S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 28–44 (2015) УДК 519.6

MSC 65Q10

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ С ДВУМЯ ВЕСАМИ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ КОШИ

М.А. СУЛТАНОВ

Abstract. The stability of a three-layer difference scheme with two weights approximating the ill-posed Cauchy problem for second order differential equation with an unbounded, both above and below the self-adjoint operator in the main part are considered. Based on the factorization method and application variants weight difference of a priori estimates of Carleman type conditions unconditional stability of the scheme has been obtained. Application of the above theorem to construct unconditionally stable difference schemes for the one-dimensional coefficient inverse problem of determining the potential in the Schrodinger equation is considered.

Keywords: finite-difference scheme, stability, the difference operator, weighted a priori estimates of Carleman type, inverse problem, eigenvalues, eigenfunctions.

1. Постановка задачи и основной результат

В работе рассматриваются вопросы устойчивости трехслойной разностной схемы с двумя весами для некорректно поставленной задачи Коши. Устойчивость разностных схем для некорректной задачи Коши с постоянными коэффициентами впервые исследовалась Л.А. Чудовым [1] методом преобразования Фурье. Подход, основанный на SM (Spectral Mimetic) устойчивости применительно к некорректным и обратным задачам, развит в работах П.Н. Вабищевича [3,4]. Использованная нами при доказательстве техника есть разностный аналог весовых априорных оценок карлемановского типа, введенных и развитых А.Л. Бухгеймом [5,6] в связи с построением теории разностных схем для

Sultanov, M.A., Stability of three-layer difference scheme.

.

Поступила 10 января 2014 г., опубликована 22 января 2015 г.

некорректных задач, охватывающий уравнения с переменными коэффициентами. Наш результат обобщает соответствующий результат в [7], полученный в абстрактной ситуации без учета младших членов. Исследование некорректных и обратных задач как прямыми, так и итерационными методами рассматривались в работах [8-11].

Пусть $\mathrm{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ и $u : \mathrm{Z} \to H$ — функция целочисленного аргумента $j \in \mathrm{Z}$ со значениями в комплексном гильбертовом пространстве H с нормой $\|u\|$ и скалярным произведением $\langle u, v\rangle$. Будем использовать обычные для разностных схем обозначения (см. [2]):

$$u_t = (u_{j+1} - u_j)/\tau, u_{\bar t} = (u_j - u_{j-1})/\tau, u_{t\bar t} = (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})/\tau^2, \hat{u} = u_{j+1},$$
$$\overset{\vee}{u} = u_{j-1}.$$

Здесь τ — шаг сетки, $\tau N = T > 0$. Рассмотрим трехслойную схему с двумя весами σ , $q \in R$:

$$Pu \equiv u_{t\bar t} - A_1(\sigma \hat{u} + (1 - 2\sigma)u + \sigma \overset{\vee}{u}) - A_2(q \hat{u} + (1 - 2q)u + q \overset{\vee}{u}) = f, \tag{1}$$

$$u_0 = g\,, \;\; u_1 = u_0, \tag{2}$$

где A_1, A_2 — произвольные коммутирующие, самосопряженные, не зависящие от t операторы в H; f, g — заданные элементы пространства H.

Введем соответствующие весовые нормы (см [6], стр.131). Пусть $\mathrm{Z}_0^N = \{0, 1, ..., N\}$, $\varphi : \mathrm{Z}_0^N \to R$ — вещественная монотонно убывающая весовая функция, т.е. $-\varphi_t > 0$. По функции φ и числу построим функцию $\Psi : \mathrm{Z}_0^{N-1} \to R$ так, что $\Psi_t = s \overset{\wedge}{\Psi} \varphi_t$, $\Psi_0 = 1$. Функция Ψ есть дискретный аналог весовой функции $\exp(s\varphi(t))$. Для функции $u : \mathrm{Z}_0^{N-1} \to H$ положим

$$\|u\|_s^2 = \tau \sum_{j=0}^{N-1} \Psi_j^2(s)\, \|u_j\|^2.$$

Если обозначить через $l_2(k, N; H)$ гильбертово пространство сеточных функций $u : \mathrm{Z}_k^N \to H, \mathrm{Z}_k^N = \{k, k+1, ..., N\}$ с нормой $\|u\|^2_{l_2(k,N;H)} = \tau \sum\limits_{j=k}^{N} \|u_j\|^2$, то согласно определению нормы $\|u\|_s\,, \|u\|_0 = \|u\|_{l_2(0,N-1;H)}$. Обозначим через $C_0(Z_0^N)$ множество функций $u : Z_0^N \to H$ таких, что $u_0 = u_N = 0$. Линейное пространство $C_0(Z_0^N)$ есть дискретный аналог множества $C_0(0,\ T)$ непрерывных финитных на интервале $[0,\ T]$ функций $u(t) :\ u(0) = u(T) = 0$.

Определение 1. *Разностная схема P вида (1) называется устойчивой на финитных функциях, если существуют не зависящие τ, $\|A\|$ числа $s_0 > 0$, $M > 0$, такие, что для всех $s \geq s_0, u \in C_0(Z_0^N)$ выполнена оценка*

$$s\,\|u\|_s^2 \leq M\ \|Pu\|_s^2\,. \tag{3}$$

Для получения оценки устойчивости на всей сетке Z_1^N нужно учесть вклад вне интегральных членов, возникающих при использовании формулы суммирования по частям, и, следовательно, следует работать не с финитными функциями $C_0(\mathrm{Z}_0^N)$, а с произвольными $u : \mathrm{Z}_0^N \to H$. Введем для краткости следующее обозначение

$$\|u\|^2_{s(k,N)} = \tau \sum_{j=k}^{N} \Psi_j^2(s)\, \|u_j\|^2,\ k \geq 0.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть* $A = A^* = A_+ - A_-$, *где* $(A_\pm)^* = A_\pm \geq 0$ *и выполнно условие* $E + \tau A \geq 0$. *Тогда для всех* $\tau \in (0, \tau_0]$, $s > 0$, $u : Z_0^N \to H$ *для явной схемы* $Pu \equiv u_t - Au - f$ *имеет место оценка устойчивости*

$$s\,\|u\|^2_{s(1,N)} \leq c\left\{\|Pu\|^2_s + s\,\|u_0\|^2 + \left\|A_-^{1/2}u_0\right\|^2 + \Psi_N^2\left\|A_+^{1/2}u_N\right\|^2\right\}.$$

Доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 4.1 (см. [13], стр.155).

Разложим пространство H в прямую сумму $H = H^+ \oplus H^-$ двух подпространств H^+ и H^- таким образом, что $A_1 + A_2 \geq 0$ в H^+ и $A_1 + A_2 \leq 0$ в H^-. Пусть $Q^\pm$ — ортопроекторы пространства H на $H^\pm$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть* $A_1 = A_1^* \geq 0$, $A_2 = A_2^* \leq 0$ *и выполнены условия*

$$E - \tau^2\sigma A_1 - \tau^2 q A_2 \geq \delta E,\ \ \delta > 0, \tag{4}$$

$$4E + \tau^2(1-4q)A_2 \geq 0,\ \ (1-4\sigma)A_1 \geq 0, \tag{5}$$

$$E + \tau^2(1-\sigma)A_1 + \tau^2(1-q)A_2 \geq 0\,. \tag{6}$$

Тогда для всех $\tau \in (0, \tau_0]$, $\varepsilon > 0$, $u : \mathrm{Z}_0^N \to H$ *для разностной схемы (1) имеет место оценка устойчивости*

$$\|u\|^2_{l_2(1,N-1;H)} \leq \varepsilon^2 l^2(u) + c^2(\varepsilon)\left(\|f\|^2_{l_2(1,N;H)} + \left\|(-A_2)^{1/2}Q^-u_0\right\|^2 + \right. \tag{7}$$
$$\left. + \left\|AQ^+u_0\right\|^2 + \left\|A_1^{1/2}Q^+u_0\right\|^2 + \|u_0\|^2\right).$$

Здесь

$$l^2(u) = \left\|AQ^+u_{N-1}\right\|^2 + \left\|A_1^{1/2}Q^+u_{N-1}\right\|^2 + \left\|Q^+u_N\right\|^2 +$$
$$+ \left\|A_1^{1/2}Q^+u_N\right\|^2 + \left\|Q^+u_{\bar{t}N}\right\|^2 + \left\|A_1^{1/2}Q^+u_{\bar{t}N}\right\|^2.$$

Доказательство. Приведем краткую схему доказательства теоремы. Из уравнения (1) после сдвига на шаг вправо имеем

$$\left[E - \tau^2\sigma A_1 - \tau^2 qA_2\right]u_{j+2} - \left[2E + \tau^2(1-2\sigma)A_1 + \tau^2(1-2q)A_2\right]u_{j+1} + \tag{8}$$
$$+ \left[E - \tau^2\sigma A_1 - \tau^2 qA_2\right]u_j = \tau^2 f_{j+1}$$

По условию (4) существует оператор $\left[E - \tau^2\sigma A_1 - \tau^2 qA_2\right]^{-1}$. Умножив (8) слева на $\left[E - \tau^2\sigma A_1 - \tau^2 qA_2\right]^{-1}$, получим

$$u_{j+2} - \left[E - \tau^2\sigma A_1 - \tau^2 qA_2\right]^{-1}\cdot\left[2E + \tau^2(1-2\sigma)A_1 + \tau^2(1-2q)A_2\right]u_{j+1} + \tag{9}$$
$$+ u_j = \tau^2 \bar{f}_j,$$

где $\bar{f}_j = \left[E - \tau^2\sigma A_1 - \tau^2 qA_2\right]^{-1}\cdot f_{j+1}$.

Положим

$$u_{j+1} - Ru_j = \tau v_j, \tag{10}$$

$$v_{j+1} - Sv_j = \tau\,\bar{f}_j \tag{11}$$

и подберем операторы R, S так, чтобы после исключения v система (10), (11) перешла в уравнение (9). Исключая из (11) с помощью (10) v_j, получаем

$$u_{j+2}-(R+S)u_{j+1}+SRu_j=\tau^2\bar{f}_j,$$

откуда

$$R+S=\left[E-\tau^2\sigma A_1-\tau^2 qA_2\right]^{-1}\cdot\left[2E+\tau^2(1-2\sigma)A_1+\tau^2(1-2q)A_2\right], \tag{12}$$

$$S\cdot R=E. \tag{13}$$

Обозначим правую часть уравнения (12) для краткости через B. Очевидно, что B — самосопряженный оператор. Решая систему (12), (13) находим

$$R_1=\left[B+\sqrt{B^2-4E}\right]\ /2\left(R_2=\left[B-\sqrt{B^2-4E}\right]\ /2\right), \tag{14}$$

$$S_1=\left[B-\sqrt{B^2-4E}\right]\ /2\left(S_2=\left[B+\sqrt{B^2-4E}\right]\ /2\right). \tag{15}$$

Преобразуем подкоренное выражение B^2-4E.

$$B^2-4E=\left[E-\tau^2\sigma A_1-\tau^2 qA_2\right]^{-2}\cdot\left[2E+\tau^2(1-2\sigma)A_1+\tau^2(1-2q)A_2\right]^2-$$

$$-4\left[E-\tau^2\sigma A_1-\tau^2 qA_2\right]^{-2}\cdot\left[E-\tau^2\sigma A_1-\tau^2 qA_2\right]^2= \tag{16}$$

$$=\left[E-\tau^2\sigma A_1-\tau^2 qA_2\right]^{-2}\cdot\left\{4E+\tau^2(1-4q)A_2+\tau^2(1-4\sigma)A_1\right\}\cdot$$
$$\cdot\tau^2\cdot(A_1+A_2).$$

При условиях (5) выражение в фигурных скобках будет неотрицательным, следовательно, существует от этого выражения неотрицательный квадратный корень. Обозначим его через C :

$$C=\left\{4E+\tau^2(1-4q)A_2+\tau^2(1-4\sigma)A_1\right\}^{1/2}\geq 0.$$

Тогда

$$\sqrt{B^2-4E}=\tau\left[E-\tau^2\sigma A_1-\tau^2 qA_2\right]^{-1}\cdot C\cdot(A_1+A_2)^{1/2}.$$

Очевидно, что $H^{\pm}$ - инвариантные подпространство операторов R,S. В пространстве H^- имеем $\sqrt{B^2-4E}=i\sqrt{4E-B^2}, 4E-B^2\geq 0$, и поэтому из формул (14), (15) следует, что R и S - унитарные взаимно сопряженные операторы, $\|R\|=\|S\|=1$. Тогда, из системы (10), (11) для $u,v\in H^-$ при условии, что $u_0,v_0\in H^-$, где $u_0=g,\quad \tau\, v_0=u_1-Ru_0=g-Rg=(E-R)g$, рекуррентно имеем:

$$\|u_n\|\leq M(\|u_0\|+\tau\sum_{j=0}^{n-1}\|v_j\|,\ n=1,2,..,N-1, \tag{17}$$

$$\|v_n\|\leq M(\|v_0\|+\tau\sum_{j=0}^{n-1}\left\|\bar{f}_j\right\|,\ n=1,2,..,N-1. \tag{18}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть для разностных схем (10), (11) при* $R = R_1,\ S = S_1$ *имеют место оценки (15), (16). Тогда для всех* $s > 0,\ \ u, v:\ Z_0^N \to H^-$ *имеют место оценки*

$$s^2 \|u\|^2_{s(1,N-1)} \le C(s^2 \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|v\|^2_{s(1,N-1)}), \tag{19}$$

$$s^2 \|v\|^2_{s(1,N-1)} \le C(s^2 \|v_0\|^2 + \|\bar{f}\|^2_s). \tag{20}$$

Доказательство. Для $u:\ Z_0^N \to H^-$ из определения $\|u\|_{s(1,N-1)}$ и оценки (17) имеем

$$\|u\|^2_{s(1,N-1)} = \tau \sum_{n=1}^{N-1} \Psi_n^2 \|u_n\|^2 \le \tau \sum_{n=1}^{N-1} \Psi_n^2 \left\{ M \cdot \|u_0\|^2 + M \cdot \tau \sum_{j=0}^{n-1} \|v_j\|^2 \right\} \le$$

$$\le 2M^2 \tau \sum_{n=1}^{N-1} \Psi_n^2 \|u_0\|^2 +$$

$$+(2M^2\tau^2) \cdot \tau \cdot \sum_{n=1}^{N-1} \Psi_n^2 \left(\sum_{j=0}^{n-1} \|v_j\| \right)^2 \le 2M^2 \tau_0 (N-1) \|u_0\|^2 + (2M^2\tau^2) \cdot \tau \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} (\Psi_n / \Psi_j)\, \Psi_j \|v_j\| \right)^2 \le 2M^2 \tau_0 (N-1) \|u_0\|^2 + (2M^2\tau^2) \cdot \tau \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} (1 + \mu\tau s)^{-(n-j)} \Psi_j \|v_j\| \right\}^2, \tag{21}$$

Здесь мы учли то, что $\Psi_n/\Psi_j \le k_{n-j}, \Psi_j \le 1,$ где $k_j = (1+\mu\tau s)^{-j}, \mu = \min(-\varphi_t)_j > 0,\ j = 0, 1, ..., N-1, \tau \le \tau_0$ (см. [13], стр.132).

Применяя к внутренней сумме (21) неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\left\{ \sum_{j=0}^{n-1} k_{n-j}^{1/2} \cdot k_{n-j}^{1/2} \Psi_j \|v_j\| \right\}^2 \le K \sum_{j=0}^{n-1} k_{n-j} \Psi_j^2 \|v_j\|^2,$$

где $K = \sum\limits_{j=0}^{n-1} k_j$. Меняя в (21) порядок суммирования и используя последнее неравенство, приходим к оценке

$$\|u\|^2_{s(1,N-1)} \le 2M^2 \tau_0 (N-1) \|u_0\|^2 + 2(MK\tau)^2 \|v\|^2_s .$$

Учитывая определения K, выражение для k_j и то, что $q = (1+\mu\tau s)^{-1}, \Psi_0 = 1$, из последней оценки имеем

$$s^2 \|u\|^2_{s(1,N-1)} \le 2M^2 \tau_0 (N-1) s^2 \|u_0\|^2 + 2(M/\mu)^2 \|v\|^2_s \le$$

$$\le 2M^2 \tau_0 (N-1) s^2 \|u_0\|^2 + 2\tau_0 (M/\mu)^2 \|v_0\|^2 + 2(M/\mu)^2 \|v\|^2_{s(1,N-1)} .$$

Полагая в последней оценке $C = \max\left(2M^2\tau_0(N-1),\ 2\tau_0(M/\mu)^2,\ 2(M/\mu)^2\right)$, получаем оценку (19). Аналогичным образом, возможно, с другой константой, устанавливается оценка (20).

Лемма 2 доказана. □

Продолжим доказательство теоремы 1. Комбинируя (19) и (20), получим оценку

$$s^4 \|u\|^2_{s(1,N-1)} \le C \left(s^4 \left\|u_0^2\right\| + s^2 \|v_0\|^2 + \left\|\bar{f}\right\|^2_s \right) \tag{22}$$

с некоторой другой константой C. Складывая оценки (20), (22) и учитывая, что $v = u_t - \left(\frac{R_1 - E}{\tau}\right) u, v_0 = -\left(\frac{R_1 - E}{\tau}\right) u_0$, имеем

$$s^4 \|u\|^2_{s(1,N-1)} + s^2 \left\| u_t - \left(\frac{R_1 - E}{\tau}\right) u \right\|^2_{s(1,N-1)} \le \tag{23}$$

$$\le C \left(s^4 \|u_0\|^2 + s^2 \|v_0\|^2 + \left\|\bar{f}\right\|^2_s \right).$$

Используя лемму 2 для разностных схем (10), (11), при $R = R_2$, $S = S_2$, несложно получить следующую оценку

$$s^4 \|u\|^2_{s(1,N-1)} + s^2 \left\| u_t - \left(\frac{R_2 - E}{\tau}\right) u \right\|^2_{s(1,N-1)} \le$$

$$\le C \left(s^4 \|u_0\|^2 + s^2 \left\| \left(\frac{R_2 - E}{\tau}\right) u_0 \right\|^2 + \left\|\bar{f}\right\|^2_s \right).$$

Складывая наконец эту оценку с оценкой (23), имеем

$$2s^4 \|u\|^2_{s(1,N-1)} +$$

$$+s^2 \left\{ \left\| u_t - \left(\frac{R_1 - E}{\tau}\right) u \right\|^2_{s(1,N-1)} + \left\| u_t - \left(\frac{R_2 - E}{\tau}\right) u \right\|^2_{s(1,N-1)} \right\} \le$$

$$\le C \left(s^4 \|u_0\|^2 + s^2 \left\| \left(\frac{R_1 - E}{\tau}\right) u_0 \right\|^2 + s^2 \left\| \left(\frac{R_2 - E}{\tau}\right) u_0 \right\|^2 + \left\|\bar{f}\right\|^2_s \right). \tag{24}$$

Преобразуем в (24) выражение в фигурных скобках.

$$\left\| u_t - \left(\frac{R_1 - E}{\tau}\right) u \right\|^2_{s(1,N-1)} + \left\| u_t - \left(\frac{R_2 - E}{\tau}\right) u \right\|^2_{s(1,N-1)} =$$

$$= \tau \sum_{j=1}^{N-1} \Psi_j^2 \left(\left\| u_t - \left(\frac{R_1 - E}{\tau}\right) u \right\|^2 + \left\| u_t - \left(\frac{R_2 - E}{\tau}\right) u \right\|^2 \right). \tag{25}$$

$$\left\| u_t - \left(\frac{R_1 - E}{\tau}\right) u \right\|^2 + \left\| u_t - \left(\frac{R_2 - E}{\tau}\right) u \right\|^2 = 2 \|u_t\|^2 + \left\| \left(\frac{R_1 - E}{\tau}\right) u \right\|^2 +$$

$$+ \left\| \left(\frac{R_2 - E}{\tau}\right) u \right\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle u_t, \left(\frac{R_1 - E}{\tau}\right) u \rangle - 2\mathrm{Re}\langle u_t, \left(\frac{R_2 - E}{\tau}\right) u \rangle.$$

Так как в $H^- R_{1,2} = \left(B \pm i\sqrt{4E - B^2}\right)/2$, то

$$\left(R_{1,2} - E\right)/\tau = \left(B - 2E \pm i\sqrt{4E - B^2}\right)/2\tau,$$

и, следовательно

$$-2\mathrm{Re}\langle u_t, \left(\frac{R_1 - E}{\tau}\right) u \rangle - 2\mathrm{Re}\langle u_t, \left(\frac{R_2 - E}{\tau}\right) u \rangle = -2\mathrm{Re}\langle u_t, \left(\frac{B - 2E}{\tau}\right) u \rangle.$$

$$\left\|\left(\frac{R_1-E}{\tau}\right)u\right\|^2+\left\|\left(\frac{R_2-E}{\tau}\right)u\right\|^2=$$
$$=2\left\|\left(\frac{B-2E}{2\tau}\right)u\right\|^2+2\left\|\left(\frac{\sqrt{4E-B^2}}{2\tau}\right)u\right\|^2=$$
$$=\frac{1}{2\tau^2}\left[\|(B-2E)\,u\|^2+\left\|\left(\sqrt{4E-B^2}\right)u\right\|^2\right].$$

Тогда

$$\left\|u_t-\left(\frac{R_1-E}{\tau}\right)u\right\|^2+\left\|u_t-\left(\frac{R_2-E}{\tau}\right)u\right\|^2= \tag{26}$$
$$=2\,\|u_t\|^2+\frac{1}{2\tau^2}\left[\|(B-2E)\,u\|^2+\left\|\sqrt{4E-B^2}u\right\|^2\right]-2\mathrm{Re}\langle u_t,\left(\frac{B-2E}{\tau}\right)u\rangle.$$

Оценивая выражение $-2\mathrm{Re}\langle u_t,\left(\frac{B-2E}{\tau}\right)u\rangle$ в (26) с помощью α- неравенство $2xy\le\alpha\,x^2+\alpha^{-1}\,y^2$ при $\alpha=1$, имеем

$$\left\|u_t-\left(\frac{R_1-E}{\tau}\right)u\right\|^2+\left\|u_t-\left(\frac{R_2-E}{\tau}\right)u\right\|^2\ge$$
$$\ge\|u_t\|^2+\frac{1}{2\tau^2}\left[\left\|\sqrt{4E-B^2}u\right\|^2-\|(B-2E)\,u\|^2\right]=$$
$$=\|u_t\|^2+\frac{1}{\tau^2}\langle Bu,(2E-B)\,u\rangle. \tag{27}$$

Условия (4), (6) обеспечивают неотрицательность оператора

$$B=\left[E-\tau^2\sigma A_1-\tau^2 qA_2\right]^{-1}\cdot\left[2E+\tau^2\,(1-2\sigma)\,A_1+\tau^2\,(1-2q)\,A_2\right]\ge0,$$

а оператор

$$2E-B=\left[E-\tau^2\sigma A_1-\tau^2 qA_2\right]^{-1}\cdot\left[-\,(A_1+A_2)\,\tau^2\right]\ge0$$

в H^- в силу условия (6) и разложения $A_1+A_2\le0$ в H^-. Поэтому

$$\langle Bu,(2E-B)\,u\rangle\ge0$$

и из оценки (27) вытекает

$$\left\|u_t-\left(\frac{R_1-E}{\tau}\right)u\right\|^2+\left\|u_t-\left(\frac{R_2-E}{\tau}\right)u\right\|^2\ge\|u_t\|^2.$$

С учетом этой оценки, из (25) получаем

$$\left\|u_t-\left(\frac{R_1-E}{\tau}\right)u\right\|^2_{s(1,N-1)}+\left\|u_t-\left(\frac{R_2-E}{\tau}\right)u\right\|^2_{s(1,N-1)}\ge\|u_t\|^2_{s(1,N-1)}.$$

Тогда оценка (24) примет вид

$$2s^4\,\|u\|^2_{s(1,N-1)}+s^2\,\|u_t\|^2_{s(1,N-1)}\le \tag{28}$$
$$\le C\left(s^4\,\|u_0\|^2+s^2\left(\left\|\left(\frac{R_1-E}{\tau}\right)u_0\right\|^2+\left\|\left(\frac{R_2-E}{\tau}\right)u_0\right\|^2\right)+\|\bar f\|^2_s\right).$$

Так как в H^- справедливы следующие равенства

$$\frac{R_1-E}{\tau}=\left(B-2E+i\sqrt{4E-B^2}\right)/2\tau,\ \frac{R_2-E}{\tau}=$$

$$= \left(B - 2E - i\sqrt{4E - B^2}\right)/2\tau,$$

то сумму второй и третьей слагаемых в правой части неравенство (28) можем записать так:

$$\left\|\left(\frac{R_1 - E}{\tau}\right)u_0\right\|^2 + \left\|\left(\frac{R_2 - E}{\tau}\right)u_0\right\|^2 =$$

$$= 2\left\|\left(\frac{B - 2E}{2\tau}\right)u_0\right\|^2 + 2\left\|\left(\frac{\sqrt{4E - B^2}}{2\tau}\right)u_0\right\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\tau}\left\{\|(B - 2E)\,u_0\|^2 + \left\|\sqrt{4E - B^2}u_0\right\|^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\tau^2}\left\{\langle B^2u_0, u_0\rangle - 4\langle Bu_0, u_0\rangle + 4\|u_0\|^2 + 4\|u_0\|^2 - \langle B^2u_0, u_0\rangle\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\tau^2}\left\{8\|u_0\|^2 - 4\langle Bu_0, u_0\rangle\right\} =$$

$$= \frac{2}{\tau^2}\langle(2E - B)\,u_0, u_0\rangle = 2\langle\left(\frac{2E - B}{\tau^2}\right)u_0, u_0\rangle = 2\left\|\left(\frac{2E - B}{\tau^2}\right)^{1/2}u_0\right\|^2.$$

Учитывая, что $(2E - B)/\tau^2 = \left[E - \tau^2\sigma A_1 - \tau^2 qA_2\right]^{-1}\cdot[-(A_1 + A_2)]$, полагая $G \equiv (2E - B)/\tau^2$ и принимая во внимание неравенства $A_1 \geq 0$, $A_2 \leq 0$, получим оценку

$$\left\|G^{1/2}u_0\right\|^2 \leq \delta^{-1}\left\|[-(A_1 + A_2)]^{1/2}u_0\right\|^2 \leq \delta^{-1}\langle-(A_1 + A_2)\,u_0, u_0\rangle =$$

$$= \delta^{-1}\left[-\langle A_1u_0, u_0\rangle + \langle -A_2u_0, u_0\rangle\right] \leq \delta^{-1}\left\|(-A_2)^{1/2}u_0\right\|^2.$$

Тогда

$$\left\|\left(\frac{R_1 - E}{\tau}\right)u_0\right\|^2 + \left\|\left(\frac{R_2 - E}{\tau}\right)u_0\right\|^2 \leq 2\delta^{-1}\left\|(-A_2)^{1/2}u_0\right\|^2.$$

С учетом этой оценки и считая $s \geq 1$, из оценки (28) имеем

$$2s^2\|u\|^2_{s(1,N-1)} + s\|u_t\|^2_{s(1,N-1)} \leq \tag{29}$$

$$\leq C\left\{s^4\|u_0\|^2 + s^2\left\|(-A_2)^{1/2}u_0\right\|^2 + \left\|\bar{f}\right\|^2_s\right\}.$$

Рассмотрим теперь некорректную часть задачи. Запишем в подпространстве H^+ системы (10), (11):

$$u_{j+1} - Ru_j = \tau v_j, \tag{30}$$

$$v_{j+1} - Sv_j = \tau\,\bar{f}_j. \tag{31}$$

В подпространстве H^+, как было показано выше, $B^2 - 4E \geq 0$. Вспоминая выражения для B, с учетом (14) получаем

$$B \pm \sqrt{B^2 - 4E} = \left[E - \tau^2\sigma A_1 - \tau^2 qA_2\right]^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left[2E + \tau^2(1 - 2\sigma)A_1 + \tau^2(1 - 2q)A_2\right] \pm$$

$$\pm\left\{\left[E - \tau^2\sigma A_1 - \tau^2 qA_2\right]^{-2}\cdot\left[4E + \tau^2(1 - 4q)A_2 + \tau^2(1 - 4\sigma)A_1\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\,\tau^2(A_1 + A_2)\right\}^{1/2} = 2E + \tau^2\left[E - \tau^2\sigma A_1 - \tau^2 qA_2\right]^{-1}\cdot(A_1 + A_2) \pm$$

$$\pm\left\{4\tau^2\left(E-\tau^2\sigma A_1-\tau^2 qA_2\right)^{-1}\cdot(A_1+A_2)+\right.$$
$$\left.+\tau^4\left(E-\tau^2\sigma A_1-\tau^2 qA_2\right)^{-2}\cdot(A_1+A_2)^2\right\}^{1/2}=$$
$$=2E+\tau^2\bar{A}\pm 2\tau\left(\bar{A}+\frac{\tau^2}{4}\bar{A}\right)^{1/2}. \tag{32}$$

Здесь $\bar{A}=\left[E-\tau^2\sigma A_1-\tau^2 qA_2\right]^{-1}(A_1+A_2)$.

В силу условия (4) и того, что $A_1+A_2\geq 0$ в H^+, вытекает справедливость неравенства $\bar{A}\geq 0$, и очевидно, что $\left(\bar{A}\right)^*=\bar{A}$. Из формул (14), (15) и равенства (32) следует, что в H^+ операторы R и S имеют следующий вид:

$$R_1=E+\frac{\tau^2}{2}\bar{A}+\tau\left(\bar{A}+\frac{\tau^2}{4}\bar{A}\right)^{1/2},\quad \left(R_1=E+\frac{\tau^2}{2}\bar{A}-\tau\left(\bar{A}+\frac{\tau^2}{4}\bar{A}\right)^{1/2}\right),$$
$$S_1=E+\frac{\tau^2}{2}\bar{A}-\tau\left(\bar{A}+\frac{\tau^2}{4}\bar{A}\right)^{1/2},\quad \left(S_2=E+\frac{\tau^2}{2}\bar{A}+\tau\left(\bar{A}+\frac{\tau^2}{4}\bar{A}\right)^{1/2}\right).$$

Из этих равенств имеем

$$(R_1-E)_-=0,\ (R_1-E)_+=R_1-E\geq 0,$$
$$(S_1-E)_+=0,\ (S_1-E)_-=-(S_1-E)\geq 0.$$

Применяя лемму 1 к схеме (1.30) при $R=R_1$, а к схеме (31) при $S=S_1$, а затем комбинируя полученные оценки, а также учитывая, что $v=u_t-((R_1-E)/\tau)u, v_0=-((R_1-E)/\tau)u_0,\ u_1=u_0$, нетрудно получить следующую оценку

$$s^2\|u\|^2_{s(1,N-1)}+s\|u_t-((R_1-E)/\tau)u\|^2_{s(1,N-1)}\leq$$
$$\leq C\left\{s^2\|u_0\|^2+s\|((R_1-E)/\tau)u_0\|^2+\right. \tag{33}$$
$$\left.+s\psi_N^2\left\|[(R_1-E)/\tau]^{1/2}u_N\right\|^2+\left\|((E-S_1)/\tau)^{1/2}\cdot[(R_1-E)/\tau]u_0\right\|^2+\left\|\bar{f}\right\|^2_s\right\}.$$

Аналогичным образом, применяя лемму 1 к разностным схемам (30), (31) при $R=R_2=S_1$, $S=S_2=R_1$, учитывая, что $v=u_t-((S_1-E)/\tau)u, v_0=((E-S_1)/\tau)u_0,\ v_{N-1}=u_{\bar{t}N}+((E-S_1)/\tau)u_{N-1}$, получаем

$$s^2\|u\|^2_{s(1,N-1)}+s\|u_t-((S_1-E)/\tau)u\|^2_{s(1,N-1)}\leq$$
$$\leq C\left\{s^2\|u_0\|^2+s\|((E-S_1)/\tau)u_0\|^2+\right.$$
$$+\left\|((E-S_1)/\tau)^{1/2}u_0\right\|^2+\psi_{N-1}^2\left(\left\|[(R_1-E)/\tau]^{1/2}u_{\bar{t}N}\right\|^2+\right.$$
$$\left.\left.+\left\|[(R_1-E)/\tau]^{1/2}[(E-S_1)/\tau]u_{N-1}\right\|^2\right)+\left\|\bar{f}\right\|^2_s\right\}$$

Складывая наконец последнюю оценку с оценкой (33), имеем

$$2s^2\|u\|^2_{s(1,N)}+$$
$$+s\left[\|u_t-((R_1-E)/\tau)u\|^2_{s(1,N-1)}+\|u_t-((S_1-E)/\tau)u\|^2_{s(1,N-1)}\right]\leq$$
$$\leq C\left\{s^2\|u_0\|^2+s\left(\|((R_1-E)/\tau)u_0\|^2+\|((E-S_1)/\tau)u_0\|^2\right)+\right.$$

$$+s\psi_N^2 \left\| \left((R_1 - E)/\tau \right)^{1/2} u_N \right\|^2 + \tag{34}$$

$$+ \left\| \left((E - S_1)/\tau \right)^{1/2} \cdot \left((R_1 - E)/\tau \right) u_0 \right\|^2 + s \left\| \left((E - S_1)/\tau \right)^{1/2} u_0 \right\|^2 +$$

$$+\psi_{N-1}^2 \left(\left\| \left((R_1 - E)/\tau \right)^{1/2} u_{\bar{t}N} \right\|^2 + \right.$$

$$\left. + \left\| \left((R_1 - E)/\tau \right)^{1/2} \cdot \left((E - S_1)/\tau \right) u_{N-1} \right\|^2 \right) + \left\| \bar{f} \right\|_s^2 \Big\}$$

Простые вычисления приводят к оценке

$$\|u_t - ((R_1 - E)/\tau)\, u\|_{s(1,N-1)}^2 + \|u_t - ((S_1 - E)/\tau)\, u\|_{s(1,N-1)}^2 \ge \|u_t\|_{s(1,N-1)}^2 .$$

С учетом этого неравенства оценка (34) примет вид

$$2s^2 \|u\|_{s(1,n)}^2 + s \|u_t\|_{s(1,N-1)}^2 \le C \Big\{ s^2 \|u_0\|^2 +$$

$$+s \left(\|((R_1 - E)\,\tau)\, u_0\|^2 + \|((E - S_1)\,\tau)\, u_0\|^2 \right) +$$

$$+s\psi_n^2 \left\| \left((R_1 - E)/\tau \right)^{1/2} u_N \right\|^2 + \left\| \left((E - S_1)/\tau \right)^{1/2} \cdot \left((R_1 - E)/\tau \right) u_0 \right\|^2 +$$

$$+s \left\| \left((E - S_1)/\tau \right)^{1/2} u_0 \right\|^2 + \psi_{N-1}^2 \left(\left\| \left((R_1 - E)/\tau \right)^{1/2} u_{\bar{t}N} \right\|^2 \right. \tag{35}$$

$$\left. + \left\| \left((R_1 - E)/\tau \right)^{1/2} \cdot \left((E - S_1)/\tau \right) u_{N-1} \right\|^2 \right) + \left\| \bar{f} \right\|_s^2 \Big\} .$$

Так как в $H^+ \,(R_1 - E)/\tau = \frac{\tau}{2}\bar{A} + \left(\bar{A} + \frac{\tau^2}{4}\bar{A}^2 \right)^{1/2}$, $(S_1 - E)/\tau = \frac{\tau}{2}\bar{A} - \left(\bar{A} + \frac{\tau^2}{4}\bar{A}^2 \right)^{1/2}$, где $\bar{A} = \left[E - \tau^2 \sigma A_1 - \tau^2 q A_2 \right]^{-1} \cdot (A_1 + A_2) \ge 0$, то несложно выразить операторы $(R_1 - E)/\tau$, $(E - S_1)/\tau$ в правой части оценки (35) через исходный оператор $A = A_1 + A_2$ и получить следующее неравенство

$$2s^2 \|u\|_{s(1,N-1)}^2 + s \|u_t\|_{s(1,N-1)}^2 \le C \Big\{ s^4 \|u_0\|^2 +$$

$$+s^2 \left(\|Au_0\|^2 + \left\| A_1^{1/2} u_0 \right\|^2 \right) + \left\| \bar{f} \right\|_s^2 +$$

$$+s\psi_{N-1}^2 \left(\|Au_{N-1}\|^2 + \left\| A_1^{1/2} u_{N-1} \right\|^2 + \|u_N\|^2 + \right. \tag{36}$$

$$\left. + \left\| A_1^{1/2} u_N \right\|^2 + \|u_{\bar{t}N}\|^2 + \left\| A_1^{1/2} u_{\bar{t}N} \right\|^2 \right) \Big\} .$$

Из оценок (29) и (36) для $u \in H = H^+ \oplus H^-$ получаем оценку

$$2s^2 \|u\|_{s(1,N-1)}^2 + s \|u_t\|_{s(1,N-1)}^2 \le$$

$$\le C \Big\{ s^4 \|u_0\|^2 + s^2 \left(\left\| (-A_2)^{1/2} Q^- u_0 \right\|^2 + \left\| AQ^+ u_0 \right\|^2 + \left\| A_1^{1/2} Q^+ u_0 \right\|^2 \right) +$$

$$+ \left\| \bar{f} \right\|_s^2 + s\psi_{N-1}^2 \left(\left\| AQ^+ u_{N-1} \right\|^2 + \left\| A_1^{1/2} Q^+ u_{N-1} \right\|^2 + \right.$$

$$+ \left\| Q^+ u_N \right\|^2 + \left\| A_1^{1/2} Q^+ u_N \right\|^2 +$$

$$+\left\|Q^+u_{\bar{t}N}\right\|^2+\left\|A_1^{1/2}Q^+u_{\bar{t}N}\right\|^2\Big)\Big\}. \tag{37}$$

Здесь $Q^{\pm}$- ортогональный проектор пространства H на подпространства $H^{\pm}$. Вспоминая, что $\bar{f}=\left(E-\tau^2\sigma A_1-\tau^2 qA_2\right)^{-1}\cdot f_{j+1}$ и условия (4) для $\left\|\bar{f}\right\|_s^2$ имеем оценку $\left\|\bar{f}\right\|_s^2\le C\cdot s^2\left\|f\right\|^2_{l_2(1,N;H)}$ и тогда оценка (37) принимает вид

$$s^2\psi^2_{N-1}\left\|u\right\|^2_{l_2(1,N-1;H)}\le C\left\{s\ \psi^2_{N-1}\left(\left\|AQ^+u_{N-1}\right\|^2+\right.\right.$$

$$+\left\|A_1^{1/2}Q^+u_{N-1}\right\|^2+\left\|Q^+u_N\right\|^2+\left\|A_1^{1/2}Q^+u_N\right\|^2+$$

$$+\left\|Q^+u_{\bar{t}N}\right\|^2+\left\|A_1^{1/2}Q^+u_{\bar{t}N}\right\|^2\ )+s^4\left\|u_0\right\|^2+s^2\left\|f\right\|^2_{l_2(1,N;H)}+$$

$$+s^2\left(\left\|(-A_2)^{1/2}Q^-u_0\right\|^2+\left\|AQ^+u_0\right\|^2+\left\|A_1^{1/2}Q^+u_0\right\|^2\right)\}.$$

Разделим обе части этого неравенства на $s^2\psi^2_{N-1}$ и положим

$$\varepsilon^2=C/s,\ c^2(\varepsilon)=\max\left(C\cdot s^2\exp(2smT),\ C\cdot\exp(2smT)\right),$$

$$l^2(u)=\left\|AQ^+u_{N-1}\right\|^2+\left\|A_1^{1/2}Q^+u_{N-1}\right\|+$$

$$+\left\|Q^+u_N\right\|^2+\left\|A_1^{1/2}Q^+u_N\right\|^2+\left\|Q^+u_{\bar{t}N}\right\|^2+\left\|A_1^{1/2}Q^+u_{\bar{t}N}\right\|^2.$$

Тогда с учетом неравенства $1/\psi_{N-1}\le\exp(s(T-1))\le\exp(smT)$ (см. [13], стр.132) получаем оценку

$$\left\|u\right\|^2_{l_2(1,N-1;H)}\le\varepsilon^2l^2(u)+c^2(\varepsilon)\left[\left\|f\right\|^2_{l_2(1,N;H)}+\left\|(-A_2)^{1/2}Q^-u_0\right\|^2+\right.$$

$$\left.+\left\|AQ^+u_0\right\|^2+\left\|A_1^{1/2}Q^+u_0\right\|^2+\left\|u_0\right\|^2\right].$$

Теорема доказана. □

2. Устойчивость "возмущенной схемы"

Рассмотрим возмущение разностной схемы (1)

$$Pu\equiv u_{t\bar{t}}-A_1(\sigma\hat{u}+(1-2\sigma)u+\sigma\overset{\vee}{u})-A_2(q\hat{u}+(1-2q)u+q\overset{\vee}{u})=f$$

с оператором K:

$$Qu=Pu-K\overset{\vee}{u}=f, \tag{38}$$

где $K\in$L$(l_2(0,\ N;\ H))$. Устойчивость сохраняется и для возмущенной схемы, описываемых следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть далее оператор K удовлетворяет оценке*

$$\left\|Ku\right\|_s\le C(\left\|u\right\|_s+\left\|u_t\right\|_s)\forall\,u\in l_2(0,\ N;\ H).$$

Тогда для всех $\tau\in(0,\ \tau_0],\varepsilon>0,\ u:Z_0^N\to H$ для схемы (38) выполнена оценка устойчивости (7).

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

3. Устойчивость разностной схемы для одномерной коэффициентной обратной задачи

В этом разделе мы рассмотрим применение теоремы 2 для построения безусловно устойчивых разностных схем для одномерной обратной задачи определения потенциала $a(x)$ в уравнении Шредингера $iu_t + \Delta u - a(x)u = 0$. Вопросы определения потенциала уравнения Шредингера в нестационарной и спектральной постановках рассмотрены в работах [12,13,14,15], в которых показано, что теоремы единственности и оценки устойчивости решения обратных задач следуют из оценок устойчивости решения некорректной задачи Коши для интегро- дифференциального уравнения, главная часть которых есть оператор Шредингера. Поэтому, при обосновании разностных методов решения этих обратных задач возникает необходимость получения оценок устойчивости решений разностных схем, аппроксимирующих некорректную задачу Коши для соответствующих интегро-дифференциальных уравнений или неравенств.

Пусть $\Omega = \left\{ x,\, t \;\middle|\; x > 0\,,\; t^2 + (x - r) < 0 \;\right\}$ (рис.1).

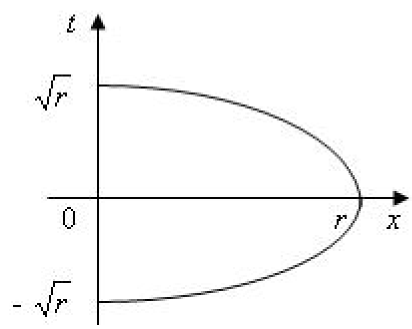

Рис. 1

Рассмотрим в области Ω некорректную задачу Коши:

$$(39)\quad iv_t + v_{xx} = a_1(x)v + (b_1\partial + b_0)(u_2(x,t)f(x)/f_2(x) + \int\limits_0^t K(x,t,\tau)v(x,\tau)d\tau)\;,$$

$$(40)\qquad v(0,t) = g'(t) - g_2'(t)g(t)/g_2(t),\; v_x(0,t) = 0,$$

где $K(x,t,\tau) = u_2(x,t)/u_2(x,\tau)$, $\partial = \partial/\partial x$, $i^2 = -1$. Относительно коэффициентов в уравнении (1) будем предполагать, что они достаточно гладкие функции своих переменных (вывод интегро-дифференциального уравнения (39) приведен в [13, стр.40]). Записывая уравнение (39) более подробно и полагая $\overline{b}(x,t) \equiv b_0(x,t)u_2(x,t)/f_2(x) + b_1(x,t)(u_2(x,t)/f_2(x))_x$,
$\overline{b_1}(x,t) \equiv b_1(x,t)u_2(x,t)/f_2(x), \overline{K}(x,t,\tau) \equiv b_0(x,t)K(x,t,\tau) + b_1(x,t)K_x(x,t,\tau)$,
$\overline{K_1}(x,t,\tau) \equiv b_1(x,t)K(x,t,\tau)$, его можно записать в следующем виде

$$(41)\qquad iv_t + v_{xx} = a_1(x)v + \overline{b}(x,t)f(x) + \overline{b_1}(x,t)f'(x) +$$
$$+ \int\limits_0^t (\overline{K}(x,t,\tau)v(x,\tau) + \overline{K_1}(x,t,\tau)v_x(x,\tau))d\tau.$$

Сделаем замену переменных в уравнении (39). Положим $x = \xi - t^2\,,\ t = t\,$. Тогда

$$v(x,t) = w(\xi,t) = w(x+t^2,t),\ v_t = 2t\cdot w_\xi + w_t,\ v_x = w_\xi,\ v_{xx} = w_{\xi\xi}.$$

После несложных преобразований и воспользовавшись формулой $\int \delta\,(p(\tau))u(\tau)d\tau = \frac{u(\tau_0)}{|p'(\tau_0)|}$, где τ_0 - единственный корень уравнения $p(\tau)=0$ (в нашем случае $p(\tau) = \tau^2 - t^2 + \xi - \eta$), получаем

$$\begin{aligned} &2itw_\xi + iw_t + w_{\xi\xi} = \tilde a_1(\xi,t)w(\xi,t) + \tilde b(\xi,t)\tilde f(\xi,t) + \tilde b_1(\xi,t)\tilde f_\xi(\xi,t)\pm \\ &\pm\int\limits_{\xi-t^2}^{\xi} \frac{\tilde K(\eta,t,\pm\sqrt{\eta\,-\xi+t^2}\,)\,w\,(\eta,\pm\sqrt{\eta\,-\xi+t^2}\,)}{2\sqrt{\eta\,-\xi+t^2}}d\eta\pm \\ &\pm\int\limits_{\xi-t^2}^{\xi} \frac{\tilde K_1(\eta,t,\pm\sqrt{\eta\,-\xi+t^2}\,)\,w_\eta(\eta\,,\pm\sqrt{\eta\,\xi+t^2}\,)}{2\sqrt{\eta\,-\xi+t^2}}d\eta. \end{aligned}\tag{42}$$

Здесь знак $(+)$ соответствует случаю $t>0$, знак (-) случаю $t<0$. Переобозначим для удобства переменные $\xi\ ,\ t\ :\quad \xi\ := t\ ,\ t := x\,$. Тогда уравнение (42) примет следующий вид:

$$2ixw_t + iw_x + w_{tt} = \tilde a_1(t,x)w(t,x) + \tilde b(t,x)\tilde f(t,x) + \tilde b_1(t,x)\tilde f_t(t,x)\pm \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &\pm\int\limits_{t-x^2}^{t} \frac{\tilde K(\eta,x,\pm\sqrt{\eta-t+x^2}w(\eta,\pm\sqrt{\eta-t+x^2}}{2\sqrt{\eta-t+x^2}}d\eta\,\pm \\ &\pm\int\limits_{t-x^2}^{t} \frac{\tilde K_1(\eta,x,\pm\sqrt{\eta\,-t+x^2})\ w_\eta\,(\eta,\pm\sqrt{\eta\,-t+x^2})}{2\sqrt{\eta\,-t+x^2}}d\eta, \end{aligned}$$

$$w\,|_\gamma = g_x(t,x) - g_{2x}(t,x)g(t,x)/g_2(t,x)\ ,\quad w_t\,|_\gamma = 0\quad , \tag{44}$$

где $\gamma\ :\ t = x^2\,$. Заметим, что исходная область Ω после замены переменных и переобозначений переходит в область, ограниченную между параболой $t = x^2$ и прямой $t = r$, которую мы также обозначим через Ω (рис.2).

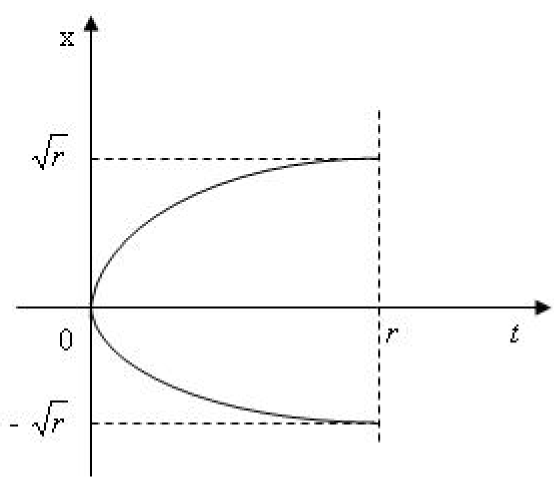

Рис. 2

Полагая $w_0 = w|_\gamma$ и вводя новую функцию $\tilde{w} = w - w_0$, задачу (43) -(44) можно свести к задаче с однородными граничными условиями на γ:

$$2ix\tilde{w}_t + i\tilde{w}_x + \tilde{w}_{tt} = F \tag{45}$$

$$\tilde{w} \mid_{\gamma} = 0 \,, \quad \tilde{w}_t \mid_\gamma = 0 \,, \tag{46}$$

где F - правая часть уравнения (43). Продолжим функцию $\tilde{w}$ в (45) по непрерывности нулем до прямоугольной области $\Pi = \{\, t, x| \, 0 \le t \le r, -\sqrt{r} \le x \le \sqrt{r}\}$ и переобозначим $\tilde{w} := w$. Условия (46), неограничивая общности, заменим условиями $w(0,x) = g(x)$, $w_t(0,x) = 0$. Тогда в области Π получаем следующую задачу

$$w_{tt} + iw_x = \tilde{a}_1(t,x)w - 2ixw_t + Kw + f(t,x), \tag{47}$$

$$w(0,x) = g(x) \,, \; w_t(0,x) = 0. \tag{48}$$

Здесь

$$Kw = K_0 w + K_1 w, K_0 w(t,x) =$$

$$= \pm \int\limits_{t-x^2}^{t} \frac{\tilde{K}(\eta, x, \pm\sqrt{\eta - t + x^2})w(\eta, \pm\sqrt{\eta - t + x})}{2\sqrt{\eta - t + x^2}} d\eta,$$

$$K_1 w(t,x) = \pm \int\limits_{t-x^2}^{t} \frac{\tilde{K}_1(\eta,x,\pm\sqrt{\eta-t+x^2})w_\eta(\eta,\pm\sqrt{\eta-t+x^2})}{2\sqrt{\eta-t+x^2}} d\eta,$$

$$f(t,x) = \tilde{b}(t,x)\tilde{f}(t,x) + \tilde{b}_1(t,x)\tilde{f}_t(t,x)\,.$$

Поставим в соответствие задаче (47) - (48) следующую трехслойную разностную схему:

$$\frac{u^k_{j+1} - 2u^k_j + u^k_{j-1}}{\tau^2} - Au^k_{j-1} = \tag{49}$$

$$= \tilde{a}^k_{1j-1}u^k_{j-1} - 2ikh(u^k_j - u^k_{j-1})/\tau \; + K_{\tau,h}u^k_{j-1} + f^k_{j-1},$$

$$u_0 = g^k \,, \quad u_1 = u_0 \,, \tag{50}$$

$$j = 1, 2, \, ..., N-1, \tau N = r, k = 0, \pm 1, \, ..., \pm(N_1 - 1), \pm h N_1 = \pm\sqrt{r} \equiv \pm T,$$

где $Au^k_{j-1} = -i\,\frac{u^{k+1}_{j-1} - u^{k-1}_{j-1}}{2h}$, $K_{\tau,h}$ - аппроксимация оператора $K = K_0 + K_1$ такая, что

$$\|K_{\tau,h}u\| \le c\,(\,\|u\| + \|u_t\|\,). \tag{51}$$

Естественность этого предположения следует из ограниченности и вольтерровости по t интегрального оператора K_0. Оператор A будем рассматривать как оператор, действующий в комплексном гильбертовом пространстве H. В качестве H возьмем пространство сеточных функций $u(x)$, заданных на сетке $\tilde{\omega}_h = \{x_k = kh, k = 0, \pm 1, \, ..., \, \pm N_1, \pm hN_1 = \pm T\}$, и обращающихся в нуль при $k = -N_1$, $k = N_1$. Скалярное произведение и норма в пространстве H вводится обычным образом $\langle u, v\rangle = h \sum\limits_{k=-(N_1-1)}^{N_1-1} u^k \bar{v}^k$, $\|u\|^2 = h \sum\limits_{k=-(N_1-1)}^{N_1-1} \left|u^k\right|^2$.
Очевидно, что A в H будет самосопряженным оператором.

Непосредственными вычислениями несложно показать, что собственные числа оператора A и соответствующие им собственные функции определяются следующими формулами

$$\lambda_m = \frac{1}{h}\sin\frac{\pi m}{2N_1}, \quad u_m^k = e^{ik\frac{\pi m}{2N_1}} - (-1)^{k-N_1} e^{i(2N_1-k)\frac{\pi m}{2N_1}},$$

$$k,\ m = 0, \pm 1, ..., \pm(N_1 - 1),$$

а норма собственных функций u_m^k в смысле введенного выше скалярного произведения равна $\left\|u_m^k\right\|^2 = 4T$.

Так как собственные функции u_m^k ортогоналы, и следовательно, линейно независимы, то функции $\mu_m^k = \frac{1}{2\sqrt{T}} u_m^k$ образуют ортонормированный базис в пространстве H, состоящем из собственных функций оператора A, отвечающих $\{\lambda_{\mathrm{m}}\}$.

В силу $A^* = A$ имеет место спектральное разложение оператора A

$$A = \sum_{m=-(N_1-1)}^{N_1-1} \lambda_m P_m = \sum_{m=0}^{N_1-1} \lambda_m P_m - \sum_{m=-(N_1-1)}^{-1} (-\lambda_m) P_m = A_1 + A_2,$$

где P_m проектор, определяемый соотношением

$$P_m u = \langle u,\ \mu_m^k \rangle\, \mu_m^k\ , \quad u \in H, \tag{52}$$

а операторы A_1 и A_2 имеют вид $A_1 = \sum\limits_{m=0}^{N_1-1} \lambda_m P_m\ , \quad A_2 = \sum\limits_{m=-(N_1-1)}^{-1} (-\lambda_m) P_m.$ Пространство H^+ определим как множество функций $u(x)$, заданых на стеке $\bar{\omega}_h^+ = \{x_k = kh \,|\ k = 0,\ 1, ..., N_1,\ hN_1 = T\}$ и обращающихся в нуль в точке x_{N_1}. Аналогично, пространство H^- - множество сеточных функций $u(x)$ определенных на сетке $\bar{\omega}_h^- = \{x_k = kh \,|\ k = -N_1,\ -(N_1 - 1)\ , ...,\ -1,\ \ -hN_1 = -T\}$ и обращающихся в нуль в точке x_{-N_1}. Тогда пространство разлагается на прямую сумму подпространств $H^\pm : H = H^+ \oplus H^-$. Нетрудно убедится, что $A = A_1 + A_2 \geq 0$ в $H^+, A = A_1 + A_2 \leq 0$ в $H^-, A_1 = A_1^* \geq 0, A_2 = A_2^* \leq 0$ в H.

Таким образом, с учетом предположения (51) все условия абстрактной теоремы 1 раздела 1 выполняются. Рассмотрим разностную схему (49) с двумя весами $\sigma\ ,\ q \in R$:

$$\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{\tau^2} - A_1(\sigma\, u_{j+1}^k + (1-2\sigma)u_j^k + \sigma\, u_{j-1}^k) - \tag{53}$$

$$-A_2(q\, u_{j+1}^k + (1-2q)u_j^k + q\, u_{j-1}^k) = F u_{j-1}^k,$$

$$u_0 = g^k, u_1 = u_0, \tag{54}$$

$$j = 1,\ 2,\ ...,\ N-1,\ \ \tau N = r, k = 0,\ \pm 1,\ ...,\ \pm(N_1 - 1), \quad \pm hN_1 = \pm\sqrt{r} = \pm T.$$

В (53) через $F u_{j-1}^k$ мы для краткости обозначили правую часть (49).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

$$E - \tau^2 \sigma A_1 - \tau^2 q A_2 \geq \delta E, \ \ \delta > 0,$$

$$4E + \tau^2(1-4q)A_2 \geq 0, \ \ (1-4\sigma)A_1 \geq 0,$$

$$E + \tau^2(1-\sigma)A_1 + \tau^2(1-q)A_2 \geq 0\,.$$

Тогда для всех $\tau \in (0, \tau_0]$, $\varepsilon > 0$, $u : Z_0^N \to H$ *для решения разностной задачи (53) -(54) имеет место оценка устойчивости*

$$\| u\|^2_{l_2(1,N-1;H)} \leq \varepsilon^2 l^2(u) + c^2(\varepsilon)\left[\left\| (-A_2)^{1/2} Q^- g\right\|^2 + \right.$$
$$\left. + \left\| A Q^+ g\right\|^2 + \left\| A_1^{1/2} Q^+ g\right\|^2 + \|g\|^2 + \|f\|^2_{l_2(1,N;H)}\right].$$

Здесь

$$l^2(u) = \left\| A Q^+ u_{N-1}\right\|^2 + \left\| A_1^{1/2} Q^+ u_{N-1}\right\|^2 + \left\| Q^+ u_N\right\|^2 +$$
$$+ \left\| A_1^{1/2} Q^+ u_N\right\|^2 + \left\| Q^+ u_{\bar{t}N}\right\|^2 + \left\| A_1^{1/2} Q^+ u_{\bar{t}N}\right\|^2,$$
$$A = A_1 + A_2,$$
$$A_1 = \sum_{m=0}^{N_1-1} \lambda_m P_m\,, \quad A_2 = \sum_{m=-(N_1-1)}^{-1} (-\lambda_m) P_m,$$
$$A_1^{1/2} = \sum_{m=0}^{N_1-1} (\lambda_m)^{1/2} P_m\,, \quad (-A_2)^{1/2} = \sum_{m=-(N_1-1)}^{-1} (-\lambda_m)^{1/2} P_m,$$

λ_m- *собственные значения оператора* A, *проектор* P_m *определен в (52),* $Q^{\pm}$ - *ортопректоры пространства* H *на подпространства* $H^{\pm}$.

4. Заключение

Получены условия безусловной устойчивости абстрактной трехслойной схемы с двумя весами σ и q для некорректной задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка с неограниченным, как сверху, так и снизу, самосопряженным оператором в главной части на основе метода факторизации. При этом отрицательные σ играют сглаживающую роль.

Рассмотрены применения условий безусловной устойчивости трехслойной схемы к построению устойчивых разностных схем для некорректной задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения, связанной с одномерной коэффициентной обратной задачей для уравнении Шредингера.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания и конструктивную критику.

Список литературы

[1] Л.А. Чудов, *Разностные схемы и некорректные задачи для уравнений с частными производными*, Вычислительные методы и программирование, **8** (1967), 34–62. Zbl 0207.47302

[2] А.А. Самарский, *Теория разностных схем*, М: Наука, 1983. MR0721476

[3] П.Н. Вабищевич, *SM - устойчивость операторно-разностных схем*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **52**:6 (2012), 1002–1009. MR3245175

[4] П.Н. Вабищевич, *Факторизованные SM - устойчивые двухслойные схемы*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **50**:11 (2010), 1919–1925. MR2815006

[5] А.Л. Бухгейм, *Об устойчивости разностных схем для некорректных задач*, Докл.АН СССР, **270**:1 (1983), 26–28. MR0705187

[6] А.Л. Бухгейм, *Разностные методы решения некорректных задач* Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986. MR0920367

[7] М.А. Бектемесов, *Устойчивость трехслойной разностной схемы для некорректных задач Коши*, Сб.: Методы решения обратных задач. Новосибирск, ИМ СО АН СССР, (1990), 45–54. MR1206729

[8] С.И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Новосибирск.: Сибирское научное издательство, 2009.

[9] О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев, *Экстремальные методы решения некорректных задач*, М: Наука, 1983.

[10] L. Beilina, M. V. Klibanov, *A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem*, SIAM J. Sci. Comp. **31** (2008), 478–509. MR2460786

[11] S. I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gel'fand-Levitan-Krein equation*, J. Inverse and Ill-Posed Problems, **18** (2011), 979–995.

[12] А.Л. Бухгейм, *Многомерные обратные задачи спектрального анализа*, Докл. АН СССР, **284**:1 (1985), 21–24. MR0806659

[13] А.Л. Бухгейм, *Введение в теорию обратных задач*, Новосибирск: Наука, 1988. MR0955701

[14] A. L. Bukhgeim, *Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case*, J. Inverse and Ill-Posed Problems, **16**:1 (2008), 19–33. MR2387648

[15] М.А. Султанов, *Об устойчивости восстановления двумерного потенциала в уравнении Шредингера*, Сб.: Методы решения обратных задач. Новосибирск, ИМ СО АН СССР, (1990), 121–130. MR1206735

Султанов Мурат Абдукадырович
Международный казахско-турецкский университет имени Х.А. Ясави,
пр. Бекзата Саттарханова 29,
161200, Туркестан, Казахстан
E-mail address: murat.sultanov@iktu.kz