8], изучение атомов и бесконечных цепей которой, проливает свет на строение структурных элементов. Напомним, что многообразия алгебраических систем (эквациональные классы) играют важную роль в универсальной алгебре. Многообразие, определяемое набором тождеств, задаёт класс алгебр замкнутый относительно операций взятия гомоморфых образов, подалгебр и прямых произведений, согласно известной теореме Биркгофа [2]. Яркие примеры многообразий доставляют многообразия групп, квазигрупп,

Solomatin, D.V., Planar varieties of semigroups.

Автор выражает глубокую признательность профессору Л.М. Мартынову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и полезные обсуждения результатов.

Поступила 24 декабря 2014 г., опубликована 10 апреля 2015 г.

колец, линейных алгебр над полем, полугрупп, решеток. Именно общая теория многообразий предоставила мощный инструментарий для их изучения. Типовые вопросы, решаемые на языке многообразий для полугрупп перечисляются в обзорах [8], [12], [13], [19], [21], [22]. Изучение тождеств в алгебрах берет свое начало в работах Биркгофа [2] и Б.Х. Неймана [13] прошлого столетия, закрепляется отдельным направлением в монографии [14] и трудах по универсальной алгебре [6], [10], [15], а вплоть до сегодняшнего дня не ослабевает интерес ученых к этой области научного знания [20]. Исследование решетки многообразий полугрупп в терминах структуры этой решетки позволяет нам формулировать принципиально новые задачи, например, задачи описания планарных многообразий полугрупп и рангов планарности многообразий полугрупп.

Определения используемых в работе понятий теории графов можно найти в [7]. Для удобства чтения, приведем определения некоторых понятий, связанных с графами Кэли полугрупп из [23].

Пусть S полугруппа, X – множество порождающих её элементов. Через $Cay(S,X)$ обозначим *граф Кэли* полугруппы S относительно X. Граф $Cay(S,X)$ состоит из множества вершин S и множества помеченных дуг – всевозможных троек (a,x,b), где $a,b \in S$, $x \in X$ и $ax = b$. Заметим, что в данном случае граф Кэли является ориентированным мультиграфом с помеченными дугами. Вершины графа обычно изображаются точками на плоскости, а дуга (a,x,b) – линией направленной от a к b и помеченной элементом x. При изображениях графов Кэли мы будем опускать легковосстановимые метки дуг.

Основой ориентированного мультиграфа называем граф, полученный из данного графа удалением петель и заменой всех дуг, соединяющих две вершины одним ребром, соединяющим эти вершины. Ориентированный мультиграф называем планарным, если его основа является планарным графом.

Будем говорить, что *полугруппа S допускает планарный граф Кэли*, если для некоторого множества X основа графа $Cay(S,X)$ является планарным графом.

В настоящей статье изучается свойство планарности графов Кэли для многообразий полугрупп. Пусть $\boldsymbol{V}$— произвольное многообразие полугрупп. Как и прежде [24], если существует такое натуральное число r, что все $\boldsymbol{V}$-свободные полугруппы ранга $\leq r$ допускают планарный граф Кэли, а $\boldsymbol{V}$-свободная полугруппа ранга $r+1$ уже не допускает планарный граф Кэли, то *рангом планарности* $\boldsymbol{V}$ называется это число $r = r_\pi(\boldsymbol{V})$. Если для многообразия $\boldsymbol{V}$ такого натурального числа не существует, то говорят, что многообразие $\boldsymbol{V}$ имеет бесконечный ранг планарности и пишут $r_\pi(\boldsymbol{V}) = \infty$. Многообразие, каждая полугруппа которого допускает планарный граф Кэли, называется *планарным*. Напомним, что атомы решетки $\mathcal{L}$ всех многообразий полугрупп исчерпываются следующими многообразиями: $\boldsymbol{Z}_l = \mathrm{var}\{xy = x\}$ полугрупп левых нулей, $\boldsymbol{Z}_r = \mathrm{var}\{xy = y\}$ полугрупп правых нулей, $\boldsymbol{C} = \mathrm{var}\{xy = zt\}$ полугрупп с нулевым умножением, $\boldsymbol{A}_{1,1} = \mathrm{var}\{xy = yx; x = x^2\}$ полурешеток и $\boldsymbol{A}_p = \mathrm{var}\{xy = yx; x^p y = y\}$ абелевых групп экспоненты p для всех простых p.

2. Основной результат

Теорема 1. *Нетривиальные планарные многообразия полугрупп исчерпываются многообразиями $\boldsymbol{Z}_l$, $\boldsymbol{C}$ и их покрывающим многообразием* $\mathrm{var}\{xy = xz\}$.

Доказательство. Ключевую роль при доказательстве теоремы играют материалы обзора Эванса [8], в котором на стр.11, в частности, приведена решетка обозначаемая нами как $\mathcal{L}_{16}$ всех шестнадцати подмногообразий многообразия, порожденного негрупповыми атомами $\boldsymbol{Z}_l$, $\boldsymbol{Z}_r$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}_{1,1}$ решетки многообразий полугрупп. Кроме того, воспользуемся фактом о том, что групповые многообразия $\boldsymbol{A}_p$, не являются планарными [24], следовательно, среди многообразий порожденных с участием групповых атомов не существует планарных.

В цитируемом обзоре [8] имеется опечатка, а именно, хорошо известно [3], [9] и легко проверяется, что объединение многообразий полугрупп левых нулей и полурешеток дает многообразие полугрупп, определяемое системой тождеств $\{xyz = xzy; x = x^2\}$, а не системой $\{xyz = zxy; x = x^2\}$, как указанно в обзоре [8]. Легко видеть, что последняя система тождеств определяет многообразие полурешёток. В самом деле, если выполняются тождества $xyz = zxy$ и $x = x^2$, то $xy = xyy = yxy = yyx = yx$. Позднее на Рис.23 будет приведена исправленная решетка $\mathcal{L}_{16}$, рядом с каждой вершиной которой будут перечислены тождества и указаны вычисленные ранги планарности соответствующих многообразий.

Для простоты изложения, обозначаем элементы решетки $\mathcal{L}_{16}$ следующим образом: $\boldsymbol{V}_{0000} = \mathrm{var}\{x = y\} = \boldsymbol{T}$ – тривиальное многообразие, являющееся нулем этой решетки; $\boldsymbol{V}_{0001} = \mathrm{var}\{xy = x\} = \boldsymbol{Z}_l$ – многообразие полугрупп левых нулей; $\boldsymbol{V}_{0010} = \mathrm{var}\{xy = zt\} = \boldsymbol{C}$ – многообразие полугрупп с нулевым умножением; $\boldsymbol{V}_{0011} = \mathrm{var}\{xy = xz\}$; $\boldsymbol{V}_{0100} = \mathrm{var}\{xy = y\} = \boldsymbol{Z}_r$ – многообразие полугрупп правых нулей; $\boldsymbol{V}_{0101} = \mathrm{var}\{xyz = xz; x = x^2\}$; $\boldsymbol{V}_{0110} = \mathrm{var}\{xy = zy\}$; $\boldsymbol{V}_{0111} = \mathrm{var}\{xyz = xz\}$; $\boldsymbol{V}_{1000} = \mathrm{var}\{xy = yx; x = x^2\} = \boldsymbol{A}_{1,1}$ – многообразие полурешеток; $\boldsymbol{V}_{1001} = \mathrm{var}\{xyz = xzy; x = x^2\}$; $\boldsymbol{V}_{1010} = \mathrm{var}\{xy = yx; xy = x^2y\}$; $\boldsymbol{V}_{1011} = \mathrm{var}\{xyz = xzy; xy = x^2y; xy = xy^2\}$; $\boldsymbol{V}_{1100} = \mathrm{var}\{xzy = zxy; x = x^2\}$; $\boldsymbol{V}_{1101} = \mathrm{var}\{xyzt = xzyt; x = x^2\}$; $\boldsymbol{V}_{1110} = \mathrm{var}\{xzy = zxy; xy = x^2y; xy = xy^2\}$; $\boldsymbol{V}_{1111} = \mathrm{var}\{xyzt = xzyt; xy = x^2y; xy = xy^2\}$ – многообразие, являющееся единицей этой решетки.

Таким образом, граф решетки $\mathcal{L}_{16}$ представляет собой четырехмерный куб Q_4, вершинам которого соответствуют многообразия $\boldsymbol{V}_{i_3 i_2 i_1 i_0}$ для всех возможных $(i_3, i_2, i_1, i_0) \in \{0,1\}^4$ и две вершины которого соединены ребром тогда и только тогда, когда расстояние по Хэммингу между индексами $i_3 i_2 i_1 i_0$ равно единице. Например, ребрами соединена вершина обозначающая многообразие $\boldsymbol{V}_{0000}$ с $\boldsymbol{V}_{0001}$, $\boldsymbol{V}_{0010}$, $\boldsymbol{V}_{0100}$ и $\boldsymbol{V}_{1000}$, это соответствует тому, что последние являются покрывающими многообразия $\boldsymbol{V}_{0000}$. $\mathcal{L}_{16}$ формирует шестнадцатиэлементную булеву алгебру.

Ясно, что приведенные в формулировке теоремы планарные многообразия имеют бесконечный ранг планарности. Так как основа графов Кэли полугрупп левых нулей из многообразия $\boldsymbol{V}_{0001} = \boldsymbol{Z}_l$ представляет собой пустой граф (груду), для полугрупп с нулевым умножением из многообразия $\boldsymbol{V}_{0010} = \boldsymbol{C}$ в основе лежит звезда, а для покрывающего их многообразия $\boldsymbol{V}_{0011} = \mathrm{var}\{xy = xz\}$ – парасочетания, очевидно, планарные при любом количестве вершин. Таким образом, $r_\pi(\boldsymbol{V}_{0000}) = r_\pi(\boldsymbol{V}_{0001}) = r_\pi(\boldsymbol{V}_{0010}) = r_\pi(\boldsymbol{V}_{0011}) = \infty$

Докажем, что все остальные нетривиальные многообразия решетки $\mathcal{L}_{16}$ имеют конечные ранги планарности в пределах от 2 до 4. Тем самым будет приведена классификация многообразий из $\mathcal{L}_{16}$ по рангам планарности.

Основа графа Кэли свободной полугруппы S правых нулей многообразия $\boldsymbol{V}_{0100} = \mathrm{var}\{xy = y\}$ представляет собой полный граф, порядок которого равен количеству образующих элементов данной полугруппы, а поэтому является планарной для полугрупп с четырьмя образующими и менее. В то же время, графы Кэли полугрупп многообразия $\boldsymbol{V}_{0100}$ имеющих более четырех образующих не являются планарными, следовательно, $r_\pi(\boldsymbol{V}_{0100}) = 4$.

Плоская укладка графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{0101} = \mathrm{var}\{xyz = xz; x = x^2\}$ прямоугольных полугрупп изображена на Рис.1, а графы Кэли полугрупп того же многообразия, но с меньшим числом образующих элементов, являются подграфами данного, следовательно являются планарными, так как любой подграф планарного графа планарен.

Заметим, что условием существования гомеоморфного графу K_5 подграфа основы графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, d, \ldots, e|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{0101} = \mathrm{var}\{xyz = xz; x = x^2\}$ прямоугольных полугрупп является выполнение в данной полугруппе S следующих десяти равенств, для разных её элементов a, b, c, d, e, ab, ac, ad, ae: $a \cdot b = ab$, $a \cdot c = ac$, $a \cdot d = ad$, $a \cdot e = ae$, $ab \cdot c = ac$, $ab \cdot d = ad$, $ab \cdot e = ae$, $ae \cdot c = ac$, $ae \cdot d = ad$, $ac \cdot d = ad$. Последнее наглядно представлено на Рис.2. То есть графы Кэли полугрупп многообразия $\boldsymbol{V}_{0101}$ имеющие более четырех образующих не являются планарными и $r_\pi(\boldsymbol{V}_{0101}) = 4$.

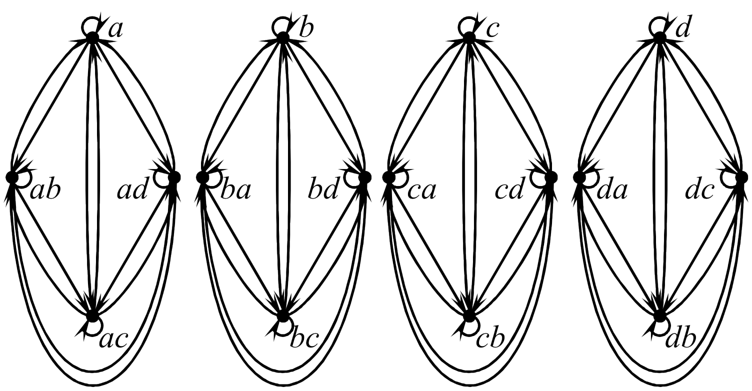

Рис. 1. Граф Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{0101} = \mathrm{var}\{xyz = xz; x = x^2\}$ прямоугольных полугрупп.

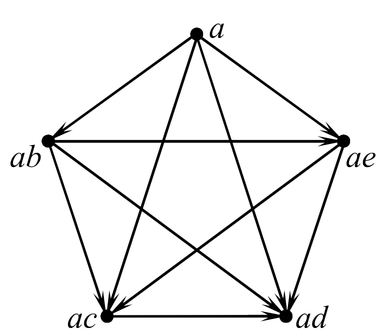

Рис. 2. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, d, \ldots, e|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{0101} = \mathrm{var}\{xyz = xz; x = x^2\}$ прямоугольных полугрупп.

Плоская укладка графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{0111} = \mathrm{var}\{xyz = xz\}$ изображена на Рис.3, а графы Кэли полугрупп того же многообразия, но с меньшим числом образующих элементов, являются подграфами данного, следовательно являются планарными, по аналогии с предыдущим случаем.

Условием существования гомеоморфного графу K_5 подграфа основы графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \ldots, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{0111} = \mathrm{var}\{xyz = xz\}$ является выполнение в данной полугруппе S следующих десяти равенств, для разных её элементов a, b, c, d, ab, ac, ad, a^2: $a \cdot b = ab$, $a \cdot c = ac$, $a \cdot d = ad$, $a \cdot a = a^2$, $ab \cdot c = ac$, $ad \cdot b = ab$, $ad \cdot c = ac$, $a^2 \cdot c = ac$, $a^2 \cdot d = ad$, $a^2 \cdot b = ab$. Последнее наглядно представлено на Рис.4. То есть графы Кэли полугрупп многообразия $\boldsymbol{V}_{0111}$ имеющих более трех образующих не являются планарными и $r_\pi(\boldsymbol{V}_{0111}) = 3$.

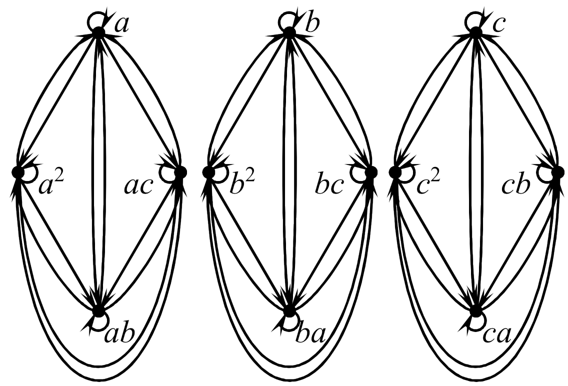

Рис. 3. Граф Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{0111} = \mathrm{var}\{xyz = xz\}$.

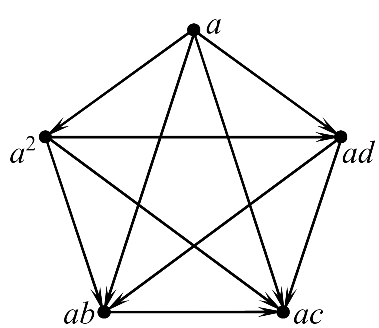

Рис. 4. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \ldots, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{0111} = \mathrm{var}\{xyz = xz\}$.

Плоская укладка графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{0110} = \mathrm{var}\{xy = zy\}$ изображена на Рис.5, а графы Кэли полугрупп того же многообразия, но с меньшим числом образующих элементов, являются подграфами данного, следовательно являются планарными, по аналогии с первым случаем.

Условием существования гомеоморфного графу $K_{3,3}$ подграфа основы графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, \ldots, c|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{0110} = \mathrm{var}\{xy = zy\}$ является выполнение в данной полугруппе S следующих девяти равенств, для разных её элементов a, b, c, a^2, b^2, c^2: $a\cdot a = a^2$, $a\cdot b = b^2$, $a\cdot c = c^2$, $b\cdot a = a^2$, $b\cdot b = b^2$, $b\cdot c = c^2$, $c\cdot a = a^2$, $c\cdot b = b^2$, $c\cdot c = c^2$. Последнее наглядно представлено на Рис.6. То есть графы Кэли полугрупп многообразия $\boldsymbol{V}_{0110}$ имеющих более двух образующих не являются планарными и $r_\pi(\boldsymbol{V}_{0110}) = 2$.

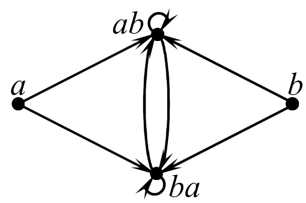

Рис. 5. Граф Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{0110} = \mathrm{var}\{xy = zy\}$.

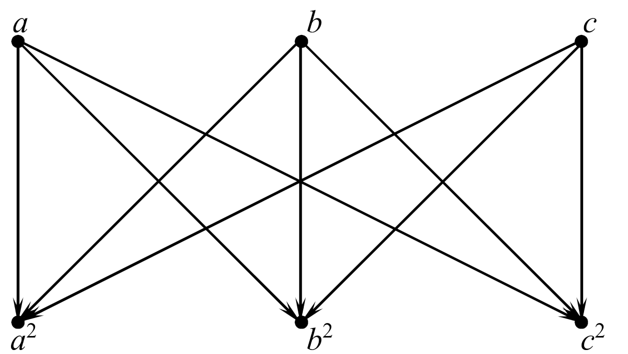

Рис. 6. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, \ldots, c|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{0110} = \mathrm{var}\{xy = zy\}$.

Плоская укладка графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1000} = \mathrm{var}\{xy = yx; x = x^2\}$ изображена на Рис.7, а графы Кэли полугрупп того же многообразия, но с меньшим числом образующих элементов, являются подграфами данного, следовательно являются планарными, по аналогии с первым случаем.

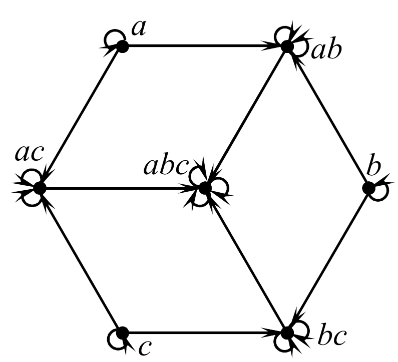

Рис. 7. Граф Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1000} = \mathrm{var}\{xy = yx; x = x^2\}$.

Заметим, что условием существования гомеоморфного графу K_5 подграфа основы графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \ldots, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1000} = \mathrm{var}\{xy = yx; x^2 = x\}$ является выполнение в данной полугруппе S

следующих шестнадцати равенств, для разных её элементов a, b, c, d, $abcd$, bdc, bd, abd, ad, acd, ac, abc, bc, cd, ab: $bdc \cdot a = abcd$, $bd \cdot c = bdc$, $bd \cdot a = abd$, $ad \cdot b = abd$, $ad \cdot c = acd$, $ac \cdot d = acd$, $ac \cdot b = abc$, $abc \cdot d = abcd$, $acd \cdot b = abcd$, $abd \cdot c = abcd$, $bc \cdot a = abc$, $bc \cdot d = adc$, $cd \cdot b = bdc$, $cd \cdot a = acd$, $ac \cdot b = abc$, $ac \cdot d = acd$. Последнее наглядно представлено на Рис.8. То есть графы Кэли полугрупп многообразия $\boldsymbol{V}_{1000}$ имеющих более трех образующих не являются планарными и $r_\pi(\boldsymbol{V}_{1000}) = 3$. С другой стороны, тот факт, что ранг планарности многообразия полурешеток $\boldsymbol{V}_{1000} = \mathrm{var}\{xy = yx; x = x^2\} = \boldsymbol{A}_{1,1}$ конечен и равен $r_\pi(\boldsymbol{V}_{1000}) = 3$ легко получить из доказательства результатов [24].

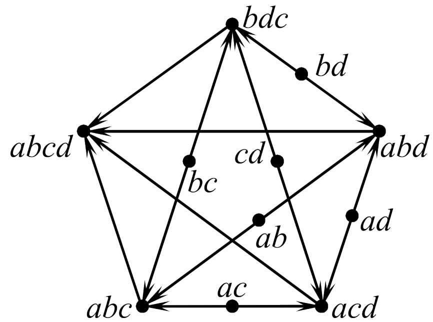

Рис. 8. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \ldots, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1000} = \mathrm{var}\{xy = yx; x = x^2\}$.

Плоская укладка графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1011} = \mathrm{var}\{xyz = xzy; xy = x^2y; xy = xy^2\}$ изображена на Рис.9, а графы Кэли полугрупп того же многообразия, но с меньшим числом образующих элементов, являются подграфами данного, следовательно являются планарными, по аналогии с первым случаем.

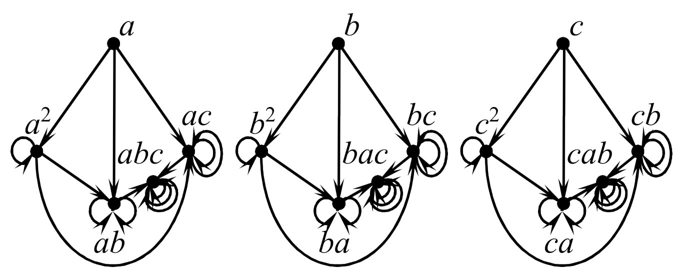

Рис. 9. Граф Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1011} = \mathrm{var}\{xyz = xzy; xy = x^2y; xy = xy^2\}$.

Условием существования гомеоморфного графу K_5 подграфа основы графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \ldots, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1011} = \mathrm{var}\{xyz = xzy; xy = x^2y; xy = xy^2\}$ является выполнение в данной полугруппе S следующих тринадцати равенств, для разных её элементов a, b, c, d, ad, acd, ac, abc, ab, a^2, abd: $a \cdot d = ad$, $ad \cdot c = acd$, $ac \cdot d = acd$, $ac \cdot b = abc$, $ab \cdot c = abc$, $a^2 \cdot b = ab$, $a \cdot a = a^2$, $a^2 \cdot d = ad$, $a^2 \cdot c = ac$, $a \cdot b = ab$, $a \cdot c = ac$, $ab \cdot d = abd$, $ad \cdot b = abd$. Последнее наглядно представлено на Рис.10. То есть графы Кэли полугрупп многообразия $\boldsymbol{V}_{1011}$ имеющих более трех образующих не являются планарными и $r_\pi(\boldsymbol{V}_{1011}) = 3$.

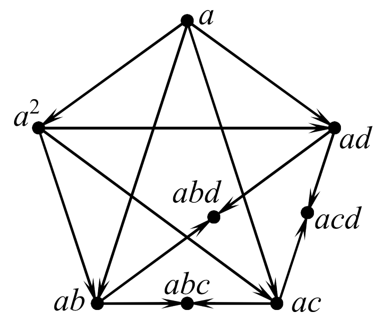

Рис. 10. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \ldots, d|$ *многообразия* $\boldsymbol{V}_{1011} = \mathrm{var}\{xyz = xzy; xy = x^2y; xy = xy^2\}$.

Плоская укладка графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1010} = \mathrm{var}\{xy = yx; xy = x^2y\}$ изображена на Рис.11, а графы Кэли полугрупп того же многообразия, но с меньшим числом образующих элементов, являются подграфами данного, следовательно являются планарными, по аналогии с первым случаем.

На Рис.12 приведен гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \ldots, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1010} = \mathrm{var}\{xy = yx; xy = x^2y\}$.

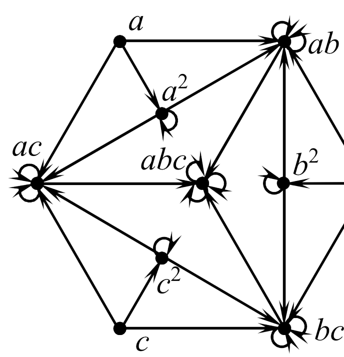

Рис. 11. Граф Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c|$ *многообразия* $\boldsymbol{V}_{1010} = \mathrm{var}\{xy = yx; xy = x^2y\}$.

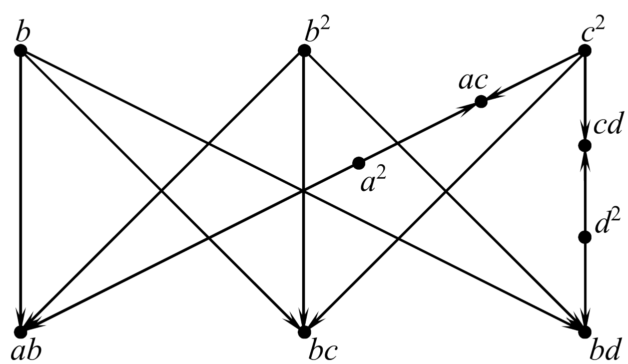

Рис. 12. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \ldots, d|$ *многообразия* $\boldsymbol{V}_{1010} = \mathrm{var}\{xy = yx; xy = x^2y\}$.

Условием существования гомеоморфного графу $K_{3,3}$ подграфа основы графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \ldots, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1010}$ заданного системой тождеств $\mathrm{var}\{xy = yx; xy = x^2y\}$ является выполнение в данной полугруппе S следующих двенадцати равенств, для разных её элементов a, b, c, d, b^2, c^2, ab, bc, bd, a^2, ac, cd, d^2: $b \cdot a = ab$, $b \cdot c = bc$, $b \cdot d = bd$, $b^2 \cdot a = ab$, $b^2 \cdot c = bc$, $b^2 \cdot d = bd$, $c^2 \cdot a = ac$, $a^2 \cdot c = ac$, $a^2 \cdot b = ab$, $c^2 \cdot b = bc$, $c^2 \cdot d = cd$, $d^2 \cdot c = cd$, $d^2 \cdot b = bd$. То есть графы Кэли полугрупп многообразия $\boldsymbol{V}_{1010}$ имеющих более трех образующих не являются планарными и $r_\pi(\boldsymbol{V}_{1010}) = 3$.

Плоская укладка графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1100} = \mathrm{var}\{xzy = zxy; x = x^2\}$ изображена на Рис.13, а графы Кэли полугрупп того же многообразия, но с меньшим числом образующих элементов, являются подграфами данного, следовательно являются планарными, по аналогии с первым случаем. На Рис.14. приведен гомеоморфный графу K_5 подграф графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \ldots, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1100} = \mathrm{var}\{xzy = zxy; x = x^2\}$.

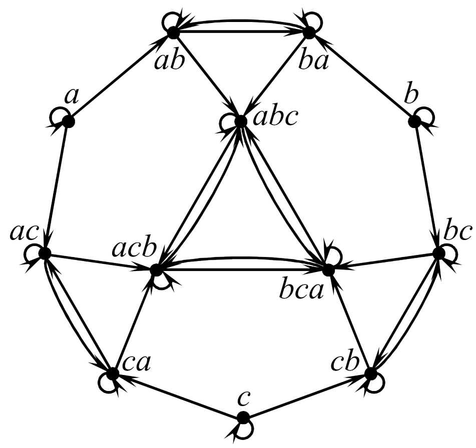

Рис. 13. Граф Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1100} = \mathrm{var}\{xzy = zxy; x = x^2\}$.

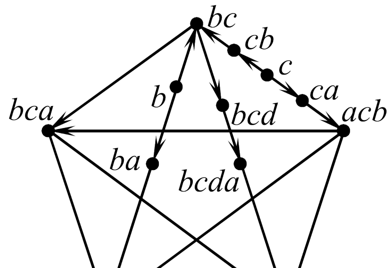

Рис. 14. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \ldots, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1100} = \mathrm{var}\{xzy = zxy; x = x^2\}$.

Условием существования гомеоморфного графу K_5 подграфа основы графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \ldots, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1100} = \mathrm{var}\{xzy =$

$zxy; x = x^2\}$ является выполнение в данной полугруппе S следующих семнадцати равенств, для разных её элементов a, b, c, d, bca, bc, cb, ca, acb, $abcd$, abc, ba, bcd, $bcda$: $bc \cdot a = bca$, $cb \cdot c = bc$, $c \cdot b = cb$, $c \cdot a = ca$, $ca \cdot b = acb$, $acb \cdot d = abcd$, $abc \cdot d = abcd$, $bca \cdot c = abc$, $bca \cdot d = abcd$, $bcda \cdot d = abcd$, $bcd \cdot a = bcda$, $bc \cdot d = bcd$, $b \cdot c = bc$, $b \cdot a = ba$, $ba \cdot c = abc$, $acb \cdot c = abc$, $acb \cdot a = bca$. То есть графы Кэли полугрупп многообразия $\boldsymbol{V}_{1100}$ имеющих более трех образующих не являются планарными и $r_\pi(\boldsymbol{V}_{1100}) = 3$.

Граф Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1101} = \mathrm{var}\{xyzt = xzyt; x = x^2\}$ представляет собой четыре связные компоненты, одна из которых изображена на Рис.15, где (x, y, z, t) поочередно принимают следующие наборы значений: (a, b, c, d), (b, a, c, d), (c, a, b, d), (d, a, b, c), соответственно, а графы Кэли полугрупп того же многообразия, но с меньшим числом образующих элементов, являются подграфами данного, следовательно являются планарными, по аналогии с первым случаем.

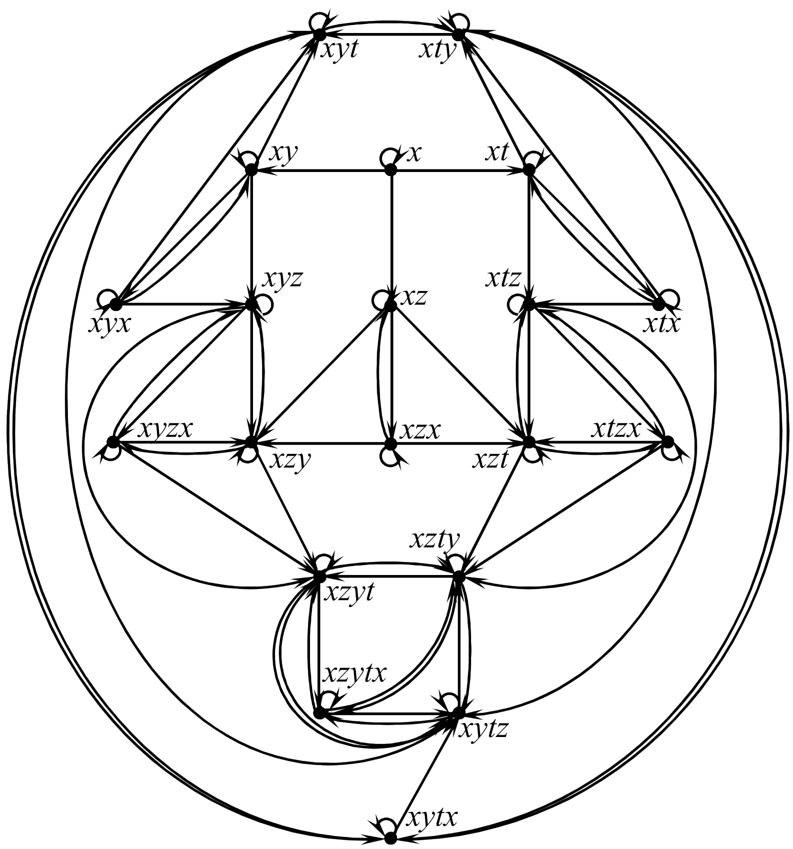

Рис. 15. Одна из четырех связных компонент графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1101} = \mathrm{var}\{xyzt = xzyt; x = x^2\}$.

Условием существования гомеоморфного графу K_5 подграфа основы графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, d, \dots, e|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1101} = \mathrm{var}\{xyzt = xzyt; x = x^2\}$ является выполнение в данной полугруппе S следующих десяти равенств, для разных её элементов a, b, c, d, e, $acbda$, $acbd$, $acdb$, $abcde$, $abdc$: $acbd \cdot a = acbda$, $acbd \cdot b = acdb$, $acdb \cdot e = abcde$, $abdc \cdot e = abcde$,

$acbda \cdot c = abdc$, $acbda \cdot e = abcde$, $acbd \cdot e = abcde$, $acbd \cdot c = abdc$, $acdb \cdot c = abdc$, $acdb \cdot a = acbda$. Последнее наглядно представлено на Рис.16. То есть графы Кэли полугрупп многообразия $\boldsymbol{V}_{1101}$ имеющих более четырех образующих не являются планарными и $r_\pi(\boldsymbol{V}_{1101}) = 4$.

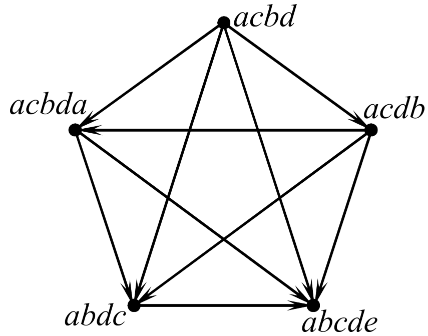

Рис. 16. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, d, \ldots, e|$ *многообразия* $\boldsymbol{V}_{1101} = \mathrm{var}\{xyzt = xzyt; x = x^2\}$.

Плоская укладка графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1110} = \mathrm{var}\{xzy = zxy; xy = x^2y; xy = xy^2\}$ изображена на Рис.17, а графы Кэли полугрупп того же многообразия, но с меньшим числом образующих элементов, являются подграфами данного, следовательно являются планарными, по аналогии с первым случаем.

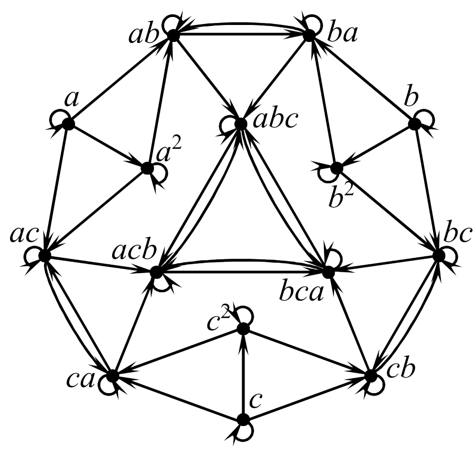

Рис. 17. Граф Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c|$ *многообразия* $\boldsymbol{V}_{1110} = \mathrm{var}\{xzy = zxy; xy = x^2y; xy = xy^2\}$.

Условием существования гомеоморфного графу K_5 подграфа основы графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \ldots, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1110} = \mathrm{var}\{xzy = zxy; xy = x^2y; xy = xy^2\}$ является выполнение в данной полугруппе S следующих семнадцати равенств, для разных её элементов a, b, c, d, acb, ac, a^2, ab, abc, $abcd$, bca, $abdc$, abd, ba, b^2, bc: $ac \cdot b = acb$, $a^2 \cdot c = ac$, $a^2 \cdot b = ab$, $ab \cdot c = abc$, $abc \cdot d = abcd$, $bca \cdot d = abcd$, $acb \cdot a = bca$, $acb \cdot d = abcd$, $abdc \cdot d = abcd$, $abd \cdot c = abdc$, $ab \cdot d = abd$, $ab \cdot a = ba$, $b^2 \cdot a = ba$, $b^2 \cdot c = bc$, $bc \cdot a = bca$, $abc \cdot a = bca$, $abc \cdot b = acb$.

Последнее наглядно представлено на Рис.18. То есть графы Кэли полугрупп многообразия $\boldsymbol{V}_{1110}$ имеющих более трех образующих не являются планарными и $r_\pi(\boldsymbol{V}_{1110}) = 3$.

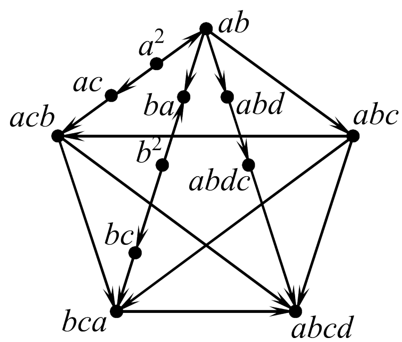

Рис. 18. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \dots, d|$ *многообразия* $\boldsymbol{V}_{1110} = \mathrm{var}\{xzy = zxy; xy = x^2y; xy = xy^2\}$.

Плоская укладка графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1111} = \mathrm{var}\{xyzt = xzyt; xy = x^2y; xy = xy^2\}$ изображена на Рис.19, а графы Кэли полугрупп того же многообразия, но с меньшим числом образующих элементов, являются подграфами данного, следовательно являются планарными, по аналогии с первым случаем.

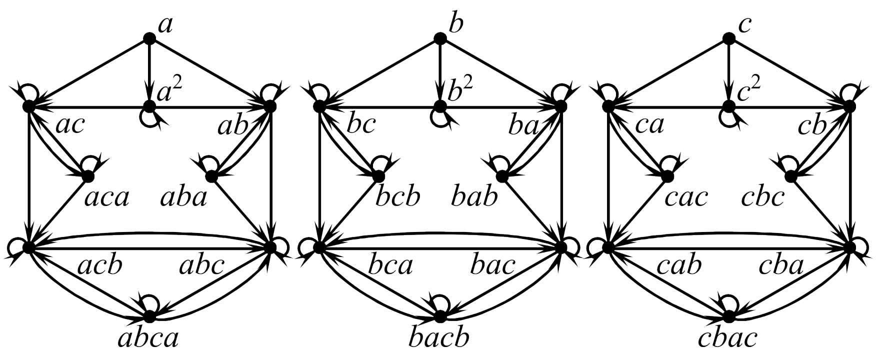

Рис. 19. Граф Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c|$ *многообразия* $\boldsymbol{V}_{1111} = \mathrm{var}\{xyzt = xzyt; xy = x^2y; xy = xy^2\}$.

На Рис.20 приведен подграф графа Кэли свободной, с не менее чем четырьмя образующими элементами, полугруппы $S = \langle a, b, c, \dots, d|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1111}$ заданного системой тождеств $\mathrm{var}\{xyzt = xzyt;\ xy = x^2y; xy = xy^2\}$, основа которого гомеоморфна графу $K_{3,3}$. Условием существования такого подграфа графа Кэли является выполнение в выбранной полугруппе S следующих тринадцати равенств, для разных её элементов a, b, c, d, a^2, abc, ac, ab, ad, acb, $abcd$, $adcb$, adc: $a \cdot c = ac$, $a \cdot b = ab$, $a \cdot d = ad$, $a^2 \cdot c = ac$, $a^2 \cdot b = ab$, $a^2 \cdot d = ad$, $ac \cdot b = acb$, $acb \cdot c = abc$, $ab \cdot c = abc$, $abc \cdot d = abcd$, $adcb \cdot d = abcd$, $adc \cdot b = adcb$, $ad \cdot c = adc$. То есть графы Кэли полугрупп многообразия $\boldsymbol{V}_{1111}$ имеющих более трех образующих не являются планарными и $r_\pi(\boldsymbol{V}_{1111}) = 3$.

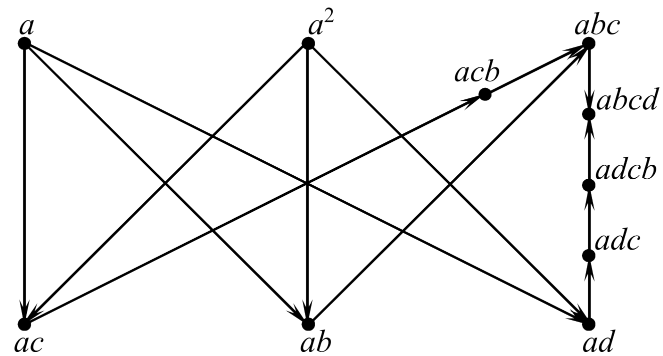

Рис. 20. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, \ldots, d|$ *многообразия* $\boldsymbol{V}_{1111} = \mathrm{var}\{xyzt = xzyt; xy = x^2y; xy = xy^2\}$.

И в заключение, тот факт, что ранг планарности многообразия $\boldsymbol{V}_{1001} = \mathrm{var}\{xyz = xzy; x = x^2\}$ конечен и равен $r_\pi(\boldsymbol{V}_{1001}) = 4$ легко получить, изобразив плоскую укладку графа Кэли полугруппы этого многообразия с четырьмя образующими и менее на Рис.21, и найти изображенный на Рис.22 подграф, гомеоморфный графу K_5 с некоторой ориентацией ребер в графе Кэли полугруппы этого многообразия с пятью образующими и более. Существование последнего обусловлено выполнением в данной полугруппе S следующих шестнадцати равенств, для разных её элементов a, b, c, d, e, ab, abc, ac, acd, ad, ade, ae, abe, ace, abd: $a \cdot e = ae$, $ae \cdot d = ade$, $ad \cdot e = ade$, $ad \cdot c = acd$, $ac \cdot d = acd$, $ac \cdot b = abc$, $ab \cdot c = abc$, $a \cdot b = ab$, $ab \cdot e = abe$, $ae \cdot b = abe$, $ae \cdot c = ace$, $ac \cdot e = ace$, $a \cdot c = ac$, $a \cdot d = ad$, $ad \cdot b = abd$, $ab \cdot d = abd$. То есть графы Кэли полугрупп многообразия $\boldsymbol{V}_{1001}$ имеющих более четырех образующих не являются планарными и $r_\pi(\boldsymbol{V}_{1001}) = 4$.

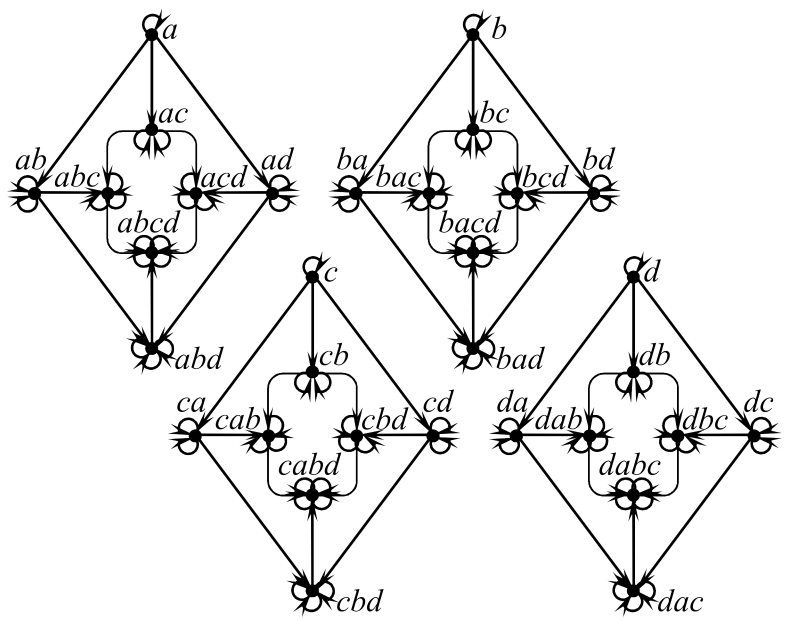

Рис. 21. Граф Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, d|$ *многообразия* $\boldsymbol{V}_{1001} = \mathrm{var}\{xyz = xzy; x = x^2\}$.

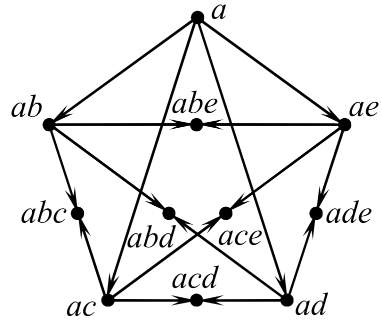

Рис. 22. Подграф графа Кэли свободной полугруппы $S = \langle a, b, c, d, \dots, e|$ многообразия $\boldsymbol{V}_{1001} = \mathrm{var}\{xyz = xzy; x = x^2\}$.

Резюмируя вышесказанное, на Рис.23 приведем решетку $\mathcal{L}_{16}$, рядом с каждой вершиной которой перечислены тождества и указаны вычисленные ранги планарности соответствующих многообразий.

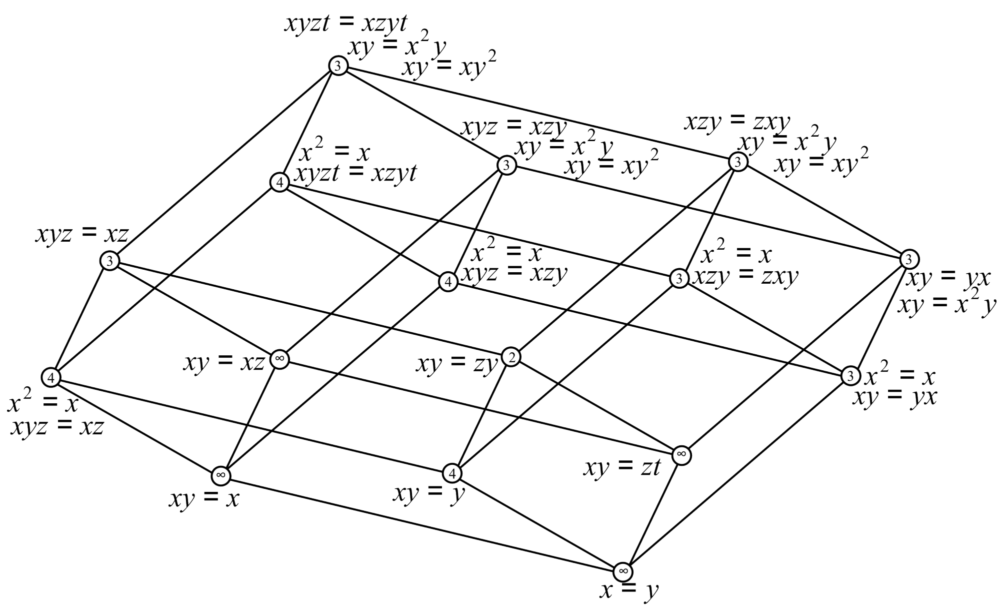

Рис. 23. Решетка многообразий полугрупп порожденная негрупповыми атомами с указанием рангов планарности соответствующих многообразий.

Доказательство завершено. □

В качестве следствия теоремы получаем, что *единственным планарным нетривиальным многообразием коммутативных полугрупп является многообразие $\boldsymbol{C}$ полугрупп с нулевым умножением.*

При этом, имеющее бесконечный ранг планарности многообразие (свободная полугруппа которого при любом числе образующих допускает планарный граф Кэли) и планарное многообразие (каждая полугруппа которого допускает планарный граф Кэли) являются разными понятиями. Например, многообразие всех полугрупп имеет бесконечный ранг планарности, так как легко проверить, что абсолютно свободная полугруппа с любым числом образующих допускает планарный граф Кэли. В то же время оно не является планарным. Тем не менее, для решетки $\mathcal{L}_{16}$ в основном оказалась верна следующая априорная оценка рангов планарности, справедливая, как известно из [24], для решетки многообразий коммутативных моноидов: для любых полугрупповых многообразий $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ имеют место неравенства $r_\pi(\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y}) \leq \max(r_\pi(\boldsymbol{X}); r_\pi(\boldsymbol{Y}))$ и $r_\pi(\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y}) \geq \min(r_\pi(\boldsymbol{X}); r_\pi(\boldsymbol{Y}))$ (см. Рис.23). Исключение для второго неравенства составляют лишь многообразия $\boldsymbol{V}_{0111} = \mathrm{var}\{xyz = xz\}$ и $\boldsymbol{V}_{1110} = \mathrm{var}\{xzy = zxy; xy = x^2y; xy = xy^2\}$, ранги планарности которых равны 3, а ранг планарности их пересечения $\boldsymbol{V}_{0110} = \mathrm{var}\{xy = zy\}$ равен 2.

References

[1] S. I. Adian, *Defining relations and algorithmic problems for groups and semigroups*, Proc. Steklov Inst. Math., **85** (1966), 124 (in Russian).

[2] G. Birkhoff, *On the Structure of Abstract Algebras*, Proc. Camb. Phil. Soc., **31** (1935), 433–454. Zbl 0013.00105

[3] A. P. Biryukov, *Varieties of idempotent semigroups*, Algebra and Logic, **9**:3 (1970), 255–273 (in Russian). Zbl 0223.20079

[4] A. H. Clifford, G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol.1, American Mathematical Society, 1961. MR0132791

[5] A. H. Clifford, G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol.2, American Mathematical Society, 1967. MR0218472

[6] P. M. Cohn, *Universal Algebra*, Harper and Row Publishers, 1965. MR0175948

[7] V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. I. Saravanov, R.I. Tyszkiewicz, *Lectures on graph theory*, Moscow: Science, 1990 (in Russian). MR1158046

[8] T. Evans, *The lattice of semigroup varieties*, Semigroup Forum, **2** (1971), 1–43. MR0284528

[9] C. Fennemore, *All varieties of bands*, Semigroup Forum, **1** (1970), 172–179. MR0271257

[10] G. Gratzer, *Equational classes of lattices*, Duke Mathematical Journal, **33** (1966), 613–622. MR0199128

[11] O. G. Kharlampovich, M. V. Sapir, *Algorithmic problems in varieties*, Internat. J. Algebra Comput, **5** (1995), 379–602. MR1361261

[12] I. I. Melnik, *Description of some lattices of varieties of semigroups*, Izv. VUZ. Matematika, **7** (1972), 65–74 (in Russian). MR0373973

[13] B. H. Neumann, *Identical relations in groups, I*, Math. Ann., **114** (1937), 506–525. MR1513153

[14] H. Neumann, *Varieties of Groups*, Springer Verlag, New York, 1967. MR0215899

[15] R. S. Pierce, *Introduction to the Theory of Abstract Algebras*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1968. MR0227070

[16] M. V. Sapir, *Algorithmic problems in varieties of semigroups*, Izv. VUZ. Matematika, **12** (1985), 71–74 (in Russian).

[17] M. V. Sapir, *Problems of Burnside type and the finite basis property in varieties of semigroups*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **2** (1987), 319–340 (in Russian). MR0897000

[18] M. V. Sapir, E. V. Sukhanov, *Varieties of periodic semigroups*, Izv. VUZ. Matematika, **4** (1981), 48–55 (in Russian). MR0624862

[19] L. N. Shevrin, *Identities in algebra*, Soros Educational J., **7** (1996), 111–118 (in Russian). Zbl 0880.00003

[20] L. N. Shevrin, B. M. Vernikov, M. V. Volkov, *Lattices of semigroup varieties*, Izv. VUZ. Matematika, **3** (2009), 3–36 (in Russian).

[21] L. N. Shevrin, M. V. Volkov, *Identities of semigroups*, Izv. VUZ. Matematika, **11** (1985), 3–47 (in Russian). MR0829099

[22] L. N. Shevrin, E. V. Sukhanov, *Structural aspects of the theory of varieties of semigroups*, Izv. VUZ. Matematika, **6** (1989), 3–39 (in Russian). MR1017775

[23] D. V. Solomatin, *Direct products of cyclic semigroups admitting a planar Cayley graph*, Sibirskie Ehlektronnye Matematicheskie Izvestiya [Siberian Electronic Mathematical Reports] **3** (2006), 238–252 (in Russian). MR2276023

[24] D. V. Solomatin, *Planarity ranks of varieties of commutative monoids*, Herald of Omsk University – Omsk: OmSU n.a. F.M. Dostoevsky, **4** (2012), 41–45 (in Russian).

[25] D. V. Solomatin, *About planarity ranks of varieties of commutative semigroups*, All-Russian Conference on Mathematics and Mechanics, dedicated to the 135th anniversary of Tomsk State University and the 65th anniversary of the Faculty of Mathematics and Mechanics. Book of Abstracts (Tomsk, 02 – 04 October, 2013) – Tomsk: «Ivan Fedorov», (2013), P.35 (in Russian).

Denis Vladimirovich Solomatin
Omsk State Pedagogical University,
14, Naberezhnaya Tukhachevskogo,
644099, Omsk, Russia
E-mail address: denis_2001j@bk.ru