S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 255–266 (2015) УДК 510.67
DOI 10.17377/semi.2015.12.021 MSC 03C64

О НЕРАЗЛИЧИМОСТИ МНОЖЕСТВА В ЦИКЛИЧЕСКИ УПОРЯДОЧЕННЫХ СТРУКТУРАХ

Б.Ш. КУЛПЕШОВ

Abstract. We prove a criterion for indiscernibility of the set of realisations of an 1-type of convexity rank 1 in $\aleph_0$-categorical non-1-transitive weakly circularly minimal structures.

Keywords: weak circular minimality, $\aleph_0$-categoricity, indiscernibility.

1. Предварительные сведения

Пусть $M = \langle M, =, < \rangle$ — линейно упорядоченная структура. Если мы соединим два конца структуры M относительно линейного упорядочения (возможно, это $-\infty$ и $+\infty$), то получим циклически упорядоченную структуру.

Более формально, *циклический порядок* описывается тернарным отношением K, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

(co1) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \to K(y, z, x))$;

(co2) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \land K(y, x, z) \Leftrightarrow x = y \lor y = z \lor z = x)$;

(co3) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \to \forall t [K(x, y, t) \lor K(t, y, z)])$;

(co4) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \lor K(y, x, z))$.

Следующее наблюдение связывает линейные и циклические порядки.

Факт 1.1. [1] *(i) Если $\langle M, \leq \rangle$ есть линейное упорядочение и K есть тернарное отношение, получаемое из $\leq$ по правилу*

$$K(x, y, z) :\Leftrightarrow (x \leq y \leq z) \lor (z \leq x \leq y) \lor (y \leq z \leq x)$$

то K есть отношение циклического порядка на M.

(ii) Если $\langle N, K \rangle$ есть циклическое упорядочение и $a \in N$, то отношение $\leq_a$, определяемое на $M := N \setminus \{a\}$ по правилу $y \leq_a z :\Leftrightarrow K(a, y, z)$ является

Kulpeshov, B.Sh., On indiscernibility of a set in circularly ordered structures.

Данные исследования поддержаны грантом КН МОН РК № 0708/ГФ3.

Поступила 21 февраля 2015 г., опубликована 15 апреля 2015 г.

линейным порядком. Более того, если мы расширяем этот линейный порядок до порядка, обозначаемого $\leq'$, на N, добавляя что $a \leq' b$ для всех $b \in M$, то получаемое отношение циклического порядка является исходным циклическим порядком K.

Настоящая работа касается понятия *слабой циклической минимальности*, введенного и первоначально глубоко исследованного в [2]. *Слабо циклически минимальной структурой* называется циклически упорядоченная структура $M = \langle M; =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Напомним (см. [3]), что такая структура M называется *циклически минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M. Таким образом, слабая циклическая минимальность является обобщением циклической минимальности. Здесь мы исследуем вопросы неразличимости множества в слабо циклически минимальных структурах. В работе приводится характеризация 2-неразличимости в счетно категоричной 1-транзитивной слабо циклически минимальной структуре (Следствие 2.4), а также в терминах слабой ортогональности выпуклых компонент неалгебраического 1-типа приводится критерий неразличимости множества реализаций данного типа для счетно категоричных не 1-транзитивных слабо циклически минимальных структур (Теорема 2.11).

Предложение 1.2. [2] *Пусть $M = \langle M, K, \ldots \rangle$ — слабо циклически минимальная структура, и пусть b — произвольный элемент структуры M. Определим отношение $\leq_b$ на $M \setminus \{b\}$ и $\leq'_b$ на M как в Факте 1.1.*

(i) Пусть M_b — структура с универсумом $M \setminus \{b\}$, порядком $\leq_b$, и символом отношения для каждого $\{b\}$-определимого отношения структуры M на $M \setminus \{b\}$. Тогда M_b является слабо о-минимальной структурой.

(ii) Пусть $\hat{M}_b$ — структура с универсумом M, порядком $\leq'_b$, и символом отношения для каждого $\{b\}$-определимого отношения структуры M на ее степенях. Тогда $\hat{M}_b$ также является слабо о-минимальной.

Факт 1.3. [2] *Пусть M — слабо циклически минимальная струкутра, $\phi(x)$ — произвольная $\emptyset$-определимая формула. Тогда для любого $a \in M$ $\phi(M)$ является объединением конечного числа $\{a\}$-определимых выпуклых множеств.*

Обозначение 1.4. (1) $K_0(x, y, z) := K(x, y, z) \wedge x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x$.

(2) $K(u_1, \ldots, u_n)$ обозначает формулу, говорящую, что все подкортежи кортежа $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ (в возрастающем порядке) удовлетворяют K; аналогичные обозначения для K_0.

(3) Пусть A, B, C — попарно непересекающиеся выпуклые подмножества циклически упорядоченной структуры M. Будем писать $K(A, B, C)$, если для любых $a, b, c \in M$ всякий раз, когда $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ мы имеем $K(a, b, c)$. Мы расширяем данное обозначение естественным образом, например, употребляя следующую запись $K_0(A, b, C, D)$.

Пусть M — циклически упорядоченная структура и $G := \mathrm{Aut}(M)$. Следуя стандартной теоретико-групповой терминологии, мы говорим что G является *k-однородной*, где $k \in \omega$, если для любых двух k-элементных множеств

$A, B \subseteq M$ существует $g \in G$ такой, что $g(A) = B$. Мы говорим, что G является *k-транзитивной*, если для любых различных $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$ и различных $b_1, b_2, \ldots, b_k \in M$ существует $g \in G$ такой, что $g(a_1) = b_1, g(a_2) = b_2, \ldots, g(a_k) = b_k$. Как видим, непосредственно из определения следует что любая $(k+1)$-транзитивная группа перестановок является k-транзитивной. Не очевидно, но также верно, что любая $(k+1)$-однородная группа перестановок на бесконечном множестве является k-однородной (смотри [4] для конечного случая, или Теорему 2.2 из [5] для общего случая). Под *конгруэнцией* на M мы подразумеваем G-инвариантное отношение эквивалентности на M. Мы говорим, что G является *примитивной*, если она является 1-транзитивной и не существует нетривиальных собственных конгруэнций на M. Будем говорить, что M является *k–однородной (k–транзитивной, примитивной)*, если G — k–однородная (k–транзитивная, примитивная). Очевидно что понятия 1-однородности и 1-транзитивности совпадают. Эти понятия также совпадают с понятием 1-неразличимости (порядковой неразличимости), введенным для линейно упорядоченных структур. Также очевидно что если M — n–транзитивная циклически упорядоченная структура, то $n \leq 2$. Наконец, следуя общепринятой терминологии (хотя с потенциальным конфликтом с вышеприведенным определением), мы говорим, что счетная бесконечная реляционная структура является *однородной*, если каждый изоморфизм между конечными подструктурами расширяется до автоморфизма.

Пример 1.5. ([6], [7]) Пусть n — положительное целое число такое, что $n \geq 2$, и пусть $L = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}\}$ где $\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}$ являются символами бинарных отношений.
Пусть Q_n^* — структура $\langle Q_n, K, L\rangle$ такая, что
(i) ее универсум Q_n есть счетное плотное подмножество единичной окружности, такое, что не существует двух точек, имеющих угол $2\pi k/n$ от центра окружности, где k пробегает целые числа, и
(ii) для различных $x, y \in Q_n$, $(x, y) \in \sigma_i \Leftrightarrow 2\pi i/n < \arg(x/y) < 2\pi(i+1)/n$, где $arg(x/y)$ обозначает угол, измеряемый от центра окружности между точками x и y по часовой стрелке.

В силу Предложения 2.1 [6], Q_n^* является однородной и следовательно Q_n^* допускает элиминацию кванторов и является счетно категоричной. Для каждого $0 \leq i \leq n-1$, и для любого $a \in Q_n$, $\sigma_i(a, Q_n)$ и $\sigma_i(Q_n, a)$ являются выпуклыми; отсюда Q_n^* является слабо циклически минимальной. Более того, $\sigma_0(a, Q_n)$ не имеет правой концевой точки в Q_n, т.е. Q_n^* не является циклически минимальной. Также, Q_n^* является 1-транзитивной (на самом деле, $\mathrm{Aut}(Q_n^*)$ является примитивной).

Структура Q_2^* является *счетным однородным локальным порядком*, или *циклическим турниром*, обсужденным например в [7]–[9].

Пусть M, N — циклически упорядоченные структуры. Под *2–редуктом* структуры M мы подразумеваем циклически упорядоченную структуру с тем же универсумом, что и M, и имеющую символ отношения для каждого $\emptyset$–определимого отношения структуры M арности не более 2 и также символ тернарного отношения K для циклического упорядочения, но ни имеющего никаких других символов отношений арности, большей двух. Мы говорим, что M изоморфна структуре N *с точностью до бинарности*, если 2–редукт структуры M изоморфен структуре N.

Следующие две теоремы полностью описывают возможные бинарные структуры, когда M является примитивной, но не 2-транзитивной.

Теорема 1.6. [2] *Пусть M — счетно категоричная слабо циклически минимальная структура такая, что* $\mathrm{Aut}(M)$ *является 2-однородной, но не 2-транзитивной. Тогда либо существует $\emptyset$-определимый линейный порядок на M, так что M является 2-неразличимой слабо о-минимальной относительно этого порядка, либо M изоморфна Q_2^* с точностью до бинарности.*

Теорема 1.7. [2] *Пусть M — счетно категоричная слабо циклически минимальная структура такая, что* $\mathrm{Aut}(M)$ *является примитивной, но не 2-однородной. Тогда существует некоторое натуральное число $n \geq 3$ такое, что M изоморфна Q_n^* с точностью до бинарности.*

Определение 1.8. [2] Пусть M — циклически упорядоченная структура.

(i) Пусть $p \in S_1(\emptyset)$. Будем говорить, что p является *m-выпуклым*, если для любого элементарного расширения N структуры M $p(N)$ является непересекающимся объединением m максимальных выпуклых множеств (которые называются *выпуклыми компонентами* множества $p(N)$).

(ii) Будем говорить, что M является *m-выпуклой*, если каждый тип $p \in S_1(\emptyset)$ является m-выпуклым, и мы говорим что $Th(M)$ является *m-выпуклой*, если это имеет место для всех $N \equiv M$.

Ранее была доказана следующая теорема:

Теорема 1.9. [2] *Пусть M — слабо циклически минимальная структура. Тогда существует $m < \omega$ такой, что M — m-выпуклая.*

В качестве следствия получаем в частности, что если M — слабо циклическая минимальная структура и $p \in S_1(\emptyset)$, то $p(M)$ является объединением конечного числа выпуклых множеств.

Пусть $p \in S_1(\emptyset)$ и $F(x,y)$ — $\emptyset$-определимая формула такая, что для каждого $b \in p(M)$ $F(M,b)$ — выпуклое бесконечное кобесконечное множество, $F(M,b) \subset p(M)$. Пусть $F^l(y)$ — формула, говорящая что y является левой концевой точкой множества $F(M,y)$:

$$\exists z_1 \exists z_2 [K_0(z_1,y,z_2) \wedge \forall t_1 (K(z_1,t_1,y) \wedge t_1 \neq y \rightarrow \neg F(t_1,y)) \wedge$$
$$\wedge \forall t_2 (K(y,t_2,z_2) \wedge t_2 \neq y \rightarrow F(t_2,y))]$$

Мы говорим, что $F(x,y)$ является *p-стабильной выпуклой вправо*, если для каждого $b \in p(M)$

$$M \models \forall x [F(x,b) \rightarrow F^l(b) \wedge \forall z (K(b,z,x) \rightarrow F(z,b))]$$

и существует $a \in p(M)$ такой что $\neg F(a,b)$ и $K_0(b,M,a) \subseteq p(M)$.

Пусть $F_1(x,y), F_2(x,y)$ — произвольные p-стабильные выпуклые вправо формулы. Будем говорить, что $F_2(x,y)$ *больше чем* $F_1(x,y)$, если существует $a \in p(M)$ такой, что $F_1(M,a) \subset F_2(M,a)$. Это дает тотальное упорядочение на (конечном) множестве всех p-стабильных выпуклых вправо формул $F(x,y)$ (рассматриваемых по модулю эквивалентности $Th(M)$). Будем писать $f(y) :=$

$\operatorname{rend} F(M, y)$, подразумевая что $f(y)$ является правой концевой точкой множества $F(M, y)$, которая лежит в определимом пополнении $\overline{M}$ структуры M. Тогда f является функцией, которая отображает $p(M)$ в $\overline{M}$. Аналогично мы можем рассмотреть p-стабильные выпуклые влево формулы и писать $f(y) := \operatorname{lend} F(M, y)$, подразумевая что $f(y)$ является левой концевой точкой множества $F(M, y)$, которая также лежит в общем случае в определимом пополнении $\overline{M}$ структуры M.

Пусть $F(x, y)$ — p-стабильная выпуклая вправо формула. Слегка адаптируя определение из [10], будем говорить, что $F(x, y)$ является *эквивалентность-генерирующей*, если для любых $\alpha, \beta \in p(M)$ таких, что $M \models F(\beta, \alpha)$, имеет место следующее:

$$M \models \forall x(K(\beta, x, \alpha) \wedge x \neq \alpha \rightarrow [F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)])$$

Лемма 1.10. [11] *Пусть M — счетно категоричная слабо циклически минимальная структура, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический, $F(x, y)$ — p-стабильная выпуклая вправо формула, являющаяся эквивалентность-генерирующей. Тогда существует $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.*

Теорема 1.11. [11] *Пусть M — счетно категоричная m-выпуклая слабо циклически минимальная структура, $m > 1$, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический. Тогда любая p-стабильная выпуклая вправо формула является эквивалентность-генерирующей.*

Пусть f — унарная функция в $\overline{M}$ с областью определения $\operatorname{Dom}(f) = I \subseteq M$, где I — открытое выпуклое множество. Мы говорим, что f является *монотонной вправо (влево)* на I, если она сохраняет (обращает) отношение K_0, т.е. для любых $a, b, c \in I$ таких, что $K_0(a, b, c)$ мы имеем $K_0(f(a), f(b), f(c))$ $(K_0(f(c), f(b), f(a)))$.

Пусть $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический. Будем говорить, то тип p имеет *ранг выпуклости 1* ($RC(p) = 1$), если не существует параметрически определимого отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных выпуклых классов на $p(M)$.

Факт 1.12. *Пусть M — счетно категоричная не 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический, $RC(p) = 1$. Тогда любая функция f, область определения которой содержит $p(M)$, является строго монотонной или константой на $p(M)$.*

2. Результаты

Пусть $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический, $n \in \omega, n \geq 3$. Вспомним, что в случае когда $A \neq \emptyset$, множество $p(M)$ выпукло. В случае же, когда $A = \emptyset$, $p(M)$ может быть как выпуклым, так и невыпуклым.

Случай 1. $p(M)$ выпукло.

Будем говорить, что $p(M)$ — *2-неразличимо над A*, если для любых $\langle a_1, a_2\rangle$, $\langle a_1', a_2'\rangle \in [p(M)]^2$ таких, что $a_1 \neq a_2$, $a_1' \neq a_2'$ следует что $tp(\langle a_1, a_2\rangle/A) = tp(\langle a_1', a_2'\rangle/A)$.

Будем говорить, что $p(M)$ — *n-неразличимо над A*, если для любых n-кортежей $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle, \bar{a}' = \langle a_1', \ldots, a_n'\rangle \in [p(M)]^n$ таких, что $K_0(a_1, \ldots, a_n)$, $K_0(a_1', \ldots, a_n')$ следует что $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{a}'/A)$.

Случай 2. $p(M)$ не выпукло.

Очевидно в этом случае $A = \emptyset$ и существует $m > 1$ такой, что $p(M)$ разбивается на m выпуклых компонент, т.е. $p(M) = \cup_{i=1}^{m} U_i$, где каждое U_i выпукло. Предположим. что $K_0(U_1, \ldots, U_m)$. Будем говорить, что $p(M)$ — *2-неразличимо над* $\emptyset$, если для любых $\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_1', a_2'\rangle \in [p(M)]^2$ таких, что $a_1 \neq a_2$, $a_1' \neq a_2'$ и либо $K(a_1, M, a_2) \subseteq U_i$ и $K(a_1', M, a_2') \subseteq U_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, m\}$, либо $a_1, a_1' \in U_i$, $a_2, a_2' \in U_j$ для некоторых $i, j \leq m$ с условием $i \neq j$, мы имеем что $tp(\langle a_1, a_2\rangle/\emptyset) = tp(\langle a_1', a_2'\rangle/\emptyset)$.

Будем говорить, что $p(M)$ — *n-неразличимо над* $\emptyset$, если для любых n, k, $n_1, \ldots, n_k$ и $i_1, \ldots, i_k$ таких, что $k \leq m$, $n_1 + \ldots + n_k = n$ и $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m$, и любых n-кортежей $\bar{a} = \langle a_1^{i_1}, \ldots, a_{n_1}^{i_1}; a_1^{i_2}, \ldots, a_{n_2}^{i_2}; \ldots, a_1^{i_k}, \ldots, a_{n_k}^{i_k}\rangle$, $\bar{b} = \langle b_1^{i_1}, \ldots, b_{n_1}^{i_1}; b_1^{i_2}, \ldots, b_{n_2}^{i_2}; \ldots, b_1^{i_k}, \ldots, b_{n_k}^{i_k}\rangle \in [p(M)]^n$ таких, что $a_j^{i_s}, b_j^{i_s} \in U_{i_s}$ для всех $j \in \{1, \ldots, n_s\}$ и $s \in \{1, \ldots, k\}$, из $K_0(a_1^{i_1}, \ldots, a_{n_k}^{i_k})$ и $K_0(b_1^{i_1}, \ldots, b_{n_k}^{i_k})$ следует что $tp(\bar{a}/\emptyset) = tp(\bar{b}/\emptyset)$.

Будем также говорить, что $p(M)$ — *неразличимо над* A, если для каждого $n \in \omega$ $p(M)$ — n-неразличимо над A.

Предложение 2.1. *Пусть M — примитивная не 2-однородная счетно категоричная слабо циклически минимальная структура. Тогда M не является 2-неразличимым над $\emptyset$.*

Доказательство. Поскольку M — примитивная не 2-однородная, то в силу Теоремы 1.7 существует натуральное число $n \geq 3$ такое, что M изоморфна Q_n^* с точностью до бинарности. Тогда существуют нетривиальные $\emptyset$-определимые бинарные отношения $\sigma_0(x, y), \sigma_1(x, y), \ldots, \sigma_{n-1}(x, y)$ такие, что

$$M \models \forall x \forall y [\sigma_i(x, y) \leftrightarrow \sigma_{n-1-i}(y, x)]$$

для любого i с условием $1 \leq i \leq n-2$. Возьмем произвольные $a_1, a_2, a_2' \in M$ такие, что $M \models \sigma_0(a_1, a_2) \wedge \sigma_1(a_1, a_2')$. Очевидно что $M \models \neg\sigma_0(a_1, a_2')$, откуда $tp(\langle a_1, a_2\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a_1, a_2'\rangle/\emptyset)$ и, следовательно, M не является 2-неразличимым над $\emptyset$. □

Предложение 2.2. *Пусть M — 1-транзитивная непримитивная счетно категоричная слабо циклически минимальная структура. Тогда M не является 2-неразличимым над $\emptyset$.*

Доказательство. В силу непримитивности структуры M существует нетривиальное $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ на M. Возьмем произвольные $\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_1', a_2'\rangle \in M^2$ такие, что

$$M \models a_1 \neq a_2 \wedge E(a_1, a_2) \wedge a_1' \neq a_2' \wedge \neg E(a_1', a_2')$$

Очевидно что $tp(\langle a_1, a_2\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a_1', a_2'\rangle/\emptyset)$, что влечет не 2-неразличимость M над $\emptyset$. □

Предложение 2.3. *Пусть M — 2-однородная не 2-транзитивная счетно категоричная слабо циклически минимальная структура. Тогда M не является 2-неразличимым над $\emptyset$.*

Доказательство. Поскольку M — 2-однородная не 2-транзитивная, то в силу Теоремы 1.6 либо существует $\emptyset$-определимый линейный порядок на M, так что M является 2-неразличимой слабо о-минимальной структурой относительно этого порядка, либо M изоморфна Q_2^* с точностью до бинарности.

Случай 1. Существует $\emptyset$-определимый линейный порядок на M, так что M является 2-неразличимой слабо о-минимальной структурой относительно этого порядка.

Возьмем произвольные $a_1, a_2 \in M$ такие, что $a_1 < a_2$, т.е. существует $\emptyset$-определимая формула $\phi(x, y)$ такая, что $M \models \phi(a_1, a_2) \wedge \neg\phi(a_2, a_1)$. Тогда $tp(\langle a_1, a_2\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a_2, a_1\rangle/\emptyset)$, откуда также M не 2-неразличимо над $\emptyset$.

Случай 2. M изоморфна Q_2^* с точностью до бинарности.

Тогда существуют $\emptyset$-определимые бинарные отношения $\sigma_0(x, y)$ и $\sigma_1(x, y)$ такие, что

$$M \models \forall x \forall y[\sigma_0(x, y) \leftrightarrow \sigma_1(y, x) \leftrightarrow \neg\sigma_1(x, y) \leftrightarrow \neg\sigma_0(y, x)]$$

Возьмем произвольные $\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_1', a_2'\rangle \in M^2$ такие, что

$$M \models \sigma_0(a_1, a_2) \wedge \sigma_1(a_1', a_2')$$

Тогда $M \models \neg\sigma_0(a_1', a_2')$ и, следовательно, $tp(\langle a_1, a_2\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a_1', a_2'\rangle/\emptyset)$, откуда M не 2-неразличимо над $\emptyset$. □

Следствие 2.4. *Пусть M — 1-транзитивная счетно категоричная слабо циклически минимальная структура. Тогда M — 2-неразличимо над $\emptyset \Leftrightarrow M$ — 2-транзитивная.*

Доказательство. Предположим вначале, что M — 2-транзитивная. Возьмем произвольные $\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_1', a_2'\rangle \in M^2$ с условием $a_1 \neq a_2$ и $a_1' \neq a_2'$. В силу 2-транзитивности M существует $g \in \mathrm{Aut}(M)$ такой, что $g(a_1) = a_1'$ и $g(a_2) = a_2'$. Последнее влечет, что $tp(\langle a_1, a_2\rangle/\emptyset) = tp(\langle a_1', a_2'\rangle/\emptyset)$, т.е. M — 2-неразличимо над $\emptyset$.

Предположим теперь, что M — 2-неразличимо над $\emptyset$. Допустим противное: M не является 2-транзитивной. Тогда для M возможны следующие взаимоисключающие случаи: примитивная не 2-однородная, непримитивная и 2-однородная не 2-транзитивная. Откуда, используя Предложения 2.1, 2.2 и 2.3, приходим к противоречию. □

Далее мы рассматриваем не 1-транзитивный случай. Пусть M — не 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура. Тогда M является m-выпуклой для некоторого $m \geq 1$. В случае $m = 1$ нетрудно понять, что существует $\emptyset$-определимый линейный порядок, относительно которого M является слабо о-минимальной структурой. Поэтому далее мы рассматриваем случай $m > 1$. Также заметим, что если M m-выпуклая для некоторого $m > 1$, M является не 1-транзитивной.

Пусть $p(M)$ не выпукло. Тогда существует $m > 1$ такой, что $p(M)$ разбивается на m выпуклых компонент, т.е. $p(M) = \cup_{i=1}^m U_i$, где каждое U_i выпукло. Пусть $B \subseteq M$, B — конечно, $s \leq m$. Будем говорить, что семейство выпуклых компонент $\{U_1, \ldots, U_s\}$ типа p *слабо ортогонально над* B, если каждый s-кортеж $\langle a_1, \ldots, a_s\rangle \in U_1 \times \ldots \times U_s$ удовлетворяет одному и тому же типу над B. Будем говорить что семейство выпуклых компонент $\{U_1, \ldots, U_s\}$ типа p *ортогонально над* B, если для любой последовательности $(n_1, n_2, \ldots, n_s) \in \omega^s$ каждый $(n_1+n_2+\ldots+n_s)$–кортеж $\langle a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^{n_1}; a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^{n_2}; \ldots; a_s^1, a_s^2, \ldots, a_s^{n_s}\rangle \in (U_1)^{n_1} \times (U_2)^{n_2} \times \ldots \times (U_s)^{n_s}$ с условием $K_0(a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^{n_1}; a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^{n_2}; \ldots; a_s^1, a_s^2, \ldots, a_s^{n_s})$ удовлетворяет одному и тому же типу над B.

Лемма 2.5. *Пусть M — счетно категоричная слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, A — конечно, $p \in S_1(A)$, $RC(p) = 1$. Тогда $p(M)$ — неразличимо над A.*

Доказательство. Поскольку $RC(p) = 1$, то не существует нетривиальной p-стабильной выпуклой вправо формулы, и поэтому $p(M)$ — 2-неразличимо над A. Предположим, что мы уже доказали n-неразличимость $p(M)$ над A. Докажем теперь, что $p(M)$ является $n+1$-неразличимым над A. Возьмем произвольные $a_1, a_2, \ldots, a_n \in p(M)$ такие, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Так как $p(M)$ n-неразличимо над A, то множество $p(M) \cap \{a \in M | a > a_{n-1}\}$ является 1-неразличимым над $A \cup \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. Следовательно, существует 1-тип $p' \in S_1(A \cup \{a_1, \ldots, a_{n-1}\})$ такой, что $p'(M) = p(M) \cap \{a \in M | a > a_{n-1}\}$. Очевидно что $RC(p') = 1$ и, следовательно, $p'(M)$ 2-неразличимо над $A \cup \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. Таким образом, множество $p(M) \cap \{a \in M | a > a_n\}$ является 1-неразличимым над $A \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$, и, следовательно, $p(M)$ $n+1$-неразличимо над A. Откуда в силу принципа математической индукции заключаем, что $p(M)$ неразличимо над A. □

Лемма 2.6. *Пусть M — счетно категоричная слабо циклически минимальная структура, $A \subseteq M$, A — конечно, $A \neq \emptyset$, $p \in S_1(A)$, $RC(p) = 1$. Тогда $p(M)$ — неразличимо над A.*

Доказательство. Поскольку $A \neq \emptyset$, то $p(M)$ выпукло. Возьмем произвольный $a \in A$ и рассмотрим структуру $\hat{M}_a$. В силу Предложения 1.2 $\hat{M}_a$ — слабо о-минимальная структура. Очевидно что $\hat{M}_a$ является счетно категоричной, откуда в силу Леммы 2.5 $p(M)$ неразличимо над A. □

Предложение 2.7. *Пусть M — счетно категоричная m-выпуклая слабо циклически минимальная структура, $m > 1$, $p \in S_1(\emptyset)$, $RC(p) = 1$. Тогда каждая выпуклая компонента типа p является неразличимым множеством над $\emptyset$.*

Доказательство. В силу m-выпуклости M $p(M) = \cup_{i=1}^m U_i^p$, где каждое U_i^p — выпуклая компонента типа p. Не умаляя общности, можем считать, что $K_0(U_1^p, U_2^p, \ldots, U_m^p)$ (если $m = 2$, то поскольку M — не 1-транзитивная, то существует $q \in S_1(\emptyset)$ такой, что $q \neq p$ и, следовательно, мы имеем $K_0(U_1^p, U_1^q, U_2^p, U_2^q)$). Поймем вначале, что U_i^p — 2-неразличимо над $\emptyset$ для каждого $1 \leq i \leq m$. Допустим противное: существуют $\langle a_1, a_2\rangle, \langle b_1, b_2\rangle \in [U_i^p]^2$ такие, что $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2$, $K(a_1, M, a_2) \subseteq U_i^p$, $K(b_1, M, b_2) \subseteq U_i^p$ и $tp(\langle a_1, a_2\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle b_1, b_2\rangle/\emptyset)$. Следовательно, существует $\emptyset$-определимая формула $\phi(x, y)$ такая, что $M \models \phi(a_1, a_2) \wedge \neg\phi(b_1, b_2)$. В силу 1-неразличимости U_i^p над $\emptyset$ существует $g \in \mathrm{Aut}(M)$ такой, что $g(b_1) = a_1$. Поскольку

$$M \models \exists x \exists y [U^p(x) \wedge \neg U^p(y) \wedge K(b, x, y) \wedge \forall t (K(b, t, x) \to U^p(t)) \wedge \neg\phi(b_1, x)]$$

то существует $a_2' \in U_i^p$ такой, что $K(a_1, M, a_2')$ и $\neg\phi(a_1, a_2')$. В силу слабой циклической минимальности M можем считать, что $\phi(a_1, M)$ выпукло. Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$F(x, a_1) := \exists t [\phi(a_1, t) \wedge K(a_1, x, t)]$$

Можно понять, что $F(x, y)$ — p-стабильная выпуклая вправо формула. Тогда $F(x, y)$ является эквивалентность-генерирующей, и, следовательно, существует $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, откуда $RC(p) \geq 2$, противореча условию леммы. Следовательно, для каждого $1 \leq i \leq m$ U_i^p — 2-неразличимо над $\emptyset$. Возьмем произвольные элементы $a_1 \in U_i^p$ и $b \in M \setminus p(M)$ (в силу m-выпуклости M такой элемент b обязательно существует). Тогда в силу 2-неразличимости U_i^p над $\emptyset$ множество $U_i^p \cap \{a \in p(M) | K_0(a_1, a, b)\}$ является 1-неразличимым над $\{a_1\}$. Это множество является $\{a_1\}$-определимым и выделяется следующей формулой:

$$\phi(a_1, x) := U^p(x) \wedge \exists y[\neg U^p(y) \wedge K_0(a_1, x, y)]$$

где $U^p(x)$ определяет тип p. Следовательно, существует $p' \in S_1(\{a_1\})$ такой, что $p'(M) = \phi(a_1, M)$. Очевидно что $RC(p') = 1$, откуда в силу Леммы 2.6 $p'(M)$ неразличимо над $\{a_1\}$. Тогда в силу произвольности выбора a_1 заключаем, что U_i^p неразличимо над $\emptyset$. □

Лемма 2.8. *Пусть M — счетно категоричная слабо циклически минимальная структура, $A \subseteq M$, A — конечно, $A \neq \emptyset$, $p_1, p_2, \ldots, p_s \in S_1(A)$, $RC(p_i) = 1$ для каждого $1 \leq i \leq s$. Предположим что $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ слабо ортогонально над A. Тогда оно ортогонально над A.*

Доказательство. Очевидно что $p_i(M)$ выпукло для каждого $1 \leq i \leq s$. Возьмем произвольный $a \in A$ и рассмотрим структуру $\hat{M}_a$. В силу Предложения 1.2 $\hat{M}_a$ — слабо о-минимальная структура. Нетрудно понять, что $\hat{M}_a$ также является счетно категоричной. Далее доказательство повторяет доказательство Леммы 4 из [12], используя Лемму 2.6 вместо Теоремы 1 из [12]. □

Предложение 2.9. *Пусть M — счетно категоричная m-выпуклая слабо циклически минимальная структура, $m > 1$, $p \in S_1(\emptyset)$, $RC(p) = 1$, и пусть $p(M) = \cup_{i=1}^m U_i$, где каждое U_i является выпуклой компонентой типа p. Предположим, что для некоторого $s \leq m$ $\{U_1, U_2, \ldots, U_s\}$ — слабо ортогонально над $\emptyset$. Тогда оно ортогонально над $\emptyset$.*

Доказательство. Будем доказывать индукцией по $s \geq 1$. Случай $s = 1$ является тривиальным, так как в силу Предложения 2.7 каждая выпуклая компонента U_i является неразличимым множеством над $\emptyset$. Предположим что заключение леммы установлено для семейств из s выпуклых компонент, и докажем это для семейств из $s+1$ выпуклой компоненты $\{U_1, U_2, \ldots, U_s, U_{s+1}\}$. Не умаляя общности, будем считать, что $K_0(U_1, U_2, \ldots, U_s, U_{s+1})$ и формула $U^p(x)$ изолирует тип p. Предположим также для определенности, что между U_s и U_{s+1} существует k выпуклых компонент типа p для некоторого $0 \leq k \leq m-s-1$. Возьмем произвольный s–кортеж $\langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle \in U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_s$. В силу слабой ортогональности $\{U_1, U_2, \ldots, U_s, U_{s+1}\}$ множество U_{s+1} 1-неразличимо над $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$, и следовательно в силу Предложения 2.7 U_{s+1} n–неразличимо над $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ для каждого $n \in \omega$. Возьмем произвольный $n_{s+1} < \omega$ и произвольный n_{s+1}–кортеж $\bar{a}_{s+1} = \langle a_{s+1}^1, a_{s+1}^2, \ldots, a_{s+1}^{n_{s+1}} \rangle \in [U_{s+1}]^{n_{s+1}}$ с условием $K_0(a_{s+1}^1, a_{s+1}^2, \ldots, a_{s+1}^{n_{s+1}})$ и докажем что $\{U_1, U_2, \ldots, U_s\}$ слабо ортогонально над $\{a_{s+1}^1, a_{s+1}^2, \ldots, a_{s+1}^{n_{s+1}}\}$. Если это не так, то существуют $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle, \bar{a}' = \langle a_1', a_2', \ldots, a_s' \rangle \in U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_s$ такие что $tp(\bar{a}/\{\bar{a}_{s+1}\}) \neq tp(\bar{a}'/\{\bar{a}_{s+1}\})$. Тогда существует $\emptyset$–определимая формула $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ так что

$$M \models \phi(\bar{a}, \bar{a}_{s+1}) \wedge \neg\phi(\bar{a}', \bar{a}_{s+1})$$

Поймем что существует $\bar{a}'_{s+1} = \langle (a^1_{s+1})', (a^2_{s+1})', \ldots, (a^{n_{s+1}}_{s+1})' \rangle \in [U_{s+1}]^{n_{s+1}}$ такой, что $K_0((a^1_{s+1})', (a^2_{s+1})', \ldots, (a^{n_{s+1}}_{s+1})')$ и $\neg\phi(\bar{a}, \bar{a}'_{s+1})$. Если такого кортежа не существует, то $M \models \theta(\bar{a})$, где

$$\theta(\bar{x}) := \forall y_1 \ldots \forall y_{n_{s+1}} [K_0(y_1, \ldots, y_{n_{s+1}}) \wedge \forall t(K(y_1, t, y_{s+1}) \to U^p(t)) \wedge$$
$$\wedge \exists z_1 \ldots \exists z_k \exists t_1 \ldots \exists t_{k+1} (\wedge^k_{i=1} U^p(z_i) \wedge \wedge^{k+1}_{j=1} \neg U^p(t_j)) \wedge$$
$$\wedge K_0(x_s, t_1, z_1, t_2, z_2, \ldots, t_k, z_k, t_{k+1}, y_1)] \to \phi(\bar{x}, y_1, \ldots, y_{n_{s+1}})]$$

Так как $\{U_1, U_2, \ldots, U_s\}$ слабо ортогонально над $\emptyset$, то $M \models \theta(\bar{a}')$, противореча нашему допущению. Следовательно, $M \models \phi(\bar{a}, \bar{a}_{s+1}) \wedge \neg\phi(\bar{a}, \bar{a}'_{s+1})$, противореча n_{s+1}–неразличимости U_{s+1} над $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$. Таким образом, $\{U_1, U_2, \ldots, U_s\}$ слабо ортогонально над $\{a^1_{s+1}, a^2_{s+1}, \ldots, a^{n_{s+1}}_{s+1}\}$. Тогда существуют 1-типы $p'_1, \ldots, p'_s \in S_1(\{a^1_{s+1}, a^2_{s+1}, \ldots, a^{n_{s+1}}_{s+1}\})$ такие, что $p'_i(M) = U_i$ для каждого $1 \leq i \leq s$. Тогда в силу Леммы 2.8 $\{U_1, U_2, \ldots, U_s\}$ ортогонально над $\{a^1_{s+1}, a^2_{s+1}, \ldots, a^{n_{s+1}}_{s+1}\}$. В силу произвольности $\bar{a}_{s+1} = \langle a^1_{s+1}, a^2_{s+1}, \ldots, a^{n_{s+1}}_{s+1} \rangle \in [U_{s+1}]^{n_{s+1}}$ заключаем что $\{U_1, U_2, \ldots, U_s, U_{s+1}\}$ ортогонально над $\emptyset$. $\square$

Предложение 2.10. *Пусть M — счетно категоричная m-выпуклая слабо циклически минимальная структура, $m > 1$, $p \in S_1(\emptyset)$, $RC(p) = 1$, $\{U_1, U_2, \ldots, U_s\}$ — семейство попарно слабо ортогональных выпуклых компонент типа p для некоторого $s \leq m$. Тогда $\{U_1, U_2, \ldots, U_s\}$ слабо ортогонально над $\emptyset$.*

Доказательство. Будем доказывать индукцией по $s \geq 2$. Шаг $s = 2$ является тривиальным.

Шаг $s = 3$. Допустим противное: предположим что $\{U_1, U_2, U_3\}$ не является слабо ортогональным над $\emptyset$. Тогда существуют кортежи $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \langle b_1, b_2, b_3 \rangle \in U_1 \times U_2 \times U_3$ такие что

$$tp(\langle a_1, a_2, a_3 \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle b_1, b_2, b_3 \rangle / \emptyset)$$

Следовательно, существует $\emptyset$–определимая формула $\phi(x_1, x_2, x_3)$ такая что

$$M \models \phi(a_1, a_2, a_3) \wedge \neg\phi(b_1, b_2, b_3)$$

Поймем что существует $a''_3 \in U_3$ такой что $M \models \neg\phi(a_1, a_2, a''_3)$. Допустим противное, т.е. $M \models \forall y[U_3(y, a_1) \to \phi(a_1, a_2, y)]$, где $U_3(y, a_1)$ — $\{a_1\}$–определимая формула, так что $U_3(M, a_1) = U_3$ (в силу Факта 1.3 такая формула существует). Но по индукционному предположению $tp(\langle a_1, a_2 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b_1, b_2 \rangle / \emptyset)$, противореча нашему допущению. Таким образом, существует кортеж $\langle a_1, a_2 \rangle \in U_1 \times U_2$ и существуют $a'_3, a''_3 \in U_3$ такие что

$$M \models \phi(a_1, a_2, a'_3) \wedge \neg\phi(a_1, a_2, a''_3)$$

В силу слабой циклической минимальности M будем считать что $\phi(a_1, a_2, M)$ выпукло, $\phi(a_1, a_2, M) \subset U_3$ и $\operatorname{lend} \phi(a_1, a_2, M) = \operatorname{lend} U_3$, откуда, в частности, следует что $K_0(a_1, a_2, a'_3, a''_3)$.

Пусть $f_{a_1}(y) := \operatorname{rend} \phi(a_1, y, M)$, $g_{a_2}(x) := \operatorname{rend} \phi(x, a_2, M)$. Так как U_2 остается 1-неразличимым над $\{a_1\}$, то $f_{a_1}(y)$ не меняет своего поведения на всем U_2, и поэтому должна быть либо монотонной вправо, либо монотонной влево, либо константой на всем U_2. Если $f_{a_1}(y)$ была бы константой, тогда бы выпуклые компоненты U_1 и U_2 не были слабо ортогональны. Аналогично те же рассуждения для U_1 и $g_{a_2}(x)$. Так как U_1 — 1-неразличимо над $\emptyset$ в M, то если $f_{a_1}(y)$ монотонная вправо на U_2, то и для любого $a'_1 \in U_1$ $f_{a'_1}(y)$ монотонная вправо на U_2.

Случай 1. $f_{a_1}(y)$ — монотонная вправо на U_2, $g_{a_2}(x)$ — монотонная вправо на U_1.

Пусть $U_2(y)$ — $\{a_1\}$–определимая формула, так что $U_2(M) = U_2$. Возьмем $b_1 \in U_1$ такой что $K(a_1, M, b_1) \subseteq U_1$ и рассмотрим следующие формулы:

$$\Phi_1(y) := U_2(y) \land \forall z[\phi(a_1, a_2, z) \to \phi(b_1, y, z)]$$

$$\Phi_2(y) := U_2(y) \land \forall y_1 \forall z[\neg\Phi_1(y_1) \land U_2(y_1) \land \phi(a_1, y_1, z) \to \phi(b_1, y, z)]$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\Phi_n(y) := U_2(y) \land \forall y_1 \forall z[\neg\Phi_{n-1}(y_1) \land U_2(y_1) \land \phi(a_1, y_1, z) \to \phi(b_1, y, z)]$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

Докажем что $\Phi_1(M) \subset \Phi_2(M) \subset \ldots \subset \Phi_n(M) \subset \ldots$ $(*)$. Поскольку все формулы $\Phi_1(y), \Phi_2(y), \ldots, \Phi_n(y), \ldots$ являются $\{a_1, a_2, b_1\}$-определимыми, и не являются $\emptyset$-определимыми, то дальнейшие рассуждения, связанные с этими формулами, можем проводить в слабо о-минимальной структуре $\hat{M}_{a_1}$. Поймем вначале что $\Phi_1(M) \subset \Phi_2(M)$. По определению формулы $\Phi_1(y)$ имеем:

$$\sup\{f_{b_1}(a_2') | a_2' \in \neg\Phi_1(M) \cap U_2(M)\} = f_{a_1}(a_2)$$

С другой стороны, так как существует $a_0 \in \Phi_1(M)$ с условием $K_0(a_1, a_0, a_2)$, то имеем:

$$\sup\{f_{a_1}(a_2') | a_2' \in \neg\Phi_1(M) \cap U_2(M)\} < f_{a_1}(a_2)$$

Следовательно, существует $a_2'' \in \neg\Phi_1(M) \cap U_2(M)$ такой что

$$\sup\{f_{a_1}(a_2') | a_2' \in \neg\Phi_1(M) \cap U_2(M)\} \le f_{b_1}(a_2'')$$

Таким образом, получаем что $\Phi_1(M) \subset \Phi_2(M)$. Предположим теперь что для любого $i \le n$ $\Phi_{i-1}(M) \subset \Phi_i(M)$ и покажем что $\Phi_n(M) \subset \Phi_{n+1}(M)$. По определению формулы $\Phi_n(y)$ имеем:

$$\sup\{f_{b_1}(a_2') | a_2' \in \neg\Phi_n(M) \cap U_2(M)\} = \sup\{f_{a_1}(a_2'') | a_2'' \in \neg\Phi_{n-1}(M) \cap U_2(M)\}$$

Так как $\Phi_{n-1}(M) \subset \Phi_n(M)$, то

$$\sup\{f_{a_1}(a_2') | a_2' \in \neg\Phi_n(M) \cap U_2(M)\} < \sup\{f_{a_1}(a_2'') | a_2'' \in \neg\Phi_{n-1}(M) \cap U_2(M)\}$$

Следовательно, существует $a_2''' \in \neg\Phi_n(M) \cap U_2(M)$ такой что

$$\sup\{f_{a_1}(a_2') | a_2' \in \neg\Phi_n(M) \cap U_2(M, a_1)\} \le f_{b_1}(a_2''')$$

Таким образом, получаем что $\Phi_n(M) \subset \Phi_{n+1}(M)$. Мы доказали $(*)$, откуда получаем противоречие со счетной категоричностью теории $Th(M)$.

Случай 2. $f_{a_1}(y)$ — монотонная вправо на U_2, $g_{a_2}(x)$ — монотонная влево на U_1.

Рассматривая те же самые формулы, как в случае 1, будем иметь:

$$\Phi_1(M) \supset \Phi_2(M) \supset \ldots \supset \Phi_n(M) \supset \ldots$$

Опять получаем противоречие со счетной категоричностью теории $Th(M)$. Шаг $s = 3$ доказан.

Предположим теперь, что заключение предложения установлено для множеств из s выпуклых компонент ($s \ge 3$), и докажем это для множеств из $s + 1$ выпуклой компоненты, $\{U_1, \ldots, U_s, U_{s+1}\}$. Дальнейшее доказательство повторяет доказательство Леммы 5 из [12], проводя рассуждения в слабо о-минимальной структуре $\hat{M}_{a_1}$ для произвольного $a_1 \in U_1$. $\square$

Следующая теорема является критерием неразличимости множества реализаций 1-типа ранга выпуклости 1 в счетно категоричной m-выпуклой слабо циклически минимальной структуре, где $m > 1$.

Теорема 2.11. *Пусть M — счетно категоричная m-выпуклая слабо циклически минимальная структура, $m > 1$, $p \in S_1(\emptyset)$, $RC(p) = 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $p(M)$ — неразличимо над $\emptyset$;

(2) Семейство всех выпуклых компонент типа p попарно слабо ортогонально над $\emptyset$.

Доказательство. В силу Предложения 2.7 каждая выпуклая компонента типа p является неразличимым множеством над $\emptyset$.

Предположим вначале, что $p(M)$ неразличимо над $\emptyset$. Допустим противное: существует две выпуклые компоненты U_i и U_j типа p такие, что $\{U_i, U_j\}$ не является слабо ортогональным над $\emptyset$. Тогда существуют кортежи $\langle a_1, a_2\rangle$, $\langle b_1, b_2\rangle \in U_i \times U_j$ такие, что $tp(\langle a_1, a_2\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle b_1, b_2\rangle/\emptyset)$. Последнее влечет, что $p(M)$ не является 2-неразличимым над $\emptyset$, противореча нашему предположению.

Предположим теперь, что семейство всех выпуклых компонент $\{U_1, \dots, U_m\}$ типа p попарно слабо ортогонально над $\emptyset$. В силу Предложения 2.10 $\{U_1, \dots, U_m\}$ слабо ортогонально над $\emptyset$, и в силу Предложения 2.9 оно ортогонально над $\emptyset$, откуда следует неразличимость $p(M)$ над $\emptyset$. □

References

[1] M. Bhattacharjee, H.D. Macpherson, R.G. Möller, P.M. Neumann, *Notes on Infinite Permutation Groups*, Lecture Notes in Mathematics 1698, Springer, 1998. Zbl 0916.20002

[2] B.Sh. Kulpeshov, H.D. Macpherson, *Minimality conditions on circularly ordered structures*, Mathematical Logic Quarterly, **51** (2005), 377–399. MR2150368

[3] H.D. Macpherson, Ch. Steinhorn, *On variants of o-minimality*, Annals of Pure and Applied Logic, **79** (1996), 165–209. MR1396850

[4] D. Livingstone, A. Wagner, *Transitivity of finite permutation groups on unordered sets*, Mathematische Zeitschrift, **90** (1965), 393–403. MR0186725

[5] P.J. Cameron, *Transitivity of permutation groups on unordered sets*, Mathematische Zeitschrift, **148** (1976), 127–139. MR0401885

[6] M. Droste, M. Giraudet, H.D. Macpherson and N. Sauer, *Set-homogeneous graphs*, Journal of Combinatorial Theory, series B, **62** (1994), 63–95. MR1290631

[7] P.J. Cameron, *Orbits of permutation groups on unordered sets II*, Journal of the London Mathematical Society, **23** (1981), 249–264. MR0609105

[8] P.J. Cameron, *Orbits of permutation groups on unordered sets IV: homogeneity and transitivity*, Journal of the London Mathematical Society, **27** (1983), 238–247. MR0692529

[9] A.H. Lachlan, *Countable homogeneous tournaments*, Transactions of American Mathematical Society, **284** (1984), 431–461. MR0743728

[10] B.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov, *On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories*, Mathematical Logic in Asia: Proceedings of the 9th Asian Logic Conference, Singapore: World Scientific, 2006, 31–40. MR2294283

[11] A.B. Altayeva, B.Sh. Kulpeshov, *Equivalence-generating formulas in weakly circularly minimal structures*, Reports of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan, **2** (2014), 5–10.

[12] B.Sh. Kulpeshov, *Binarity for $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories of convexity rank 1*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **3** (2006), 185–196. MR2276019

Beibut Shaiykovich Kulpeshov
International Information Technology University,
ul. Manasa 34A / ugol ul. Zhandosova 8A,
050040, Almaty, Kazakhstan
E-mail address: b.kulpeshov@iitu.kz