S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 248–254 (2015) УДК 512.5
DOI 10.17377/semi.2015.12.020 MSC 13A99

ГРАФЫ КЭЛИ БЕРНСАЙДОВЫХ ГРУПП ПЕРИОДА 3

А.А. КУЗНЕЦОВ

Abstract. Let $B_k = B(k, 3)$ be the k-generator Burnside group of exponent 3. Previously unknown Hall's polynomials of B_k for $k \leq 4$ are calculated. For $k > 4$ polynomials are calculated similarly but their output takes considerably more space. Then using computer calculations for $2 \leq k \leq 4$ were obtained diameters and average diameters of the Cayley graphs of B_k and their some factors generated by the symmetric generating sets. It is shown that these graphs have better characteristics than hypercubes. It can be concluded that the Cayley graphs of B_k deserve attention in the design of advanced topologies of multiprocessor computer systems.

Keywords: periodic group, collection process, Hall's polynomials, the Cayley graph, multiprocessor computer system.

1. Введение

В последние десятилетия теория графов Кэли развивается как отдельная большая ветвь теории графов. Графы Кэли находят применение как в математике, так и за ее пределами. Заметим, что известная задача по определению так называемого «числа Бога» кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$, т. е. минимального количества поворотов граней кубика за которое его можно «собрать» из любого начального положения, сводится к исследованию соответствующего графа Кэли.

Неожиданное применение графы Кэли нашли в информационных технологиях после пионерской работы 1986 года С. Эйкерса и Б. Кришнамурти [1],

---

Kuznetsov, A.A., The Cayley graphs of Burnside groups of exponent 3.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (проект Б 112/14) и грантом Президента РФ (проект МД-3952.2015.9).

Поступила 10 февраля 2015 г., опубликована 10 апреля 2015 г.

которые впервые предложили применять указанные графы для представления компьютерных сетей, в том числе для моделирования топологий многопроцессорных вычислительных систем (МВС) — суперкомпьютеров. С тех пор данное направление активно развивается. Это связано с тем, что графы Кэли имеют много привлекательных свойств, из которых выделим их регулярность, вершинную транзитивность, малые диаметр и степень при достаточно большом количестве вершин в графе. Кстати, такие базовые топологии сети, как «кольцо» и «гиперкуб», являются графами Кэли.

Вычисление диаметра графа Кэли большой конечной группы является хотя и разрешимой, но весьма сложной проблемой. Это связано с тем, что в общем случае задача по определению минимального слова в группе, как показали С. Ивен и О. Голдрейх в 1981 году [2], является NP-трудной. Так, при вычислениии в 2010 году упомянутого выше «числа Бога», которое равно диаметру соответсвующего графа Кэли, Т. Рокики, Г. Коцемба, М. Дэвидсон и Д. Детридж доказали, что любая конфигурация кубика Рубика может быть решена не более чем в 20 ходов. Для установления данного факта потребовалось около 35 «процессоро-лет» распределенных вычислений. Поэтому для эффективного решения задач на графах Кэли, имеющих большое количество вершин, необходимо применять МВС.

Как было сказано, одной из широкоприменяемых топологий МВС является k-мерный гиперкуб. Данный граф задается k-порожденной бернсайдовой группой периода 2 — $B(k,2)$. $B(k,2)$ имеет простую структуру и равна прямому произведению k экземпляров циклической группы порядка 2.

В данной работе проведены исследования по определению структуры графов Кэли групп $B(k,3)$ — бернсайдовых k-порожденных групп периода 3 для сравнения с гиперкубами соответствующей размерности. Строение групп $B(k,3)$ известно [3], однако характеристики графов Кэли указанных групп до настоящего времени изучены не были.

При построении графа Кэли группы необходимо многократно умножать ее элементы. В связи с этим были вычислены ранее неизвестные полиномы Холла групп $B(k,3)$ (см. п. 2) для эффективного умножения элементов. Как показали компьютерные эксперименты, метод полиномов Холла имеет преимущество перед традиционным собирательным процессом. Следует также отметить, что этот метод легко программно реализуем, в том числе на МВС.

В п. 3 приведены результаты вычислений на графах Кэли $B(k,3)$. Показано, что данные графы имеют лучшие характеристики, чем у гиперкубов.

2. Полиномы Холла групп $B(k,3)$

Пусть $B_k = B(k,3)$ — бернсайдова k-порожденная группа периода 3. Леви и ван дер Варден доказали [3], что $|B_k| = 3^{k+\binom{k}{2}+\binom{k}{3}}$ и ступень нильпотентности B_k не превышает 3.

Для каждой B_k несложно получить pc-представление (*power commutator presentation*), используя систему компьютерной алгебры GAP или MAGMA.

Пусть $a_1^{x_1}\ldots a_n^{x_n}$ и $a_1^{y_1}\ldots a_n^{y_n}$ — два произвольных элемента в группе B_k, записанные в коммутаторном виде. Тогда их произведение равно

$$a_1^{x_1}\ldots a_n^{x_n}\cdot a_1^{y_1}\ldots a_n^{y_n} = a_1^{z_1}\ldots a_n^{z_n}.$$

Основой для нахождения степеней z_i является собирательный процесс (см. [4, 5]), который реализован в указанных системах компьютерной алгебры. Кроме того, существует альтернативный способ для вычисления произведений элементов группы, предложенный Ф. Холлом (см. [6]). Холл показал, что z_i представляют собой полиномиальные функции (в нашем случае над полем $\mathbb{Z}_3$), зависящие от переменных $x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_i$, которые принято сейчас называть *полиномами Холла*. Согласно [6]

$$z_i = x_i + y_i + p_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1, \dots, y_{i-1}).$$

В данной статье получены ранее неизвестные полиномы Холла для групп B_k при $k \leq 4$. Для $k > 4$ полиномы вычисляются аналогично, однако их вывод занимает значительно больше места. Заметим, что вычислив полиномы для случая k, несложно будет получить полиномы Холла для меньших k.

Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $a_1^{x_1} \dots a_{14}^{x_{14}}$ и $a_1^{y_1} \dots a_{14}^{y_{14}}$ — два произвольных элемента в группе B_4, записанные в коммутаторном виде. Тогда их произведение равно $a_1^{z_1} \dots a_{14}^{z_{14}}$, где $z_i \in \mathbb{Z}_3$ — полиномы Холла, задаваемые формулами* (1)–(14).

$$z_1 = x_1 + y_1, \tag{1}$$

$$z_2 = x_2 + y_2, \tag{2}$$

$$z_3 = x_3 + y_3, \tag{3}$$

$$z_4 = x_4 + y_4, \tag{4}$$

$$z_5 = x_5 + y_5 + x_2 y_1, \tag{5}$$

$$z_6 = x_6 + y_6 + x_3 y_1, \tag{6}$$

$$z_7 = x_7 + y_7 + x_3 y_2, \tag{7}$$

$$z_8 = x_8 + y_8 + x_4 y_1, \tag{8}$$

$$z_9 = x_9 + y_9 + x_4 y_2, \tag{9}$$

$$z_{10} = x_{10} + y_{10} + x_4 y_3, \tag{10}$$

$$z_{11} = x_{11} + y_{11} + x_5 y_3 + 2x_6 y_2 + x_7 y_1 + x_2 x_3 y_1 + x_2 y_1 y_3 + 2x_3 y_1 y_2, \tag{11}$$

$$z_{12} = x_{12} + y_{12} + x_5 y_4 + 2x_8 y_2 + x_9 y_1 + x_2 x_4 y_1 + x_2 y_1 y_4 + 2x_4 y_1 y_2, \tag{12}$$

$$z_{13} = x_{13} + y_{13} + x_{10} y_1 + x_6 y_4 + 2x_8 y_3 + x_3 x_4 y_1 + x_3 y_1 y_4 + 2x_4 y_1 y_3, \tag{13}$$

$$z_{14} = x_{14} + y_{14} + x_{10} y_2 + x_7 y_4 + 2x_9 y_3 + x_3 x_4 y_2 + x_3 y_2 y_4 + 2x_4 y_2 y_3. \tag{14}$$

Доказательство. Получим в GAP pc-представление группы B_4.

Коммутаторы веса 1:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \text{ — образующие группы.}$$

Коммутаторы веса 2:

$$a_5 = [a_2, a_1],\ a_6 = [a_3, a_1],\ a_7 = [a_3, a_2],$$
$$a_8 = [a_4, a_1],\ a_9 = [a_4, a_2],\ a_{10} = [a_4, a_3].$$

Коммутаторы веса 3:

$$a_{11} = [a_5, a_3] = [a_2, a_1, a_3],\ a_{12} = [a_5, a_4] = [a_2, a_1, a_4],$$
$$a_{13} = [a_6, a_4] = [a_3, a_1, a_4],\ a_{14} = [a_7, a_4] = [a_3, a_2, a_4].$$

Список определяющих соотношений R для базисных коммутаторов (тривиальные соотношения вида $a_i^3 = 1$ и $[a_j, a_i] = 1$ для краткости не приводятся): $[a_2, a_1] = a_5$, $[a_3, a_1] = a_6$, $[a_3, a_2] = a_7$, $[a_4, a_1] = a_8$, $[a_4, a_2] = a_9$, $[a_4, a_3] = a_{10}$, $[a_5, a_3] = a_{11}$, $[a_5, a_4] = a_{12}$, $[a_6, a_2] = a_{11}^2$, $[a_6, a_4] = a_{13}$, $[a_7, a_1] = a_{11}$, $[a_7, a_4] = a_{14}$, $[a_8, a_2] = a_{12}^2$, $[a_8, a_3] = a_{13}^2$, $[a_9, a_1] = a_{12}$, $[a_9, a_3] = a_{14}^2$, $[a_{10}, a_1] = a_{13}$, $[a_{10}, a_2] = a_{14}$.

Таким образом,

$$B_4 = \langle\, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} \mid R \,\rangle.$$

Каждый элемент g группы выражается единственным образом в виде нормального коммутаторного слова:

$$g = a_1^{x_1} a_2^{x_2} a_3^{x_3} a_4^{x_4} a_5^{x_5} a_6^{x_6} a_7^{x_7} a_8^{x_8} a_9^{x_9} a_{10}^{x_{10}} a_{11}^{x_{11}} a_{12}^{x_{12}} a_{13}^{x_{13}} a_{14}^{x_{14}}, \quad x_i \in \mathbb{Z}_3.$$

Иногда мы будем писать $g = (x_1, \ldots, x_{14})$.

Для того, чтобы определить функции z_i, сначала необходимо вычислить произведения вида $a_j^y\, a_i^x$ для всех $1 \le i < j \le 14$, $x, y = 1, 2$. Для пары (j, i) требуется по 4-м значениям произведений (y, x) найти интерполяционный полином для каждого из 14-ти коммутаторов.

Начнем с первого случая $a_2^y\, a_1^x$:

$$a_2^1 a_1^1 = (1,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0),\ a_2^1 a_1^2 = (2,1,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0),$$

$$a_2^2 a_1^1 = (1,2,0,0,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0),\ a_2^2 a_1^2 = (2,2,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0).$$

Запишем:

$$a_2^y\, a_1^x = a_1^x\, a_2^y\, a_3^{f_3^{(1,2)}(x,y)} \ldots a_r^{f_r^{(1,2)}(x,y)} \ldots a_{14}^{f_{14}^{(1,2)}(x,y)},$$

где $f_r^{(1,2)}(x, y) = \beta_{11}^r xy + \beta_{12}^r xy^2 + \beta_{21}^r x^2 y + \beta_{22}^r x^2 y^2$ — некоторые полиномы над полем $\mathbb{Z}_3$. Для их определения выполним интерполяцию для каждого коммутатора $r = 3, 4, \ldots, 14$.

Для нахождения $f_r^{(1,2)}(x, y)$ требуется решить систему линейных уравнений над указанным полем:

$$\beta_{11}^r xy + \beta_{12}^r xy^2 + \beta_{21}^r x^2 y + \beta_{22}^r x^2 y^2 = z_r^{yx} \quad \forall\, x, y = 1, 2, \tag{15}$$

где z_r^{yx} — значение r-го коммутатора для пары (y, x). Данная система будет иметь 4 переменных и состоять из 4-х уравнений.

Покажем на примере 5-го коммутатора нахождение $f_5^{(1,2)}(x, y)$. Для краткости вместо β_{pq}^5 будем писать β_{pq}. Подставив в систему (15) все значения z_5^{yx}, получим:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \beta_{12} \\ \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен 4, поэтому она имеет единственное решение: $\beta_{11} = 1$, $\beta_{12} = 0$, $\beta_{21} = 0$, $\beta_{22} = 0$. Отсюда, $f_5^{(1,2)}(x, y) = xy$.

Аналогичным образом вычисляются все полиномы $f_r^{(1,2)}(x, y)$. В итоге получим

$$a_2^y a_1^x = (x, y, 0, 0, xy, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Теперь выполним интерполяцию для других пар $a_j^y\, a_i^x$ (перестановочные пары для краткости не приводятся).

$a_3^y a_1^x = (x, 0, y, 0, 0, xy, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $a_4^y a_1^x = (x, 0, 0, y, 0, 0, 0, xy, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$,
$a_5^y a_1^x = (x, 0, 0, 0, y, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $a_7^y a_1^x = (x, 0, 0, 0, 0, 0, y, 0, 0, 0, xy, 0, 0, 0)$,
$a_9^y a_1^x = (x, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, y, 0, 0, xy, 0, 0)$, $a_{10}^y a_1^x = (x, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, y, 0, 0, xy, 0)$,
$a_3^y a_2^x = (0, x, y, 0, 0, 0, xy, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $a_4^y a_2^x = (0, x, 0, y, 0, 0, 0, 0, xy, 0, 0, 0, 0, 0)$,
$a_6^y a_2^x = (0, x, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2xy, 0, 0, 0)$, $a_8^y a_2^x = (0, x, 0, 0, 0, 0, 0, y, 0, 0, 0, 2xy, 0, 0)$,
$a_{10}^y a_2^x = (0, x, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, y, 0, 0, 0, xy)$, $a_4^y a_3^x = (0, 0, x, y, 0, 0, 0, 0, 0, xy, 0, 0, 0, 0)$,
$a_5^y a_3^x = (0, 0, x, 0, y, 0, 0, 0, 0, 0, xy, 0, 0, 0)$, $a_8^y a_3^x = (0, 0, x, 0, 0, 0, 0, y, 0, 0, 0, 0, 2xy, 0)$,
$a_9^y a_3^x = (0, 0, x, 0, 0, 0, 0, 0, y, 0, 0, 0, 0, 2xy)$, $a_5^y a_4^x = (0, 0, 0, x, y, 0, 0, 0, 0, 0, 0, xy, 0, 0)$,
$a_6^y a_4^x = (0, 0, 0, x, 0, y, 0, 0, 0, 0, 0, 0, xy, 0)$, $a_7^y a_4^x = (0, 0, 0, x, 0, 0, y, 0, 0, 0, 0, 0, 0, xy)$.

Таким образом, мы имеем полный набор соотношений для осуществления собирательного процесса в аналитическом виде:

$$a_j^y\, a_i^x = a_i^x\, a_j^y\, a_{j+1}^{f_{j+1}^{(i,j)}(x,y)}\, a_{j+2}^{f_{j+2}^{(i,j)}(x,y)} \ldots a_{14}^{f_{14}^{(i,j)}(x,y)},\ 1 \le i < j \le 14. \tag{16}$$

Пользуясь (16), мы сможем вычислить произведение $a_1^{x_1} \ldots a_{14}^{x_{14}} \cdot a_1^{y_1} \ldots a_{14}^{y_{14}} = a_1^{z_1} \ldots a_{14}^{z_{14}}$. После выполнения данной процедуры, мы найдем все z_i (1–14).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Произведение любых двух элементов $a_1^{x_1} \ldots a_7^{x_7}$ и $a_1^{y_1} \ldots a_7^{y_7}$ группы B_3 равно $a_1^{z_1} \ldots a_7^{z_7}$, где $z_i \in \mathbb{Z}_3$ — полиномы Холла, задаваемые формулами* (17)–(23).

$$z_1 = x_1 + y_1, \tag{17}$$

$$z_2 = x_2 + y_2, \tag{18}$$

$$z_3 = x_3 + y_3, \tag{19}$$

$$z_4 = x_4 + y_4 + x_2 y_1, \tag{20}$$

$$z_5 = x_5 + y_5 + x_3 y_1, \tag{21}$$

$$z_6 = x_6 + y_6 + x_3 y_2, \tag{22}$$

$$z_7 = x_7 + y_7 + x_4 y_3 + 2x_5 y_2 + x_6 y_1 + x_2 x_3 y_1 + x_2 y_1 y_3 + 2x_3 y_1 y_2. \tag{23}$$

Следствие 2. *Произведение любых двух элементов* $a_1^{x_1}a_2^{x_x}a_3^{x_3}$ *и* $a_1^{y_1}a_2^{y_2}a_3^{y_3}$ *группы* B_2 *равно* $a_1^{z_1}a_2^{z_2}a_3^{z_3}$, *где* $z_i \in \mathbb{Z}_3$ *— полиномы Холла, задаваемые формулами* (24)–(26).

$$z_1 = x_1 + y_1, \tag{24}$$

$$z_2 = x_2 + y_2, \tag{25}$$

$$z_3 = x_3 + y_3 + x_2y_1. \tag{26}$$

3. Компьютерные вычисления на графах Кэли групп B_k

Пусть $\mathbb{X}_k = \{a_1, a_1^{-1}, \dots, a_k, a_k^{-1}\}$, где $a_i^{-1} = a_i^2$, — симметричное порождающее множество группы B_k. Графом Кэли $\Gamma_k = Cay(B_k, \mathbb{X}_k) = (V, E)$ будет являться неориентированный граф, в котором множество вершин $V(\Gamma_k)$ соответствует элементам группы B_k, а множество ребер $E(\Gamma_k)$ состоит из всех неупорядоченных пар $\{g, xg\}$, где $g \in B_k$ и $x \in \mathbb{X}_k$.

Количество вершин Γ_k равно порядку группы B_k. Граф Кэли является регулярным, и его степень s, т. е. количество ребер, выходящее из каждой вершины, равно числу порождающих элементов группы: $s = |\mathbb{X}_k|$. Диаметр графа Кэли D (средний диметр d), т. е. максимальное (среднее) кратчайшее расстояние от произвольной фиксированной вершины до других вершин графа, равен максимальной (средней) длине минимальных слов группы, записанных через порождающие элементы [7].

При рассмотрении графа в качестве топологии МВС берут во внимание следующие характеристики графа: количество вершин, степень (для регулярного графа), диаметр и средний диаметр. В табл. приведены указанные характеристики для графов Кэли групп B_k и некоторых их факторов при $2 \le k \le 4$. Вычисления были проведены по алгоритму из [7] с использованием полиномов Холла. Порождающие множества были взяты симметричными, поскольку в этом случае графы будут неориентированными. Именно неориентированные графы, как правило, используют при проектировании топологий МВС.

Группа	$\lvert V\rvert$	s	D	d
$B(2,3)$	3^3	4	4	$\frac{64}{3^3} \approx 2,4$
$B(3,3)/\langle a_5, a_6, a_7\rangle$	3^4	6	5	$\frac{246}{3^4} \approx 3,0$
$B(3,3)/\langle a_6, a_7\rangle$	3^5	6	6	$\frac{918}{3^5} \approx 3,8$
$B(3,3)/\langle a_7\rangle$	3^6	6	6	$\frac{3150}{3^6} \approx 4,3$
$B(3,3)$	3^7	6	10	$\frac{11986}{3^7} \approx 5,5$
$B(4,3)/\langle a_9, \dots, a_{14}\rangle$	3^8	8	8	$\frac{36776}{3^8} \approx 5,6$
$B(4,3)/\langle a_{10}, \dots, a_{14}\rangle$	3^9	8	9	$\frac{118956}{3^9} \approx 6,0$
$B(4,3)/\langle a_{11}, \dots, a_{14}\rangle$	3^{10}	8	9	$\frac{380520}{3^{10}} \approx 6,4$
$B(4,3)/\langle a_{12}, a_{13}, a_{14}\rangle$	3^{11}	8	12	$\frac{1303736}{3^{11}} \approx 7,4$
$B(4,3)/\langle a_{13}, a_{14}\rangle$	3^{12}	8	12	$\frac{4308432}{3^{12}} \approx 8,1$
$B(4,3)/\langle a_{14}\rangle$	3^{13}	8	14	$\frac{14067712}{3^{13}} \approx 8,8$
$B(4,3)$	3^{14}	8	14	$\frac{45390480}{3^{14}} \approx 9,4$

Теперь сравним полученные характеристики графов Кэли групп B_k с соответствующими характеристиками гиперкубов. Граф k-мерного гиперкуба имеет 2^k вершин, его степень и диаметр равны k, средний диаметр равен $\frac{k}{2}$.

Легко увидеть, что графы B_k обладают более предпочтительными характеристиками, чем гиперкубы. Напомним, что топология Γ_1 считается предпочтительнее Γ_2, если $|V_1| \simeq |V_2|$, но $s_1 < s_2$ и $D_1 < D_2$. Отсюда можно сделать вывод, что данные графы заслуживают внимания при проектировании перспективных топологий МВС.

References

[1] S. Akers, B. Krishnamurthy, *A group theoretic model for symmetric interconnection networks*, Proceedings of the International Conference on Parallel Processing, (1986), 216–223.

[2] S. Even, O. Goldreich *The Minimum Length Generator Sequence is NP–Hard*, J ournal of Algorithms, **2** (1981), 311–313. MR0632452

[3] F. Levi F., B. van der Waerden *Uber eine besondere Klasse von Gruppen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **9** (1933), 154–158. MR3069591

[4] C. Sims *Computation with Finitely Presented Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR1267733

[5] D. Holt, B. Eick, E. O'Brien *Handbook of computational group theory*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2005. MR2129747

[6] P. Hall, *Nilpotent groups, Notes of lectures given at the Canadian Mathematical Congress 1957 Summer Seminar, in The collected works of Philip Hall*, Clarendon Press, Oxford, 1988.

[7] A.A. Kuznetsov, A.S. Kuznetsova, *A parallel algorithm for study of the Cayley graphs of permutation griops*, Vestnik SibGAU, **1** (2014), 34–39.

Kuznetsov Alexandr Alexeevich
Siberian State Aerospace University named after academician M.F. Reshetnev,
pr. «Krasnoyarskiy Rabochiy», 31,
Krasnoyarsk, 660014, Russia
E-mail address: `alex_kuznetsov80@mail.ru`